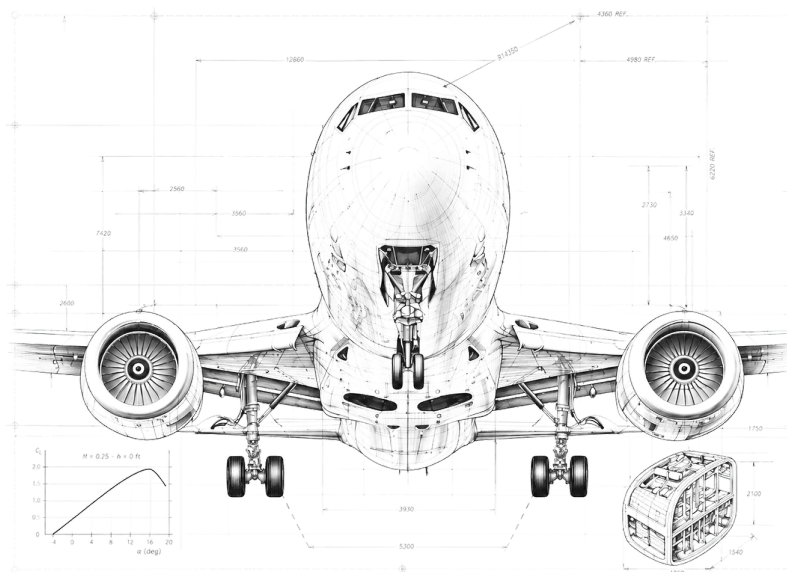


Aerostatica

*Il volo più leggero dell'aria:
teoria ed esercizi svolti*



Monografia autoconsistente per il triennio dell'articolazione *Costruzione del Mezzo Aeronautico*.
Dalla spinta di Archimede alle quote di pienezza e di plafond, dalle mongolfiere ai dirigibili: teoria
essenziale, poi ogni problema risolto passo passo con la stessa logica di attacco.

Prof. Ing. Biagio Raucci

I.T.I.S. "E. Majorana"

Indice

I	Teoria dell'aerostatica	I
I.1	Il volo "più leggero dell'aria"	1
I.2	Il principio di Archimede	2
I.3	La spinta netta e il rapporto ε	3
I.4	Spinta libera ed equilibrio di galleggiamento	4
I.5	L'atmosfera tipo (ISA): il "terreno di gioco" delle quote	5
I.6	Quota di pienezza e quota di plafond	6
I.6.1	Calcolo della quota di plafond	7
I.6.2	Calcolo della quota di pienezza	7
I.7	Come evolve il gas: condizioni ideali e politropica	7
I.7.1	Pienezza e plafond nel caso politropico	8
I.8	Il gas perso durante la salita	8
I.9	La dinamica dell'ascensione: accelerazione e zavorra	8
I.10	La resistenza aerodinamica	9
I.11	Effetti termici: il riscaldamento solare	9
I.12	La mongolfiera: il gas leggero è l'aria stessa	10
I.13	I dirigibili: potenza, autonomia, consumo	10
2	Esercizi svolti	12
3	Esercizi proposti (risolti)	18
A	Formulario e costanti	22
A.1	Costanti dell'atmosfera tipo (ISA)	22
A.2	Relazioni fondamentali	22
A.3	Inversione dell'atmosfera tipo	22

Teoria dell'aerostatica

Dove stiamo andando

Prima di riempire pagine di formule, mettiamoci d'accordo su una cosa: tutto questo capitolo racconta *una sola idea*. Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto; se questa spinta supera il peso, il corpo sale. Punto. Le quote di pienezza e di plafond, il gas che si perde salendo, la zavorra, le mongolfiere, i dirigibili: tutto discende da qui. Se in un qualsiasi momento ti sembrerà di esserti perso, torna a questa frase e ritrova la strada.

1.1 Il volo “più leggero dell'aria”

Quando pensiamo a un aeromobile, la prima immagine che viene in mente è quella di un'ala che fende l'aria. Ma esiste un secondo modo, più antico e per certi versi più sorprendente, di staccarsi da terra: non *spingere via* l'aria con la velocità, bensì *galleggiarci dentro*. Distinguiamo così due grandi famiglie.

Gli aeromobili *più pesanti dell'aria* — aeroplani, alianti, elicotteri — si sostengono grazie a una forza *dinamica*: l'ala deflette verso il basso una massa d'aria e, per reazione, ne riceve una spinta verso l'alto. È un effetto che vive solo finché c'è movimento: toglie la velocità e la portanza svanisce. Gli aeromobili *più leggeri dell'aria*, o **aerostati** (palloni, mongolfiere, dirigibili), fanno l'esatto contrario: racchiudono in un involucro un gas meno denso dell'aria circostante e ne ricevono una spinta *statica*, la stessa che tiene a galla un tappo di sughero sull'acqua. Questa spinta esiste anche a velocità nulla, e questo cambia tutto.

Osservazione

Vale la pena assaporare la differenza con un'immagine concreta. Un aeroplano fermo in pista è semplicemente un peso appoggiato sul carrello: non produce nulla. Un dirigibile fermo a mezz'aria, invece, resta lì sospeso, tranquillo, senza consumare un grammo di carburante. Il prezzo di questa comodità è il *volume*: mentre a un'ala bastano pochi metri quadrati per sollevare tonnellate, a un aerostato servono *migliaia di metri cubi* di gas. È il patto fondamentale dell'aerostatica: molta sospensione gratuita, in cambio di molto ingombro.

Un rapido sguardo storico dà spessore a questi concetti. Nel 1783 i fratelli Montgolfier sollevano un pallone gonfiato con *aria calda*: scaldando l'aria la si rende meno densa di quella fredda esterna, e da questa differenza nasce la spinta. Pochi mesi dopo Jacques Charles usa l'*idrogeno*, un gas leggerissimo, ottenendo prestazioni ben superiori. Sono le due strade che percorriamo ancora oggi: aerostati a *gas leggero* (idrogeno, elio) e ad *aria calda* (la moderna mongolfiera). Tra la fine dell'Ottocento e i primi del Novecento gli aerostati imparano a *governarsi*: montano motori ed eliche e diventano **dirigibili**. Il dirigibile *Norge* (1926) — che ritroverai in più di un esercizio — attraversò il Polo Nord partendo dalle Svalbard e arrivando in Alaska.

Aerostato

Aeromobile più leggero dell'aria, costituito da un *involucro* che racchiude un gas di densità minore di quella dell'aria (gas leggero oppure aria riscaldata), dal quale nasce una spinta ascensionale di natura *statica*. Se privo di propulsione è un *pallone* (libero o frenato); se dotato di motori e governabile, è un *dirigibile*.

1.2 Il principio di Archimede

Alla base di tutto c'è un principio che Archimede enunciò per i liquidi più di duemila anni fa, ma che vale identico per qualunque fluido, aria inclusa. Lo conosciamo tutti nella forma “un corpo immerso in un fluido riceve una spinta pari al peso del fluido spostato”. Riscriviamolo con precisione, perché ci servirà in questa forma.

Principio di Archimede

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verticale, diretta verso l'alto, di intensità pari al peso del fluido spostato:

$$F_A = \rho_a V g,$$

dove ρ_a è la densità del fluido (per noi l'aria), V il volume del corpo immerso (cioè il volume di fluido spostato) e g l'accelerazione di gravità.

Fin qui l'enunciato. Ma da dove *nasce*, fisicamente, questa spinta? Non c'è nulla di magico: nasce dalla *pressione*, che in un fluido pesante non è uniforme ma cresce man mano che si scende. Vale la pena seguirne la dimostrazione, perché chiarisce l'origine del fenomeno e ci allena a un tipo di ragionamento che ricorre in tutta l'aerodinamica.

Da dove viene la spinta: la dimostrazione

Immaginiamo di “congelare” il fluido attorno al corpo e di sostituire il corpo con altro fluido identico: quella porzione di fluido è in quiete, dunque le forze di pressione che la circondano ne bilanciano esattamente il peso. Ma le forze di pressione dipendono solo dalla superficie esterna, non da cosa c'è dentro: rimettendo il corpo al suo posto, esse restano le stesse. Ecco perché la spinta è pari al peso del fluido spostato.

Formalizziamolo. In un fluido in quiete la pressione varia con la sola quota secondo la *legge di Stevino*, $dp = -\rho_a g dz$: la pressione cresce scendendo. La forza che il fluido esercita sulla superficie $\partial\Omega$ del corpo è la somma (l'integrale) degli sforzi di pressione, ciascuno diretto verso l'interno lungo la normale $\hat{\mathbf{n}}$:

$$\mathbf{F} = - \oint_{\partial\Omega} p \hat{\mathbf{n}} dS.$$

Il segno meno c'è perché la pressione *spinge* sulla superficie, cioè in verso opposto alla normale uscente. Trasformiamo questo integrale di superficie in uno di volume con il teorema del gradiente:

$$\mathbf{F} = - \int_V r p dV = - \int_V (-\rho_a g \hat{\mathbf{k}}) dV = (\rho_a g V) \hat{\mathbf{k}}.$$

Il risultato è una forza *verticale*, rivolta verso l'alto ($+\hat{\mathbf{k}}$), di modulo $\rho_a g V$: esattamente il peso del fluido che occuperebbe il volume V . La spinta esiste perché la faccia inferiore del corpo, trovandosi più in basso, è premuta da una pressione maggiore di quella che agisce sulla faccia superiore.

Un conto “a spanne” che convince

Mettiamo dei numeri sulla dimostrazione. Prendiamo un cubo di lato 1 m immerso nell'aria al suolo. Fra la faccia inferiore e quella superiore c'è un dislivello di 1 m; per Stevino la pressione in basso è maggiore di $\Delta p = \rho_a g h = 1,225 \cdot 9,81 \cdot 1 \approx 12$ Pa. Questa piccola sovrappressione agisce sull'area di 1 m^2 della faccia inferiore, producendo una spinta netta verso l'alto di $\Delta p \cdot A \approx 12$ N. E 12 N è proprio il peso di 1 m^3 d'aria ($1,225 \cdot 9,81 \approx 12$ N): tutto torna. La spinta di Archimede non è altro che questa differenza di pressione fra sotto e sopra, integrata su tutta la superficie.

Osservazione

Nota una cosa che sembra ovvia ma è cruciale: nella spinta compare la densità dell'*aria*, non quella del corpo. Un pallone di 2000 m^3 riceve la stessa identica spinta sia che contenga idrogeno, sia elio, sia che sia vuoto. Ciò che cambia, e che decide se sale o scende, è il *peso* da sollevare — non la spinta.

1.3 La spinta netta e il rapporto ε

Un aerostato reale non è mai “vuoto”: il volume V è pieno di gas, e il gas pesa. Sul sistema agiscono allora tre forze verticali, che conviene avere sott'occhio tutte insieme (Figura 1.1): la spinta di Archimede F_A verso l'alto; il peso del gas W_g verso il basso; il peso W di tutto il resto (involucro, navicella, carico) verso il basso.

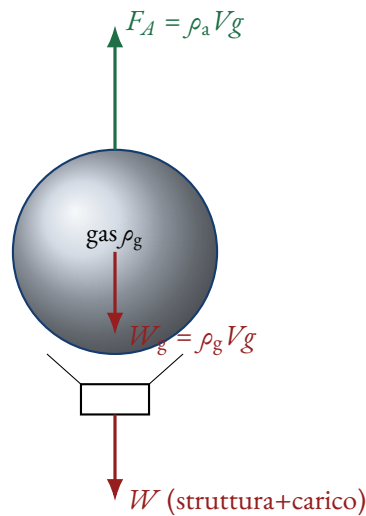


Figura 1.1. Le tre forze verticali su un aerostato. La spinta *netta* del gas è $S = F_A - W_g$; togliendo anche il peso W si ottiene la spinta *libera* $L_{\text{lib}} = S - W$, cioè ciò che “avanza” per far salire l'aerostato.

Le prime due forze dipendono entrambe dal volume del gas: conviene raggrupparle. La loro differenza è la **spinta ascensionale netta** (o semplicemente *spinta*):

$$S = F_A - W_g = \rho_a V g - \rho_g V g = V(\rho_a - \rho_g)g.$$

Introducendo i *pesi specifici* $\gamma = \rho g$ (peso per unità di volume, in N/m^3), la scrittura diventa particolarmente pulita.

Spinta ascensionale netta

$$S = V(\gamma_a - \gamma_g) \quad \text{con} \quad \gamma = \rho g.$$

S è la forza verticale, verso l'alto, disponibile per sollevare *struttura e carico*: è la “forza utile” dell'aerostato.

Nella pratica non si maneggiano separatamente γ_a e γ_g : si usa un unico numero che riassume “quanto è leggero” il gas, il **rapporto dei pesi specifici**

$$\varepsilon = \frac{\gamma_a}{\gamma_g} = \frac{\rho_a}{\rho_g}.$$

È adimensionale e ha una proprietà comodissima: *non cambia con la quota*. Salendo, infatti, aria e gas si rarefanno nello stesso modo (stessa pressione, stessa temperatura, in condizioni ideali), così il loro rapporto resta

costante. Con ε la spinta netta si riscrive

$$S = V\gamma_a \left(1 - \frac{\gamma_g}{\gamma_a}\right) = V\gamma_a \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Da dove viene ε ? Il conto molecolare

Il rapporto ε non è un numero calato dall'alto: discende dalla massa delle molecole. Per un gas perfetto a pari pressione e temperatura, la densità è proporzionale alla massa molare M (da $\rho = pM/RT$). Quindi, *idealmente*,

$$\varepsilon_{\text{ideale}} = \frac{\rho_a}{\rho_g} = \frac{M_a}{M_g}.$$

Con $M_a \approx 29$ g/mol si ottiene per l'idrogeno ($M_{H_2} \approx 2$) il valore $\varepsilon \approx 14,5$ e per l'elio ($M_{He} \approx 4$) il valore $\varepsilon \approx 7,2$. Perché allora nei problemi si usano 8,17 (idrogeno) e 4,9 (elio), molto più bassi? Per tre motivi pratici che abbassano tutti l'efficacia del gas: (i) il gas tecnico non è mai puro, contiene tracce d'aria e di umidità; (ii) l'involucro va tenuto in leggera *sovrappressione*, quindi il gas interno è un po' più denso; (iii) si adotta un margine cautelativo di progetto. Il messaggio, tipico dell'ingegneria, è che il valore "da manuale" e il valore "da progetto" non coincidono: nei calcoli useremo sempre quello di progetto, così come ci viene fornito.

Una parola sulle unità

Le raccolte classiche di aerotecnica ragionano nel *sistema tecnico*, dove la forza si misura in kgf (chilogrammo-forza) e il peso specifico in kgf/m³. Noi useremo il **Sistema Internazionale**: forze in N, masse in kg, con 1 kgf = 9,806 65 N. C'è però una scorciatoia che useremo spesso e che conviene capire subito: nelle condizioni di *equilibrio*, l'accelerazione g compare a entrambi i membri e si semplifica. Allora conviene ragionare in *masse*, perché la massa massima sollevabile $m_{\text{max}} = V(\rho_a - \rho_g)$ risulta numericamente uguale (in kg) al valore che le vecchie tabelle danno per la spinta S in kgf. Terremo le forze in N solo dove serve la *dinamica* vera: accelerazioni, zavorra, resistenza.

1.4 Spinta libera ed equilibrio di galleggiamento

Se dalla spinta netta togliamo anche il peso W della struttura, resta la **spinta libera** (*free lift*): la forza verticale che "avanza" davvero, quella che decide se l'aerostato sale, sta fermo o scende.

$$L_{\text{lib}} = S - W = V(\gamma_a - \gamma_g) - W.$$

Il suo segno racconta tre storie diverse:

- $L_{\text{lib}} > 0$: la spinta vince, l'aerostato **sale**;
- $L_{\text{lib}} = 0$: le forze si bilanciano, l'aerostato **galleggia** a quota costante;
- $L_{\text{lib}} < 0$: prevale il peso, l'aerostato **scende**.

Condizione di galleggiamento (equilibrio)

$$S = W \iff V(\gamma_a - \gamma_g) = W$$

È la condizione che fissa la quota di equilibrio. La ritroveremo, con nome proprio, come *quota di plafond*.

1.5 L'atmosfera tipo (ISA): il “terreno di gioco” delle quote

C'è un dettaglio che cambia tutto: la spinta dipende da γ_a , e γ_a *diminuisce con la quota*. Salendo, l'aria si rarefa e la spinta cala: ecco perché un aerostato non può salire all'infinito. Per fare i conti in quota ci serve dunque un modello di come pressione, densità e temperatura variano con l'altezza. Adottiamo l'**atmosfera tipo internazionale** (ISA), nel tratto della troposfera ($0 \div 11$ km), dove la temperatura cala linearmente:

$$T(z) = T_0 - a z, \quad T_0 = 288,15 \text{ K}, \quad a = 0,0065 \text{ K/m}.$$

Da questa sola ipotesi, unita all'equilibrio idrostatico e alla legge dei gas, discendono tutte le formule che useremo. Vale la pena ricavarle una volta per tutte: è il tipo di derivazione che rende “vive” le tabelle dell'aria tipo.

Da dove vengono gli esponenti 5,2559 e 4,2559

Partiamo da due sole equazioni. L'equilibrio idrostatico dice come cambia la pressione con la quota:

$$dp = -\rho g dz.$$

La legge dei gas perfetti lega pressione e densità alla temperatura: $p = \rho RT$, da cui $\rho = p/(RT)$. Sostituendo,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R T} dz = -\frac{g}{R (T_0 - a z)} dz.$$

Integriamo da 0 (dove $p = p_0$, $T = T_0$) fino alla quota z . Il secondo membro è un integrale immediato in dz una volta riconosciuto che $dT = -a dz$:

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{g}{a R} \ln \frac{T}{T_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{g/(a R)}.$$

L'esponente vale $\frac{g}{a R} = \frac{9,80665}{0,0065 \cdot 287,05} = 5,2559$. Per la densità basta dividere per la temperatura ($\rho = p/RT$): siccome $\rho/\rho_0 = (p/p_0)(T_0/T)$, l'esponente scende di un'unità,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{g/(a R) - 1} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{4,2559}.$$

Ecco spiegati i due numeri: non sono costanti misteriose, ma la “firma” dell'atmosfera lineare.

Introduciamo i tre rapporti adimensionali che compattano tutto: il rapporto di temperatura θ , di pressione δ e di densità σ .

Rapporti dell'atmosfera tipo

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{a z}{T_0}, & \delta &= \frac{p}{p_0} = \theta^{g/(a R)} = \theta^{5,2559}, \\ \sigma &= \frac{\rho}{\rho_0} = \theta^{g/(a R) - 1} = \theta^{4,2559}, \end{aligned}$$

con $p_0 = 101\,325 \text{ Pa}$, $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$, $R = 287,05 \text{ J/(kg K)}$, $g = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$.

Il “motore” di quasi tutti gli esercizi

Quasi ogni problema di aerostatica ha la stessa ossatura: (i) una condizione fisica ci dice quale valore deve assumere ρ_a (oppure p , oppure σ); (ii) dobbiamo trovare a quale quota l'atmosfera raggiunge quel valore. Il secondo passo è semplicemente l'*inversione* delle formule ISA. Se ad esempio conosciamo σ :

$$z = \frac{T_0}{a} \left(1 - \sigma^{1/4,2559} \right).$$

Le vecchie raccolte facevano lo stesso passo *interpolando nelle tabelle*; qui il risultato è identico, ma non serve alcuna tabella esterna: la monografia è autosufficiente.

1.6 Quota di pienezza e quota di plafond

Qui entra in scena un fatto che spesso sorprende gli studenti: un pallone a gas leggero, a terra, *non* è completamente gonfio. All'involucro, di volume geometrico V_{inv} , si immette soltanto un volume $V_0 < V_{inv}$ di gas. Perché sprecare spazio? In realtà non si spreca nulla: è una scelta obbligata e intelligente.

Il motivo è che, salendo, la pressione esterna cala e il gas si *espande*. Se l'involucro fosse già pieno a terra, alla prima espansione il gas in eccesso dovrebbe essere sfiatato subito, e sarebbe gas sprecato. Lasciandolo invece parzialmente sgonfio, gli si concede “margine” per espandersi liberamente mentre l'aerostato guadagna quota. Questo comportamento definisce due quote caratteristiche.

Quota di pienezza z_{pi}

È la quota alla quale il gas, espandendosi durante la salita, arriva a *riempire completamente* l'involucro ($V = V_{inv}$). Al di sotto di z_{pi} l'aerostato sale a *massa di gas costante*: non si disperde nulla, il gas si limita a occupare via via più volume.

Quota di plafond (o di tangenza) z_{pl}

È la quota massima raggiungibile, quella in cui la spinta eguaglia il peso: $S = W$. Oltre z_{pi} l'involucro è ormai pieno e non può espandersi ancora: per continuare a salire, il gas in eccesso viene *sfiatato* da apposite valvole, e la massa di gas diminuisce. La salita si ferma quando la spinta, calando, pareggia il peso.

Due regimi, una sola salita

Le due quote descrivono due “fasi” della stessa ascensione. Sotto z_{pi} comanda l'*espansione*: la massa di gas è fissa, il volume cresce. Sopra z_{pi} comanda lo *sfiato*: il volume è bloccato al massimo, ed è la massa di gas a calare. La quota di plafond è sempre $\geq z_{pi}$, e la loro distanza $z_{pl} - z_{pi}$ misura “quanto ancora” l'aerostato può guadagnare, al prezzo di buttar via gas prezioso.

Nei dirigibili: i *ballonet*

Nei dirigibili questo problema si risolve con eleganza tramite i *ballonet*: sacche d'aria interne all'involucro. A terra sono gonfie d'aria e occupano lo spazio non usato dal gas leggero; salendo, quando il gas si espande, l'aria dei ballonet viene lasciata uscire per fargli posto, mantenendo l'involucro sempre teso senza disperdere gas. È lo stesso principio della quota di pienezza, ma gestito attivamente.

1.6.1 Calcolo della quota di plafond

Al plafond, per definizione, vale $S = W$ con l'involucro *pieno* ($V = V_{\text{inv}}$). Scrivendo $S = V_{\text{inv}} \gamma_a (1 - 1/\varepsilon) = W$ si ricava il valore che deve avere il peso specifico dell'aria a quella quota:

$$\gamma_a|_{\text{pl}} = \frac{W/V_{\text{inv}}}{1 - 1/\varepsilon} \quad (\text{o, in densità, } \rho_a|_{\text{pl}} = \frac{W/V_{\text{inv}}}{1 - 1/\varepsilon}),$$

e da questo, invertendo l'ISA, la quota z_{pl} .

1.6.2 Calcolo della quota di pienezza

Dipende da *come* il gas evolve salendo (la prossima sezione). Nel caso *ideale* il gas segue la stessa legge dell'aria, quindi la sua densità scala come $\sigma = \rho/\rho_0$. Imponendo la conservazione della massa di gas fino al riempimento, $V_{\text{inv}} \rho_g(z_{\text{pi}}) = V_0 \rho_{g,0}$, e sfruttando $\rho_g/\rho_{g,0} = \sigma$, si ottiene la condizione elegante

$$\sigma(z_{\text{pi}}) = \frac{V_0}{V_{\text{inv}}}$$

da cui z_{pi} per inversione dell'ISA. In parole: l'involucro si riempie quando l'aria (e quindi il gas) si è rarefatta esattamente nel rapporto V_0/V_{inv} .

1.7 Come evolve il gas: condizioni ideali e politropica

Per legare pressione, densità e temperatura del gas durante la salita dobbiamo dire qualcosa sul *modo* in cui esso evolve. Ci sono due scenari-limite, e la realtà sta sempre in mezzo.

Condizioni ideali (omobarica–omotermica)

Si parla di *condizioni ideali* quando, quota per quota, il gas interno resta in equilibrio con l'aria esterna sia in pressione ($p_g = p_a$, condizione *omobarica*) sia in temperatura ($T_g = T_a$, condizione *omotermica*). In tal caso gas e aria hanno lo stesso rapporto di densità:

$$\frac{\rho_g}{\rho_{g,0}} = \frac{\rho_a}{\rho_{a,0}} = \sigma, \quad \text{ovvero} \quad \rho_g = \frac{\rho_a}{\varepsilon} \text{ a ogni quota.}$$

Evoluzione politropica

Se invece la salita è rapida, il gas non fa in tempo a scambiare calore con l'ambiente: la sua trasformazione è *politropica* di esponente n ,

$$p V^n = \text{cost.} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n.$$

Il caso $n = 1,4$ (adiabatica dei gas biatomici, come l'idrogeno) è il più frequente. La pressione interna resta comunque omobarica con l'esterno, ma la temperatura del gas *differisce* da quella dell'aria: salendo, un gas che si espande adiabaticamente si raffredda più dell'aria.

Osservazione

Le due ipotesi non si contraddicono: descrivono estremi opposti. “Ideale” è la salita infinitamente lenta, in cui il gas ha tutto il tempo di mettersi in pari con la temperatura esterna. “Politropica/adiabatica” è la salita rapida, in cui il gas non scambia calore. Un pallone reale sta in mezzo; ogni esercizio dichiarerà quale delle due ipotesi adottare, e noi useremo la formula corrispondente.

1.7.1 Pienezza e plafond nel caso politropico

Se l'evoluzione è politropica, la pienezza si ricava direttamente dalla legge del gas, che passa dal volume V_0 (a terra, pressione p_0) al volume pieno V_{inv} :

$$p_{\text{pi}} = p_0 \left(\frac{V_0}{V_{\text{inv}}} \right)^n \xrightarrow{\text{ISA}} z_{\text{pi}}.$$

Per il plafond, imponendo $S = W$ con densità legate alla pressione dalla politropica ($\rho = \rho_0(p/p_0)^{1/n}$) si ottiene

$$p_{\text{pl}} = p_0 \left[\frac{W/V_{\text{inv}}}{\rho_{a,0} - \rho_{g,0}} \right]^n \xrightarrow{\text{ISA}} z_{\text{pl}}.$$

1.8 Il gas perso durante la salita

Tra la quota di pienezza e quella di plafond l'involucro è sempre pieno ($V = V_{\text{inv}}$), ma la massa di gas cala perché l'eccesso viene sfiato. Calcolare quanto se ne perde è sorprendentemente semplice: basta fare la differenza fra la massa contenuta a z_{pi} e quella a z_{pl} , entrambe a volume pieno.

$$\Delta m_g = V_{\text{inv}} [\rho_g(z_{\text{pi}}) - \rho_g(z_{\text{pl}})] = \frac{V_{\text{inv}}}{\varepsilon} [\rho_a(z_{\text{pi}}) - \rho_a(z_{\text{pl}})],$$

avendo usato la relazione omobarica $\rho_g = \rho_a/\varepsilon$. In pratica: si valuta la densità dell'aria alle due quote, si fa la differenza, si divide per ε e si moltiplica per il volume.

1.9 La dinamica dell'ascensione: accelerazione e zavorra

Finora abbiamo imposto l'equilibrio. Ma se la spinta libera non è nulla, l'aerostato non sta fermo: *accelera*. Applichiamo allora la seconda legge di Newton all'intero sistema (struttura + gas + eventuale zavorra), di massa totale m_{tot} . Guardando il diagramma di corpo libero (Figura 1.2): verso l'alto la spinta di Archimede, verso il basso il peso complessivo.

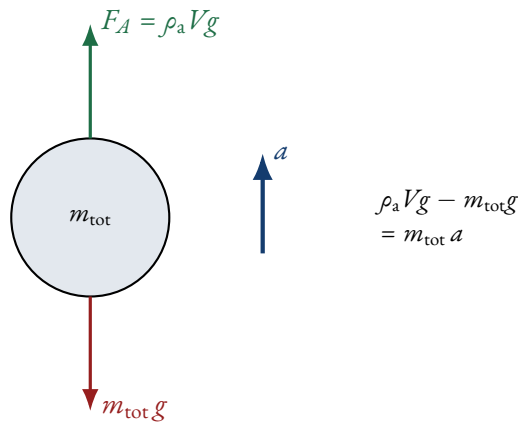


Figura 1.2. Diagramma di corpo libero in salita accelerata. La risultante verticale (spinta meno peso totale) uguaglia massa per accelerazione.

$$\underbrace{\rho_a V g}_{F_A} - \underbrace{m_{\text{tot}} g}_{\text{peso totale}} = m_{\text{tot}} a \quad \Rightarrow \quad a = \left(\frac{\rho_a V}{m_{\text{tot}}} - 1 \right) g.$$

Fin qui è lineare. Il punto delicato — dove tanti si sbagliano — arriva quando si aggiunge *zavorra* per regolare l'accelerazione.

La trappola della zavorra

La zavorra m_z è infida perché compare in **entrambi** i membri di Newton: da un lato aumenta il peso (e quindi *riduce* la forza netta), dall'altro aumenta l'inerzia. Un errore che si trova perfino in vecchie raccolte è usare la scorciatoia $m = F/a$ tenendo F pari alla spinta libera calcolata *senza* zavorra: così si conta la zavorra solo nell'inerzia, dimenticando che pesa. Il risultato sono valori enormi e privi di senso fisico (a volte più grandi della spinta libera disponibile: come dire che il pallone dovrebbe sollevare più di quanto può).

La via corretta è imporre $F_A = m_{\text{tot}}(g + a)$, da cui la massa totale sostenibile a una data accelerazione:

$$m_{\text{tot}} = \frac{\rho_a V}{1 + a/g} \quad \Rightarrow \quad m_z = m_{\text{tot}} - W - \rho_g V.$$

Se m_z risulta *negativo*, la lettura fisica è chiara: per raggiungere quell'accelerazione bisognerebbe *togliere* peso morto — l'aerostato così com'è non ce la fa.

1.10 La resistenza aerodinamica

Quando l'aerostato si muove (in salita, o un dirigibile in avanzamento) l'aria oppone una **resistenza** D . Per un pallone quasi sferico la si riferisce alla *sezione maestra* $A = \pi R^2$:

$$D = \frac{1}{2} \rho_a c_D A V_\infty^2,$$

dove c_D è il coefficiente di resistenza e V_∞ la velocità. In salita a *velocità costante* (moto uniforme, $a = 0$) la spinta netta del gas deve equilibrare peso *più* resistenza:

$$V(\gamma_a - \gamma_g) = Wg + D \quad \Leftrightarrow \quad V(\rho_a - \rho_g) = W + \frac{D}{g}.$$

Quanto vale c_D ? Una questione di numero di Reynolds

Il coefficiente c_D di una sfera non è affatto costante: dipende dal *numero di Reynolds* $Re = \rho_a V_\infty D_{\text{sfera}}/\mu$, cioè dal rapporto fra forze d'inerzia e forze viscosi. Nel regime tipico dei palloni (moto lento, Re moderato) si usa il valore convenzionale $c_D \approx 0,2$, che comparirà spesso negli esercizi. È interessante notare che, oltre un Re critico, il c_D di una sfera *crolla* bruscamente (la “crisi della resistenza”, dovuta alla transizione dello strato limite): è lo stesso fenomeno per cui una pallina da golf, resa scabra dalle fossette, vola più lontano di una liscia. Per un aerostato, comunque, restiamo lontani da quel regime: $c_D \approx 0,2$ va bene.

1.11 Effetti termici: il riscaldamento solare

Il Sole non è uno spettatore passivo. Se l'irraggiamento riscalda il gas di ΔT (a pressione costante, con l'involucro pieno), il gas si dilata e ne fuoriesce una parte: la densità del gas rimasto nel volume V diminuisce nel rapporto $T/(T + \Delta T)$. La nuova spinta netta diventa

$$S' = V\rho_a \left[1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{T}{T + \Delta T} \right],$$

e la spinta libera generata è $L_{\text{lib}} = S' - W$. Poiché al plafond, prima del riscaldamento, era $S = W$, l'apporto solare crea un *surplus* di spinta che spinge l'aerostato ancora più in alto. È un effetto tutt'altro che accademico: le escursioni di quota giorno/notte dei palloni liberi sono in buona parte dovute proprio a questo.

1.12 La mongolfiera: il gas leggero è l'aria stessa

Nella mongolfiera il gas che sostiene non è affatto esotico: è semplicemente aria, la stessa dell'atmosfera, ma *riscaldata* a temperatura $T_1 > T_2$. Scaldandola a pressione costante (omobarica) l'aria si dilata e diventa meno densa. Dalla legge dei gas, a pari pressione, vale

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{T_2}{T_1},$$

cioè l'aria calda è più leggera esattamente nel rapporto delle temperature *assolute*. La spinta netta vale allora

$$S = V(\gamma_2 - \gamma_1) = V\gamma_2\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right),$$

relazione che lega direttamente la spinta desiderata alla temperatura a cui scaldare l'aria. È il motivo per cui il bruciatore di una mongolfiera lavora quasi di continuo: appena l'aria interna si raffredda, la spinta cala e bisogna riscaldarla di nuovo.

1.13 I dirigibili: potenza, autonomia, consumo

Un dirigibile, a differenza del pallone, *avanza* vincendo la resistenza dell'aria. La sua forma è affusolata, quindi la resistenza si riferisce non alla sezione maestra ma al *volume* (dislocamento $\mathcal{D}$) elevato a $2/3$ — una scelta che tiene conto del fatto che, a parità di volume, un corpo allungato ha una sezione frontale minore:

$$D = \frac{1}{2}\rho_a \mathcal{D}^{2/3} c_D V_\infty^2.$$

La **potenza necessaria** all'avanzamento è forza per velocità, $\Pi_n = D V_\infty$:

Potenza necessaria (dirigibile)

$$\Pi_n = \frac{1}{2}\rho_a \mathcal{D}^{2/3} c_D V_\infty^3, \quad \Pi_m = \frac{\Pi_n}{\eta} \text{ (potenza motrice, } \eta \text{ rendimento).}$$

Nota il cubo della velocità: raddoppiare la velocità costa *otto volte* la potenza. È la ragione per cui i dirigibili erano lenti.

Da dove nasce la formula dell'autonomia

L'autonomia è la distanza percorribile con il combustibile a bordo. L'idea è alla Breguet: la distanza è (velocità) $\times$ (tempo di volo), e il tempo di volo è (energia disponibile) / (potenza spesa). L'energia disponibile è legata al peso di combustibile G tramite il consumo specifico c_s ; la potenza spesa è la Π_m vista sopra. Mettendo insieme questi ingredienti, e tenendo conto che bruciando combustibile l'aeronave si alleggerisce (dove il logaritmo, tipico di questi bilanci), si arriva alla forma ingegneristica classica

$$s = 1242 \eta \frac{\gamma_a - \gamma_g}{\gamma_a} \cdot \frac{g \mathcal{D}^{1/3}}{c_s V_\infty^2 c_D} \cdot \log_{10} \frac{Q_t}{Q_t - G},$$

con Q_t peso totale, G peso del combustibile, c_s consumo specifico. Il fattore $(\gamma_a - \gamma_g)/\gamma_a = 1 - 1/\varepsilon$ premia i gas più leggeri; il logaritmo esprime l'alleggerimento progressivo.

Formula empirica: occhio alle unità

La relazione dell'autonomia è *tarata* in un preciso sistema di unità: $\mathcal{D}$ in m^3 , V_∞ in m/s , c_s in $\text{kg}/(\text{CV h})$, g in m/s^2 , con risultato s in km . La costante 1242 e il logaritmo *decimale* incorporano queste scelte: non va usata in unità diverse senza riadattarla. È l'esempio perfetto del principio “*dichiara sempre entro quali limiti vale il tuo modello*”.

Resta il **consumo di gas leggero**. Bruciando combustibile (peso G) l'aeronave si alleggerisce e tenderebbe a salire; per tenere la quota si sfiata gas leggero. Facendo il bilancio fra la spinta all'inizio e alla fine si ottiene un risultato di sorprendente semplicità:

$$m_{\text{g,perso}} = \frac{G}{\varepsilon - 1}$$

indipendente dal volume e dalla quota. Merita di essere assaporato: qualunque sia la stazza del dirigibile, per ogni chilogrammo di combustibile bruciato se ne va $1/(\varepsilon - 1)$ di gas leggero.

Il senso di tutto questo

Abbiamo ora in mano l'intera cassetta degli attrezzi: la spinta (Archimede), il rapporto ε , l'atmosfera ISA con le sue inversioni, le quote di pienezza e plafond, le due evoluzioni del gas, la dinamica con zavorra e resistenza, gli effetti termici, le formule dei dirigibili. Nei prossimi capitoli le useremo una a una. Il metodo di attacco sarà sempre lo stesso, in *cinque mosse*: (1) scrivere i dati in SI; (2) riconoscere la condizione fisica in gioco (equilibrio? pienezza? plafond? moto uniforme? accelerato?); (3) tradurla in un'equazione nelle grandezze note; (4) isolare l'incognita; (5) se serve una quota, invertire l'ISA. Tieni a mente questo schema: è la bussola che non ti farà perdere in nessun problema.

Esercizi svolti

Come leggere questi esercizi

Ogni esercizio segue le *cinque mosse* viste alla fine del capitolo precedente. I dati sono sempre riportati in SI (le eventuali unità tecniche del testo originale sono convertite). I valori numerici sono stati verificati con uno script indipendente, secondo la regola “nessun numero va scritto senza averlo prima controllato”.

Esercizio N.6 — Quota di plafond

Testo. Un aerostato a idrogeno di volume $V = 2300 \text{ m}^3$ e massa (peso) 1650 kg sale in condizioni ideali. Calcolare la quota di plafond, sapendo che $\varepsilon = 8,17$.

Impostazione. Al plafond vale la condizione di equilibrio $S = W$ con involucro pieno. Da $S = V \gamma_a (1 - 1/\varepsilon) = W$ ricaviamo il peso specifico dell'aria richiesto e, invertendo l'ISA, la quota.

Svolgimento.

1. Peso specifico dell'aria al plafond (lavoriamo in densità, g si semplifica):

$$\rho_a|_{\text{pl}} = \frac{W/V}{1 - 1/\varepsilon} = \frac{1650/2300}{1 - 1/8,17} = \frac{0,7174}{0,8776} = 0,8174 \text{ kg/m}^3.$$

2. Rapporto di densità corrispondente: $\sigma = \rho_a/\rho_0 = 0,8174/1,225 = 0,6673$.
3. Inversione dell'ISA:

$$z_{\text{pl}} = \frac{T_0}{a} \left(1 - \sigma^{1/4,2559} \right) = \frac{288,15}{0,0065} \left(1 - 0,6673^{0,2350} \right) \approx 4019 \text{ m}.$$

Risultato. $z_{\text{pl}} \approx 4019 \text{ m}$ (le vecchie tabelle danno 4023 m : differenza dovuta al valore di ρ_0).

Esercizio N.7 — Ascensione politropica ($n = 1,4$)

Testo. Aerostato a idrogeno, salita adiabatica (politropica $n = 1,4$) dal livello del mare. Dati: raggio dell'involucro $R = 10,5 \text{ m}$, massa 2500 kg , volume del gas alla partenza $V_0 = 2900 \text{ m}^3$, $\varepsilon = 8,17$. Calcolare: (1) quota di pienezza; (2) quota di plafond; (3) gas perso.

Impostazione. Volume geometrico dell'involucro $V_{\text{inv}} = \frac{4}{3}\pi R^3$. La pienezza si trova dalla legge politropica ($p_{\text{pi}} = p_0 (V_0/V_{\text{inv}})^n$); il plafond dall'equilibrio $S = W$ con densità omobariche.

Svolgimento.

1. Volume dell'involucro: $V_{\text{inv}} = \frac{4}{3}\pi(10,5)^3 = 4849 \text{ m}^3$.
2. Quota di pienezza. Il gas si comprime / espande da V_0 a V_{inv} :

$$p_{\text{pi}} = p_0 \left(\frac{V_0}{V_{\text{inv}}} \right)^n = 101\,325 \text{ Pa} \left(\frac{2900}{4849} \right)^{1,4} = 49\,335 \text{ Pa}.$$

Da $\delta_{pi} = p_{pi}/p_0 = 0,4869$ e inversione ISA: $z_{pi} \approx 5673$ m.

3. *Quota di plafond.* Con $\rho_{g,0} = \rho_0/\varepsilon = 0,15$:

$$p_{pl} = p_0 \left[\frac{W/V_{inv}}{\rho_0 - \rho_{g,0}} \right]^n = p_0 \left[\frac{2500/4849}{1,225 - 0,15} \right]^{1,4} = 36\,217 \text{ Pa},$$

da cui $z_{pl} \approx 7881$ m.

4. *Gas perso* (fra pienezza e plafond, involucro pieno):

$$\Delta m_g = \frac{V_{inv}}{\varepsilon} [\rho_a(z_{pi}) - \rho_a(z_{pl})] = \frac{4849}{8,17} (0,684 - 0,533) \approx 90 \text{ kg}.$$

Risultato. $z_{pi} \approx 5673$ m; $z_{pl} \approx 7881$ m; $\Delta m_g \approx 90$ kg.

Esercizio N.8 — Pienezza, plafond, gas perso (condizioni ideali)

Testo. Aerostato a idrogeno in condizioni *ideali* dal livello del mare. Dati: $R = 12$ m, massa 3000 kg, $V_0 = 3700 \text{ m}^3$, $\varepsilon = 8,17$. Calcolare pienezza, plafond e gas perso.

Svolgimento.

1. $V_{inv} = \frac{4}{3}\pi(12)^3 = 7238 \text{ m}^3.$

2. *Pienezza.* In condizioni ideali la densità del gas scala come σ ; imponendo la conservazione della massa fino al riempimento:

$$\sigma(z_{pi}) = \frac{V_0}{V_{inv}} = \frac{3700}{7238} = 0,5112 \Rightarrow z_{pi} \approx 6467 \text{ m}.$$

3. *Plafond.* Come in N.6: $\rho_a|_{pl} = \frac{3000/7238}{1 - 1/8,17} = 0,4723 \text{ kg/m}^3$, da cui $z_{pl} \approx 8895$ m.

4. *Gas perso:* $\Delta m_g = \frac{7238}{8,17} [\rho_a(z_{pi}) - \rho_a(z_{pl})] \approx 136 \text{ kg}.$

Risultato. $z_{pi} \approx 6467$ m; $z_{pl} \approx 8895$ m; $\Delta m_g \approx 136$ kg.

Esercizio N.9 — Peso del tessuto per unità di superficie

Testo. Aerostato ad elio con quota di plafond $z_{pl} = 4000$ m. La massa di corda + navicella + strumenti + zavorra + 2 passeggeri vale 1500 kg; $R = 8$ m, $V = 2600 \text{ m}^3$, $\varepsilon = 4,9$. Calcolare il peso della tela (tessuto + vernice) per unità di superficie.

Impostazione. Al plafond la spinta netta sostiene la massa *totale* (tutto tranne il gas). La massa della tela è la differenza fra questa e la massa nota; poi si divide per la superficie sferica.

Svolgimento.

1. $\rho_a(4000) = \rho_0 \sigma(4000) = 0,8191 \text{ kg/m}^3.$

2. Massa totale sostenibile al plafond:

$$m_{tot} = \rho_a V \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0,8191 \cdot 2600 \cdot 0,7959 = 1695,1 \text{ kg}.$$

3. Massa della tela: $m_{tela} = 1695,1 - 1500 = 195,1 \text{ kg}.$

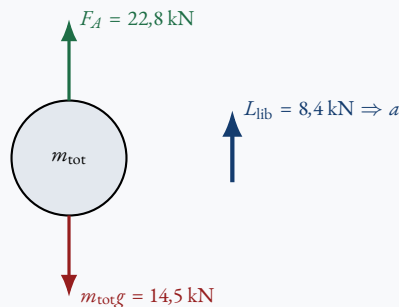
4. Peso per unità di superficie ($A_{\text{sfera}} = 4\pi R^2 = 804,2 \text{ m}^2$):

$$q = \frac{m_{\text{tela}}}{4\pi R^2} = \frac{195,1}{804,2} = 0,243 \text{ kg/m}^2 = 243 \text{ g/m}^2.$$

Risultato. $q \approx 243 \text{ g/m}^2$.

Esercizio N.10 — Spinta e accelerazione ascensionale

Testo. Aerostato ad elio: massa (esclusi il gas) 1000 kg, $V = 1900 \text{ m}^3$, $\varepsilon = 4,9$. Calcolare a $z = 0$ la spinta e l'accelerazione ascensionale.



Corpo libero: la spinta di Archimede vince il peso totale; la differenza è la spinta libera che accelera il sistema.

Svolgimento. A terra $\rho_a = 1,225 \text{ kg/m}^3$, $\rho_g = \rho_a/\varepsilon = 0,25 \text{ kg/m}^3$.

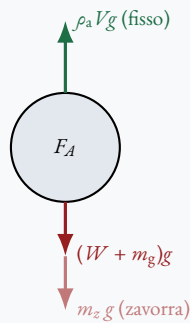
1. Spinta di Archimede: $F_A = \rho_a V g = 1,225 \cdot 1900 \cdot 9,80665 = 22\,825 \text{ N}$.
2. Spinta netta del gas: $S = V(\rho_a - \rho_g)g = 1900 \cdot 0,975 \cdot 9,80665 = 18\,167 \text{ N}$ (pari a 1852,5 kgf).
3. Massa totale accelerata (struttura + gas): $m_{\text{tot}} = 1000 + \rho_g V = 1000 + 475 = 1475 \text{ kg}$.
4. Spinta libera: $L_{\text{lib}} = S - Wg = 18167 - 1000 \cdot 9,80665 = 8360 \text{ N}$.
5. Accelerazione: $a = L_{\text{lib}}/m_{\text{tot}} = 8360/1475 = 5,67 \text{ m/s}^2$.

Risultato. $F_A \approx 22,8 \text{ kN}$, $a \approx 5,67 \text{ m/s}^2$.

Esercizio N.11 — Zavorra per una data accelerazione

Testo. Aerostato ad elio: massa (esclusi il gas) 150 kg, $V = 200 \text{ m}^3$, $\rho_g = 0,25 \text{ kg/m}^3$. Calcolare la zavorra affinché salga con accelerazione $a = 1,8 \text{ m/s}^2$.

Impostazione. *Prima* verifichiamo cosa fa senza zavorra; poi applichiamo la relazione corretta $m_{\text{tot}} = \rho_a V/(1 + a/g)$.



La zavorra m_z pesa e appesantisce l'inerzia: compare in *entrambi* i membri di Newton.

Aggiungere zavorra sposta in basso l'equilibrio: la spinta è fissa, cresce il peso e l'accelerazione cala.

Svolgimento.

1. Massa del gas: $\rho_g V = 0,25 \cdot 200 = 50$ kg; massa morta $W + \rho_g V = 200$ kg.
2. Accelerazione *senza* zavorra: $a_0 = \left(\frac{\rho_a V}{200} - 1\right)g = \left(\frac{1,225 \cdot 200}{200} - 1\right)9,80665 = 2,21$ m/s². Poiché $a_0 > 1,8$, per rallentarlo a 1,8 occorre *aggiungere* zavorra.
3. Massa totale sostenibile a $a = 1,8$:

$$m_{\text{tot}} = \frac{\rho_a V}{1 + a/g} = \frac{1,225 \cdot 200}{1 + 1,8/9,80665} = \frac{245}{1,1836} = 207,0 \text{ kg.}$$

4. Zavorra: $m_z = m_{\text{tot}} - (W + \rho_g V) = 207,0 - 200 = 7,0$ kg.

Risultato. $m_z \approx 7,0$ kg.

Confronto con la raccolta storica

Alcune vecchie raccolte riportano per questo problema una zavorra di ≈ 46 kg: valore *non fisico*. Applicano infatti $m = F/a$ con F pari alla spinta libera calcolata *senza* zavorra, dimenticando che la zavorra pesa e riduce quindi la forza netta. Con 46 kg di zavorra la spinta libera diventerebbe *negativa* e il pallone ... scenderebbe. Il valore corretto è 7 kg.

Esercizio N.12 — Resistenza e volume iniziale (moto uniforme)

Testo. Aerostato a idrogeno: massa 2200 kg, $V = 3600$ m³, $\varepsilon = 8,17$, coefficiente di resistenza (sfera) $c_D = 0,22$. A $z = 0$, calcolare la resistenza aerodinamica e il volume di idrogeno alla partenza per salire a velocità costante $V_\infty = 4,5$ m/s.



Moto uniforme ($a = 0$):

$$S = Wg + D.$$

La resistenza si oppone alla salita, quindi è diretta verso il basso.

In salita a velocità costante la spinta netta equilibra peso e resistenza.

Svolgimento.

1. Raggio e sezione maestra: $R = \sqrt[3]{3V/4\pi} = 9,508 \text{ m}$, $A = \pi R^2 = 284,0 \text{ m}^2$.
2. Resistenza aerodinamica:

$$D = \frac{1}{2} \rho_a c_D A V_\infty^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 0,22 \cdot 284,0 \cdot 4,5^2 = 775 \text{ N} (\approx 79 \text{ kgf}).$$

3. Moto uniforme ($a = 0$): $S = Wg + D$, cioè $V_0(\rho_a - \rho_g) = W + D/g$. Quindi

$$V_0 = \frac{W + D/g}{\rho_a(1 - 1/\varepsilon)} = \frac{2200 + 775/9,80665}{1,225 \cdot 0,8776} = \frac{2279,0}{1,0750} \approx 2120 \text{ m}^3.$$

Risultato. $D \approx 775 \text{ N}$; $V_0 \approx 2120 \text{ m}^3$.

Esercizio N.13 — Spinta libera da riscaldamento solare

Testo. Aerostato a idrogeno in condizioni ideali. Alla quota di plafond l'energia solare aumenta la temperatura del gas di $\Delta T = 20 \text{ K}$. Dati: massa 2750 kg , $V = 4500 \text{ m}^3$, $z_{\text{pl}} = 5500 \text{ m}$, $\varepsilon = 8,17$. Calcolare la spinta libera prodotta.

Svolgimento. Alla quota di plafond: $\rho_a = 0,6971 \text{ kg/m}^3$, $T = T_0 - az = 252,40 \text{ K}$.

1. Il gas si riscalda a pressione costante: la densità del gas rimasto si riduce nel rapporto $T/(T + \Delta T)$. Nuova spinta netta:

$$S' = V \rho_a \left[1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{T}{T + \Delta T} \right] = 4500 \cdot 0,6971 \left[1 - \frac{1}{8,17} \frac{252,40}{272,40} \right] = 2781 \text{ kg}.$$

2. Spinta libera (rispetto al peso $W = 2750 \text{ kg}$): $L_{\text{lib}} = S' - W = 2781 - 2750 \approx 31 \text{ kg}$ (in forza, $\approx 306 \text{ N}$).

Risultato. $L_{\text{lib}} \approx 31 \text{ kg} (\approx 0,31 \text{ kN})$.

Esercizio N.14 — Temperatura di una mongolfiera

Testo. Mongolfiera di raggio $R = 8 \text{ m}$ che deve sviluppare a $z = 0$ una spinta di 800 kg (peso). A quale temperatura riscaldare l'aria interna, in condizioni omobariche?

Svolgimento.

1. Volume: $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (8)^3 = 2144,7 \text{ m}^3$.
2. In omobarica $S = V \rho_2 (1 - T_2/T_1)$, con $\rho_2 = 1,225 \text{ kg/m}^3$, $T_2 = T_0 = 288,15 \text{ K}$. Imponendo $S = 800 \text{ kg}$ e risolvendo per T_1 :

$$T_1 = \frac{T_2}{1 - \frac{S}{V \rho_2}} = \frac{288,15}{1 - \frac{800}{2144,7 \cdot 1,225}} = 414,3 \text{ K}.$$

3. In gradi Celsius: $t_1 = 414,3 - 273,15 \approx 141 \text{ }^\circ\text{C}$.

Risultato. $t_1 \approx 141 \text{ }^\circ\text{C}$.

Esercizio N.15 — Dirigibile “Norge”

Testo. Dirigibile tipo *Norge* a idrogeno: dislocamento $\mathcal{D} = 19\,000\text{ m}^3$, massa a vuoto 115 t, combustibile $G = 46\text{ t}$, quota di crociera 1000 m, rendimento $\eta = 0,78$, consumo specifico $c_s = 185\text{ g}/(\text{CV h})$, $c_D = 0,0338$, velocità $V_\infty = 120\text{ km/h}$, $\varepsilon = 8,17$. Calcolare potenza, autonomia e consumo di idrogeno.

Svolgimento. $\rho_a(1000) = 1,1116\text{ kg/m}^3$, $V_\infty = 120/3,6 = 33,33\text{ m/s}$.

1. *Potenza necessaria:*

$$\Pi_n = \frac{1}{2}\rho_a \mathcal{D}^{2/3} c_D V_\infty^3 = \frac{1}{2} \cdot 1,1116 \cdot 19000^{2/3} \cdot 0,0338 \cdot 33,33^3 = 495,4\text{ kW},$$

pari a $\approx 674\text{ CV}$. Potenza motrice $\Pi_m = \Pi_n/\eta \approx 864\text{ CV}$ ($\approx 635\text{ kW}$).

2. *Autonomia* (formula ingegneristica, unità come da riquadro): con $Q_t = 115 + 46 = 161\text{ t}$, $(1 - 1/\varepsilon) = 0,8776$,

$$s = 1242 \cdot 0,78 \cdot 0,8776 \cdot \frac{9,81 \cdot 19000^{1/3}}{0,185 \cdot 33,33^2 \cdot 0,0338} \cdot \log_{10} \frac{161}{115} \approx 4679\text{ km}.$$

3. *Idrogeno consumato:* $m_{\text{g,perso}} = \frac{G}{\varepsilon - 1} = \frac{46000}{8,17 - 1} \approx 6416\text{ kg}$.

Risultato. $\Pi_m \approx 864\text{ CV}$; $s \approx 4679\text{ km}$; $m_{\text{g,perso}} \approx 6416\text{ kg}$.

Esercizi proposti (risolti)

Dove stiamo andando

Questi sono gli esercizi “proposti” della raccolta classica: li risolviamo *tutti*, con lo stesso metodo. Sono la palestra ideale per verificare di aver capito *quando* usare l’una o l’altra condizione fisica.

P.7 — Plafond (elio, ideale)

Dati. $V = 2500 \text{ m}^3$, massa 2000 kg, $\varepsilon = 4,9$. **Richiesta.** z_{pl} .

Come in N.6: $\rho_a|_{\text{pl}} = \frac{2000/2500}{1 - 1/4,9} = 1,0051 \text{ kg/m}^3$, da cui $z_{\text{pl}} \approx 2013 \text{ m}$ (tab. classica 2019 m).

P.8 — Massa dell’aerostato dalla quota di plafond

Dati. $z_{\text{pl}} = 4200 \text{ m}$, $R = 7 \text{ m}$, $\varepsilon = 4,9$ (elio). **Richiesta.** massa W .

$V = \frac{4}{3}\pi(7)^3 = 1436,8 \text{ m}^3$; $\rho_a(4200) = 0,8020 \text{ kg/m}^3$. Al plafond

$$W = \rho_a V \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0,8020 \cdot 1436,8 \cdot 0,7959 \approx 917 \text{ kg}.$$

$$W \approx 917 \text{ kg}.$$

P.9 — Diametro dell’involucro

Dati. $z_{\text{pl}} = 2300 \text{ m}$, $\varepsilon = 8,17$; masse: tessuto+vernice 310 kg, navicella+corda 280 kg, 2 persone 150 kg.

Richiesta. diametro D .

Massa totale $W = 310 + 280 + 150 = 740 \text{ kg}$; $\rho_a(2300) = 0,9765 \text{ kg/m}^3$. Dal plafond

$$V = \frac{W}{\rho_a(1 - 1/\varepsilon)} = \frac{740}{0,9765 \cdot 0,8776} = 863,5 \text{ m}^3, \quad D = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} \approx 11,82 \text{ m}.$$

$$D \approx 11,82 \text{ m}.$$

P.10 — Politropica $n = 1,3$ (elio)

Dati. $D = 18 \text{ m}$ (diametro), massa 1800 kg, $V_0 = 2200 \text{ m}^3$, $\varepsilon = 4,9$, $n = 1,3$. **Richiesta.** z_{pi} , z_{pl} , gas perso.

$R = 9 \text{ m}$, $V_{\text{inv}} = \frac{4}{3}\pi(9)^3 = 3053,6 \text{ m}^3$, $\rho_{g,0} = \rho_0/\varepsilon = 0,25$.

- Pienezza: $p_{\text{pi}} = p_0(V_0/V_{\text{inv}})^{1,3} = 66\,162 \text{ Pa} \Rightarrow z_{\text{pi}} \approx 3453 \text{ m}$.
- Plafond: $p_{\text{pl}} = p_0 \left[\frac{W/V_{\text{inv}}}{\rho_0 - \rho_{g,0}} \right]^{1,3} = 52\,680 \text{ Pa} \Rightarrow z_{\text{pl}} \approx 5188 \text{ m}$.
- Gas perso: $\Delta m_g = \frac{V_{\text{inv}}}{\varepsilon} [\rho_a(z_{\text{pi}}) - \rho_a(z_{\text{pl}})] \approx 91 \text{ kg}$.

$$z_{\text{pi}} \approx 3453 \text{ m}, z_{\text{pl}} \approx 5188 \text{ m}, \Delta m_g \approx 91 \text{ kg}.$$

P.11 — Tratto fra plafond e pienza

Dati. $q = 340 \text{ g/m}^2$, navicella+corda 800 kg, persone 210 kg, $R = 8 \text{ m}$, $\varepsilon = 8,17 \text{ (H}_2\text{)}$, $V_0 = 1300 \text{ m}^3$.

Richiesta. $\Delta z = z_{\text{pl}} - z_{\text{pi}}$.

$V_{\text{inv}} = \frac{4}{3}\pi(8)^3 = 2144,7 \text{ m}^3$; massa tela = $q \cdot 4\pi R^2 = 0,34 \cdot 804,2 = 273,4 \text{ kg}$; massa totale $W = 273,4 + 800 + 210 = 1283,4 \text{ kg}$.

- Pienza (ideale): $\sigma(z_{\text{pi}}) = V_0/V_{\text{inv}} = 0,6061 \Rightarrow z_{\text{pi}} \approx 4920 \text{ m}$.
- Plafond: $\rho_a|_{\text{pl}} = \frac{1283,4/2144,7}{0,8776} = 0,6819 \text{ kg/m}^3 \Rightarrow z_{\text{pl}} \approx 5701 \text{ m}$.

$$\Delta z \approx 5701 - 4920 = 781 \text{ m} \quad (\text{tab. classica } 786 \text{ m}).$$

P.12 — Diametro (elio, ideale)

Dati. massa 1200 kg, $z_{\text{pl}} = 3200 \text{ m}$, $\varepsilon = 4,9$. **Richiesta.** D .

$$\rho_a(3200) = 0,8905 \text{ kg/m}^3; V = \frac{1200}{0,8905 \cdot 0,7959} = 1693 \text{ m}^3; D = \sqrt[3]{6V/\pi} \approx 14,79 \text{ m}. \quad \boxed{D \approx 14,79 \text{ m}}.$$

P.13 — Zavorra per due accelerazioni

Dati. massa 2000 kg, $V = 2400 \text{ m}^3$, $\varepsilon = 8,17 \text{ (H}_2\text{)}$. **Richiesta.** zavorra per $a_1 = 1,5 \text{ m/s}^2$ e $a_2 = 4,5 \text{ m/s}^2$ a $z = 0$.

$\rho_g = \rho_0/\varepsilon = 0,150$; massa del gas = $\rho_g V = 360 \text{ kg}$; massa morta = 2360 kg. Accelerazione senza zavorra $a_0 = (\frac{\rho_0 V}{2360} - 1)g = 2,41 \text{ m/s}^2$. (Vale lo schema di corpo libero dell'Esercizio N.11: la zavorra entra sia nel peso sia nell'inerzia.) Usiamo $m_{\text{tot}} = \rho_0 V/(1 + a/g)$, poi $m_z = m_{\text{tot}} - 2360 \text{ kg}$:

- $a_1 = 1,5 < a_0$: $m_{\text{tot}} = 2550 \text{ kg} \Rightarrow m_z \approx +190 \text{ kg}$ (si aggiunge zavorra).
- $a_2 = 4,5 > a_0$: $m_{\text{tot}} = 2015 \text{ kg} \Rightarrow m_z \approx -345 \text{ kg}$: *impossibile* senza togliere peso morto.

$$m_{z,1} \approx +190 \text{ kg}, \quad m_{z,2} \approx -345 \text{ kg}.$$

Ancora la trappola della zavorra

La raccolta storica riporta $\approx 1444 \text{ kg}$ e $\approx -1092 \text{ kg}$: valori privi di senso (la spinta libera disponibile è appena $\approx 580 \text{ kg}$, non si possono caricare 1444 kg di zavorra!). L'errore è sempre lo stesso: usare $m = F/a$ senza aggiornare la spinta netta. La relazione corretta è $m_{\text{tot}} = \rho_a V/(1 + a/g)$.

P.14 — Massa propria da pienza e plafond

Dati. $V_0 = 2000 \text{ m}^3$, $z_{\text{pi}} = 5000 \text{ m}$, $z_{\text{pl}} = 6200 \text{ m}$, $\varepsilon = 8,17$. **Richiesta.** massa W .

Dalla pienza (ideale) ricaviamo il volume dell'involucro: $V_{\text{inv}} = V_0/\sigma(z_{\text{pi}}) = 2000/0,6009 = 3328 \text{ m}^3$. Dal plafond, con $\rho_a(6200) = 0,6452 \text{ kg/m}^3$:

$$W = V_{\text{inv}}\rho_a\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = 3328 \cdot 0,6452 \cdot 0,8776 \approx 1885 \text{ kg}.$$

$$\boxed{W \approx 1885 \text{ kg}}.$$

P.15 — Coefficiente di resistenza

Dati. $V_0 = 2800 \text{ m}^3$, $V_\infty = 3,8 \text{ m/s}$ (salita uniforme a $z = 0$), $R = 10 \text{ m}$, $\varepsilon = 4,9$ (elio), $z_{\text{pl}} = 4200 \text{ m}$.

Richiesta. c_D .

Impostazione. La massa della struttura W si ricava dal plafond (involucro pieno, $V_{\text{inv}} = \frac{4}{3}\pi R^3$). A $z = 0$, in salita uniforme, il volume di gas è V_0 e vale $S(V_0) = Wg + D$: da qui D , poi c_D . (Il bilancio di forze è quello dell'Esercizio N.12: spinta netta verso l'alto, peso e resistenza verso il basso.)

1. $V_{\text{inv}} = \frac{4}{3}\pi(10)^3 = 4189 \text{ m}^3$; $\rho_a(4200) = 0,8020$; $W = V_{\text{inv}}\rho_a(1 - 1/\varepsilon) = 2674 \text{ kg}$.
2. Resistenza a $z = 0$: $D = [V_0(\rho_0 - \rho_0/\varepsilon) - W]g = [2800 \cdot 0,975 - 2674] \cdot 9,80665 = 552 \text{ N}$.
3. Coefficiente: $A = \pi R^2 = 314,2 \text{ m}^2$,

$$c_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho_0 A V_\infty^2} = \frac{552}{\frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 314,2 \cdot 3,8^2} \approx 0,199.$$

$$c_D \approx 0,20.$$

P.16 — Riscaldamento per una spinta assegnata

Dati. $\varepsilon = 4,9$ (elio), $V = 4300 \text{ m}^3$, massa 2500 kg , $z_{\text{pl}} = 5200 \text{ m}$. **Richiesta.** l'aumento ΔT che produce 20 kg di spinta libera.

Con lo stesso schema di N.13: $\rho_a(5200) = 0,7203 \text{ kg/m}^3$, $T = 254,35 \text{ K}$. Imponendo $S' - W = 20 \text{ kg}$ con $S' = V\rho_a[1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{T}{T+\Delta T}]$ si ricava

$$\frac{T}{T + \Delta T} = \varepsilon \left(1 - \frac{W + 20}{V\rho_a}\right) \Rightarrow \Delta T \approx 24 \text{ K}.$$

$$\Delta T \approx 24^\circ \text{C}.$$

P.17 — Mongolfiera in giornata estiva

Dati. aria interna riscaldata a $t_1 = 115^\circ \text{C}$, temperatura esterna $t_2 = 30^\circ \text{C}$, $p = 10\,332,3 \text{ kgf/m}^2$, $R = 7 \text{ m}$. **Richiesta.** spinta S (omobarica).

$V = \frac{4}{3}\pi(7)^3 = 1436,8 \text{ m}^3$; $T_1 = 388,15 \text{ K}$, $T_2 = 303,15 \text{ K}$; densità esterna $\rho_2 = \frac{p}{R T_2} = \frac{101340}{287,05 \cdot 303,15} = 1,1644 \text{ kg/m}^3$. Quindi

$$S = V\rho_2 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = 1436,8 \cdot 1,1644 \left(1 - \frac{303,15}{388,15}\right) \approx 366 \text{ kg}.$$

$$S \approx 366 \text{ kg} (\approx 3,6 \text{ kN}).$$

P.18 — Autonomia del dirigibile

Dati. $\Pi_n = 700 \text{ CV}$, $V_\infty = 118 \text{ km/h}$, $z = 1300 \text{ m}$, $\mathcal{D} = 21\,000 \text{ m}^3$, massa a vuoto 125 t , $G = 55 \text{ t}$, $c_s = 0,190 \text{ kg/(CV h)}$, $\varepsilon = 8,17$, $\eta = 0,79$. **Richiesta.** autonomia s e idrogeno perso.

$\rho_a(1300) = 1,0793 \text{ kg/m}^3$, $V_\infty = 32,78 \text{ m/s}$. Prima ricaviamo c_D dalla potenza data:

$$c_D = \frac{\Pi_n}{\frac{1}{2}\rho_a D^{2/3} V_\infty^3} = \frac{700 \cdot 735,5}{\frac{1}{2} \cdot 1,0793 \cdot 21000^{2/3} \cdot 32,78^3} \approx 0,0356.$$

Poi l'autonomia ($Q_t = 125 + 55 = 180 \text{ t}$):

$$s = 1242 \cdot 0,79 \cdot 0,8776 \cdot \frac{9,81 \cdot 21000^{1/3}}{0,190 \cdot 32,78^2 \cdot 0,0356} \cdot \log_{10} \frac{180}{125} \approx 5078 \text{ km}.$$

Idrogeno perso: $m_{g,perso} = \frac{G}{\varepsilon - 1} = \frac{55000}{7,17} \approx 7671 \text{ kg}.$

$$s \approx 5078 \text{ km}, \quad m_{g,perso} \approx 7671 \text{ kg}.$$

Formulario e costanti

A.1 Costanti dell'atmosfera tipo (ISA)

Grandezza	Simbolo	Valore
Temperatura al suolo	T_0	288,15 K
Pressione al suolo	p_0	101 325 Pa
Densità al suolo	ρ_0	1,225 kg/m ³
Gradiente termico	a	0,0065 K/m
Costante dell'aria	R	287,05 J/(kg K)
Gravità	g	9,806 65 m/s ²
Esponente pressione	$g/(aR)$	5,2559
Esponente densità	$g/(aR) - 1$	4,2559

A.2 Relazioni fondamentali

Concetto	Relazione
Spinta di Archimede	$F_A = \rho_a V g$
Spinta netta del gas	$S = V(\gamma_a - \gamma_g) = V\gamma_a(1 - 1/\varepsilon)$
Spinta libera	$L_{\text{lib}} = S - W$
Equilibrio / plafond	$S = W$
ρ_a al plafond	$\rho_a _{\text{pl}} = (W/V_{\text{inv}})/(1 - 1/\varepsilon)$
Pienezza (ideale)	$\sigma(z_{\text{pi}}) = V_0/V_{\text{inv}}$
Pienezza (politropica)	$p_{\text{pi}} = p_0(V_0/V_{\text{inv}})^n$
Gas perso	$\Delta m_g = \frac{V_{\text{inv}}}{\varepsilon} [\rho_a(z_{\text{pi}}) - \rho_a(z_{\text{pl}})]$
Dinamica / zavorra	$m_{\text{tot}} = \rho_a V / (1 + a/g)$
Resistenza (sfera)	$D = \frac{1}{2} \rho_a c_D A V_{\infty}^2$
Mongolfiera	$S = V\gamma_2(1 - T_2/T_1)$
Potenza (dirigibile)	$\Pi_n = \frac{1}{2} \rho_a \mathcal{D}^{2/3} c_D V_{\infty}^3$
Gas perso (dirigibile)	$m_{\text{g,perso}} = G/(\varepsilon - 1)$

A.3 Inversione dell'atmosfera tipo

Nota una qualsiasi delle grandezze adimensionali, la quota si ricava da

$$z = \frac{T_0}{a} (1 - \theta), \quad \theta = \sigma^{1/4,2559} = \delta^{1/5,2559} = \frac{T}{T_0}.$$

Aerostatica. Valori numerici verificati con script Python indipendente (atmosfera ISA in forma chiusa). Ogni modello semplificato è usato entro i suoi limiti di validità, dichiarati nel testo.