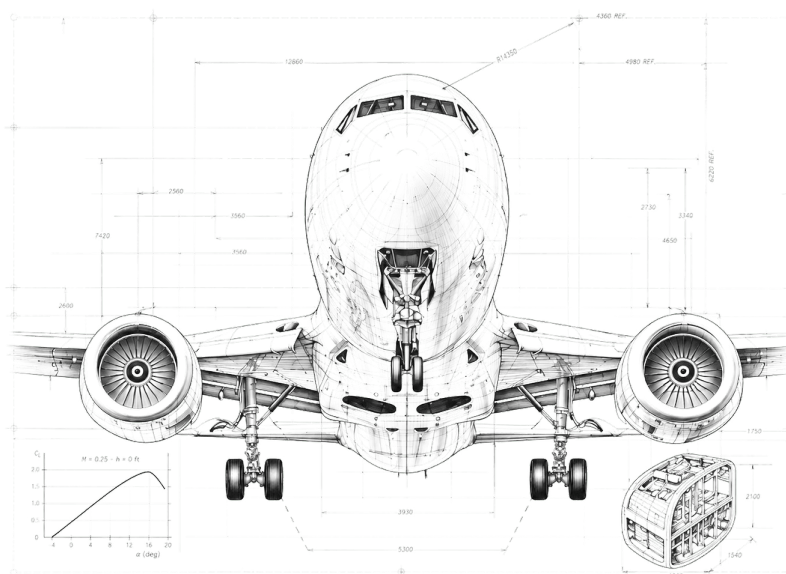


Autonomia e Durata

*Prestazioni di crociera dei velivoli
a elica e a getto*



Teoria, formule fondamentali
e raccolta di esercizi svolti passo passo

B. Raucci

Meccanica del Volo

Indice

I	Fondamenti teorici	I
1.1	Il bilancio dei pesi e le frazioni di massa	1
1.2	L'equilibrio in volo rettilineo uniforme	1
1.3	La polare parabolica e gli assetti notevoli	2
1.4	Come consumano i due propulsori	3
1.5	Autonomia del motoelica: la formula di Bréguet	3
1.6	Durata del motoelica	4
1.7	Autonomia e durata del getto	4
1.8	Effetto della quota: l'atmosfera tipo	5
1.9	Effetto del vento sull'autonomia	6
1.10	Raggio d'azione e indice di trasporto	6
2	Esercizi risolti — velivoli a elica	7
2.1	Autonomia in funzione della frazione di combustibile	7
2.2	Autonomia di un motoelica ad assetto assegnato	8
2.3	Raggio d'azione e potenza di un bombardiere	9
2.4	Diagramma dell'indice di trasporto	10
2.5	Consumo a quota e velocità costanti (tre metodi)	10
2.6	Consumo di andata e ritorno con assetto da V_0	11
2.7	Carico pagante–autonomia con vento	12
2.8	Determinazione dell'assetto e dell'allungamento	13
2.9	Consumo con il metodo delle tratte brevi	13
2.10	Autonomia in funzione del carico pagante, con vento	14
2.11	Vento: calcolo inverso della velocità del vento	14
2.12	Durata massima di un motoelica	15
2.13	Combustibile per una durata assegnata	15
3	Esercizi risolti — velivoli a getto	17
3.1	Autonomia massima di un turbogetto	17
3.2	Autonomia del turbogetto in funzione della quota	17
3.3	Durata massima di un turbogetto e legge $V(t)$	18
3.4	Autonomia di un jet di linea ad assetto costante	19
3.5	Durata di un jet ad assetto costante (senza dato di consumo)	19
3.6	Autonomia e durata massime di un executive jet	20
	Quadro riepilogativo dei risultati	22
A	Atmosfera standard e conversioni	23
A.1	Modello ISA (troposfera e bassa stratosfera)	23
A.2	Fattori di conversione utili	24
A.3	Formulario essenziale	24

Fondamenti teorici

Dove stiamo andando

In questo capitolo costruiamo, a partire da pochi principi fisici, tutte le relazioni che governano le due prestazioni di crociera più importanti di un velivolo: *quanto lontano* può arrivare (l'**autonomia**, cioè la distanza percorribile con il combustibile a bordo) e *per quanto tempo* può restare in aria (la **durata**). Vedremo che elica e getto obbediscono a leggi diverse, e che l'assetto di volo va scelto in modo differente a seconda che si voglia massimizzare la distanza o il tempo. Tutte le formule che qui deriviamo saranno poi applicate, numeri alla mano, nei capitoli successivi.

1.1 Il bilancio dei pesi e le frazioni di massa

Durante la crociera un velivolo consuma combustibile: la sua massa non è costante, ma *diminuisce nel tempo*. È questo il fatto fisico centrale di tutto il capitolo. Conviene allora scomporre la massa totale al decollo m_0 in tre contributi:

$$m_0 = m_v + m_p + m_F, \quad (1.1)$$

dove m_v è la *massa a vuoto operativa* (struttura, motori, impianti, equipaggio), m_p è il *carico pagante* (*payload*: passeggeri, merci) e m_F è la massa di *combustibile*. Al termine della crociera la massa si riduce al valore

$$m_1 = m_0 - m_F. \quad (1.2)$$

Osservazione

Nel bilancio (1.1) usiamo la **massa** m (in kg), grandezza propria del velivolo. Al peso — cioè alla forza $W = m g$ (in N) — ricorreremo solo quando servirà l'equilibrio delle forze in volo. Questa distinzione, superflua finché g è costante, è però concettualmente importante: il combustibile riduce la *massa*, e con essa il *peso*.

Il combustibile e il carico pagante sono legati: fissato lo spazio disponibile nei serbatoi e la massa massima al decollo, *più combustibile imbarco, meno carico pagante posso portare*, e viceversa. Questo compromesso è alla base dei diagrammi “carico pagante–autonomia” che tratteremo negli esercizi.

1.2 L'equilibrio in volo rettilineo uniforme

Consideriamo il volo di crociera come rettilineo, orizzontale e uniforme. In queste condizioni le quattro forze aerodinamiche e propulsive si equilibrano a due a due (Figura 1.1):

$$L = W = mg, \quad T = D, \quad (1.3)$$

dove L è la portanza, D la resistenza, W il peso, T la spinta (o trazione) propulsiva. Introducendo i coefficienti aerodinamici riferiti alla superficie alare S e alla pressione dinamica $q = \frac{1}{2}\rho V^2$,

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L, \quad D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D, \quad (1.4)$$

l'efficienza aerodinamica E (rapporto portanza/resistenza, in inglese *lift-to-drag ratio*) si scrive

$$E = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} \quad (1.5)$$

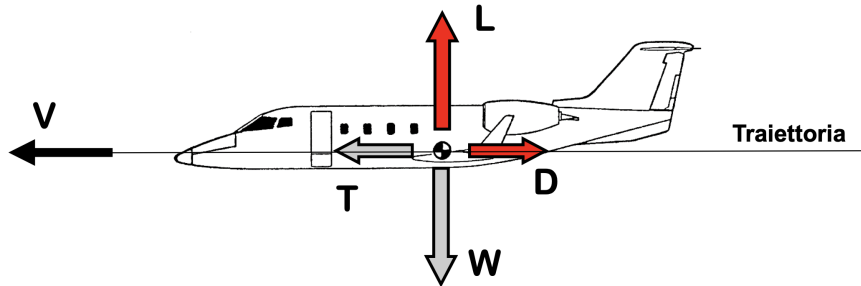


Figura 1.1. Equilibrio delle quattro forze nel volo di crociera rettilinea uniforme: $L = W$ e $T = D$.

1.3 La polare parabolica e gli assetti notevoli

Per legare C_D a C_L adottiamo la **polare parabolica**, modello semplice ma sorprendentemente accurato in crociera:

$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR e} \quad (1.6)$$

dove C_{D0} è il coefficiente di resistenza a portanza nulla (resistenza “parassita”), $AR = b^2/S$ è l'allungamento alare (*aspect ratio*), b l'apertura ed e il fattore di Oswald (che tiene conto della distribuzione di portanza non ellittica; $e \leq 1$). Il secondo termine è la *resistenza indotta*, prezzo inevitabile della portanza.

Attenzione

La polare parabolica (1.6) vale finché il flusso è *attaccato* e lontano dallo stallo, e a numeri di Mach non troppo elevati (assenza di onde d'urto significative). È il regime tipico della crociera: la useremo sempre, ma è bene ricordarne i limiti.

Le prestazioni di crociera si ottimizzano in corrispondenza di particolari *asseti* (valori di C_L). Derivando i tre gruppi rilevanti rispetto a C_L e annullando la derivata si trovano i massimi riportati nella Tabella 1.1. La deduzione è puramente algebrica; conviene memorizzare i risultati perché ricorreranno in *ogni* esercizio.

Tabella 1.1. Assetti notevoli per la polare parabolica. In tutte le espressioni AR , e e C_{D0} sono i parametri della polare.

Grandezza da massimizzare	C_L ottimo	C_D	Valore massimo
$E = \frac{C_L}{C_D}$	$\sqrt{\pi AR e C_{D0}}$	$2C_{D0}$	$E_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi AR e}{C_{D0}}}$
$\frac{C_L^{3/2}}{C_D}$	$\sqrt{3\pi AR e C_{D0}}$	$\frac{4}{3} C_{D0}$	$\frac{(3\pi AR e)^{3/4}}{4 C_{D0}^{1/4}}$
$\frac{C_L^{1/2}}{C_D}$	$\sqrt{\frac{\pi AR e C_{D0}}{3}}$	$\frac{4}{3} C_{D0}$	$\frac{3}{4} \left(\frac{\pi AR e}{3} \right)^{1/4} C_{D0}^{-3/4}$

Osservazione

Ciascun assetto ottimo “serve” a una prestazione diversa, come vedremo: $E_{\max}$ dà la *massima autonomia dell’elica* e la *massima durata del getto*; $(C_L^{3/2}/C_D)_{\max}$ dà la *massima durata dell’elica*; $(C_L^{1/2}/C_D)_{\max}$ dà la *massima autonomia del getto*. Questa corrispondenza incrociata non è casuale: dipende dal fatto che elica e getto consumano in modo diverso, come ora vediamo.

1.4 Come consumano i due propulsori

La differenza profonda fra elica e getto sta in *che cosa* è proporzionale il consumo di combustibile nell’unità di tempo, la *portata* $\dot{m}_F$.

Motoelica. Il motore alternativo (o turboelica) eroga una *potenza* Π ; il consumo è proporzionale alla potenza:

$$\dot{m}_F = c_P \Pi, \quad (1.7)$$

dove c_P è il **consumo specifico di potenza** (in kg/J, cioè kg di combustibile per joule di lavoro). L’elica converte la potenza del motore in potenza propulsiva con rendimento η : la potenza necessaria al volo è $P_r = D V = W V/E$, dunque il motore deve fornire

$$\Pi = \frac{P_r}{\eta} = \frac{W V}{\eta E}. \quad (1.8)$$

Getto. Il turbogetto/turbofan produce direttamente una *spinta* T ; il consumo è proporzionale alla spinta:

$$\dot{m}_F = \frac{c_T}{g} T \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{W}_F = c_T T, \quad (1.9)$$

dove c_T è il **consumo specifico di spinta** espresso in forma *ponderale* (peso di combustibile per unità di spinta e di tempo): ha le dimensioni dell’inverso di un tempo, 1/s.

Dai dati pratici alle unità SI

Nella pratica tecnica i consumi specifici si trovano tabulati in unità “ingegneristiche”. Le conversioni utili (con $1 \text{ CV} = 735,499 \text{ W}$ e $1 \text{ kgf} = 9,80665 \text{ N}$) sono:

$$c_P [\text{kg/J}] = \frac{C [\text{kg}/(\text{CV h})]}{735,499 \times 3600}, \quad c_T [1/\text{s}] = \frac{k [\text{kg}/(\text{kgf h})]}{3600}.$$

Terremo sempre i calcoli in SI, riportando i dati di partenza in queste unità.

1.5 Autonomia del motoelica: la formula di Bréguet

Ricaviamo ora la distanza percorribile. In un tempo dt il velivolo avanza di $dR = V dt$ e perde massa $dm = -dm_F = -c_P \Pi dt$. Combinando con (1.8):

$$dt = -\frac{dm}{c_P \Pi} = -\frac{\eta E}{c_P W V} dm \quad \Rightarrow \quad dR = V dt = -\frac{\eta E}{c_P W} dm = -\frac{\eta E}{c_P g} \frac{dm}{m}. \quad (1.10)$$

L’aspetto notevole è che V *si semplifica*: nell’elica l’autonomia non dipende dalla velocità di volo. Integrando fra m_0 e m_1 (con E costante, cioè volando ad assetto costante) si ottiene la celebre **formula di Bréguet dell’autonomia**:

Autonomia — motoelica (Bréguet)

$$R = \frac{\eta E}{g c_P} \ln \frac{m_0}{m_1} = K \ln \frac{m_0}{m_0 - m_F}, \quad K \equiv \frac{\eta E}{g c_P}.$$

Il *fattore di merito di percorso* K (dimensioni di una lunghezza) riassume in un solo numero l'aerodinamica (E) e la propulsione (η, c_P).

Da dove nasce la “costante 621” dei manuali

Molti testi scrivono l'autonomia in chilometri come $R = 621 \frac{\eta E}{C} \log_{10} \frac{m_0}{m_1}$, con C in $\text{kg}/(\text{CV h})$. Non è una formula diversa: è la *nostra* K tradotta in unità pratiche. Sostituendo $c_P = C/(735,499 \cdot 3600)$ in $K = \eta E/(g c_P)$:

$$K [\text{m}] = \frac{\eta E \cdot 735,499 \cdot 3600}{9,80665 C} \approx 270\,000 \frac{\eta E}{C} \Rightarrow K [\text{km}] \approx 270 \frac{\eta E}{C}.$$

Poiché $\ln x = \ln 10 \cdot \log_{10} x \approx 2,3026 \log_{10} x$, si ha $270 \times 2,3026 \approx 621$. La misteriosa costante è semplicemente $270 \ln 10$: un artificio per usare i logaritmi decimali delle tavole.

1.6 Durata del motoelica

Per il tempo di volo partiamo di nuovo da $dt = -\frac{\eta E}{c_P W V} dm$, ma stavolta *non* semplifichiamo V : la durata dipende dalla velocità. Volando ad assetto costante e a quota costante, per l'equilibrio $L = W$ si ha $V = \sqrt{2W/(\rho S C_L)}$; scrivendo $W = mg$ e integrando:

$$t = \frac{\eta}{c_P g} \frac{C_L^{3/2}}{C_D} \sqrt{\frac{\rho S}{2}} \int_{m_1}^{m_0} \frac{dm}{m^{3/2}} = \frac{\eta}{g c_P} \frac{C_L^{3/2}}{C_D} \sqrt{\frac{2\rho}{W_0/S}} \left(\sqrt{\frac{m_0}{m_1}} - 1 \right). \quad (1.11)$$

Durata — motoelica

$$t = \frac{\eta}{g c_P} \underbrace{\frac{C_L^{3/2}}{C_D}}_{\text{assetto}} \sqrt{\frac{2\rho}{W_0/S}} \left(\sqrt{\frac{m_0}{m_1}} - 1 \right).$$

Compaiono ora *tre* novità rispetto all'autonomia: il gruppo $C_L^{3/2}/C_D$ (non più E), il *carico alare* W_0/S e la *densità* ρ : a differenza dell'autonomia, la durata **migliora scendendo di quota** (dove ρ è maggiore).

La durata massima si ottiene dunque all'assetto $(C_L^{3/2}/C_D)_{\max}$ (Tabella 1.1), diverso da quello di massima autonomia.

1.7 Autonomia e durata del getto

Per il getto il consumo è legato alla spinta, (1.9). Lavorando in forma ponderale ($W = mg$, $dW_F = c_T T dt$, $T = D = W/E$):

$$dt = -\frac{E}{c_T} \frac{dW}{W}, \quad dR = V dt = -\frac{E}{c_T} \frac{V}{W} dW. \quad (1.12)$$

Durata. Integrando la prima (a E costante) si ottiene la forma più semplice di tutte:

Durata — getto

$$t = \frac{E}{c_T} \ln \frac{W_0}{W_1} = \frac{E}{c_T} \ln \frac{m_0}{m_1}.$$

La durata massima del getto si ha all'assetto di **massima efficienza** $E_{\max}$ (lo stesso della massima autonomia dell'elica).

Autonomia. Nella seconda equazione sostituiamo $V = \sqrt{2W/(\rho S C_L)}$ (assetto costante, C_L fisso):

$$R = \frac{E}{c_T} \sqrt{\frac{2}{\rho S C_L}} \int_{W_1}^{W_0} \frac{dW}{\sqrt{W}} = \frac{2E}{c_T} \sqrt{\frac{2}{\rho S C_L}} (\sqrt{W_0} - \sqrt{W_1}). \quad (1.13)$$

Autonomia — getto

$$R = \frac{2}{c_T} \underbrace{\frac{\sqrt{C_L}}{C_D}}_{\text{assetto}} \sqrt{\frac{2}{\rho S}} (\sqrt{W_0} - \sqrt{W_1}).$$

L'assetto di massima autonomia del getto è quello che massimizza $\sqrt{C_L}/C_D$ (Tabella 1.1). Compare ρ al denominatore: l'autonomia del getto **migliora salendo di quota**.

Il senso di tutto questo

Le quattro formule chiave si leggono a colpo d'occhio così:

- l'**elica** ama i *logaritmi* (dipendenza $\ln$ del rapporto di masse) e *ignora* la velocità in autonomia;
- il **getto** ha l'autonomia legata alle *radici* dei pesi e *ama la quota*;
- la **durata** premia sempre gli assetti a C_L elevato (volo lento, molta portanza), l'**autonomia** assetti a C_L più moderato.

Tenere a mente questa mappa evita di applicare la formula sbagliata.

1.8 Effetto della quota: l'atmosfera tipo

Poiché ρ compare esplicitamente nella durata dell'elica e nell'autonomia del getto, serve un modello di atmosfera. Adottiamo l'**Atmosfera Standard Internazionale** (ISA), riassunta nell'Appendice A, e i tre *rapporti* adimensionali rispetto al livello del mare:

$$\theta = \frac{T}{T_0}, \quad \delta = \frac{p}{p_0}, \quad \sigma = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\delta}{\theta}. \quad (1.14)$$

Con essi $V = \sqrt{2(W/S)/(\rho_0 \sigma C_L)}$: a parità di assetto e di carico alare, la velocità cresce con la quota come $1/\sqrt{\sigma}$.

Attenzione

Il consumo specifico del getto *non* è costante con la quota: cresce al salire per effetto della diminuzione di temperatura e densità all'ingresso del compressore. Nei calcoli lo teniamo in conto con un fattore correttivo $\psi_2(z)$ tabulato (Appendice A), scrivendo $c_T(z) = c_T^{SL} \psi_2(z)$. La convenienza a salire, in autonomia, nasce dunque dal bilancio fra il guadagno $1/\sqrt{\sigma}$ e la perdita ψ_2 .

1.9 Effetto del vento sull'autonomia

Autonomia e durata finora calcolate sono riferite alla massa d'aria. Rispetto al *suolo*, un vento modifica la distanza percorsa. Sia V la velocità del velivolo rispetto all'aria, V' la velocità del vento e β l'angolo fra la direzione del vento e la traiettoria. Sviluppando la composizione vettoriale delle velocità e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, l'autonomia al suolo R' si lega a quella in aria calma R da

Autonomia in presenza di vento

$$R' = R \left[1 - \frac{V'^2}{2V^2} \sin^2 \beta + \frac{V'}{V} \cos \beta \right].$$

Casi limite: *vento in coda* ($\beta = 0$) $\Rightarrow R' = R(1 + V'/V)$; *vento in prua* ($\beta = 180^\circ$) $\Rightarrow R'' = R(1 - V'/V)$.

Il termine in $\sin^2 \beta$ penalizza sempre (deriva laterale da compensare); il termine in $\cos \beta$ aiuta con vento in coda e penalizza con vento in prua.

1.10 Raggio d'azione e indice di trasporto

Raggio d'azione. È la distanza R_a alla quale il velivolo può spingersi per poi *tornare alla base* senza rifornimento. Detti m_{FA} e m_{FR} i combustibili di andata e ritorno, si impone l'uguaglianza delle due tratte, $R_a = R_R$, con la formula di Bréguet applicata a ciascuna gamba e la chiusura del bilancio $m_{FA} + m_{FR} = m_F$. Ne risulta un sistema di due equazioni nelle due incognite m_{FA} , m_{FR} ; il raggio d'azione è *maggiore* della metà dell'autonomia, perché nella tratta di ritorno il velivolo è più leggero.

Indice di trasporto. Misura l'“efficacia di trasporto” come prodotto del carico pagante per la distanza, riferito alla massa al decollo:

$$i = \frac{m_P R}{m_0} \quad [\text{km}]. \quad (1.15)$$

Si annulla sia per $R = 0$ (nessun volo) sia per $R = R_{\max}$ (tutto combustibile, $m_P = 0$): esiste dunque un massimo intermedio, come vedremo tracciandone il diagramma.

Un colpo d'occhio ai cinque “diagrammi tipo”

Negli esercizi che seguono costruiremo cinque famiglie di diagrammi, tutti riconducibili alle formule di questo capitolo: (1) autonomia in funzione della frazione di combustibile; (2) indice di trasporto in funzione dell'autonomia; (3) carico pagante in funzione dell'autonomia (con e senza vento); (4) autonomia del getto in funzione della quota; (5) velocità di volo in funzione del tempo a durata massima. Ciascuno è un “ritratto” di una delle relazioni chiave qui derivate.

Esercizi risolti — velivoli a elica

Come leggere gli esercizi

Ogni esercizio segue lo stesso “attacco” in cinque mosse: **(1)** raccolta e conversione dei dati in SI; **(2)** scelta del modello fisico (quale formula chiave, quale assetto); **(3)** scrittura dell’equazione risolvante; **(4)** calcolo dell’incognita; **(5)** verifica e commento del risultato. Tutte le grandezze sono in unità SI; i consumi specifici, tabulati in unità pratiche, vengono convertiti al primo passo.

2.1 Autonomia in funzione della frazione di combustibile

Esercizio 1

Tracciare il diagramma dell’autonomia in funzione del rapporto $\zeta = m_F/m_0$ (frazione di combustibile), per un velivolo che vola all’assetto di efficienza $E = 15$, con consumo specifico $C = 180 \text{ g}/(\text{CV h})$ e rendimento dell’elica $\eta = 0,88$.

Modello. Vale la formula di Bréguet $R = K \ln \frac{m_0}{m_0 - m_F} = K \ln \frac{1}{1 - \zeta}$, avendo diviso numeratore e denominatore per m_0 . Il fattore di merito, in forma pratica, è $K = 270 \eta E / C$ con C in $\text{kg}/(\text{CV h})$.

Calcolo di K . Convertiamo il consumo: $C = 180 \text{ g}/(\text{CV h}) = 0,18 \text{ kg}/(\text{CV h})$. Dunque

$$K = 270 \frac{\eta E}{C} = 270 \cdot \frac{0,88 \cdot 15}{0,18} = 270 \cdot 73,33 = 19\,800 \text{ km}.$$

Tabella. Facciamo variare ζ dallo 0% al 50% (oltre metà del peso in combustibile non ha senso fisico: resterebbe troppo poco per struttura e carico). Per ogni ζ calcoliamo $R = K \ln \frac{1}{1 - \zeta}$:

Tabella 2.1. Autonomia in funzione della frazione di combustibile.

ζ [%]	$1 - \zeta$	R [km]
0	1,00	0,0
5	0,95	1015,6
10	0,90	2086,1
15	0,85	3217,9
20	0,80	4418,2
25	0,75	5696,1
30	0,70	7062,2
35	0,65	8529,5
40	0,60	10 114,3
45	0,55	11 837,2
50	0,50	13 724,3

Diagramma. La curva è concava verso l'alto: raddoppiare la frazione di combustibile *più* che raddoppia l'autonomia, perché il logaritmo cresce sempre più rapidamente man mano che $m_1 \rightarrow 0$. La Figura 2.1 mostra anche come, al crescere del fattore di merito K (aerodinamica o propulsione migliori), l'intera famiglia di curve “ruoti verso l'alto”.

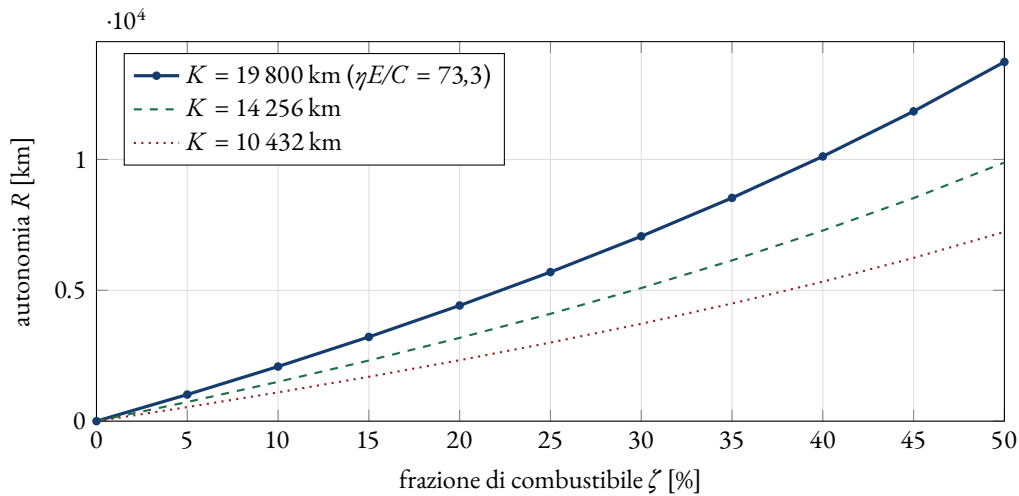


Figura 2.1. Autonomia in funzione della frazione di combustibile per tre valori del fattore di merito K (Diagramma tipo N.1).

2.2 Autonomia di un motoelica ad assetto assegnato

Esercizio 2

Calcolare l'autonomia di un motoelica che vola ad assetto costante $C_L = 0,7$, sapendo che il combustibile imbarcato è il 40% della massa totale. Dati: $S = 27 \text{ m}^2$; $C_{D0} = 0,021$; $b = 14 \text{ m}$; fattore di Oswald $e = 0,95$; $\eta = 0,85$; $C = 0,21 \text{ kg}/(\text{CV h})$.

Aerodinamica. L'allungamento è $AR = b^2/S = 14^2/27 = 7,26$. Dalla polare parabolica:

$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR e} = 0,021 + \frac{0,7^2}{\pi \cdot 7,26 \cdot 0,95} = 0,04362, \quad E = \frac{C_L}{C_D} = \frac{0,7}{0,04362} = 16,05.$$

Fattore di merito e autonomia.

$$K = 270 \frac{\eta E}{C} = 270 \cdot \frac{0,85 \cdot 16,05}{0,21} = 17\,540 \text{ km}.$$

Con $\zeta = 0,40$:

$$R = K \ln \frac{1}{1 - \zeta} = 17540 \cdot \ln \frac{1}{0,60} = 17540 \cdot 0,5108 \approx \boxed{8959 \text{ km}}.$$

Osservazione

Notare che il dato “ $C_L = 0,7$ ” fissa l'assetto: non stiamo volando all'efficienza massima, che per questa polare varrebbe

$$E_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi AR e / C_{D0}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi \cdot 7,26 \cdot 0,95 / 0,021} = 18,0.$$

Volando a $E_{\max}$ l'autonomia salirebbe a $\sim 10\,000 \text{ km}$: l'assetto conta quanto il combustibile.

2.3 Raggio d'azione e potenza di un bombardiere

Esercizio 3

Un bombardiere a elica esegue una missione in cui deve sganciare sull'obiettivo tutto il carico di bombe e *tornare alla base*. Sapendo che consuma 250 kg di combustibile per decollo e salita e deve mantenere una riserva di 500 kg all'arrivo, e che tutto il volo avviene all'assetto di efficienza massima a $z = 4000$ m, calcolare (1) il raggio d'azione e (2) la potenza che il motore deve fornire inizialmente.

Dati: $m_0 = 32\,500$ kg; $m_v = 21\,000$ kg; carico bombe $m_B = 6000$ kg; $S = 120$ m²; $AR = 7,5$; $C_{D0} = 0,023$; $\eta = 0,82$; $C = 0,22$ kg/(CV h).

(1) Bilancio del combustibile. Il combustibile speso in crociera (andata + ritorno) è quanto resta dopo aver tolto vuoto, bombe, decollo e riserva:

$$m_F = m_0 - (m_v + m_B + 250 \text{ kg} + 500 \text{ kg}) = 32\,500 - 27\,750 = 4\,750 \text{ kg}.$$

La massa all'inizio dell'andata è $m_A = m_0 - 250 = 32\,250$ kg.

Assetto di crociera. All'efficienza massima:

$$E_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi AR}{C_{D0}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi \cdot 7,5}{0,023}} = 16,00, \quad C_L = \sqrt{\pi AR C_{D0}} = 0,736, \quad C_D = 2C_{D0} = 0,046.$$

Il fattore di merito è $K = 270 \eta E_{\max} / C = 270 \cdot 0,82 \cdot 16,00 / 0,22 = 16\,100$ km.

Condizione di raggio d'azione. Detti m_{FA} , m_{FR} i combustibili di andata e ritorno, e imposte le uguaglianze delle tratte $R_A = R_R$ con $m_{FA} + m_{FR} = m_F$, si ricava (ponendo $x = m_A - m_{FA}$) l'equazione di secondo grado

$$x^2 - m_B x - m_A (m_A - m_B - m_F) = 0 \implies x^2 - 6000 x - 32\,250 \cdot 21\,500 = 0,$$

la cui radice fisicamente accettabile è $x = 29\,502$ kg, da cui

$$m_{FA} = m_A - x = 2\,748 \text{ kg}, \quad m_{FR} = m_F - m_{FA} = 2\,002 \text{ kg}.$$

Raggio d'azione. Applicando Bréguet alla tratta di andata:

$$R_a = K \ln \frac{m_A}{m_A - m_{FA}} = 16\,100 \cdot \ln \frac{32\,250}{29\,502} = 16\,100 \cdot 0,0890 \approx \boxed{1434 \text{ km}}.$$

Osservazione

$R_a = 1434$ km è *più* della metà dell'autonomia complessiva ($R_{\text{tot}} = K \ln \frac{m_A}{m_A - m_F} \approx 2650$ km): nel ritorno il velivolo è più leggero e "rende" di più. Come verifica, applicando Bréguet al ritorno ($m_R = m_A - m_{FA} - m_B = 23\,502$ kg) si riottiene $R_R = 16\,100 \ln \frac{23\,502}{21\,500} = 1434$ km: le due tratte coincidono, come imposto.

(2) Potenza iniziale. All'inizio dell'andata $W = m_A g = 32\,250 \cdot 9,80665 = 316\,264$ N. Alla quota $z = 4000$ m l'ISA (Appendice A) dà $\rho = 0,819$ kg/m³. La velocità di equilibrio è

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 316\,264}{0,819 \cdot 120 \cdot 0,736}} = 93,5 \text{ m/s} = 336,6 \text{ km/h}.$$

La potenza necessaria e quella del motore sono

$$P_r = \frac{WV}{E} = \frac{316\,264 \cdot 93,5}{16,00} = 1848 \text{ kW}, \quad \Pi = \frac{P_r}{\eta} = \frac{1848}{0,82} = \boxed{2254 \text{ kW}} (\approx 3064 \text{ CV}).$$

2.4 Diagramma dell'indice di trasporto

Esercizio 4

Tracciare il diagramma dell'indice di trasporto i in funzione dell'autonomia per un velivolo di massa totale $m_0 = 23\,000$ kg che vola ad assetto costante $E = 18$. Dati: $m_v = 13\,000$ kg; $\eta = 0,88$; $C = 0,20$ kg/(CV h).

Idea. L'indice $i = m_P R / m_0$ dipende dall'autonomia *tramite* il combustibile: fissata R , la formula di Bréguet dà il combustibile necessario $m_F = m_0(1 - e^{-R/K})$, e quindi il carico pagante residuo $m_P = (m_0 - m_v) - m_F$.

Estremi. Il fattore di merito è $K = 270 \cdot 0,88 \cdot 18 / 0,20 = 21\,384$ km. L'autonomia massima si ha col serbatoio pieno e $m_P = 0$, cioè $m_F = m_0 - m_v = 10\,000$ kg:

$$R_{\max} = K \ln \frac{m_0}{m_v} = 21\,384 \cdot \ln \frac{23\,000}{13\,000} = 12\,200 \text{ km.}$$

Agli estremi $R = 0$ e $R = R_{\max}$ l'indice si annulla; in mezzo esiste un massimo.

Esempio di calcolo ($R = 1000$ km). $m_F = 23\,000(1 - e^{-1000/21384}) = 1051$ kg, quindi $m_P = 10\,000 - 1051 = 8\,949$ kg e $i = 8\,949 \cdot 1000 / 23\,000 = 389$ km. Ripetendo si ottiene la curva.

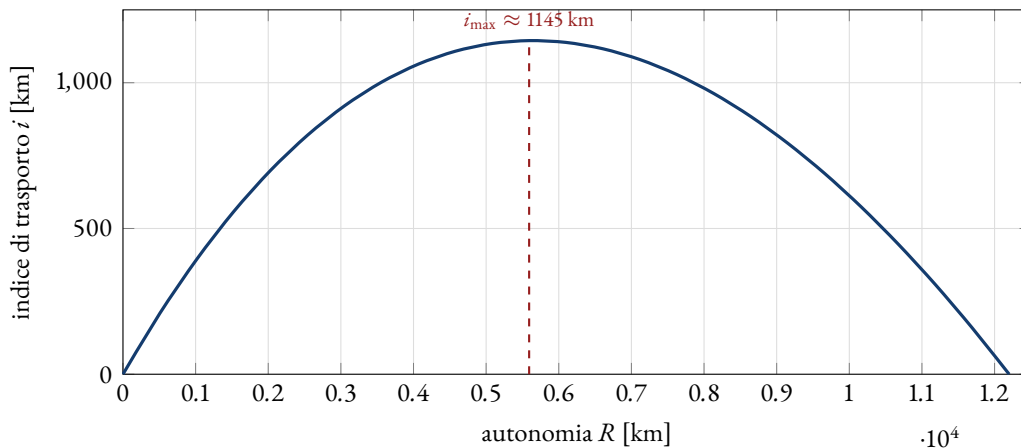


Figura 2.2. Indice di trasporto in funzione dell'autonomia (Diagramma tipo N. 2). Il massimo cade a $R \approx 5600$ km.

2.5 Consumo a quota e velocità costanti (tre metodi)

Esercizio 5

Un velivolo da trasporto a elica deve realizzare un indice di trasporto $i = 735$ km volando a quota $z = 9000$ m e velocità $V = 530$ km/h *costanti*. Calcolare il combustibile consumato. Dati: $m_0 = 55\,000$ kg; $AR = 7,935$; $b = 34,5$ m; $m_P = 16\,000$ kg; $C_{D0} = 0,021$; $\eta = 0,82$; $C = 0,21$ kg/(CV h).

Attenzione

Qui *quota* e *velocità* sono costanti, non l'assetto. Al diminuire della massa per consumo, $C_L = 2W/(\rho S V^2)$ diminuisce di continuo: l'assetto *varia*. Le formule di Bréguet (dedotte ad assetto costante) **non** sono applicabili tal quali: procederemo per via “potenza $\rightarrow$ portata”.

Preliminari. $S = b^2/AR = 34,5^2/7,935 = 150 \text{ m}^2$. Dall'indice si ricava l'autonomia: $R = i m_0/m_P = 735 \cdot 55000/16000 = 2526,6 \text{ km}$; il tempo di volo è $t = R/V = 2526,6/530 = 4,767 \text{ h}$ (4 h 46 min). Alla quota $\rho = 0,466 \text{ kg/m}^3$.

Metodo A — assetto iniziale. Calcoliamo lo stato all'inizio ($W = m_0 g = 539\,366 \text{ N}$):

$$C_L = \frac{2W}{\rho S V^2} = 0,712, \quad C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR} = 0,0413, \quad \Pi = \frac{\frac{1}{2} \rho S V^3 C_D}{\eta} = 5622 \text{ kW}.$$

La portata è $\dot{m}_F = c_P \Pi = 1605 \text{ kg/h}$; assumendola costante, $m_F \approx \dot{m}_F t = 7652 \text{ kg}$. È una *sovrastima*: a fine volo il velivolo è più leggero e consuma meno.

Metodo B — potenza media. Ripetendo il calcolo con la massa finale ($m_1 = m_0 - 7652$) si trova $\Pi_1 \approx 4906 \text{ kW}$ (6671 CV). Con la potenza media $\bar{\Pi} = (\Pi_0 + \Pi_1)/2$: $m_F \approx 7165 \text{ kg}$.

Metodo C — integrazione a tratte. Dividiamo l'autonomia in tratte di 500 km; per ciascuna ricalcoliamo assetto, potenza e consumo, aggiornando la massa. Il risultato converge al valore “vero”:

Tabella 2.2. Metodo delle tratte (500 km).

s [km]	m [kg]	C_L	C_D	Π [CV]	Δm_F [kg]
0	55 000	0,7115	0,0413	7644	1514
500	53 486	0,6919	0,0402	7440	1474
1000	52 012	0,6728	0,0392	7247	1436
1500	50 576	0,6543	0,0382	7064	1399
2000	49 177	0,6362	0,0372	6890	1365
2527	47 741		$\rightarrow m_F = 7259 \text{ kg}$		

Osservazione

I tre metodi danno 7652 kg (A, grossolano), 7165 kg (B) e 7259 kg (C). Infittendo le tratte a 50 km si converge a $\approx 7182 \text{ kg}$: è il valore di riferimento. La lezione è che, quando l'assetto varia, *come* si media conta: la media di potenza (B) e l'integrazione a tratte (C) sono entrambe accettabili in prima approssimazione, il metodo A no.

2.6 Consumo di andata e ritorno con assetto da V_0

Esercizio 6

Un motoelica da ricognizione compie una missione costiera con raggio d'azione $R_a = 850 \text{ km}$. La missione si svolge alla quota corrispondente a $p = 640 \text{ mmHg}$ e $t = 6^\circ \text{C}$, con velocità iniziale $V_0 = 310 \text{ km/h}$ ad *assetto costante*; il decollo e la salita costano 150 kg. Calcolare il combustibile di andata e di ritorno. Dati: $m_0 = 15\,500 \text{ kg}$; $b = 18 \text{ m}$; $AR = 7,2$; $C_{D0} = 0,021$; $\eta = 0,82$; $C = 0,18 \text{ kg/(CV h)}$.

Densità alla quota. $p = 640 \cdot 133,322 = 85\,326 \text{ Pa}$, $T = 6 + 273,15 = 279,15 \text{ K}$, dunque $\rho = p/(R_a^{\text{aria}} T) = 85326/(287,05 \cdot 279,15) = 1,065 \text{ kg/m}^3$.

Assetto fissato da V_0 . $S = b^2/AR = 18^2/7,2 = 45 \text{ m}^2$. La massa all'inizio andata è $m_A = m_0 - 150 = 15\,350 \text{ kg}$ ($W = 150\,532 \text{ N}$). Con $V_0 = 86,11 \text{ m/s}$:

$$C_L = \frac{2W}{\rho S V_0^2} = 0,847, \quad C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR} = 0,0527, \quad E = 16,07, \quad K = 270 \frac{\eta E}{C} = 19\,761 \text{ km}.$$

Combustibili. L'andata: $m_{FA} = m_A(1 - e^{-R_d/K}) = 15350(1 - e^{-850/19761}) = 646,3 \text{ kg}$. Il ritorno parte da $m_R = m_A - m_{FA} = 14704 \text{ kg}$ e, imponendo la stessa distanza, $m_{FR} = m_R(1 - e^{-R_d/K}) = 619,1 \text{ kg}$.

$$m_{FA} = 646,3 \text{ kg}, \quad m_{FR} = 619,1 \text{ kg}, \quad m_F^{\text{cruise}} = 1265,4 \text{ kg}.$$

Il ritorno consuma meno dell'andata perché il velivolo, alleggerito, richiede minore spinta.

2.7 Carico pagante—autonomia con vento

Esercizio 7

Tracciare il diagramma del carico pagante m_P in funzione dell'autonomia per un quadrimotore da trasporto che vola all'efficienza massima a $z = 5000 \text{ m}$, sia in aria calma sia con un vento costante $V' = 20 \text{ m/s}$ in coda e in prua. Dati: $m_0 = 53000 \text{ kg}$; $m_v = 28000 \text{ kg}$; $S = 189 \text{ m}^2$; $AR = 9,5$; $C_{D0} = 0,022$; $\eta = 0,82$; $C = 0,19 \text{ kg/(CV h)}$.

Assetto e fattore di merito. $E_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi \cdot 9,5/0,022} = 18,42$, $C_L = \sqrt{\pi AR C_{D0}} = 0,810$, $K = 270 \cdot 0,82 \cdot 18,42/0,19 = 21459 \text{ km}$.

Velocità e fattori di vento. A $z = 5000 \text{ m}$, $\rho = 0,736 \text{ kg/m}^3$ e con carico alare iniziale $W_0/S = m_0 g/S = 2750 \text{ N/m}^2$:

$$V = \sqrt{\frac{2(W_0/S)}{\rho C_L}} = 96,0 \text{ m/s}.$$

I fattori moltiplicativi sono $1 + V'/V = 1,208$ (coda) e $1 - V'/V = 0,792$ (prua).

Tabella e diagramma. Per ogni carico pagante m_P (da 0 a 25 t) il combustibile è $m_F = (m_0 - m_v) - m_P$ e l'autonomia in aria calma $R = K \ln \frac{m_0}{m_0 - m_F}$; le autonomie con vento sono $R' = 1,208R$ e $R'' = 0,792R$.

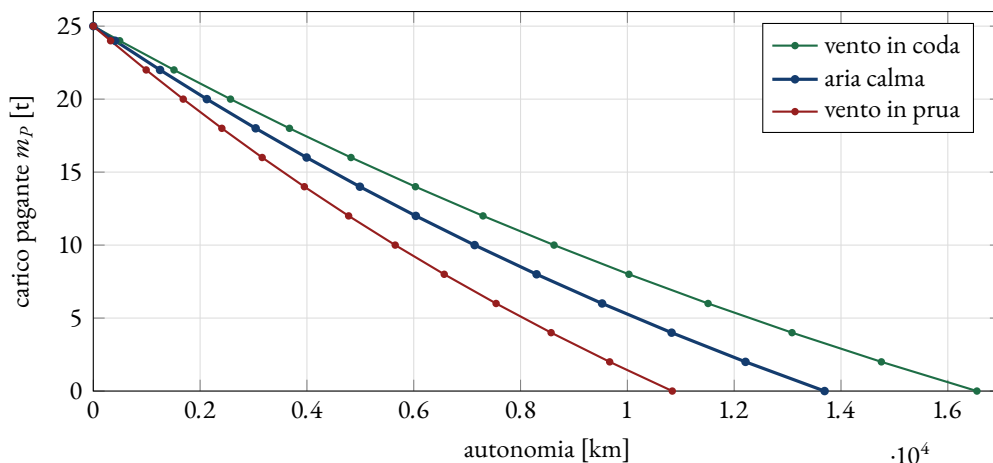


Figura 2.3. Carico pagante in funzione dell'autonomia, in aria calma e con vento (Diagramma tipo N. 3).

Osservazione

Le tre curve hanno la stessa forma, “dilatata” orizzontalmente dal fattore di vento: il vento in coda sposta la curva verso destra (più autonomia a parità di carico), quello in prua verso sinistra. Il carico pagante massimo (25 t, per cui $R = 0$) e l'autonomia massima ($m_P = 0$) non dipendono dal vento solo agli

estremi degeneri.

2.8 Determinazione dell'assetto e dell'allungamento

Esercizio 8

Un bimotore a elica ha autonomia massima $R_{\max} = 11\,110$ km ottenuta con rapporto di masse $m_0/m_1 = 2$. Calcolare l'assetto di volo (C_L), l'allungamento $\lambda \equiv AR$ e la velocità all'inizio della crociera. Dati: $m_0 = 35\,000$ kg; carico alare $m_0/S = 250$ kg/m²; $\eta = 0,78$; $C = 0,21$ kg/(CV h); $C_{D0} = 0,023$; quota di crociera $z = 4000$ m.

Dall'autonomia all'efficienza. Invertendo Bréguet, $R_{\max} = K \ln 2$ dà $K = R_{\max}/\ln 2 = 11110/0,6931 = 16\,028$ km; poiché $K = 270 \eta E/C$,

$$E = \frac{K C}{270 \eta} = \frac{16028 \cdot 0,21}{270 \cdot 0,78} = 15,98.$$

Dall'efficienza all'allungamento. L'autonomia massima si ha a $E_{\max}$; invertendo $E_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi AR/C_{D0}}$:

$$AR = \frac{(2E_{\max})^2 C_{D0}}{\pi} = \frac{(2 \cdot 15,98)^2 \cdot 0,023}{\pi} = 7,48, \quad C_L = \sqrt{\pi AR C_{D0}} = \boxed{0,736}.$$

Velocità di crociera. Con $S = m_0/250 = 140$ m², $W = m_0 g = 343\,233$ N e $\rho = 0,819$ kg/m³:

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 343233}{0,819 \cdot 140 \cdot 0,736}} = 90,2 \text{ m/s} = \boxed{324,8 \text{ km/h}}.$$

2.9 Consumo con il metodo delle tratte brevi

Esercizio 9

Un aereo a elica vola a $z = 5000$ m e $V = 375$ km/h costanti per un'autonomia $R = 1210$ km; per decollo e salita consuma 50 kg. Calcolare il combustibile di crociera. Dati: $C_{D0} = 0,021$; $m_0 = 8550$ kg; $\eta = 0,85$; $AR = 6,5$; $b = 13$ m; $C = 0,18$ kg/(CV h).

Impostazione. Come nell'Esercizio 5, quota e velocità costanti $\Rightarrow$ assetto variabile $\Rightarrow$ integrazione a tratte. Qui usiamo tratte brevi (100 m), così il risultato è praticamente esatto. $S = b^2/AR = 169/6,5 = 26$ m²; $\rho(5000 \text{ m}) = 0,736$ kg/m³; $V = 104,2$ m/s.

Procedura. Partendo da $m = m_0 - 50 = 8500$ kg, per ogni tratta Δs : (i) $C_L = 2W/(\rho S V^2)$; (ii) $C_D = C_{D0} + C_L^2/(\pi AR)$; (iii) $\Pi = \frac{1}{2} \rho S V^3 C_D/\eta$; (iv) $\Delta m_F = c_P \Pi \Delta s/V$; (v) aggiorna $m \leftarrow m - \Delta m_F$. Sommando su tutte le tratte:

$$m_F^{\text{cruise}} \approx 509 \text{ kg}.$$

Osservazione

Il consumo di crociera (509 kg) è quasi il 6% della massa: coerente con un'autonomia modesta (1210 km) e un velivolo leggero. La finezza delle tratte (100 m) rende trascurabile l'errore di discretizzazione.

2.10 Autonomia in funzione del carico pagante, con vento

Esercizio 10

Tracciare il diagramma dell'autonomia in funzione del carico pagante per un velivolo a elica che vola all'efficienza massima a $z = 5000$ m, investito da un vento $V' = 45$ km/h secondo un angolo $\beta = 22^\circ$. Dati: $m_0 = 28\,000$ kg; $m_v = 16\,000$ kg; $S = 96,5$ m²; $C = 0,220$ kg/(CV h); $AR = 8,2$; $C_{D0} = 0,021$; $\eta = 0,85$.

Assetto, velocità, fattore di vento. $E_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi \cdot 8,2/0,021} = 17,51$, $C_L = 0,736$, $K = 270 \cdot 0,85 \cdot 17,51/0,220 = 18\,267$ km. A $z = 5000$ m, $\rho = 0,736$ e $V = \sqrt{2(m_0 g/S)/(\rho C_L)} = 102,5$ m/s. Con $V' = 12,5$ m/s e $\beta = 22^\circ$:

$$\frac{R'}{R} = 1 - \frac{V'^2}{2V^2} \sin^2 \beta + \frac{V'}{V} \cos \beta = 1,112.$$

Tabella 2.3. Autonomia (aria calma R e con vento R') al variare del carico pagante.

m_p [t]	R [km]	R' [km]
0	13 693	15 229
2	11 339	12 611
4	8960	9965
6	6818	7583
8	4887	5435
10	3124	3474
12	1502	1670

Osservazione

Con $\beta = 22^\circ$ (prevalentemente in coda) il vento aumenta l'autonomia dell'11,2% a ogni carico. La curva $R'(m_p)$ è quella in aria calma scalata per 1,112.

2.11 Vento: calcolo inverso della velocità del vento

Esercizio 11

Un motoelica vola ad assetto costante fissato dalla velocità iniziale $V_0 = 415$ km/h a $z = 4000$ m. In aria calma la sua autonomia sarebbe $R = 5044$ km; investito da un vento secondo $\beta = 25^\circ$, l'autonomia al suolo risulta $R' = 6203$ km. Calcolare la velocità V' del vento. Dati: $m_0 = 25\,000$ kg; $S = 80$ m²; $b = 28$ m; $C_{D0} = 0,022$; $\eta = 0,82$; $C = 0,21$ kg/(CV h).

Velocità di volo. $AR = b^2/S = 784/80 = 9,8$; $\rho(4000 \text{ m}) = 0,819$; $V_0 = 115,28$ m/s. (I dati aerodinamici servono a confermare, tramite Bréguet, l'autonomia in aria calma $R = 5044$ km; qui la usiamo come dato.)

Inversione della formula del vento. Posto $R'/R = 6203/5044 = 1,2298$, dobbiamo risolvere in V' :

$$1 - \frac{V'^2}{2V_0^2} \sin^2 \beta + \frac{V'}{V_0} \cos \beta = 1,2298.$$

Con $V_0 = 115,28$ m/s, $\sin^2 25^\circ = 0,1786$, $\cos 25^\circ = 0,9063$:

$$-6,72 \cdot 10^{-6} V'^2 + 7,862 \cdot 10^{-3} V' - 0,2298 = 0 \Rightarrow V' = \boxed{30,0 \text{ m/s}} (\approx 108 \text{ km/h}).$$

(Delle due radici si scarta quella non fisica, $V' \gg V_0$.)

2.12 Durata massima di un motoelica

Esercizio 12

Calcolare la durata massima di un motoelica che vola a $z = 3000$ m all'assetto di massima durata. Dati: $C_{D0} = 0,019$; $AR = 9,2$; carico alare $m_0/S = 220$ kg/m²; combustibile 3500 L; $C = 0,200$ kg/(CV h); $\eta = 0,82$; densità del combustibile $\gamma_F = 0,68$ kg/L.

Assetto di massima durata. È quello che massimizza $C_L^{3/2}/C_D$ (Tabella 1.1):

$$\left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D} \right)_{\max} = \frac{(3\pi AR)^{3/4}}{4 C_{D0}^{1/4}} = \frac{(3\pi \cdot 9,2)^{3/4}}{4 \cdot 0,019^{1/4}} = 19,13.$$

Masse. $m_F = 3500 \text{ L} \cdot 0,68 = 2380$ kg; $W_0 = m_0 g$, $W_1 = (m_0 - m_F)g$. Con $m_0/S = 220$ kg/m² il carico alare in peso è $W_0/S = 220 \cdot g = 2158$ N/m²; $\rho(3000 \text{ m}) = 0,909$.

Durata. Applicando la formula chiave della durata dell'elica (con $\sqrt{m_0/m_1} = \sqrt{W_0/W_1}$):

$$t = \frac{\eta}{g c_P} \left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D} \right)_{\max} \sqrt{\frac{2\rho}{W_0/S}} \left(\sqrt{\frac{m_0}{m_1}} - 1 \right).$$

Con $\sqrt{2\rho/(W_0/S)} = \sqrt{2 \cdot 0,909/2158} = 0,02903$ e $\sqrt{m_0/m_1} - 1 = \sqrt{8200/5820} - 1 = 0,1870$:

$$t = \frac{0,82}{9,80665 \cdot c_P} \cdot 19,13 \cdot 0,02903 \cdot 0,1870 = 114\,976 \text{ s} = \boxed{31,94 \text{ h}} \text{ (31 h 56 min)}.$$

(essendo $c_P = 0,200/(735,499 \cdot 3600) = 7,56 \times 10^{-8}$ kg/J; i valori numerici $m_0 = 8200$ kg, $m_1 = 5820$ kg discendono dal carico alare e dal combustibile.)

Osservazione

Quasi 32 ore di volo: valore da primato, tipico di velivoli specializzati per sorveglianza. La quota *bassa* (3000 m) è voluta: la durata dell'elica cresce con ρ , quindi conviene volare in basso — l'opposto dell'autonomia del getto.

2.13 Combustibile per una durata assegnata

Esercizio 13

Per un motoelica ad assetto costante (fissato da $V_0 = 380$ km/h) calcolare il combustibile da imbarcare, in litri, per una durata di 33 h 15 min 35 s. Dati: $m_0 = 23\,000$ kg; decollo/salita 180 kg; riserva 400 kg; $C = 0,21$ kg/(CV h); $\eta = 0,85$; $\gamma_F = 0,68$ kg/L; $z = 4500$ m; $S = 75$ m²; $AR = 9,8$; $C_{D0} = 0,021$.

Assetto da V_0 . $\rho(4500 \text{ m}) = 0,777$; $V_0 = 105,56$ m/s; $W_0 = m_0 g = 225\,553$ N:

$$C_L = \frac{2W_0}{\rho S V_0^2} = 0,695, \quad C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR} = 0,0367, \quad \frac{C_L^{3/2}}{C_D} = 15,80.$$

Inversione della durata. La durata è $t = 33,26 \text{ h} = 119\,735 \text{ s}$. Dalla formula della durata si ricava la massa finale m_1 (quindi il combustibile di crociera $m_F^{\text{cr}} = m_0 - m_1$):

$$m_F^{\text{cr}} \approx 9500 \text{ kg.}$$

Aggiungendo decollo e riserva, la massa totale di combustibile è $m_F = 9500 + 180 + 400 = 10\,080 \text{ kg}$, cioè un volume

$$\mathcal{V} = \frac{m_F}{\gamma_F} = \frac{10080}{0,68} = \boxed{14\,823 \text{ L}}.$$

Esercizi risolti — velivoli a getto

Cambio di propulsore, cambio di formule

Passiamo ai velivoli a reazione. Cambiano due cose: il consumo è proporzionale alla *spinta* (non alla potenza) e si usa il consumo specifico c_T in forma ponderale ($c_T = k/3600$ con k in $\text{kg}/(\text{kgf h})$). Di conseguenza l'autonomia va con le *radici* dei pesi e *migliora con la quota*, mentre la durata segue di nuovo un logaritmo ma all'assetto $E_{\max}$.

3.1 Autonomia massima di un turbogetto

Esercizio 14

Calcolare l'autonomia massima di un turbogetto che vola a $z = 2000$ m. Dati: $m_0 = 5700$ kg; $S = 22$ m²; $C_{D0} = 0,018$; $AR = 7,4$; combustibile $m_F = 2200$ kg; $k = 1,05$ kg/(kgf h).

Assetto di massima autonomia. Per il getto occorre massimizzare $\sqrt{C_L}/C_D$ (Tabella 1.1):

$$\left(\frac{\sqrt{C_L}}{C_D}\right)_{\max} = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi AR}{3}\right)^{1/4} C_{D0}^{-3/4} = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi \cdot 7,4}{3}\right)^{1/4} 0,018^{-3/4} = 25,46,$$

cui corrispondono $C_L = \sqrt{\pi AR C_{D0}/3} = 0,373$ e $C_D = \frac{4}{3} C_{D0} = 0,024$ ($E = 15,56$).

Autonomia. Con $c_T = k/3600 = 2,917 \times 10^{-4}$ /s, $\rho(2000 \text{ m}) = 1,006$ kg/m³, $W_0 = m_0 g = 55\,898$ N, $W_1 = (m_0 - m_F)g = 34\,323$ N:

$$R_{\max} = \frac{2}{c_T} \left(\frac{\sqrt{C_L}}{C_D}\right)_{\max} \sqrt{\frac{2}{\rho S}} (\sqrt{W_0} - \sqrt{W_1}).$$

Numericamente $\sqrt{2/(\rho S)} = 0,3006$ e $\sqrt{W_0} - \sqrt{W_1} = 236,4 - 185,3 = 51,16$:

$$R_{\max} = \frac{2}{2,917 \cdot 10^{-4}} \cdot 25,46 \cdot 0,3006 \cdot 51,16 \approx \boxed{2685 \text{ km}}.$$

3.2 Autonomia del turbogetto in funzione della quota

Esercizio 15

Tracciare il diagramma dell'autonomia di un turbogetto in funzione della quota, supponendo il volo sempre all'assetto $C_L = 0,4$. Dati: $m_0 = 6800$ kg; carico alare $m_0/S = 270$ kg/m²; $m_F = 2500$ kg; $C_{D0} = 0,019$; $AR = 6,7$; consumo specifico al livello del mare $k^{SL} = 1,18$ (da correggere con $\psi_2(z)$).

Assetto fissato. Con $C_L = 0,4$ (non l'ottimo): $C_D = C_{D0} + C_L^2/(\pi AR) = 0,0266$, $E = 15,04$, $\sqrt{C_L/C_D} = 23,78$; $S = m_0/270 = 25,19 \text{ m}^2$.

Dipendenza dalla quota. Nell'autonomia del getto compaiono due effetti di quota: $\rho = \rho_0 \sigma$ al denominatore (favorevole al salire) e il consumo $c_T = c_T^{SL} \psi_2(z)$ (sfavorevole). Fissato l'assetto:

$$R(z) = \underbrace{\frac{2}{c_T^{SL}} \frac{\sqrt{C_L}}{C_D} \sqrt{\frac{2}{\rho_0 S}} (\sqrt{W_0} - \sqrt{W_1})}_{R(0)=1953 \text{ km}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma} \psi_2(z)}.$$

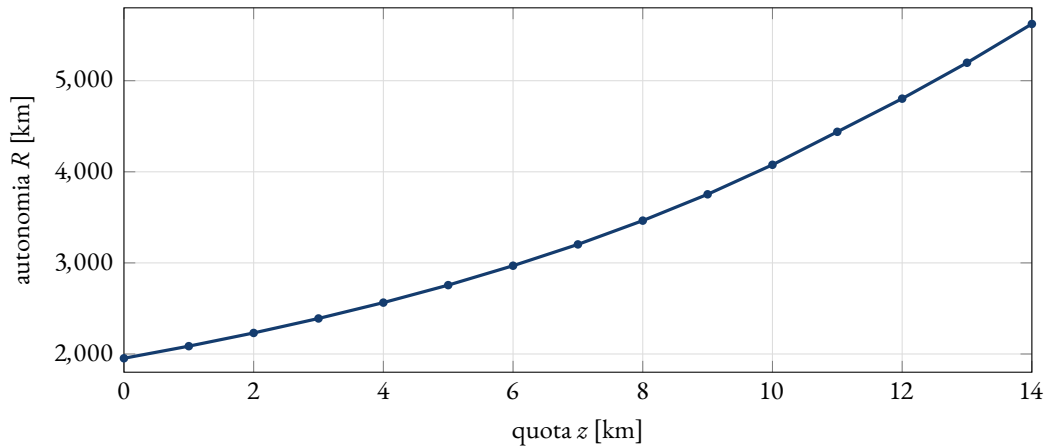


Figura 3.1. Autonomia del turbogetto in funzione della quota, ad assetto $C_L = 0,4$ (Diagramma tipo N. 4). Prevala l'effetto favorevole $1/\sqrt{\sigma}$.

Osservazione

La curva cresce monotonamente: fino alla tropopausa ($\sim 11 \text{ km}$) il guadagno $1/\sqrt{\sigma}$ supera nettamente la perdita ψ_2 ; oltre, dove T è costante e ψ_2 si “congela”, l'autonomia continua a salire per il solo effetto della densità. È la ragione fisica per cui i jet di linea volano alti.

3.3 Durata massima di un turbogetto e legge $V(t)$

Esercizio 16

Calcolare la durata massima di un turbogetto e tracciare il diagramma della velocità di volo in funzione del tempo, nell'ipotesi che il velivolo si mantenga all'assetto di massima durata a $z = 1000 \text{ m}$. Dati: $m_0 = 23\,000 \text{ kg}$; $C_{D0} = 0,023$; $AR = 6,5$; $m_F = 9500 \text{ kg}$; $k = 1,05 \text{ kg/(kgf h)}$; $S = 78 \text{ m}^2$; coefficiente correttivo della resistenza indotta $i = 1,1$.

Assetto di massima durata. La durata del getto è massima a $E_{\max}$. Il coefficiente $i = 1,1$ “peggiora” la resistenza indotta ($C_D = C_{D0} + i C_L^2/(\pi AR)$), equivalente a un fattore di Oswald $e = 1/i = 0,909$:

$$E_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi AR e}{C_{D0}}} = 14,20, \quad C_L = \sqrt{\pi AR e C_{D0}} = 0,653.$$

Durata. Con $c_T = k/3600 = 2,917 \times 10^{-4} \text{ s}$, $W_0 = m_0 g$, $W_1 = (m_0 - m_F)g$:

$$t_{\max} = \frac{E_{\max}}{c_T} \ln \frac{W_0}{W_1} = \frac{14,20}{2,917 \cdot 10^{-4}} \ln \frac{23000}{13500} = 25\,949 \text{ s} = \boxed{7,208 \text{ h}} \text{ (7 h 12 min)}.$$

Legge $V(t)$. Ad assetto costante e quota costante, la portanza $L = W$ impone $V = \sqrt{2(W/S)/(\rho C_L)}$: al calare del peso la velocità *diminuisce*. Poiché $W(t) = W_0 e^{-c_T t/E_{\max}}$ (integrale della durata), si ha $V(t) = V_0 e^{-c_T t/(2E_{\max})}$: decadimento esponenziale.

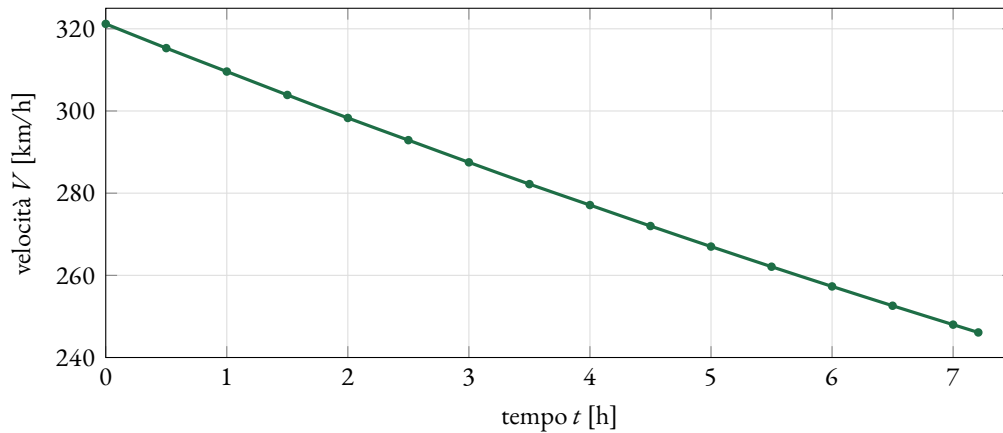


Figura 3.2. Velocità di volo in funzione del tempo a durata massima (Diagramma tipo N. 5). Il velivolo rallenta da 321 km/h a 246 km/h.

3.4 Autonomia di un jet di linea ad assetto costante

Esercizio 17

Calcolare l'autonomia di un jet da trasporto che vola ad assetto costante con velocità iniziale $V_0 = 800$ km/h a $z = 8500$ m. Dati: $b = 28,47$ m; $S = 92,97$ m²; $m_0 = 44\,450$ kg; $m_v = 24\,000$ kg; $C_{D0} = 0,012$; carico pagante $m_P = 8500$ kg; riserva 1600 kg; $k^{SL} = 1,15$ kg/(kgf h) (correggere con ψ_2).

Assetto e consumo. $AR = b^2/S = 8,72$; $\rho(8500 \text{ m}) = 0,495$; $V_0 = 222,2$ m/s. L'assetto iniziale (che resta costante) è

$$C_L = \frac{2m_0 g}{\rho S V_0^2} = 0,384, \quad C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR} = 0,01737, \quad E = 22,08.$$

Il consumo va corretto per la quota: $\psi_2(8500 \text{ m}) = 0,852$, quindi $k = 1,15 \cdot 0,852 = 0,980$ e $c_T = k/3600 = 2,723 \times 10^{-4}$ /s.

Masse e autonomia. $m_F = m_0 - m_v - m_P - 1600 = 10\,350$ kg; $W_0 = m_0 g = 435\,881$ N, $W_1 = (m_0 - m_F)g = 334\,388$ N. Poiché l'assetto è costante ($\sqrt{C_L}/C_D = E/\sqrt{C_L}$):

$$R = \frac{2E}{c_T} \sqrt{\frac{2}{\rho S C_L}} (\sqrt{W_0} - \sqrt{W_1}) = \boxed{4473 \text{ km}}.$$

3.5 Durata di un jet ad assetto costante (senza dato di consumo)

Esercizio 18

Un jet vola ad assetto costante a $z = 8000$ m con velocità iniziale $V_0 = 650$ km/h realizzando un'autonomia $R = 4100$ km. Calcolare la *durata* del volo. Dati: $b = 47,34$ m; $S = 320$ m²; $m_v = 108\,325$ kg; $m_0 = 195\,000$ kg; $C_{D0} = 0,012$; $m_P = 30\,000$ kg.

Un'astuzia: eliminare il consumo specifico

Il consumo specifico c_T non è dato. Non serve! Autonomia e durata del getto (ad assetto costante) contengono *lo stesso* c_T :

$$R = \frac{2E}{c_T} \sqrt{\frac{2}{\rho S C_L}} (\sqrt{W_0} - \sqrt{W_1}), \quad t = \frac{E}{c_T} \ln \frac{W_0}{W_1}.$$

Facendone il rapporto, c_T ed E si semplificano:

$$t = R \frac{\ln(W_0/W_1)}{2\sqrt{2/(\rho S C_L)} (\sqrt{W_0} - \sqrt{W_1})}$$

La durata si ottiene dalla sola geometria del volo e dai pesi.

Dati derivati. $AR = b^2/S = 7,00$; $\rho(8000 \text{ m}) = 0,525$; $V_0 = 180,6 \text{ m/s}$; $m_F = m_0 - m_v - m_P = 56\,675 \text{ kg}$; $W_0 = 1\,912\,297 \text{ N}$, $W_1 = 1\,356\,585 \text{ N}$. L'assetto costante è $C_L = 2W_0/(\rho S V_0^2) = 0,698$.

Durata. Con $\sqrt{2/(\rho S C_L)} = 0,1306$, $\sqrt{W_0} - \sqrt{W_1} = 1382,9 - 1164,7 = 218,2$ e $\ln(W_0/W_1) = 0,343$:

$$t = 4,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,343}{2 \cdot 0,1306 \cdot 218,2} = 24\,700 \text{ s} \approx \boxed{6 \text{ h } 52 \text{ min}}.$$

3.6 Autonomia e durata massime di un executive jet**Esercizio 19**

Per un velivolo executive a getto calcolare la massima autonomia e la massima durata, sapendo che il carico pagante è quello massimo $m_P = 1131 \text{ kg}$, che decollo/salita costano 70 kg e la riserva è 130 kg . Dati: $b = 12,80 \text{ m}$; $S = 22 \text{ m}^2$; $C_{D0} = 0,012$; $m_0 = 5670 \text{ kg}$; $m_v = 3310 \text{ kg}$; $k = 1 \text{ kg/(kgf h)}$; $z = 8500 \text{ m}$.

Masse e dati comuni. $AR = b^2/S = 7,45$; $m_F = m_0 - m_v - m_P - 70 - 130 = 1029 \text{ kg}$; $c_T = k/3600 = 2,778 \times 10^{-4} \text{ /s}$; $\rho(8500 \text{ m}) = 0,495$. La crociera parte dopo il decollo ($W_1 = (m_0 - 70)g = 54\,917 \text{ N}$) e termina alla riserva ($W_2 = (m_v + m_P + 130)g = 44\,826 \text{ N}$).

Autonomia massima. All'assetto $(\sqrt{C_L}/C_D)_{\max}$:

$$\left(\frac{\sqrt{C_L}}{C_D} \right)_{\max} = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi AR}{3} \right)^{1/4} C_{D0}^{-3/4} = 34,57,$$

da cui

$$R_{\max} = \frac{2}{c_T} \cdot 34,57 \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho S}} (\sqrt{W_1} - \sqrt{W_2}) = \boxed{2413 \text{ km}}.$$

Durata massima. All'assetto $E_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi AR / C_{D0}} = 22,08$:

$$t_{\max} = \frac{E_{\max}}{c_T} \ln \frac{W_1}{W_2} = \frac{22,08}{2,778 \cdot 10^{-4}} \ln \frac{54917}{44826} = \boxed{4 \text{ h } 29 \text{ min}}.$$

Il senso di tutto questo

Autonomia e durata massime richiedono *asseti diversi* ($C_L = 0,31$ per la distanza, $C_L = 0,53$ per il tempo): non esiste un unico “modo migliore” di volare, ma un modo migliore per ciascun obiettivo. È la sintesi operativa di tutta la monografia.

Quadro riepilogativo dei risultati

Tabella 3.1. Risultati principali degli esercizi.

N.	Oggetto	Risultato
1	Autonomia vs frazione combustibile	$K = 19\,800\text{ km}$; $R(50\%) = 13\,724\text{ km}$
2	Autonomia motoelica $C_L = 0,7$	$R = 8959\text{ km}$
3	Raggio d'azione bombardiere	$R_a = 1434\text{ km}$; $\Pi = 2254\text{ kW}$
4	Indice di trasporto	$R_{\max} = 12\,200\text{ km}$; $i_{\max} \approx 1145\text{ km}$
5	Consumo a V, z costanti (3 metodi)	$m_F \approx 7180\text{ kg}$
6	Consumo A/R (assetto da V_0)	$m_{FA} = 646\text{ kg}$; $m_{FR} = 619\text{ kg}$
7	Carico pagante–autonomia + vento	vedi diagramma N. 3
8	Assetto e AR da $R_{\max}$	$C_L = 0,736$; $AR = 7,48$; $V = 325\text{ km/h}$
9	Consumo (tratte brevi)	$m_F \approx 509\text{ kg}$
10	Autonomia vs m_P con vento	$R'/R = 1,112$
11	Vento: calcolo di V'	$V' = 30,0\text{ m/s}$
12	Durata massima motoelica	$t = 31,94\text{ h}$
13	Combustibile per durata assegnata	$\mathcal{V} = 14\,823\text{ L}$
14	Autonomia massima turbogetto	$R_{\max} = 2685\text{ km}$
15	Autonomia turbogetto vs quota	$R(0) = 1953\text{ km}$; vedi diagr. N. 4
16	Durata massima turbogetto + $V(t)$	$t_{\max} = 7,21\text{ h}$
17	Autonomia jet ad assetto costante	$R = 4473\text{ km}$
18	Durata jet (senza c_T)	$t \approx 6\text{ h } 52\text{ min}$
19	Executive jet: $R_{\max}$ e $t_{\max}$	$R_{\max} = 2413\text{ km}$; $t_{\max} = 4\text{ h } 29\text{ min}$

Atmosfera standard e conversioni

A.1 Modello ISA (troposfera e bassa stratosfera)

Nella troposfera ($0 \leq z \leq 11\,000$ m) la temperatura decresce linearmente con gradiente $a = -6,5 \times 10^{-3}$ K/m; nella bassa stratosfera ($11\,000 \leq z \leq 20\,000$ m) è costante. Con i valori al livello del mare $T_0 = 288,15$ K, $p_0 = 101\,325$ Pa, $\rho_0 = 1,225$ kg/m³ e $R_a = 287,053$ J/(kg K):

$$T(z) = T_0 + az, \quad p(z) = p_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-g/(aR_a)} \quad (z \leq 11 \text{ km}), \quad \rho = \frac{p}{R_a T}.$$

Tabella A.1. Grandezze ISA usate negli esercizi. $\sigma = \rho/\rho_0$, $\delta = p/p_0$; $\psi_2 = \theta^{3/4}$ è il fattore di correzione del consumo specifico del getto.

z [km]	T [K]	p [Pa]	ρ [kg/m ³]	σ	$1/\sqrt{\sigma}$	ψ_2
0	288,15	101 325,0	1,225 00	1,000 00	1,0000	1,0000
1	281,65	89 874,6	1,111 64	0,907 46	1,0497	0,9830
2	275,15	79 495,2	1,006 49	0,821 62	1,1032	0,9660
3	268,65	70 108,5	0,909 12	0,742 14	1,1608	0,9488
4	262,15	61 640,2	0,819 13	0,668 68	1,2229	0,9315
5	255,65	54 019,9	0,736 12	0,600 91	1,2900	0,9142
6	249,15	47 181,0	0,659 70	0,538 53	1,3627	0,8967
7	242,65	41 060,7	0,589 50	0,481 23	1,4415	0,8791
8	236,15	35 599,8	0,525 17	0,428 71	1,5273	0,8613
9	229,65	30 742,4	0,466 35	0,380 69	1,6207	0,8435
10	223,15	26 436,2	0,412 71	0,336 90	1,7229	0,8255
11	216,65	22 632,0	0,363 92	0,297 08	1,8347	0,8074
12	216,65	19 330,4	0,310 83	0,253 74	1,9852	0,8074
13	216,65	16 510,4	0,265 48	0,216 72	2,1481	0,8074
14	216,65	14 101,8	0,226 75	0,185 10	2,3243	0,8074

A.2 Fattori di conversione utili

Tabella A.2. Conversioni fra unità pratiche e SI.

Grandezza	Conversione
Potenza	1 CV = 735,499 W
Forza	1 kgf = 9,806 65 N
Pressione	1 mmHg = 133,322 Pa
Velocità	1 m/s = 3,6 km/h
Consumo elica	$c_P [\text{kg/J}] = \frac{C [\text{kg}/(\text{CV h})]}{735,499 \cdot 3600}$
Consumo getto	$c_T [1/\text{s}] = \frac{k [\text{kg}/(\text{kgf h})]}{3600}$
“Costante 621”	$270 \ln 10 \approx 621$ (per usare $\log_{10}$)

A.3 Formulario essenziale

Autonomia elica	$R = \frac{\eta E}{g c_P} \ln \frac{m_0}{m_1} = K \ln \frac{m_0}{m_1}$
Durata elica	$t = \frac{\eta}{g c_P} \frac{C_L^{3/2}}{C_D} \sqrt{\frac{2\rho}{W_0/S}} \left(\sqrt{\frac{m_0}{m_1}} - 1 \right)$
Autonomia getto	$R = \frac{2}{c_T} \frac{\sqrt{C_L}}{C_D} \sqrt{\frac{2}{\rho S}} (\sqrt{W_0} - \sqrt{W_1})$
Durata getto	$t = \frac{E}{c_T} \ln \frac{W_0}{W_1}$
Efficienza max	$E_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi A R e}{C_{D0}}}, \quad C_L = \sqrt{\pi A R e C_{D0}}$
Vento	$R' = R \left[1 - \frac{V'^2}{2V^2} \sin^2 \beta + \frac{V'}{V} \cos \beta \right]$