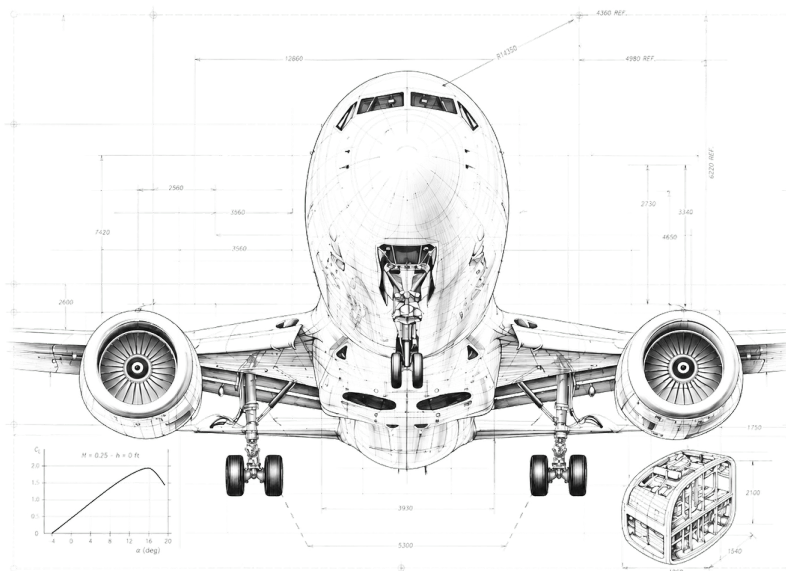


Bernoulli, tubo di Pitot e numero di Mach

*Teoria essenziale e raccolta completa di esercizi svolti
sulla misura anemometrica della velocità di volo*



*Dalla pressione dinamica alla velocità vera: come un tubicino di ottone, un manometro e
l'equazione di Bernoulli permettono di leggere in cabina quanto va veloce un aeroplano —
e perché quel numero non è mai, davvero, la velocità con cui l'aria scorre sull'ala.*

Indice

I	Le pressioni della corrente e il teorema di Bernoulli	2
1.1	Statica, dinamica, ristagno: tre pressioni da non confondere	2
1.2	Dall'equazione di Eulero al teorema di Bernoulli	3
1.3	Un primo conto per fissare le idee	4
2	Il tubo di Pitot e la misura della velocità	6
2.1	Il principio: due prese di pressione	6
2.2	Dalla lettura del manometro alla velocità	7
2.3	Errori di posizione e strumentali	8
3	Comprimibilità: numero di Mach e relazione di Saint-Venant	9
3.1	La velocità del suono	9
3.2	Il ristagno comprimibile: la relazione di Saint-Venant	10
3.3	Perché comprimibile e incomprimibile non coincidono	11
4	Le quattro velocità aeronautiche	13
4.1	La catena delle correzioni	13
4.2	Densità relativa e velocità equivalente	14
4.3	I tre problemi tipo	14
5	Metodo ed esercizi svolti	16
5.1	Il metodo dei cinque passi	16
5.2	Gli otto esercizi svolti	16
5.3	Quadro riassuntivo dei risultati	22
A	L'atmosfera standard ISA in sintesi	23
A.1	Le formule della troposfera	23
A.2	Tabella dei valori (troposfera ISA)	23
B	Il sistema tecnico e le conversioni	25
B.1	Le corrispondenze fondamentali	25
B.2	Perché il sistema di unità non cambia la fisica	25
B.3	Fattori di conversione delle velocità	25
C	Formulario	27

Le pressioni della corrente e il teorema di Bernoulli

Dove stiamo andando

Tutto ciò che segue — il tubo di Pitot, l'anemometro di bordo, il numero di Mach — poggia su una sola idea: *in una corrente fluida la pressione e la velocità sono legate*. Dove il fluido corre veloce la pressione cala; dove rallenta fino a fermarsi la pressione sale al suo valore massimo. Misurare quella differenza di pressione significa, di fatto, misurare la velocità.

In questo capitolo mettiamo a fuoco le tre pressioni che ci serviranno (*statica, dinamica, di ristagno*) e dimostriamo, partendo dalla dinamica di una particella di fluido, il teorema che le collega: il **teorema di Bernoulli**. È il mattone su cui costruiremo tutto il resto.

1.1 Statica, dinamica, ristagno: tre pressioni da non confondere

Immaginiamo un aeroplano in volo rettilineo uniforme. Conviene, come sempre in aerodinamica, cambiare punto di vista e immaginare l'aereo *fermo* investito da una corrente d'aria che gli arriva addosso alla velocità di volo V : il fenomeno fisico è identico, ma i conti si semplificano perché la corrente diventa *stazionaria*. Quella corrente indisturbata, lontano dal velivolo, possiede tre attributi che dobbiamo tenere ben distinti.

Definizione — Pressione statica

La **pressione statica** p è la pressione che il fluido esercita in virtù del suo stato termodinamico, indipendentemente dal suo moto. È la pressione “vera” del gas, quella che misurerebbe un barometro trasportato dalla corrente e in quiete rispetto ad essa.

Definizione — Pressione dinamica

La **pressione dinamica** è la grandezza

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2,$$

dove ρ è la densità del fluido e V la sua velocità. Non è una pressione “vera” misurabile con un barometro: è l'energia cinetica posseduta dall'unità di volume di fluido, espressa nelle stesse unità di una pressione.

Definizione — Pressione di ristagno o totale

La **pressione di ristagno** (o *totale*) p_r è la pressione che il fluido raggiunge quando viene *arrestato* in modo ideale, cioè portato a velocità nulla senza perdite. Il punto in cui questo accade si chiama **punto di ristagno**.

Osservazione

La distinzione fra le tre è cruciale e la ritroveremo in ogni esercizio. La pressione statica p e quella di ristagno p_r sono pressioni *fisiche*, che una sonda può leggere. La pressione dinamica q è invece un *costrutto*:

la porzione di pressione di ristagno dovuta al moto. Come vedremo subito, nel regime incomprimibile vale esattamente $p_r - p = q$.

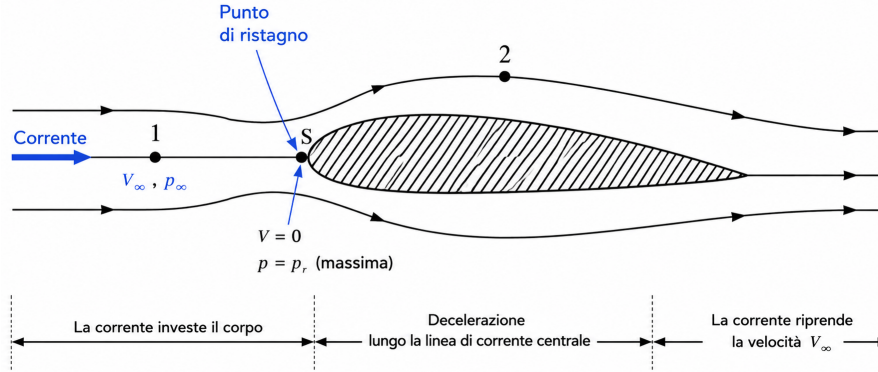


Figura 1.1. La corrente investe un corpo. Lungo la linea di corrente centrale il fluido decelera fino a fermarsi nel punto di ristagno S : lì la velocità è nulla e la pressione raggiunge il valore massimo p_r .

1.2 Dall'equazione di Eulero al teorema di Bernoulli

Vogliamo ora *dimostrare* il legame fra pressione e velocità, e non limitarci a enunciarlo. Consideriamo una particella di fluido che si muove lungo una **linea di corrente** in regime *stazionario*. Su di essa scriviamo il secondo principio della dinamica per unità di volume, proiettato lungo la direzione del moto s . Trascuriamo la viscosità (fluido *ideale*) e, trattandosi di un gas leggero come l'aria in moto quasi orizzontale, anche il peso. Rimane l'equilibrio fra l'accelerazione e la sola forza di pressione:

$$\rho \frac{dV}{dt} = - \frac{dp}{ds}. \quad (1.1)$$

Il primo membro è la massa per unità di volume (ρ) moltiplicata per l'accelerazione; il secondo è la risultante delle pressioni: il segno meno dice che la particella accelera verso le pressioni *minori*. In regime stazionario la velocità di una particella cambia perché essa si sposta lungo s , non perché il tempo scorre; usiamo allora la regola della catena:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{ds} \frac{ds}{dt} = V \frac{dV}{ds}. \quad (1.2)$$

Sostituendo la (1.2) nella (1.1):

$$\rho V \frac{dV}{ds} = - \frac{dp}{ds} \quad \Rightarrow \quad dp + \rho V dV = 0. \quad (1.3)$$

Questa è l'**equazione di Eulero** lungo la linea di corrente, in forma differenziale. Per integrarla ci serve un'ipotesi sul legame fra ρ e p . La più semplice — e per basse velocità eccellente — è assumere il fluido **incomprimibile**, cioè $\rho = \text{cost}$. Allora ρ esce dall'integrale e si ottiene subito:

$$\int dp + \rho \int V dV = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{cost}. \quad (1.4)$$

Formula chiave — Teorema di Bernoulli (fluido incompressibile)

Lungo una linea di corrente, in moto stazionario di un fluido ideale e incompressibile, la somma della pressione statica e della pressione dinamica si mantiene costante:

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_r = \text{cost}$$

Applicato fra due punti 1 e 2 della stessa linea di corrente:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2.$$

La costante non è altro che la pressione di ristagno p_r : infatti, se scegliamo come punto 2 proprio il punto di ristagno, dove $V_2 = 0$, otteniamo $p_2 = p_r$ e quindi $p + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_r$ ovunque lungo quella linea di corrente.

Formula chiave — Legame fondamentale p_r-V (incompressibile)

Applicando Bernoulli fra la corrente indisturbata e il punto di ristagno si ha immediatamente

$$\Delta p = p_r - p = \frac{1}{2}\rho V^2 = q$$

La differenza fra pressione di ristagno e pressione statica è la pressione dinamica. Invertendo:

$$V = \sqrt{\frac{2(p_r - p)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}.$$

Osservazione

Abbiamo appena scoperto il principio dell'anemometro. Se riusciamo a misurare la differenza di pressione $\Delta p = p_r - p$ e conosciamo la densità ρ , ricaviamo la velocità V . Il dispositivo che misura quel Δp è il **tubo di Pitot**, protagonista del prossimo capitolo.

Attenzione

La relazione $\Delta p = \frac{1}{2}\rho V^2$ vale **solo** finché il fluido può considerarsi incompressibile. Per l'aria questo è accettabile fino a $\text{Ma} \approx 0,3$ (circa 360 km/h a quota zero), con un errore dell'ordine del 2% sulla pressione dinamica. Oltre, la densità smette di essere costante e la formula va corretta: è esattamente ciò che imporrà l'introduzione del numero di Mach (Cap. 3).

1.3 Un primo conto per fissare le idee**Esempio**

Un piccolo aereo da turismo vola a quota zero (aria tipo: $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$) a $V = 180 \text{ km/h}$. Quanto vale la differenza di pressione che il suo tubo di Pitot deve leggere?

Soluzione. Convertiamo la velocità in unità coerenti:

$$V = 180 \text{ km/h} = \frac{180}{3,6} \text{ m/s} = 50 \text{ m/s}.$$

Applichiamo il legame fondamentale:

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho_0 V^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 50^2 = 1531,25 \text{ Pa} \approx 1,53 \text{ kPa}.$$

Un valore piccolissimo rispetto alla pressione atmosferica ($\approx 101 \text{ kPa}$): appena l'1,5%. È il motivo per cui gli anemometri devono essere strumenti sensibili, capaci di apprezzare differenze di pressione dell'ordine del millesimo dell'atmosfera.

Il senso di tutto questo

Abbiamo stabilito il ponte fra *pressione* e *velocità*: $\Delta p = \frac{1}{2}\rho V^2$. Questo è tutto ciò che serve per capire *perché* un tubo di Pitot funziona. Nei prossimi capitoli lo faremo diventare uno strumento reale (Cap. 2), poi correggeremo la formula quando l'aria corre così in fretta da non potersi più considerare incompressibile (Cap. 3), e infine distingueremo con precisione le *quattro velocità* aeronautiche che nascono da tutto questo (Cap. 4).

Il tubo di Pitot e la misura della velocità

Dove stiamo andando

Bernoulli ci ha detto *che cosa* misurare ($\Delta p = p_r - p$) e *come* tradurlo in velocità. Manca lo strumento. Questo capitolo racconta com'è fatto e come funziona il **tubo di Pitot**, il sensore che equipaggia ogni velivolo del mondo e che fornisce all'anemometro il dato di partenza. Capiremo la differenza fra la sonda *totale* e la sonda *statica*, e perché nelle tracce degli esercizi si parla sempre di “errori di posizione e strumentali”.

2.1 Il principio: due prese di pressione

Il tubo di Pitot nella sua forma completa (*tubo di Pitot-statico*, o *tubo di Prandtl*) è concettualmente banale: sono due prese di pressione affacciate sulla corrente, collegate ai due lati di un manometro differenziale.

- La **presa totale** è un forellino frontale, rivolto *contro* la corrente. Il filetto d'aria che vi entra si arresta: quel forellino “vede” il punto di ristagno e quindi la pressione di ristagno p_r .
- Le **prese statiche** sono forellini praticati *lateralmente*, dove la corrente scorre parallela alla parete senza essere arrestata: leggono la pressione statica p .

Il manometro collegato fra le due prese misura direttamente la loro differenza, che per Bernoulli è la pressione dinamica:

$$\Delta p = p_r - p = \frac{1}{2}\rho V^2.$$

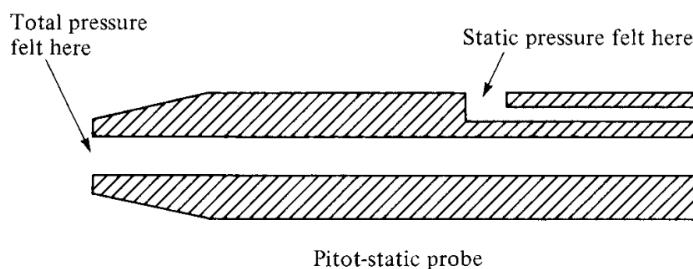


Figura 2.1. Schema di una sonda *Pitot-static*.

Osservazione

Talvolta la presa totale e le prese statiche sono separate: un *tubo di Pitot* vero e proprio (solo presa totale) affiancato a una o più *prese statiche* ricavate sulla fusoliera. Il principio non cambia: ciò che conta è la *differenza* fra le due letture.

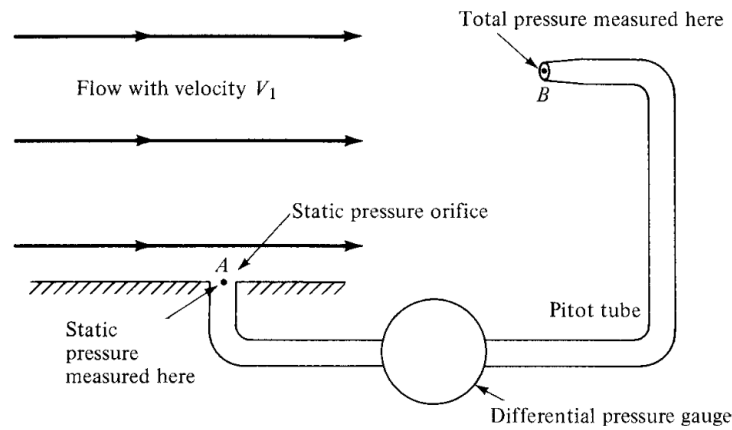


Figura 2.2. Schema del tubo di Pitot-statico. La presa frontale legge la pressione di ristagno p_r ; le prese laterali leggono la pressione statica p . Il manometro differenziale restituisce $\Delta p = p_r - p$, cioè la pressione dinamica.

2.2 Dalla lettura del manometro alla velocità

Nell'ipotesi incompressibile la conversione è immediata. Il manometro fornisce Δp ; noi conosciamo la densità ρ ; dunque:

$$V = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}. \quad (2.1)$$

Qui si annida però il primo, grande problema pratico, quello che genererà tutta la teoria delle “quattro velocità” del Cap. 4: *quale* densità mettere nella formula (2.1)? La densità dell'aria cambia con la quota, e l'anemometro di bordo — un semplice strumento meccanico — non può saperlo. Deve allora scegliere *una* densità di riferimento, fissa: quella dell'aria tipo a quota zero, ρ_0 . Questa scelta è la sorgente della differenza fra velocità “indicata” e velocità “vera”.

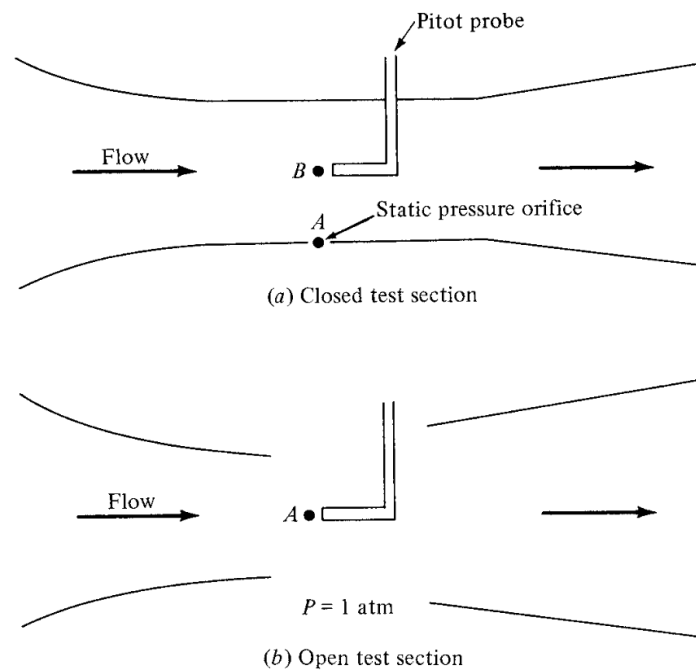


Figura 2.3. Misurazioni di pressione nelle sezioni di prova aperte e chiuse delle gallerie del vento subsoniche.

Definizione — Taratura dell'anemometro incompressibile

Un anemometro non corretto per la comprimibilità è costruito in modo da risolvere l'equazione (2.1) usando *sempre* la densità di riferimento ρ_0 a quota zero. La velocità che ne risulta è la **velocità indicata** V_i :

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho_0 V_i^2 \quad \Longleftrightarrow \quad V_i = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho_0}}.$$

Osservazione

Fissiamo bene questo punto, perché è il cardine di metà degli esercizi. Lo strumento *misura* sempre e comunque la pressione fisica Δp presente ai suoi capi. Ma la *traduce* in una velocità usando una densità ρ_0 che quasi mai coincide con la densità reale ρ alla quota di volo. Perciò la lancetta segna V_i , non la velocità vera V_v . Ricostruire V_v a partire da V_i (o viceversa) sarà il lavoro tipico dei problemi.

2.3 Errori di posizione e strumentali

Nelle tracce degli esercizi ricorre la formula “si suppongano nulli gli errori di posizione e strumentali”. Vale la pena chiarire di che cosa si tratta, perché sono correzioni reali che il progettista deve conoscere.

- **Errore strumentale:** l'imperfezione meccanica dello strumento (attriti, isteresi delle capsule, imprecisioni di costruzione). Si elimina con la taratura a banco.
- **Errore di posizione:** la presa statica, montata sulla fusoliera o sul tubo, non “vede” esattamente la pressione statica della corrente indisturbata, perché il velivolo stesso perturba localmente il campo di pressione. Dipende dall'assetto e dalla velocità e si corregge con tabelle o diagrammi ricavati in prova di volo.

Nota

Assumere nulli questi errori significa identificare la lettura grezza dello strumento con la **velocità calibrata** CAS. Nei nostri esercizi, dunque, “ V_i ” e “CAS” coincidono: l'unica correzione che resta da fare è quella di *comprimibilità* (che porta all'EAS) e quella di *densità* (che porta al TAS). La gerarchia completa è nel Cap. 4.

Il senso di tutto questo

Ora abbiamo lo strumento e sappiamo che cosa misura: la pressione dinamica Δp , tradotta in V_i tramite la densità convenzionale ρ_0 . Restano due nodi da sciogliere. Primo: quando l'aria è veloce, Δp non vale più $\frac{1}{2} \rho V^2$ — occorre la comprimibilità e il numero di Mach (Cap. 3). Secondo: la differenza fra la velocità letta e quella vera va organizzata in modo sistematico (Cap. 4). Affrontiamoli in quest'ordine.

Comprimibilità: numero di Mach e relazione di Saint-Venant

Dove stiamo andando

Finora l'aria era incompressibile: densità costante, Bernoulli nella sua forma semplice. Ma un aereo di linea vola a $Ma \approx 0,8$, e a quelle velocità l'aria che si arresta sulla presa totale si *comprime* e si *scalda* in modo non trascurabile. La pressione dinamica che il manometro legge diventa allora più grande di $\frac{1}{2}\rho V^2$. In questo capitolo introduciamo il **numero di Mach**, ricaviamo la **velocità del suono** e dimostriamo la relazione che sostituisce Bernoulli in regime comprimibile: la **relazione di Saint-Venant** (per il Pitot subsonico, nota anche come formula di Rayleigh). È la formula che compare, sotto forma di $p/p_r = [1 + \frac{1}{\gamma} Ma^2]^{-\gamma}$, in tutti gli esercizi del capitolo.

3.1 La velocità del suono

Un disturbo di pressione infinitesimo (un suono) si propaga in un gas con una velocità caratteristica a che dipende *solo* dallo stato termodinamico del gas. Un bilancio di massa e quantità di moto attraverso il fronte del disturbo, nell'ipotesi che la compressione/espansione sia *isentropica* (adiabatica e reversibile, perché rapida e debole), conduce a

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s.$$

Approfondimento — Da dove viene $a^2 = dp/d\rho$

Vale la pena vedere la dimostrazione, perché è breve e istruttiva. Poniamoci nel riferimento solidale con il fronte dell'onda, che allora appare *fermo*: il gas indisturbato vi entra con velocità a , densità ρ e pressione p , e ne esce leggermente rallentato e compresso, con velocità $a - dV$, densità $\rho + d\rho$, pressione $p + dp$. La **conservazione della massa** attraverso il fronte dà

$$\rho a = (\rho + d\rho)(a - dV) \implies a d\rho = \rho dV,$$

avendo trascurato il prodotto $d\rho dV$ (infinitesimo di ordine superiore). La **quantità di moto** (la forza di pressione netta uguaglia la variazione di flusso di quantità di moto) dà

$$p - (p + dp) = \rho a [(a - dV) - a] \implies dp = \rho a dV.$$

Eliminando dV fra le due si ottiene $dp = a^2 d\rho$, cioè $a^2 = dp/d\rho$. Poiché il processo è rapido e debole (isentropico) la derivata va presa a entropia costante, da cui $a^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$. Il suono, in fondo, è la velocità con cui una piccola compressione “si passa parola” fra strati contigui di gas.

Per un gas più che perfetto, lungo un'isentropica vale $p/\rho^\gamma = \text{cost}$; derivando si trova $(\partial p / \partial \rho)_s = \gamma p/\rho$, e usando l'equazione di stato $p = \rho R T$:

Formula chiave — Velocità del suono in un gas perfetto

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma R T}$$

Per l'aria ($\gamma = 1,4$, $R = 287,05 \text{ J/(kg K)}$) essa dipende solo dalla temperatura:

$$a = \sqrt{\gamma R} \sqrt{T} = 20,05 \sqrt{T} \quad [\text{m/s}], \quad T \text{ in K.}$$

Osservazione

La costante 20,05 non è magica: è semplicemente $\sqrt{\gamma R} = \sqrt{1,4 \cdot 287,05} = 20,047$. Nel vecchio sistema tecnico la stessa relazione si scrive $a = 20,046 \sqrt{T}$: è identica, cambia solo l'unità con cui è espresso R . La differenza numerica sul terzo decimale è ininfluente.

Esempio

A quota zero ($T_0 = 288,15 \text{ K}$):

$$a_0 = 20,05 \sqrt{288,15} = 340,3 \text{ m/s} \approx 1225 \text{ km/h.}$$

A 8500 m ($T = 232,9 \text{ K}$) scende a $a = 20,05 \sqrt{232,9} = 305,9 \text{ m/s}$: più si sale e più fa freddo, più il suono (e quindi la “barriera”) si abbassa.

Definizione — Numero di Mach

Il **numero di Mach** è il rapporto adimensionale fra la velocità del fluido e la velocità del suono locale:

$$\text{Ma} = \frac{V}{a} = \frac{V}{\sqrt{\gamma R T}}.$$

Misura “quanto è comprimibile” il moto: per $\text{Ma} \lesssim 0,3$ gli effetti di comprimibilità sono trascurabili; da lì in poi crescono rapidamente.

3.2 Il ristagno comprimibile: la relazione di Saint-Venant

Quando il fluido si arresta sulla presa totale, in regime comprimibile non si conserva più $p + \frac{1}{2}\rho V^2$, ma l'**energia totale**. Per un flusso adiabatico la conservazione dell'entalpia totale dà

$$c_p T + \frac{1}{2} V^2 = c_p T_r,$$

dove T_r è la temperatura di ristagno (a velocità nulla). Dividendo per $c_p T$ e usando $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ e $a^2 = \gamma R T$ si ottiene

$$\frac{T_r}{T} = 1 + \frac{V^2}{2 c_p T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2. \quad (3.1)$$

Osservazione — Il riscaldamento di ristagno (*ram heating*)

La (3.1) non è solo un passaggio algebrico: descrive un fenomeno fisico reale e importante. L'aria che si arresta sulla presa totale *si scalda*, perché la sua energia cinetica si converte in energia interna. L'aumento

di temperatura vale

$$T_r - T = \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2 T = \frac{V^2}{2c_p},$$

e non dipende dalla quota se non attraverso T . Qualche ordine di grandezza per l'aria: a $\text{Ma} = 0,5$ il ristagno è circa 15 K più caldo della corrente; a $\text{Ma} = 0,84$ (un caccia in salita, o l'esercizio 4) già 37 K; a $\text{Ma} = 3$ (un intercettore supersonico) oltre 600 K, abbastanza da imporre leghe speciali sul bordo d'attacco. È lo stesso motivo per cui la sonda che misura la temperatura esterna (*Total Air Temperature*) legge in realtà la temperatura di ristagno, e va corretta a ritroso con la Ma^2 per risalire alla temperatura statica dell'aria.

Se il rallentamento è anche *isentropico* (nessuna perdita, nessun urto: è il caso del Pitot subsonico), vale la relazione $p_r/p = (T_r/T)^{\gamma/(\gamma-1)}$, e sostituendo la (3.1):

Formula chiave — Relazione di Saint-Venant (Pitot subsonico)

$$\frac{p_r}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Per l'aria ($\gamma = 1,4$, dunque $\frac{\gamma-1}{2} = \frac{1}{5}$ e $\frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{7}{2} = 3,5$):

$$\frac{p_r}{p} = \left(1 + \frac{1}{5} \text{Ma}^2\right)^{3,5}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{p}{p_r} = \left(1 + \frac{1}{5} \text{Ma}^2\right)^{-3,5}.$$

È la formula che appare, tale e quale, in ogni traccia del capitolo. La sua inversione ci dà il numero di Mach a partire dal rapporto di pressioni:

Formula chiave — Inversione: Mach dal rapporto di pressioni

$$\text{Ma} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_r}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} = \sqrt{5 \left[\left(\frac{p_r}{p}\right)^{0,2857} - 1 \right]} \quad (\gamma = 1,4).$$

Attenzione

La relazione di Saint-Venant vale finché la corrente resta **subsonica** ($\text{Ma} < 1$) e il ristagno è isentropico. Se davanti alla presa si forma un'onda d'urto ($\text{Ma} > 1$) occorre la formula di Rayleigh supersonica, che tiene conto della perdita attraverso l'urto: non serve nei nostri esercizi, tutti a $\text{Ma} < 1$, ma è bene sapere che esiste il limite.

3.3 Perché comprimibile e incompressibile non coincidono

Confrontiamo le due letture della pressione dinamica. In regime comprimibile la presa totale sente il “vero” salto di pressione

$$\Delta p_{\text{compr}} = p_r - p = p \left[\left(1 + \frac{1}{5} \text{Ma}^2\right)^{3,5} - 1 \right],$$

mentre la formula incompressibile darebbe $q = \frac{1}{2} \rho V^2$. Sviluppando in serie di Ma (per $\text{Ma} < 1$) si dimostra la relazione classica:

$$\frac{\Delta p_{\text{compr}}}{\frac{1}{2} \rho V^2} = 1 + \frac{\text{Ma}^2}{4} + \frac{2 - \gamma}{24} \text{Ma}^4 + \dots \quad (3.2)$$

Osservazione

La (3.2) spiega *tutto* il comportamento degli esercizi. Il termine correttivo $Ma^2/4$ è sempre positivo: la pressione dinamica reale è *maggiore* di $\frac{1}{2}\rho V^2$. Conseguenze:

- se conosciamo V_i (cioè Δp tradotto con la formula incompressibile) e vogliamo la velocità vera, otterremo un valore *più basso* di V_i : lo strumento *soprastima*. È il caso degli esercizi 1, 2, 5 e 6;
- se invece conosciamo la velocità vera e vogliamo l'indicata, lo strumento segnerà *più* di quanto varrebbe la sola correzione di densità. È il caso degli esercizi 3 e 7.

A $Ma = 0,3$ la correzione vale $Ma^2/4 = 2,25\%$; a $Ma = 0,8$ sale al 16%; a $Ma = 0,9$ supera il 20%. Ecco perché a bassa quota e bassa velocità la si trascura, mentre in crociera diventa imprescindibile.

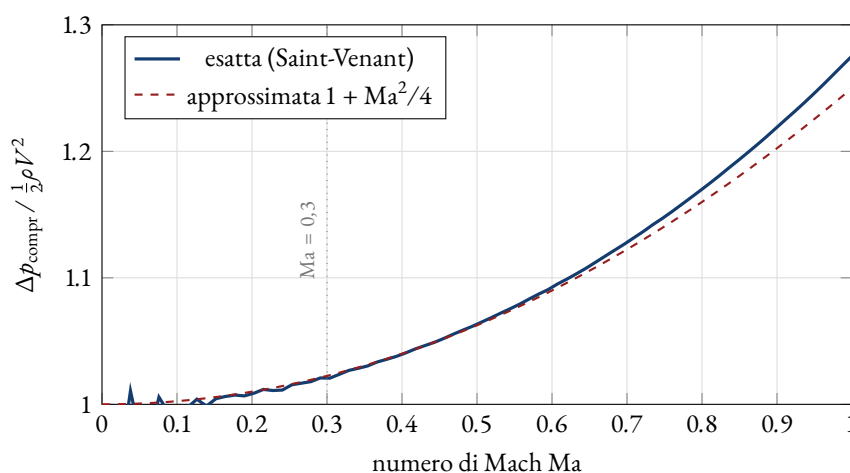


Figura 3.1. Fattore di comprimibilità: rapporto fra la pressione dinamica reale e quella incompressibile $\frac{1}{2}\rho V^2$, in funzione del numero di Mach. Fino a $Ma \approx 0,3$ le due curve coincidono (scostamento $< 2,5\%$); oltre, l'errore commesso trascurando la comprimibilità cresce rapidamente.

Il senso di tutto questo

Abbiamo la cassetta degli attrezzi completa per il ristagno comprimibile: $a = \sqrt{\gamma RT}$, $Ma = V/a$, e la coppia Saint-Venant/inversione che lega p_r/p a Ma . Sappiamo anche *perché* lo strumento sbaglia e in che verso. Non resta che mettere ordine fra le velocità che questo genera — indicata, calibrata, equivalente, vera — ed è il compito del prossimo capitolo, dopo il quale gli esercizi si risolveranno quasi da soli.

Le quattro velocità aeronautiche

Dove stiamo andando

Un aereo ha *una* velocità rispetto all'aria, eppure in aeronautica se ne contano quattro: indicata, calibrata, equivalente, vera. Non è pignoleria: ciascuna nasce da una correzione ben precisa che lo strumento non può fare da solo. In questo capitolo le ordiniamo in una catena logica $IAS \rightarrow CAS \rightarrow EAS \rightarrow TAS$ e ricaviamo la relazione che lega la vera all'equivalente tramite la **densità relativa** σ . Con questo schema in mano, ogni esercizio del capitolo diventa un percorso obbligato lungo la catena.

4.1 La catena delle correzioni

Definizione — Le quattro velocità

V_i — IAS (Indicated Air Speed)

la velocità letta direttamente sull'anemometro, ottenuta traducendo Δp con la formula incomprimibile e la densità di riferimento ρ_0 .

CAS (Calibrated Air Speed)

la IAS corretta degli errori *strumentali* e di *posizione*. Nei nostri esercizi questi errori sono nulli, quindi $CAS = IAS$.

V_e — EAS (Equivalent Air Speed)

la CAS corretta dell'errore di *comprimibilità*. È la velocità che, con la densità *reale* alla quota, darebbe la stessa pressione dinamica: $\frac{1}{2}\rho V_e^2 = \Delta p$.

V_v — TAS (True Air Speed)

la *vera* velocità del velivolo rispetto all'aria, quella che entra nel numero di Mach e nelle prestazioni. È l'EAS corretta della *densità*.



Figura 4.1. La catena delle velocità aeronautiche. Ogni freccia è una correzione. Nei nostri esercizi il primo anello è nullo (errori trascurabili), quindi $CAS = IAS$; restano la correzione di comprimibilità e quella di densità.

4.2 Densità relativa e velocità equivalente

Definizione — Densità relativa

Si chiama **densità relativa** il rapporto fra la densità dell'aria alla quota di volo e quella di riferimento a quota zero:

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

È un numero minore di 1 che decresce con la quota (a 4000 m vale circa 0,67; a 8500 m circa 0,40).

Il legame fra EAS e TAS segue direttamente dalla definizione di EAS. Per definizione l'EAS produce, con la densità *reale* ρ , la stessa pressione dinamica che la velocità vera produce davvero:

$$\frac{1}{2}\rho V_e^2 = \Delta p = \frac{1}{2}\rho V_v^2 ? \quad \text{no!}$$

Attenzione al passaggio: EAS e TAS non sono uguali perché l'EAS è definita a partire dalla pressione dinamica “vista” dallo strumento, che usa ρ_0 . Il modo pulito di scriverlo è: la pressione dinamica *fisica* vale $\frac{1}{2}\rho V_v^2$; l'anemometro la traduce come se la densità fosse ρ_0 , cioè $\frac{1}{2}\rho_0 V_e^2 = \frac{1}{2}\rho V_v^2$. Da qui:

Formula chiave — Legame EAS–TAS

$$\frac{1}{2}\rho_0 V_e^2 = \frac{1}{2}\rho V_v^2 \quad \Rightarrow$$

$$V_e = V_v \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} = V_v \sqrt{\sigma}$$

e, invertendo, $V_v = \frac{V_e}{\sqrt{\sigma}}$. Poiché $\sigma < 1$ in quota, si ha sempre $V_e < V_v$: la velocità vera è maggiore dell'equivalente.

Osservazione

In parte della manualistica la stessa relazione si trova scritta come $V = V_v \sqrt{\delta}$, con $\sqrt{\delta}$ letto in tabella (per es. $\sqrt{\delta} \approx 0,818$ a 4000 m). Quel “ δ ” è esattamente la nostra densità relativa σ : notazione diversa, stessa grandezza. Nel seguito useremo sempre σ .

Osservazione — Perché l'EAS è così utile

L'EAS “incorpora” la densità: due velivoli con la stessa EAS sopportano la stessa pressione dinamica q , quindi gli stessi carichi aerodinamici, a qualunque quota. È per questo che i limiti strutturali di velocità (V_{NE} , ecc.) si esprimono in EAS/IAS e non in TAS: allo stesso IAS l'ala “sente” sempre lo stesso q , indipendentemente dalla quota.

4.3 I tre problemi tipo

Tutti gli esercizi del capitolo si riconducono a tre schemi. Impararli significa saperli riconoscere a colpo d'occhio dalla traccia.

Nota — Problema tipo A — data V_i , trovare V_v (ed V_e)

Dati: velocità indicata V_i , quota (dunque p , T , σ). Percorso:

$$V_i \xrightarrow{\frac{1}{2}\rho_0 V_i^2} \Delta p \xrightarrow{1+\Delta p/p} \frac{p_r}{p} \xrightarrow{\text{inv. S.-V.}} \text{Ma} \xrightarrow{\text{Ma } a} V_v \xrightarrow{\times \sqrt{\sigma}} V_e.$$

È il caso degli esercizi 1, 2, 5 e 6.

Nota — Problema tipo B — data V_v , trovare V_i

Dati: velocità vera V_v , quota. Percorso:

$$V_v \xrightarrow{V_v/a} \text{Ma} \xrightarrow{\text{S.V.}} \frac{p_r}{p} \xrightarrow{p(p_r/p-1)} \Delta p \xrightarrow{\sqrt{2\Delta p/\rho_0}} V_i.$$

Il confronto “incomprimibile” si ottiene invece da $V_i = V_v \sqrt{\sigma} (= V_e)$. È il caso degli esercizi 3 e 7.

Nota — Problema tipo C — dati p , p_r , T_r , trovare Ma e V

Dati: pressione statica, pressione di ristagno, temperatura di ristagno. Percorso:

$$\frac{p}{p_r} \xrightarrow{\text{inv. S.V.}} \text{Ma} \xrightarrow{T=T_r/(1+\frac{1}{5}\text{Ma}^2)} T \xrightarrow{a=\sqrt{\gamma RT}} a \xrightarrow{V=\text{Ma} a} V.$$

È il caso degli esercizi 4 e 8.

Il senso di tutto questo

La teoria è completa e sistematizzata. Abbiamo tre “ricette” che coprono ogni traccia. Nel prossimo capitolo le applichiamo passo per passo agli otto esercizi, motivando ogni scelta e chiudendo ciascuno con una lettura fisica del risultato. Il metodo è sempre lo stesso; cambiano solo i dati.

Metodo ed esercizi svolti

Dove stiamo andando

Qui la teoria diventa pratica. Risolviamo **otto esercizi**, numerati progressivamente, che coprono in modo completo i tre tipi di problema anemometrico. Per ciascuno seguiremo sempre lo stesso metodo, dichiarando a voce alta il “tipo” di problema (A, B o C del Cap. 4) e la ragione di ogni scelta, e chiudendo con una *lettura fisica* del risultato: che cosa ci dice quel numero, e perché viene proprio così. Non c’è nessuna formula nuova: c’è solo da riconoscere i dati e percorrere la catena giusta. Tutti i valori numerici sono stati verificati con un calcolo indipendente.

5.1 Il metodo dei cinque passi

Prima di ogni conto conviene incasellare il problema in cinque mosse. È una disciplina che evita gli errori più comuni (usare la densità sbagliata, dimenticare la comprimibilità, confondere V_i con V_v).

- 1. Dati.** Elenco delle grandezze note, con *unità coerenti* (velocità in m/s, pressioni in Pa, temperature in K).
- 2. Modello fisico.** È incomprimibile o comprimibile? Che cosa misura davvero lo strumento? È un problema di tipo A, B o C?
- 3. Equazione.** La relazione che collega noto e incognito (Bernoulli, Saint-Venant, $V_e = V_v \sqrt{\sigma \dots}$).
- 4. Incognita.** L’inversione algebrica per isolare ciò che cerchiamo.
- 5. Risultato e controllo.** Il numero, con le unità, e una verifica di plausibilità (segno della correzione, ordine di grandezza).

Nota — Costanti e dati d’atmosfera usati

In tutti gli esercizi: $\gamma = 1,4$; $R = 287,05 \text{ J/(kg K)}$; $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$; $p_0 = 101\,325 \text{ Pa}$; $a_0 = 340,29 \text{ m/s}$; $a = 20,05 \sqrt{T}$. I valori dell’aria tipo alle varie quote sono riportati nella tabella dell’Appendice A; qui li useremo direttamente. Ricordiamo la conversione $1 \text{ km/h} = \frac{1}{3,6} \text{ m/s}$.

5.2 Gli otto esercizi svolti

Esercizio svolto — Esercizio 1 — velocità vera di un aereo da trasporto

Traccia. L’anemometro a tubo di Pitot di un aereo da trasporto indica $V_i = 666 \text{ km/h}$. Le caratteristiche di volo sono quelle dell’aria tipo a *quota zero*. L’anemometro non è corretto per la comprimibilità; errori di posizione e strumentali nulli. Calcolare la velocità di volo.

Riconoscimento. Conosciamo l’indicata e vogliamo la vera: *problema di tipo A*. La traccia dice “anemometro non tarato per la comprimibilità”, dunque lo strumento traduce Δp con la formula incomprimibile, ma il moto è comprimibile e va trattato con Saint-Venant.

1) Dati.

$$V_i = 666 \text{ km/h} = 185,00 \text{ m/s};$$

$$z = 0 : p = p_0 = 101\,325 \text{ Pa}, T = 288,15 \text{ K}, \sigma = 1, a_0 = 340,29 \text{ m/s}.$$

2) Modello. A quota zero $\sigma = 1$: qui EAS e TAS coincidono, quindi l'unica correzione da applicare è quella di comprimibilità. Percorriamo la catena del tipo A.

3-4) Equazioni e inversione. Prima la pressione dinamica letta dallo strumento (taratura incompressibile con ρ_0):

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho_0 V_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 185^2 = 20\,962,8 \text{ Pa} \approx 20,96 \text{ kPa}.$$

Questo è il salto di pressione *fisico*; lo interpretiamo ora con Saint-Venant usando la pressione statica locale $p = p_0$:

$$\frac{p_r}{p} = 1 + \frac{\Delta p}{p} = 1 + \frac{20\,962,8}{101\,325} = 1,2069.$$

Invertiamo per il Mach:

$$\text{Ma} = \sqrt{5 \left[\left(\frac{p_r}{p} \right)^{0,2857} - 1 \right]} = \sqrt{5 (1,2069^{0,2857} - 1)} = 0,5253.$$

La velocità vera (a quota zero $a = a_0$):

$$V_v = \text{Ma} \cdot a_0 = 0,5253 \cdot 340,29 = 178,77 \text{ m/s} = 643,6 \text{ km/h}.$$

5) Risultato e controllo.

$$V_v \approx 644 \text{ km/h}$$

Come previsto dalla teoria, $V_v < V_i$ (644 contro 666): a quota zero l'unica differenza è la comprimibilità, e lo strumento *sovrastima* di circa il 3%. Nessuna correzione di densità perché $\sigma = 1$.

Osservazione

Molti si aspettano che “a quota zero indicata e vera coincidano”. È falso in generale: coincidono solo se *anche* la comprimibilità è trascurabile. Qui $\text{Ma} = 0,53 (> 0,3)$, quindi la correzione c'è, e non è piccola.

Esercizio svolto — Esercizio 2 — velocità a 4000 m

Traccia. Un velivolo vola a $z = 4000 \text{ m}$ e l'anemometro (non corretto per la comprimibilità, errori nulli) indica $V_i = 730 \text{ km/h}$. Calcolare la velocità di volo. Utilizzare le caratteristiche dell'aria tipo.

Riconoscimento. Ancora tipo A, ma ora in quota: $\sigma \neq 1$, quindi TAS ed EAS saranno diverse e le calcoliamo entrambe.

1) Dati. A 4000 m (Appendice A):

$$p = 61\,640 \text{ Pa}, T = 262,15 \text{ K}, \sigma = 0,6687, \sqrt{\sigma} = 0,8177, a = 324,58 \text{ m/s};$$

$$V_i = 730 \text{ km/h} = 202,78 \text{ m/s}.$$

2-4) Modello ed equazioni. Pressione dinamica letta (sempre con ρ_0 , perché la taratura è a quota zero):

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho_0 V_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 202,78^2 = 25\,185,3 \text{ Pa}.$$

Rapporto di ristagno con la statica *locale* $p = 61\,640 \text{ Pa}$:

$$\frac{p_r}{p} = 1 + \frac{25\,185,3}{61\,640} = 1,4086, \quad \text{Ma} = \sqrt{5 (1,4086^{0,2857} - 1)} = 0,7171.$$

Velocità del suono locale e velocità vera:

$$a = 20,05\sqrt{262,15} = 324,58 \text{ m/s}, \quad V_v = Ma \cdot a = 0,7171 \cdot 324,58 = 232,74 \text{ m/s} = 837,9 \text{ km/h}.$$

Velocità equivalente (correzione di densità):

$$V_e = V_v\sqrt{\sigma} = 837,9 \cdot 0,8177 = 685,1 \text{ km/h}.$$

5) Risultato.

$$V_v \approx 838 \text{ km/h} \quad (\text{TAS}), \quad V_e \approx 685 \text{ km/h} \quad (\text{EAS})$$

Osservazione

Osserviamo l'ordine delle grandezze: $V_i = 730 < V_e = 685$? No: qui $V_i = 730 > V_e = 685$, coerente col fatto che la comprimibilità fa sovrastimare lo strumento rispetto all'equivalente. E $V_v = 838 > V_e = 685$ perché in quota l'aria è rarefatta ($\sigma < 1$): per generare la stessa pressione dinamica serve una velocità vera maggiore.

Esercizio svolto — Esercizio 3 — dalla velocità vera all'indicata

Traccia. Un velivolo a reazione vola a $z = 8500 \text{ m}$ con velocità effettiva $V_v = 835 \text{ km/h}$. Errori nulli. Calcolare la velocità indicata dall'anemometro; calcolare inoltre quale V_i segnerebbe se il fluido fosse *realmente* incompressibile.

Riconoscimento. Ora è nota la vera e cerchiamo l'indicata: *problema di tipo B*. Percorreremo la catena all'indietro.

1) **Dati.** A 8500 m:

$$p = 33\,099 \text{ Pa}, \quad T = 232,90 \text{ K}, \quad \sigma = 0,4042, \quad \sqrt{\sigma} = 0,6357, \quad a = 305,93 \text{ m/s}, \\ V_v = 835 \text{ km/h} = 231,94 \text{ m/s}.$$

2–4) **Modello ed equazioni.** Prima il Mach di volo:

$$Ma = \frac{V_v}{a} = \frac{231,94}{305,93} = 0,7582.$$

Ora il salto di pressione *reale* sulla presa totale, con Saint-Venant (diretta):

$$\frac{p_r}{p} = \left(1 + \frac{1}{5}Ma^2\right)^{3,5} = (1 + 0,2 \cdot 0,7582^2)^{3,5} = 1,4637,$$

$$\Delta p = p \left(\frac{p_r}{p} - 1 \right) = 33\,099 \cdot 0,4637 = 15\,342,7 \text{ Pa}.$$

L'anemometro (taratura incompressibile) traduce questo Δp con ρ_0 :

$$V_i = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15\,342,7}{1,225}} = 158,27 \text{ m/s} = 569,8 \text{ km/h}.$$

Caso incompressibile. Se il fluido fosse *davvero* incompressibile non ci sarebbe alcuna correzione di comprimibilità: l'indicata coinciderebbe con l'equivalente, $V_i = V_e = V_v\sqrt{\sigma}$:

$$V_i^{\text{incompr}} = V_v\sqrt{\sigma} = 835 \cdot 0,6357 = 530,8 \text{ km/h}.$$

5) Risultato.

$$V_i \approx 570 \text{ km/h} \quad (\text{comprimibile}), \quad V_i^{\text{incompr}} \approx 531 \text{ km/h}$$

Osservazione

La differenza fra i due valori (570 contro 531, quasi 40 km/h) è *tutta* comprimibilità: a $Ma = 0,76$ vale circa il 7%, in buon accordo con $Ma^2/4 \approx 14,4\%$ sul Δp (che si riduce sotto radice sulla velocità). È la ragione per cui gli anemometri di velivoli veloci *devono* essere corretti per la comprimibilità.

Esercizio svolto — Esercizio 4 — Mach e velocità da tre sonde

Traccia. In una corrente d'aria si misurano: pressione statica $p = 915 \text{ kg}_f/\text{m}^2$, pressione di ristagno $p_r = 1450 \text{ kg}_f/\text{m}^2$, temperatura di ristagno $T_r = 27^\circ\text{C}$. Calcolare il numero di Mach locale e la velocità della corrente.

Riconoscimento. Sono note p, p_r, T_r : tipo C. Non serve la quota: l'atmosfera locale è definita dalle tre sonde.

1) Dati. I dati sono nel sistema tecnico; convertiamo in SI ($1 \text{ kg}_f/\text{m}^2 = 9,80665 \text{ Pa}$):

$$p = 8973 \text{ Pa}, \quad p_r = 14\,220 \text{ Pa}, \quad T_r = 27 + 273,15 = 300,15 \text{ K}.$$

Nota

Nel tipo C solo il *rapporto* p_r/p entra nel calcolo del Mach: essendo adimensionale, il risultato non dipende dall'unità scelta per le pressioni. Qui $p_r/p = 1450/915 = 8,973^{-1} \cdot 14,220 = 1,5847$ sia in kg_f/m^2 sia in Pa.

2-4) Modello ed equazioni.

$$\frac{p_r}{p} = \frac{1450}{915} = 1,5847, \quad Ma = \sqrt{5 (1,5847^{0,2857} - 1)} = 0,8384.$$

La temperatura *statica* locale si ricava dalla relazione del ristagno (3.1):

$$T = \frac{T_r}{1 + \frac{1}{5}Ma^2} = \frac{300,15}{1 + 0,2 \cdot 0,8384^2} = 263,15 \text{ K}.$$

Velocità del suono e velocità della corrente:

$$a = 20,05 \sqrt{263,15} = 325,2 \text{ m/s}, \quad V = Ma \cdot a = 0,8384 \cdot 325,2 = 272,65 \text{ m/s} = 981,5 \text{ km/h}.$$

5) Risultato.

$$Ma \approx 0,838, \quad V \approx 982 \text{ km/h}$$

Attenzione

La temperatura da usare nella $a = \sqrt{\gamma RT}$ è quella *statica* T , non quella di ristagno T_r : la sonda di temperatura “sente” il gas fermo (a ristagno), ma il suono viaggia nel gas in movimento, alla sua temperatura statica. Confondere le due è l'errore più frequente in questo tipo di problema.

Nota

I quattro esercizi che seguono ripercorrono gli stessi tre tipi con dati diversi: sono la palestra ideale per consolidare il metodo. Conviene provare a impostarli da soli, coprendo lo svolgimento, e poi confrontare.

Esercizio svolto — Esercizio 5 — aereo a reazione a quota zero

Traccia. L'anemometro (errori nulli, non corretto per la comprimibilità) di un aereo a reazione indica $V_i = 845$ km/h; grandezze di riferimento dell'aria tipo a quota zero. Calcolare la velocità di volo nel Sistema Internazionale.

Riconoscimento. Tipo A a quota zero, identico per metodo all'esercizio 1.

Svolgimento.

$$V_i = 845 \text{ km/h} = 234,72 \text{ m/s}, \quad \Delta p = \frac{1}{2} \rho_0 V_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 234,72^2 = 33\,745,4 \text{ Pa}.$$

$$\frac{p_r}{p} = 1 + \frac{33\,745,4}{101\,325} = 1,3330, \quad \text{Ma} = \sqrt{5(1,3330^{0,2857} - 1)} = 0,6542.$$

$$V_v = \text{Ma} \cdot a_0 = 0,6542 \cdot 340,29 = 222,62 \text{ m/s} = 801,4 \text{ km/h}.$$

A quota zero $\sigma = 1$, quindi $V_e = V_v$.

$$V_v \approx 801 \text{ km/h}$$

Osservazione — Lettura fisica: più veloci, più errore

Confrontiamo con l'esercizio 1, anch'esso di tipo A a quota zero. Lì $V_i = 666$ km/h dava uno scarto $V_i - V_v = 22$ km/h (3,3%); qui, con $V_i = 845$ km/h, lo scarto sale a $845 - 801 = 44$ km/h (5,2%). La ragione è nel numero di Mach: si è passati da $\text{Ma} = 0,53$ a $\text{Ma} = 0,65$, e la sovrastima di comprimibilità cresce con Ma^2 (il fattore $1 + \text{Ma}^2/4$). È il primo segnale di un fatto generale: più l'aereo è veloce, più l'anemometro non corretto "mente", e in modo non lineare.

Esercizio svolto — Esercizio 6 — velocità equivalente a 7000 m

Traccia. Un velivolo vola a $z = 7000$ m con anemometro non corretto per la comprimibilità che indica $V_i = 790$ km/h (errori nulli, aria tipo). Calcolare la velocità equivalente.

Riconoscimento. Tipo A; la traccia chiede esplicitamente l'EAS, quindi ci fermeremo un passo prima del TAS non serve, ma lo calcoliamo comunque per completezza.

Dati. A 7000 m: $p = 41\,060$ Pa, $T = 242,65$ K, $\sigma = 0,4812$, $\sqrt{\sigma} = 0,6937$, $a = 312,27$ m/s; $V_i = 790$ km/h = $219,44$ m/s.

Svolgimento.

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho_0 V_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 219,44^2 = 29\,495,5 \text{ Pa}, \quad \frac{p_r}{p} = 1 + \frac{29\,495,5}{41\,060} = 1,7183.$$

$$\text{Ma} = \sqrt{5(1,7183^{0,2857} - 1)} = 0,9145,$$

$$V_v = \text{Ma} \cdot a = 0,9145 \cdot 312,27 = 285,6 \text{ m/s} = 1028,1 \text{ km/h}.$$

$$V_e = V_v \sqrt{\sigma} = 1028,1 \cdot 0,6937 = 713,2 \text{ km/h}.$$

$$V_e \approx 713 \text{ km/h}$$

Attenzione

Qui il Mach di volo vale $\text{Ma} = 0,91$: siamo in pieno regime *transonico*. La relazione di Saint-Venant è ancora valida (finché $\text{Ma} < 1$ e non si formano urti sulla presa), ma la correzione di comprimibilità è enorme: la velocità vera (1028 km/h) supera di ben 315 km/h l'equivalente (713 km/h). Questo esercizio mostra in modo drammatico perché a queste velocità *ignorare* la comprimibilità non è un'approssimazione, è

un errore grossolano.

Esercizio svolto — Esercizio 7 — indicata a 6000 m, con e senza comprimibilità

Traccia. Un velivolo vola a $z = 6000$ m con velocità vera $V_v = 740$ km/h. Calcolare la velocità indicata sia considerando il fluido comprimibile sia considerandolo incomprimibile. Errori nulli, aria tipo.

Riconoscimento. Tipo B, come l'esercizio 3.

Dati. A 6000 m: $p = 47\,181$ Pa, $T = 249,15$ K, $\sigma = 0,5385$, $\sqrt{\sigma} = 0,7338$, $a = 316,43$ m/s; $V_v = 740$ km/h = 205,56 m/s.

Svolgimento (comprimibile).

$$\text{Ma} = \frac{V_v}{a} = \frac{205,56}{316,43} = 0,6496, \quad \frac{p_r}{p} = (1 + 0,2 \cdot 0,6496^2)^{3,5} = 1,3279.$$

$$\Delta p = p \left(\frac{p_r}{p} - 1 \right) = 47\,181 \cdot 0,3279 = 15\,470 \text{ Pa}, \quad V_i = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho_0}} = 158,93 \text{ m/s} = 572,1 \text{ km/h}.$$

Svolgimento (incomprimibile).

$$V_i^{\text{incompr}} = V_v \sqrt{\sigma} = 740 \cdot 0,7338 = 543,0 \text{ km/h}.$$

$$V_i \approx 572 \text{ km/h (compr.)}, \quad V_i^{\text{incompr}} \approx 543 \text{ km/h}$$

Osservazione — Lettura fisica: la firma della comprimibilità

I due valori differiscono di $572 - 543 = 29$ km/h, ed è una differenza *tutta* di comprimibilità: l'indicata incomprimibile (543 km/h) coincide con l'equivalente $V_e = V_v \sqrt{\sigma}$, mentre quella comprimibile (572 km/h) tiene conto del sovrappiù di pressione dinamica reale. A $\text{Ma} = 0,65$ quel sovrappiù vale circa l'11% sul Δp , che sotto radice diventa $\sqrt{1,11} \approx 1,054$: infatti $543 \times 1,054 \approx 572$. Ritroviamo così, in un caso concreto, la curva del fattore di comprimibilità del Cap. 3.

Esercizio svolto — Esercizio 8 — Mach e velocità in galleria

Traccia. Con sonde di pressione e temperatura in una corrente d'aria si misurano: $T_r = 24,2^\circ\text{C}$, $p_r = 10\,523,2$ Pa, $p = 6732,44$ Pa. Calcolare il numero di Mach e la velocità della corrente.

Riconoscimento. Tipo C, come l'esercizio 4. I dati sono già in SI: comodo.

Svolgimento.

$$\frac{p_r}{p} = \frac{10\,523,2}{6732,44} = 1,5631, \quad \text{Ma} = \sqrt{5 (1,5631^{0,2857} - 1)} = 0,8250.$$

$$T_r = 24,2 + 273,15 = 297,35 \text{ K}, \quad T = \frac{T_r}{1 + \frac{1}{5} \text{Ma}^2} = \frac{297,35}{1 + 0,2 \cdot 0,825^2} = 261,72 \text{ K}.$$

$$a = 20,05 \sqrt{261,72} = 324,3 \text{ m/s}, \quad V = \text{Ma} \cdot a = 0,8250 \cdot 324,3 = 267,55 \text{ m/s} = 963,2 \text{ km/h}.$$

$$\text{Ma} \approx 0,825, \quad V \approx 963 \text{ km/h}$$

Osservazione — Lettura fisica: quanto scalda il ristagno

Il conto rende visibile il *riscaldamento di ristagno*: la sonda di temperatura, che “sente” il gas fermo, legge $T_r = 24,2^\circ\text{C}$, ma la corrente vera è ben più fredda, $T = 261,7\text{ K} = -11,4^\circ\text{C}$. La differenza, $T_r - T \approx 35,6\text{ K}$, è tutta energia cinetica convertita in calore all’arresto, in perfetto accordo con $\frac{\gamma-1}{2}\text{Ma}^2 T = 0,2 \cdot 0,825^2 \cdot 261,7 = 35,6\text{ K}$. È il motivo per cui, a questi Mach, usare T_r invece di T nella $a = \sqrt{\gamma R T}$ porterebbe a sovrastimare la velocità del suono (e quindi la velocità della corrente) di qualche punto percentuale.

5.3 Quadro riassuntivo dei risultati

Es.	Tipo	Dato	Incognita	Risultato
1	A	$V_i = 666\text{ km/h}$, $z = 0$	V_v	$V_v \approx 644\text{ km/h}$
2	A	$V_i = 730\text{ km/h}$, $z = 4\text{ km}$	V_v, V_e	$V_v \approx 838\text{ km/h}$; $V_e \approx 685\text{ km/h}$
3	B	$V_v = 835\text{ km/h}$, $z = 8,5\text{ km}$	V_i	570 km/h (c.) ; 531 km/h (inc.)
4	C	$p_r/p = 1,585$, $T_r = 27^\circ\text{C}$	Ma, V	$\text{Ma} = 0,838$; $V \approx 982\text{ km/h}$
5	A	$V_i = 845\text{ km/h}$, $z = 0$	V_v	$V_v \approx 801\text{ km/h}$
6	A	$V_i = 790\text{ km/h}$, $z = 7\text{ km}$	V_e	$V_e \approx 713\text{ km/h}$
7	B	$V_v = 740\text{ km/h}$, $z = 6\text{ km}$	V_i	572 km/h (c.) ; 543 km/h (inc.)
8	C	$p_r/p = 1,563$, $T_r = 24,2^\circ\text{C}$	Ma, V	$\text{Ma} = 0,825$; $V \approx 963\text{ km/h}$

Tabella 5.1. Sinossi degli otto esercizi. “c.” = comprimibile, “inc.” = incomprimibile.

Il senso di tutto questo

Otto problemi, tre schemi, un solo metodo. Se sai riconoscere se ti danno l’indicata (tipo A), la vera (tipo B) o le pressioni di una sonda (tipo C), il resto è percorrere la catena. La regola aurea da portare a casa: *lo strumento misura sempre un Δp ; tutto il gioco sta nel tradurlo con la densità e la comprimibilità giuste.*

L'atmosfera standard ISA in sintesi

Gli esercizi richiedono i valori di pressione, temperatura, densità e densità relativa alle varie quote. Li raccogliamo qui, insieme alle formule che li generano, perché la monografia sia autosufficiente.

A.1 Le formule della troposfera

Nella troposfera ($0 \leq z \leq 11\,000$ m) la temperatura decresce linearmente con la quota secondo il gradiente $L = 6,5$ K/km:

$$T(z) = T_0 - Lz, \quad T_0 = 288,15 \text{ K.}$$

Integrando l'equilibrio idrostatico $dp = -\rho g dz$ con l'equazione di stato si ottengono le leggi di pressione e densità:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{g_0}{RL}}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{g_0}{RL}-1} = \sigma,$$

con $p_0 = 101\,325$ Pa, $\rho_0 = 1,225$ kg/m³ e l'esponente

$$\frac{g_0}{RL} = \frac{9,806\,65}{287,05 \cdot 0,0065} = 5,2559.$$

La velocità del suono segue da $a = \sqrt{\gamma RT} = 20,05\sqrt{T}$.

A.2 Tabella dei valori (troposfera ISA)

z m	T K	p kPa	ρ kg/m ³	σ —	$\sqrt{\sigma}$ —	a m/s
0	288.15	101.325	1.2250	1.0000	1.0000	340.3
1000	281.65	89.874	1.1116	0.9075	0.9526	336.4
2000	275.15	79.495	1.0065	0.8216	0.9064	332.5
3000	268.65	70.108	0.9091	0.7421	0.8615	328.6
4000	262.15	61.640	0.8191	0.6687	0.8177	324.6
5000	255.65	54.020	0.7361	0.6009	0.7752	320.5
6000	249.15	47.181	0.6597	0.5385	0.7338	316.4
7000	242.65	41.060	0.5895	0.4812	0.6937	312.3
8000	236.15	35.599	0.5252	0.4287	0.6548	308.1
9000	229.65	30.742	0.4663	0.3807	0.6170	303.8
10000	223.15	26.436	0.4127	0.3369	0.5804	299.5
11000	216.65	22.632	0.3639	0.2971	0.5450	295.1

Tabella A.1. Aria tipo ISA nella troposfera. I valori usati negli esercizi (quote 0, 4000, 6000, 7000, 8500 m) si leggono da questa tabella o si interpolano; per 8500 m si ha $T = 232,90$ K, $p = 33,099$ kPa, $\sigma = 0,4042$, $\sqrt{\sigma} = 0,6357$, $a = 305,9$ m/s.

Osservazione

La densità relativa σ e la sua radice $\sqrt{\sigma}$ sono le grandezze che ricorrono più spesso: $\sqrt{\sigma}$ converte TAS in EAS ($V_e = V_v \sqrt{\sigma}$). È utile ricordare qualche valore a memoria: a 4000 m $\sqrt{\sigma} \approx 0,82$; a 8000 m $\approx 0,65$; a 11 000 m (tropopausa) $\approx 0,55$.

Il sistema tecnico e le conversioni

Molta manualistica aeronautica, e diverse tabelle di dati ancora in uso, adottano il vecchio **sistema tecnico** (o gravitazionale), in cui l'unità fondamentale non è la massa ma la *forza*, il chilogrammo-forza kg_f . Poiché alcuni dati degli esercizi (per esempio le pressioni misurate da una sonda) possono arrivare in queste unità, è bene saperle leggere e convertire. In questa monografia tutti i conti sono in SI; questa appendice è il “ponte”.

B.1 Le corrispondenze fondamentali

Grandezza	Sistema tecnico	Sistema Internazionale
Forza	1 kg_f	9,806 65 N
Pressione	1 kg_f/m^2	9,806 65 Pa
Pressione (atm. SL)	10 332 kg_f/m^2	101 325 Pa
Densità (aria SL)	0,125 $\text{kg}_f \text{ s}^2/\text{m}^4$	1,225 kg/m^3
Temperatura	K (identica)	K

Tabella B.1. Conversioni fra sistema tecnico e SI usate negli esercizi.

Osservazione — La densità nel sistema tecnico

Il valore $\rho_0 = 0,125 \text{ kg}_f \text{ s}^2/\text{m}^4$ che compare nella manualistica tecnica non è altro che $1,225 \text{ kg}/\text{m}^3$ diviso $g_0 = 9,806 65$: nel sistema tecnico la “massa” si misura in $\text{kg}_f \text{ s}^2/\text{m}$ (l'unità tecnica di massa, la *UTM*), e infatti $1,225/9,80665 = 0,1249$. È lo stesso motivo per cui la formula di Bernoulli, nel sistema tecnico, si scrive con $\rho_0 = 0,125$: cambia solo l'unità, non la fisica.

B.2 Perché il sistema di unità non cambia la fisica

Chi rifacesse gli stessi esercizi nel sistema tecnico ritroverebbe, a meno di arrotondamenti, i medesimi risultati in km/h: non è un caso, perché le due strade calcolano la stessa fisica. I punti di contatto:

- la velocità del suono $a = 20,046\sqrt{T}$ del sistema tecnico e la nostra $a = 20,05\sqrt{T}$ in SI sono la *stessa* formula, perché $\sqrt{\gamma R} = 20,047$ con R in $\text{J}/(\text{kg K})$;
- la relazione di Saint-Venant $p_r/p = (1 + \frac{1}{5}\text{Ma}^2)^{3,5}$ è adimensionale: identica nei due sistemi;
- il legame $\Delta p = \frac{1}{2}\rho V^2$ ha la stessa forma; cambia solo il valore numerico di ρ (e con esso l'unità di Δp).

Eventuali differenze sull'ultimo decimale nascono solo dagli arrotondamenti delle tabelle e dall'aver talvolta usato 273 K invece di 273,15 K nella conversione delle temperature: dettagli numerici, non fisici.

B.3 Fattori di conversione delle velocità

Da	A
1 km/h	0,277 78 m/s (dividere per 3,6)
1 m/s	3,6 km/h
1 kn (nodo)	1,852 km/h = 0,514 44 m/s
1 km/h	0,539 96 kn

Tabella B.2. Conversioni di velocità. Il nodo (kn) è l'unità di velocità usata nella pratica aeronautica anglosassone: 1 nodo = 1 miglio nautico all'ora.

CAPITOLO C

Formulario

Raccolta compatta di tutte le relazioni usate, per la consultazione rapida durante gli esercizi.

Pressioni e Bernoulli (incomprimibile)

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2}\rho V^2 && \text{pressione dinamica} \\ p + \frac{1}{2}\rho V^2 &= p_r = \text{cost} && \text{Bernoulli lungo una linea di corrente} \\ \Delta p &= p_r - p = \frac{1}{2}\rho V^2 && \text{legame } \Delta p - V \\ V &= \sqrt{2\Delta p/\rho} && \text{inversione} \end{aligned}$$

Velocità del suono e numero di Mach

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\gamma R T} = 20,05 \sqrt{T} \text{ [m/s]} && (\gamma = 1,4, R = 287,05) \\ \text{Ma} &= V/a && \text{numero di Mach} \end{aligned}$$

Ristagno comprimibile (Saint-Venant, subsonico)

$$\begin{aligned} \frac{T_r}{T} &= 1 + \frac{1}{5} \text{Ma}^2 && \text{temperatura di ristagno} \\ \frac{p_r}{p} &= \left(1 + \frac{1}{5} \text{Ma}^2\right)^{3,5} && \text{pressione di ristagno} \\ \text{Ma} &= \sqrt{5 \left[(p_r/p)^{0,2857} - 1 \right]} && \text{inversione per il Mach} \\ T &= T_r / \left(1 + \frac{1}{5} \text{Ma}^2\right) && \text{temperatura statica da } T_r \end{aligned}$$

Le quattro velocità

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{1}{2}\rho_0 V_i^2 && \text{taratura anemometro (SL, incompr.)} \\ \sigma &= \rho/\rho_0 && \text{densità relativa} \\ V_e &= V_v \sqrt{\sigma} && \text{EAS da TAS} \\ V_v &= V_e / \sqrt{\sigma} && \text{TAS da EAS} \end{aligned}$$

Le tre ricette

Tipo A ($V_i \rightarrow V_v, V_e$): $V_i \Rightarrow \Delta p = \frac{1}{2}\rho_0 V_i^2 \Rightarrow p_r/p = 1 + \Delta p/p \Rightarrow \text{Ma} \Rightarrow V_v = \text{Ma } a \Rightarrow V_e = V_v \sqrt{\sigma}$.

Tipo B ($V_v \rightarrow V_i$): $V_v \Rightarrow \text{Ma} = V_v/a \Rightarrow p_r/p \Rightarrow \Delta p = p(p_r/p - 1) \Rightarrow V_i = \sqrt{2\Delta p/\rho_0}$; incomp.:
 $V_i = V_v \sqrt{\sigma}$.

Tipo C ($p, p_r, T_r \rightarrow \text{Ma}, V$): $p_r/p \Rightarrow \text{Ma} \Rightarrow T = T_r/(1 + \frac{1}{5}\text{Ma}^2) \Rightarrow a = \sqrt{\gamma RT} \Rightarrow V = \text{Ma } a$.

Correzione di comprimibilità (memoria rapida)

$$\frac{\Delta p_{\text{compr}}}{\frac{1}{2}\rho V^2} \approx 1 + \frac{\text{Ma}^2}{4} \Rightarrow \text{Ma} = 0,3 : +2,3\%; \quad \text{Ma} = 0,8 : +16\%; \quad \text{Ma} = 0,9 : +20\%.$$