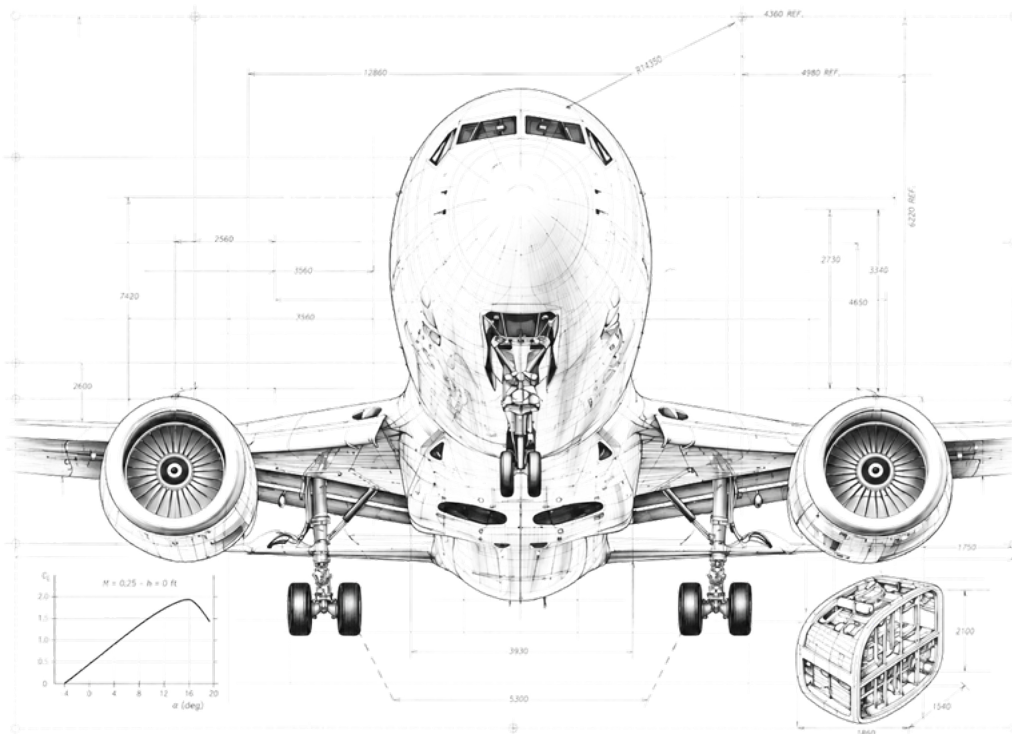


# Costruzioni Aeronautiche

La trave e le sue sollecitazioni, i materiali  
e le tecnologie, l'involuppo di volo



**Biagio Raucci**

Appunti del corso



# Indice

|          |                                                                         |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Guida alla lettura</b>                                               | <b>1</b>  |
| <b>I</b> | <b>La trave, le sollecitazioni interne e le verifiche strutturali</b>   | <b>4</b>  |
| <b>2</b> | <b>La trave e le caratteristiche della sollecitazione</b>               | <b>5</b>  |
| 2.1      | Che cos'è una trave . . . . .                                           | 5         |
| 2.1.1    | Vincoli: l'incastro . . . . .                                           | 6         |
| 2.1.2    | Carichi esterni e reazioni vincolari . . . . .                          | 6         |
| 2.2      | Le equazioni cardinali e le aste a due forze . . . . .                  | 7         |
| 2.2.1    | Il diagramma di corpo libero . . . . .                                  | 7         |
| 2.2.2    | L'asta a due forze . . . . .                                            | 7         |
| 2.2.3    | I coseni direttori: proiettare senza trigonometria . . . . .            | 8         |
| 2.3      | La sezione generica e le forze interne . . . . .                        | 8         |
| 2.3.1    | L'interpretazione fisica . . . . .                                      | 9         |
| 2.4      | I casi di carico che studieremo . . . . .                               | 10        |
| <b>3</b> | <b>Tensioni interne e schema di verifica</b>                            | <b>12</b> |
| 3.1      | Le tensioni interne . . . . .                                           | 12        |
| 3.1.1    | Unità di misura . . . . .                                               | 13        |
| 3.1.2    | Dal globale al locale . . . . .                                         | 13        |
| 3.2      | La prova di trazione . . . . .                                          | 14        |
| 3.2.1    | La legge di Hooke e le costanti elastiche . . . . .                     | 15        |
| 3.2.2    | Proprietà tipiche dei materiali strutturali . . . . .                   | 15        |
| 3.3      | Lo schema generale della verifica strutturale . . . . .                 | 16        |
| 3.3.1    | Tensione ammissibile e coefficiente di sicurezza . . . . .              | 17        |
| 3.3.2    | La tensione tangenziale ammissibile: il criterio di Von Mises . . . . . | 18        |
| <b>4</b> | <b>Trazione, compressione e instabilità elastica</b>                    | <b>19</b> |
| 4.1      | Trazione e compressione semplice . . . . .                              | 19        |
|          | Esempio 4.1 – Verifica a trazione . . . . .                             | 20        |
| 4.1.1    | L'allungamento sotto carico . . . . .                                   | 20        |
|          | Esempio 4.2 – Allungamento di un tirante . . . . .                      | 21        |
| 4.2      | La compressione e l'instabilità elastica . . . . .                      | 21        |
|          | Esempio 4.3 – Instabilità di un'asta compressa . . . . .                | 23        |

|          |                                                                     |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5</b> | <b>La torsione</b>                                                  | <b>25</b> |
| 5.1      | La sezione circolare piena . . . . .                                | 25        |
|          | Esempio 5.1 – Torsione di una trave piena . . . . .                 | 26        |
| 5.2      | Sezioni non circolari: l'ingobbamento . . . . .                     | 27        |
|          | Esempio 5.2 – Piattina in torsione . . . . .                        | 28        |
| 5.3      | Le formule di Bredt . . . . .                                       | 28        |
|          | Esempio 5.3 – Tubo in parete sottile . . . . .                      | 30        |
|          | Esempio 5.4 – Cassone alare a spessori diversi . . . . .            | 31        |
| 5.4      | Il confronto finale: sezione aperta contro sezione chiusa . . . . . | 32        |
|          | Esempio 5.5 – Aperta contro chiusa . . . . .                        | 32        |
| <b>6</b> | <b>Flessione e taglio</b>                                           | <b>35</b> |
| 6.1      | I diagrammi di taglio e momento sulla mensola . . . . .             | 35        |
| 6.1.1    | Forza concentrata all'estremità . . . . .                           | 35        |
| 6.1.2    | Forza concentrata a distanza $b$ dall'incastro . . . . .            | 36        |
| 6.1.3    | Carico uniformemente distribuito . . . . .                          | 36        |
| 6.2      | Centro di taglio e asse neutro . . . . .                            | 38        |
| 6.2.1    | Il centro di taglio . . . . .                                       | 38        |
| 6.2.2    | Asse neutro e flessione retta . . . . .                             | 39        |
| 6.3      | La formula di Navier . . . . .                                      | 39        |
| 6.3.1    | Il modulo di resistenza e la formula di progetto . . . . .          | 39        |
| 6.3.2    | I momenti d'inerzia di sezione . . . . .                            | 40        |
| 6.3.3    | Il prontuario delle sezioni notevoli . . . . .                      | 41        |
|          | Esempio 6.1 – Progetto a flessione con $W$ . . . . .                | 42        |
| 6.4      | Il taglio semplice: perni, bulloni e rivetti . . . . .              | 43        |
|          | Esempio 6.2 – Bullone a taglio . . . . .                            | 44        |
|          | Esempio 6.3 – Fila di rivetti . . . . .                             | 45        |
| 6.5      | La formula di Jourawsky . . . . .                                   | 46        |
| 6.5.1    | Da dove viene la formula: lo scorrimento impedito . . . . .         | 46        |
|          | Esempio 6.4 – Jourawsky sul doppio T . . . . .                      | 48        |
| 6.6      | Un esempio completo: la mensola a doppio T . . . . .                | 49        |
|          | Esempio 6.5 – Mensola a doppio T . . . . .                          | 49        |

## II Materiali e tecnologie aeronautiche 52

|          |                                                             |           |
|----------|-------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>7</b> | <b>Materiali e tecnologie aeronautiche</b>                  | <b>53</b> |
| 7.1      | Le lavorazioni fondamentali . . . . .                       | 53        |
| 7.2      | Le proprietà tecnologiche . . . . .                         | 54        |
| 7.3      | I trattamenti termici . . . . .                             | 54        |
| 7.4      | Le proprietà meccaniche . . . . .                           | 55        |
| 7.5      | La fatica dei materiali . . . . .                           | 55        |
| 7.5.1    | La scoperta: gli assali che non dovevano rompersi . . . . . | 55        |
| 7.5.2    | Le grandezze del ciclo . . . . .                            | 56        |
|          | Esempio 7.1 – Il ciclo della fusoliera . . . . .            | 57        |

|            |                                                                        |           |
|------------|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 7.5.3      | I tre stadi del danneggiamento                                         | 57        |
| 7.5.4      | I criteri di progetto a fatica: safe-life, fail-safe, damage tolerance | 58        |
| 7.6        | I materiali compositi                                                  | 59        |
| 7.6.1      | La laminazione in autoclave                                            | 60        |
| 7.6.2      | I compositi in linea di volo: il Boeing 787                            | 60        |
| 7.7        | I materiali metallici                                                  | 61        |
| 7.7.1      | Ferro, acciaio e ghisa                                                 | 61        |
| 7.7.2      | Alluminio e leghe leggere                                              | 61        |
| 7.7.3      | I rivetti di alluminio                                                 | 61        |
| 7.7.4      | Rame e titanio                                                         | 62        |
| <b>III</b> | <b>Le strutture aeronautiche</b>                                       | <b>63</b> |
| <b>8</b>   | <b>Strutture a guscio e a semiguscio</b>                               | <b>64</b> |
| 8.1        | Il problema: leggerezza e forma insieme                                | 64        |
| 8.2        | Due famiglie: guscio e semiguscio                                      | 65        |
| 8.3        | Perché il “solo guscio” non basta                                      | 65        |
| 8.4        | Il modello del semiguscio ideale                                       | 67        |
| 8.4.1      | Quando il modello è attendibile                                        | 68        |
| 8.5        | L'anatomia di un'ala a semiguscio                                      | 68        |
| <b>9</b>   | <b>Dal guscio ideale al semiguscio: la genesi del modello</b>          | <b>71</b> |
| 9.1        | Un esperimento mentale: quattro ali, tre bocciature                    | 71        |
| 9.2        | Tre taglie di modello: 3D, 2D, 1D                                      | 73        |
| 9.3        | Il passaggio dal continuo al discreto: la prova dei numeri             | 74        |
|            | Esempio 9.1 – Dal continuo al discreto sul doppio T                    | 74        |
| 9.4        | L'onestà del modello: prudente, ma non ovunque                         | 76        |
| 9.4.1      | Che cosa il modello ha perso                                           | 76        |
| 9.4.2      | Da che parte pende l'approssimazione                                   | 76        |
| <b>10</b>  | <b>Dal carico alla struttura: il dimensionamento</b>                   | <b>78</b> |
| 10.1       | Dai carichi alle sollecitazioni della sezione                          | 78        |
| 10.2       | L'ala monolongherone                                                   | 80        |
| 10.2.1     | Le solette a flessione: longherone simmetrico                          | 82        |
|            | Esempio 10.1 – Solette del longherone simmetrico                       | 84        |
| 10.2.2     | Le solette a flessione: longherone asimmetrico                         | 84        |
|            | Esempio 10.2 – Longherone asimmetrico                                  | 87        |
| 10.2.3     | L'anima a taglio                                                       | 88        |
| 10.2.4     | Il cassone a torsione                                                  | 89        |
| 10.3       | Il calcolo completo della sezione alare                                | 91        |
|            | Esempio 10.3 – Sezione alare completa                                  | 96        |
| 10.4       | L'ala bilongherone                                                     | 98        |
| 10.5       | La fusoliera                                                           | 100       |
| 10.5.1     | Le sollecitazioni della fusoliera                                      | 100       |

|        |                                                                       |     |
|--------|-----------------------------------------------------------------------|-----|
| 10.5.2 | Le tre famiglie costruttive . . . . .                                 | 102 |
| 10.6   | I collegamenti bullonati e rivettati . . . . .                        | 106 |
| 10.6.1 | I collegamenti bullonati . . . . .                                    | 107 |
|        | Esempio 10.4 – Bullone a taglio . . . . .                             | 108 |
|        | Esempio 10.5 – Verifica di una forcina . . . . .                      | 109 |
| 10.6.2 | I collegamenti rivettati . . . . .                                    | 109 |
| 10.7   | Il montante di controventatura: un dimensionamento completo . . . . . | 113 |
|        | Esempio 10.6 – Montante di controventatura . . . . .                  | 113 |
| 10.8   | Il progetto della giunzione rivettata in sei fasi . . . . .           | 120 |
| 10.8.1 | I cinque modi di rottura, in sintesi operativa . . . . .              | 121 |
| 10.8.2 | L'algoritmo di dimensionamento . . . . .                              | 122 |
| 10.8.3 | Esempi numerici completi . . . . .                                    | 124 |
|        | Esempio 10.7 – Rivettatura anima-centina . . . . .                    | 125 |
|        | Esempio 10.8 – Rivestimento del bordo d'attacco . . . . .             | 125 |
| 10.8.4 | Vademecum degli errori tipici . . . . .                               | 126 |
| 10.8.5 | Le tabelle di selezione . . . . .                                     | 127 |
| 10.8.6 | Esercizi proposti . . . . .                                           | 133 |

## **IV L'involuppo di volo e le esercitazioni 134**

### **11 L'involuppo di volo: manovra e raffica 135**

|        |                                                        |     |
|--------|--------------------------------------------------------|-----|
| 11.1   | Velocità indicata e velocità vera . . . . .            | 135 |
| 11.1.1 | La velocità di stallo in IAS e in TAS . . . . .        | 136 |
| 11.2   | Il fattore di carico e le parabole di stallo . . . . . | 137 |
| 11.3   | Il diagramma di manovra . . . . .                      | 137 |
| 11.3.1 | La velocità di manovra . . . . .                       | 138 |
| 11.3.2 | Le velocità di progetto . . . . .                      | 138 |
| 11.4   | Gli archi dell'anemometro . . . . .                    | 139 |
| 11.5   | Il diagramma di raffica . . . . .                      | 140 |
| 11.5.1 | La correzione del gradiente di portanza . . . . .      | 142 |

### **12 Le esercitazioni: dall'involuppo al longherone 143**

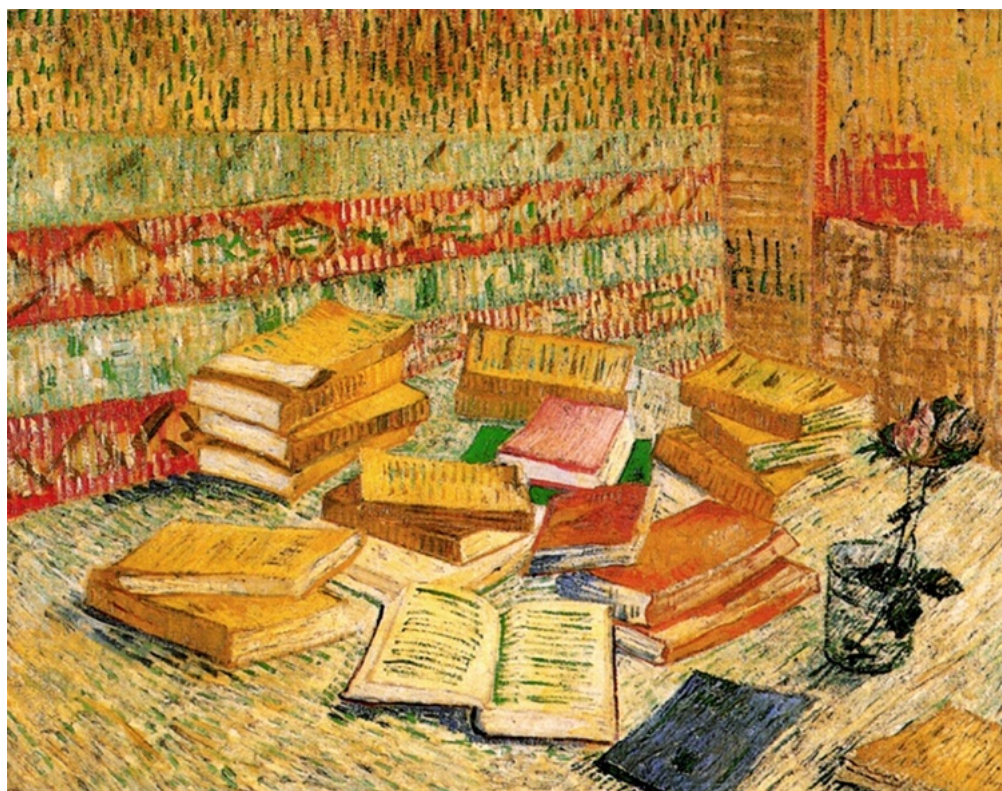
|        |                                                               |     |
|--------|---------------------------------------------------------------|-----|
| 12.1   | Il velivolo delle esercitazioni . . . . .                     | 143 |
| 12.2   | Esercitazione A: l'involuppo di volo del SF-260 . . . . .     | 144 |
| 12.2.1 | Le velocità caratteristiche . . . . .                         | 144 |
| 12.2.2 | Il diagramma di manovra . . . . .                             | 145 |
| 12.2.3 | Il diagramma di raffica . . . . .                             | 145 |
| 12.3   | Esercitazione B: la ripartizione della portanza . . . . .     | 146 |
| 12.3.1 | Le equazioni dell'equilibrio longitudinale . . . . .          | 146 |
| 12.3.2 | I risultati su tutti i punti dell'involuppo . . . . .         | 147 |
| 12.4   | Esercitazione C: la semiala con i serbatoi subalari . . . . . | 148 |
| 12.4.1 | Il formulario generale . . . . .                              | 148 |
| 12.4.2 | La simulazione numerica: ala bassa nel punto D . . . . .      | 149 |
| 12.5   | Esercitazione D: il dimensionamento del longherone . . . . .  | 150 |

|                                                         |                                                                       |            |
|---------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|------------|
| 12.5.1                                                  | La procedura in otto passi . . . . .                                  | 151        |
| 12.5.2                                                  | Il dimensionamento alla radice: due tentativi . . . . .               | 152        |
| Esempio 12.1 – Dimensionamento del longherone . . . . . |                                                                       | 152        |
| <b>13</b>                                               | <b>Approfondimenti ed esercizi svolti</b>                             | <b>154</b> |
| 13.1                                                    | Il carico di punta: dalla linea elastica a Eulero . . . . .           | 154        |
| 13.1.1                                                  | L'equazione della trave-colonna . . . . .                             | 155        |
| 13.1.2                                                  | Il carico critico come problema agli autovalori . . . . .             | 155        |
| 13.1.3                                                  | Il significato di “freccia infinita” . . . . .                        | 156        |
| 13.1.4                                                  | Tensione critica, snellezza e iperbole di Eulero . . . . .            | 157        |
| 13.1.5                                                  | Snellezza limite e campo di validità . . . . .                        | 157        |
| 13.1.6                                                  | Le curve di Johnson per le aste tozze . . . . .                       | 158        |
| 13.1.7                                                  | Esercizio guida: l'asta di controvento . . . . .                      | 158        |
| Esempio 13.1 – Asta di controvento . . . . .            |                                                                       | 158        |
| 13.2                                                    | Il dimensionamento completo del longherone . . . . .                  | 160        |
| Esempio 13.2 – Longherone di un'ala trapezia . . . . .  |                                                                       | 160        |
| <b>A</b>                                                | <b>Un longherone a C: che cosa cambia rispetto al doppio T</b>        | <b>164</b> |
| A.1                                                     | Il punto di partenza: stessa ala, sezione diversa . . . . .           | 164        |
| A.2                                                     | Fasi E.1 ed E.2: flessione e taglio . . . . .                         | 165        |
| Esempio A.1 – Longherone a C . . . . .                  |                                                                       | 165        |
| A.3                                                     | Fase G: il centro di taglio, ciò che il doppio T nascondeva . . . . . | 166        |
| A.4                                                     | La conseguenza: la torsione parassita . . . . .                       | 168        |
| A.4.1                                                   | Come si governa il problema . . . . .                                 | 168        |
| A.5                                                     | Il bilancio del confronto . . . . .                                   | 169        |
| <b>B</b>                                                | <b>L'Esame di Stato 2014/15 passo passo</b>                           | <b>171</b> |
| B.1                                                     | La traccia . . . . .                                                  | 171        |
| B.2                                                     | Soluzione con longherone a doppio T . . . . .                         | 172        |
| B.3                                                     | Lo stesso esame con longherone a C . . . . .                          | 174        |
| B.4                                                     | Il confronto finale . . . . .                                         | 176        |
| <b>C</b>                                                | <b>Lo schema operativo: dimensionare un longherone in sei fasi</b>    | <b>177</b> |
| C.1                                                     | Fase A — Dati e ipotesi . . . . .                                     | 177        |
| C.2                                                     | Fase B — Geometria dell'ala . . . . .                                 | 178        |
| C.3                                                     | Fase C — Determinazione delle forze . . . . .                         | 179        |
| C.4                                                     | Fase D — Baricentro e sollecitazioni . . . . .                        | 179        |
| C.5                                                     | Fase E — Dimensionamento del longherone . . . . .                     | 180        |
| C.6                                                     | Fase F — Torsione e rivestimento . . . . .                            | 181        |
| C.7                                                     | Lo schema in una pagina . . . . .                                     | 182        |
| <b>D</b>                                                | <b>Il tema 2019: il carrello passo passo</b>                          | <b>183</b> |
| D.1                                                     | La traccia . . . . .                                                  | 183        |
| D.2                                                     | Parte (a) — La corsa di decollo . . . . .                             | 184        |
| D.3                                                     | Parte (b) — La statica del ruotino, passo passo . . . . .             | 185        |
| D.4                                                     | Parte (c) — Il dimensionamento delle aste . . . . .                   | 188        |

|          |                                                                |            |
|----------|----------------------------------------------------------------|------------|
| <b>E</b> | <b>Uno sguardo d'insieme</b>                                   | <b>190</b> |
| E.1      | Tre principi, un'unica disciplina . . . . .                    | 190        |
| E.1.1    | Primo principio: dal globale al locale . . . . .               | 190        |
| E.1.2    | Secondo principio: il materiale lontano dall'asse . . . . .    | 191        |
| E.1.3    | Terzo principio: resistenza e rigidezza, due padroni . . . . . | 191        |
| E.2      | La mappa del corso . . . . .                                   | 192        |

# Capitolo 1

## Guida alla lettura



Questi appunti raccolgono, in forma ordinata e autoconsistente, il percorso del corso di Costruzioni Aeronautiche: dalla trave — il mattone concettuale di ogni struttura di volo — alle tensioni interne e alle verifiche; dai materiali e dalle tecnologie con cui gli aeroplani si costruiscono davvero, fino all’inviluppo di volo, che dice *quali carichi* la struttura dovrà sopportare, e alle esercitazioni complete su un velivolo reale.

Il filo logico è uno solo, e conviene dichiararlo subito: **il volo produce carichi, i carichi diventano sollecitazioni interne, le sollecitazioni diventano tensioni, e le tensioni si confrontano con ciò che il materiale sopporta.** Ogni capitolo è un anello di questa catena.

| Capitolo                       | Che cosa contiene                                                                                                                                                                                        | A che cosa serve                                                         |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| La trave                       | Definizione, vincoli, carichi e reazioni; le quattro caratteristiche della sollecitazione $N$ , $T$ , $M_t$ , $M_f$ .                                                                                    | Il linguaggio con cui si descrive qualunque struttura.                   |
| Tensioni e verifiche           | Tensioni $\sigma$ e $\tau$ , prova di trazione, legge di Hooke, costanti elastiche; lo schema generale di verifica e il criterio di Von Mises.                                                           | Il passaggio dal “globale” al “locale” e il confronto con l’ammissibile. |
| Trazione e instabilità         | $\sigma = N/S$ e l’allungamento sotto carico; il carico critico di Eulero e la lunghezza libera d’inflessione.                                                                                           | Perché la compressione è più insidiosa della trazione.                   |
| Torsione                       | Sezione circolare piena; ingobbamento; formule di Bredt per le sezioni chiuse in parete sottile.                                                                                                         | Il modo in cui le strutture aeronautiche reggono il momento torcente.    |
| Flessione e taglio             | Diagrammi di $T$ e $M_f$ sulla mensola; centro di taglio e asse neutro; Navier, modulo di resistenza e prontuario delle sezioni; il taglio nelle giunzioni; Jourawsky e reciprocità; verifica combinata. | Il cuore del dimensionamento di un longherone.                           |
| Materiali e tecnologie         | Lavorazioni, proprietà tecnologiche e meccaniche, trattamenti termici, fatica e criteri di progetto (safe-life, fail-safe, damage tolerance), compositi, leghe aeronautiche.                             | Ciò che si calcola va anche saputo costruire.                            |
| Strutture: guscio e semiguscio | Guscio e semiguscio, ruolo di rivestimento, correnti, centine e longheroni; le ipotesi del modello del semiguscio ideale.                                                                                | Come è fatta davvero un’ala, e quale modello la descrive.                |
| Inviluppo di volo              | IAS/TAS, fattore di carico, diagramma di manovra e di raffica, velocità caratteristiche, archi dell’anemometro.                                                                                          | La definizione normativa dei carichi di progetto.                        |
| Esercitazioni                  | Inviluppo del SIAI SF-260, ripartizione della portanza, semiala con carichi subalari, dimensionamento del longherone.                                                                                    | Tutta la catena, applicata e verificata su un caso reale.                |
| Approfondimenti ed esercizi    | Carico di punta (linea elastica, snellezza, Johnson) con esercizio guida; dimensionamento completo del longherone su ala trapezia.                                                                       | Gli strumenti avanzati per i temi d’esame.                               |

Tabella 1.1: Mappa del corso.

Chiudono il volume quattro **appendici operative**, pensate per il lavoro sui temi d’esame: il longherone a C e il centro di taglio (Appendice A); l’Esame di Stato 2014/15 svolto passo passo con entrambe le sezioni (Appendice B); lo schema del dimensionamento in sei fasi in forma di prontuario (Appendice C); e il tema 2019 con la corsa di decollo e la soluzione completa del carrello, dalla statica al dimensionamento delle aste (Appendice D).

### Teoria – Come è organizzato ogni capitolo

Ogni capitolo si apre con una **bussola concettuale** che risponde a quattro domande: *Studiamo questo perché...* (la motivazione), *Da dove veniamo* (i prerequisiti), *Dove andiamo* (il seguito del percorso), *Al termine saprai* (le competenze attese); e si chiude con un riquadro di **raccordo** che passa il testimone al capitolo successivo. Gli esempi svolti sono numerati per capitolo e tutti i risultati numerici sono stati verificati al calcolatore. Le figure da inserire sono indicate da riquadri segnaposto con la descrizione di ciò che dovranno mostrare.

### La nomenclatura di questi appunti

Si adotta la nomenclatura internazionale della letteratura tecnica: portanza  $L$ , resistenza  $D$ , peso  $W$ , coefficienti  $C_L$ ,  $C_D$ , gradiente della retta di portanza  $C_{L\alpha}$ , allungamento alare  $AR$ , efficienza  $E = L/D$ . Nei manuali e nei temi d'esame in italiano si incontrano spesso i simboli  $P$ ,  $R$ ,  $Q$ ,  $C_p$ ,  $C_r$ ,  $\lambda$ : la corrispondenza è immediata e conviene impararla subito, perché a convivere con entrambe le notazioni ci si abitua in fretta. Il fattore di carico (o *coefficiente di contingenza*) si indica con  $n$  in entrambe le tradizioni.

## **Parte I**

# **La trave, le sollecitazioni interne e le verifiche strutturali**



## Capitolo 2

# La trave e le caratteristiche della sollecitazione

### Bussola concettuale

**Studiamo questo perché.** un'ala, una fusoliera, una gamba di carrello, un'asta di comando: agli occhi del progettista sono tutte, in prima approssimazione, *travi*. Saper descrivere che cosa accade *dentro* una trave caricata — con quattro sole grandezze:  $N$ ,  $T$ ,  $M_t$ ,  $M_f$  — è il primo, indispensabile passo di qualunque calcolo strutturale.

**Da dove veniamo.** dalla statica elementare: forze, momenti, equilibrio. Nulla di più.

**Dove andiamo.** le caratteristiche della sollecitazione definite qui diventeranno tensioni nel prossimo capitolo, e ciascuna di esse avrà poi un capitolo dedicato: sforzo normale e instabilità, torsione, flessione e taglio.

**Al termine saprai.** riconoscere una trave e i suoi vincoli, distinguere carichi esterni e reazioni vincolari, e ricavare in una sezione qualsiasi le quattro caratteristiche della sollecitazione, dandone l'interpretazione fisica.

## 2.1 Che cos'è una trave

### Definizione – Trave

Una **trave** è un elemento strutturale in cui una dimensione — la *lunghezza*, misurata lungo l'*asse longitudinale* — è molto maggiore delle altre due, che definiscono la *sezione trasversale*. Una trave trasferisce i carichi esterni ai vincoli attraverso le proprie sollecitazioni interne.

L'idea è potente proprio perché è semplice: se la geometria è “lunga e snella”, tutto ciò che conta si può descrivere lungo una sola coordinata, l'ascissa  $x$  dell'asse. Una semiala vista dalla fusoliera all'estremità, un montante di controvento, il tubo di una cloche: strutture diversissime, stesso modello. Adotteremo sempre un sistema cartesiano  $Oxyz$  con  $x$  lungo l'asse della trave e  $y$ ,  $z$  nel piano della sezione.

**Analogia pratica – La trave che avete in mano**

Un righello da disegno è una trave quasi perfetta: lungo trenta centimetri, largo tre, spesso pochi millimetri. Provate a tirarlo, a fletterlo, a torcerlo tenendone fermo un estremo: state applicando, una alla volta, le quattro sollecitazioni che questo capitolo mette in fila. Torneremo su questo righello molte volte.

**2.1.1 Vincoli: l'incastro**

Un **vincolo** è un dispositivo che impedisce alcuni movimenti di una sezione della trave. Il vincolo più severo è l'**incastro**, che blocca *tutto*: le tre traslazioni e le tre rotazioni. Per il principio di azione e reazione, un vincolo che impedisce un movimento deve poter esercitare la corrispondente azione: l'incastro sviluppa quindi, nel caso più generale, tre componenti di forza di reazione e tre momenti di reazione.

Una trave incastrata a un estremo e libera all'altro si chiama *mensola* (o trave *a sbalzo*): è lo schema con cui modelleremo quasi sempre la semiala di un velivolo, incastrata alla fusoliera e libera all'estremità.

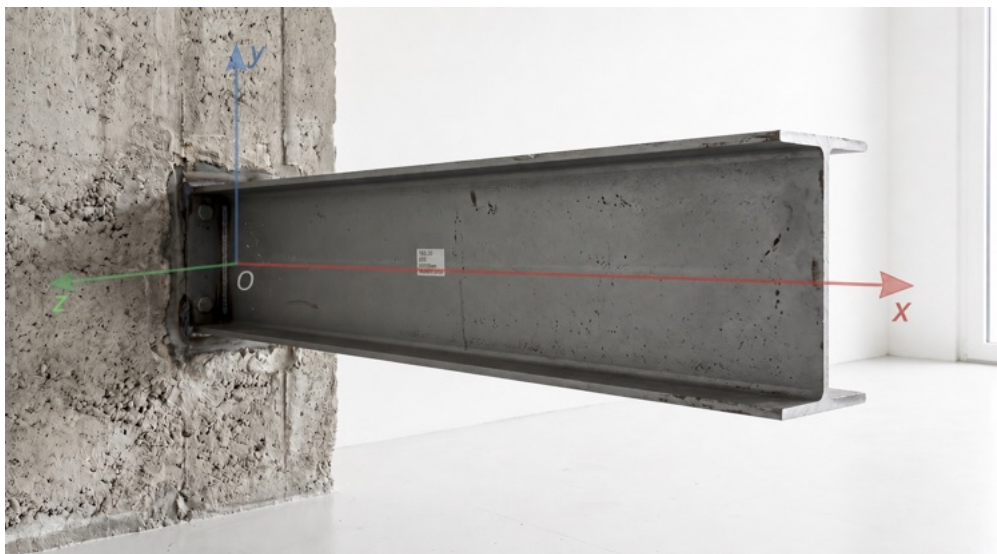


Figura 2.1: La trave a mensola e il sistema di riferimento: l'asse  $x$  coincide con l'asse longitudinale.

**2.1.2 Carichi esterni e reazioni vincolari**

Si chiamano **carichi esterni** le forze e i momenti applicati alla struttura dall'ambiente o da altri componenti: il peso, la portanza, la spinta di un motore, la reazione del terreno su una ruota. Possono essere *concentrati* (applicati in un punto, come il peso di un serbatoio appeso) oppure *distribuiti* (spalmati lungo la trave, come la portanza lungo l'apertura alare).

Le **reazioni vincolari** sono invece le forze e i momenti che il vincolo esercita sulla trave per impedirle i movimenti incompatibili con il vincolo stesso. Carico e reazione sono concetti distinti ma complementari: il carico tende a muovere o deformare la trave, il vincolo si oppone sviluppando le reazioni necessarie. Le reazioni non si scelgono: si *calcolano*, imponendo l'equilibrio.

**Un test rapido**

Se togliete mentalmente il vincolo e la struttura parte o ruota, quella che manca è una reazione vincolare. Se togliete un carico e la struttura resta ferma ma “si rilassa”, quello era un carico esterno.

## 2.2 Le equazioni cardinali e le aste a due forze

Abbiamo detto che le reazioni vincolari “si calcolano, imponendo l’equilibrio”: è il momento di dire *come*. Lo strumento è la coppia di **equazioni cardinali della statica**, che per un corpo rigido in equilibrio nel piano si scrivono

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma M_P = 0, \quad (2.1)$$

dove la terza esprime l’annullarsi del momento risultante rispetto a un polo  $P$  *qualsiasi*. Tre equazioni, quindi al più **tre incognite** per corpo: è la condizione che rende un problema *isostatico*, risolubile con la sola statica.

### 2.2.1 Il diagramma di corpo libero

La tecnica operativa è sempre la stessa, e va eseguita con disciplina:

1. si **isola** il corpo (o il sottosistema) che si vuole studiare, cancellando mentalmente tutto il resto;
2. si sostituisce ogni vincolo e ogni corpo rimosso con le **forze** che esso esercitava: nasce il *diagramma di corpo libero*;
3. si scrivono le (2.1) e si risolve.

#### Analogia pratica – La scelta furba del polo

Il polo  $P$  dell’equazione dei momenti è libero: la scelta giusta fa crollare la fatica. La regola d’oro è **mettere il polo dove passano più incognite**: ogni forza la cui retta d’azione passa per  $P$  ha braccio nullo e *scompare* dall’equazione. Se tre forze incognite concorrono in un punto, i momenti rispetto a quel punto lasciano in piedi una sola incognita — e il sistema, da tre equazioni accoppiate, si sgrana in equazioni quasi indipendenti. Lo vedremo all’opera, in modo spettacolare, nel carrello dell’Appendice D.

### 2.2.2 L’asta a due forze

Fra i corpi che compaiono nelle strutture aeronautiche, uno merita un nome proprio per quanto è frequente e per quanto semplifica i conti.

#### Definizione – Asta a due forze (biella)

Un’**asta a due forze** — o *biella* — è un elemento incernierato alle sole estremità e privo di carichi lungo il fusto. Per l’equilibrio, le due forze alle estremità devono essere **uguali, opposte e dirette lungo la congiungente delle cerniere**: l’asta lavora esclusivamente a *sforzo assiale* (trazione o compressione), e l’unica incognita che porta nel problema è l’**intensità** di tale sforzo.

La dimostrazione è un piccolo gioiello di logica: sull'asta agiscono solo le due forze di cerniera,  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ . L'equilibrio alla traslazione impone  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ ; l'equilibrio alla rotazione attorno a una delle cerniere impone che il momento dell'altra forza sia nullo, cioè che la sua retta d'azione *passi per la prima cerniera*. Le due forze giacciono dunque entrambe sulla congiungente: l'asta o tira o spinge lungo il proprio asse, e non può fare altro. Ogni cerniera avrebbe due componenti incognite; la biella le riduce a **una** — ed è per questo che riconoscere le bielle, in un carrello o in una controventatura, *vale metà del problema*.

### 2.2.3 I coseni direttori: proiettare senza trigonometria

Nota la geometria, la forza assiale di una biella si proietta sugli assi con i **coseni direttori**, che si leggono direttamente dal disegno con il teorema di Pitagora. Se l'asta ha proiezioni  $\Delta x$  e  $\Delta y$  e lunghezza  $L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ , una forza assiale  $N$  ha componenti

$$N_x = N \frac{\Delta x}{L}, \quad N_y = N \frac{\Delta y}{L} : \quad (2.2)$$

i rapporti  $\Delta x/L$  e  $\Delta y/L$  sono i coseni direttori, e sostituiscono per intero angoli e funzioni trigonometriche. Un'asta con proiezioni 340 e 350 mm ha lunghezza 488 mm e coseni 0,697 e 0,717: da lì in poi il problema è pura aritmetica.

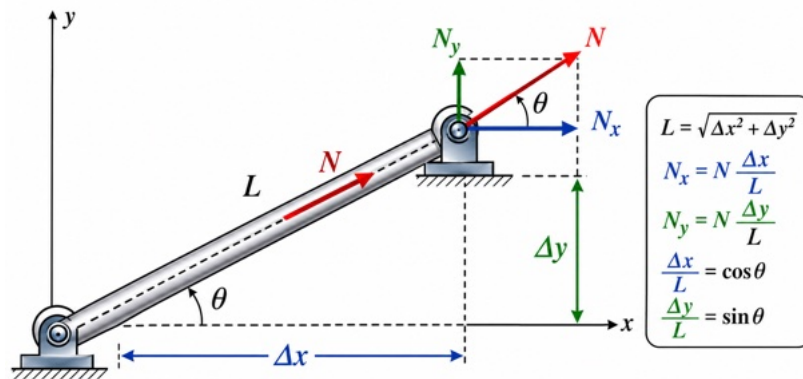


Figura 2.2: L'asta a due forze e la proiezione della sua forza assiale con i coseni direttori.

#### Risultato – Il metodo in quattro mosse

Per risolvere una struttura isostatica di più corpi: (i) riconoscere le bielle (una incognita ciascuna); (ii) isolare il corpo su cui agiscono i carichi e disegnarne il corpo libero; (iii) scrivere  $\sum M_p = 0$  con il polo scelto dove passano più incognite, poi  $\sum F_x = 0$  e  $\sum F_y = 0$ ; (iv) risolvere e **verificare** sostituendo i risultati in tutte le equazioni. I segni negativi non sono errori: raccontano che il verso reale è opposto a quello ipotizzato — una biella assunta compressa che risulta negativa sta, in realtà, tirando.

## 2.3 La sezione generica e le forze interne

Come si scopre che cosa accade dentro la trave? Con l'espedito concettuale più fecondo della meccanica delle strutture: **il taglio ideale**. Immaginiamo di tagliare la trave con un piano trasversale alla generica

ascissa  $x$  e di gettare via una delle due parti. La parte rimasta era in equilibrio prima del taglio: perché lo resti, dobbiamo applicare sulla superficie di taglio le azioni che la parte eliminata esercitava su di essa. Queste azioni sono le **forze interne**.

La loro risultante e il loro momento risultante si scrivono per componenti:

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}, \quad (2.3)$$

$$\vec{M} = M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k}. \quad (2.4)$$

### Definizione – Le quattro caratteristiche della sollecitazione

Dalle componenti di  $\vec{F}$  e  $\vec{M}$  si definiscono:

$$N = F_x \quad \text{sfuerzo normale,} \quad (2.5)$$

$$T = \sqrt{F_y^2 + F_z^2} \quad \text{taglio (risultante),} \quad (2.6)$$

$$M_t = M_x \quad \text{momento torcente,} \quad (2.7)$$

$$M_f = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} \quad \text{momento flettente (risultante).} \quad (2.8)$$

Sono grandezze *globali di sezione*: quattro numeri che riassumono, per ogni ascissa  $x$ , tutto ciò che la trave sta sopportando in quella sezione.

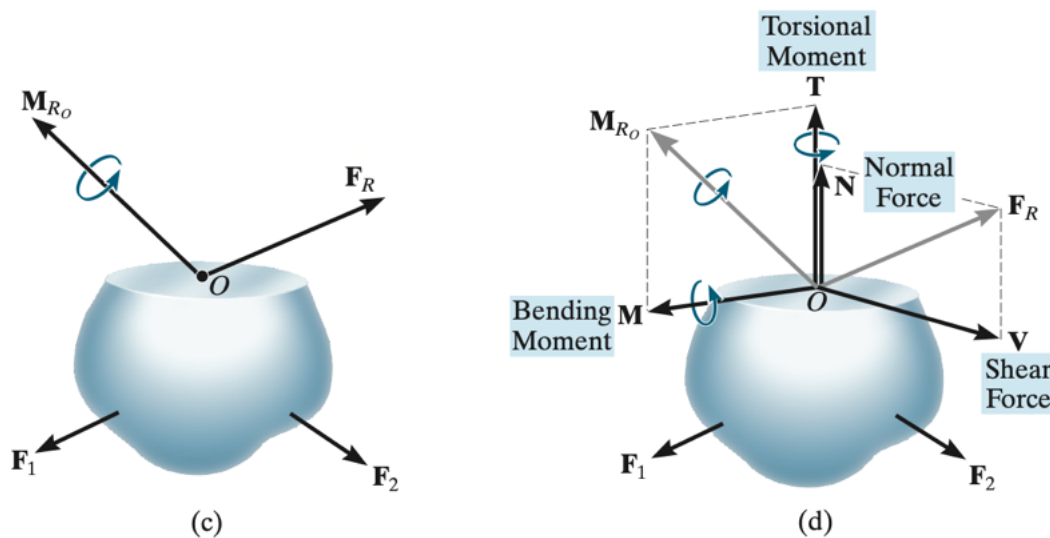


Figura 2.3: Le forze e i momenti interni su una sezione e la loro lettura come caratteristiche della sollecitazione.

### 2.3.1 L'interpretazione fisica

Ognuna delle quattro caratteristiche ha un significato immediato, e il righello del riquadro iniziale li mostra tutti:

- lo **sforzo normale**  $N$  tira o comprime la trave lungo il suo asse: è ciò che sente un tirante di controventatura, o l'asta di comando di un equilibratore quando il pilota spinge;
- il **taglio**  $T$  tende a far *scorrere* una parte della sezione rispetto all'altra, come le due metà di una risma di fogli spinte in versi opposti: è la sollecitazione che i rivetti di una giunzione contrastano di mestiere;
- il **momento torcente**  $M_t$  fa ruotare le sezioni l'una rispetto all'altra attorno all'asse: è lo strofinaccio strizzato, ed è ciò che il momento aerodinamico picchiante impone all'ala;
- il **momento flettente**  $M_f$  incurva la trave: è l'ala che, in una richiamata, flette visibilmente verso l'alto.

#### Analogia pratica – Dove si vedono in un aeroplano

Guardate una semiala in volo in aria agitata dal finestrino: la vedete flettere ( $M_f$ ) e, se osservate l'estremità, oscillare leggermente in rotazione ( $M_t$ ). Il taglio  $T$  non si vede, ma è lui che “consegna” la portanza dall'estremità verso la radice; e lo sforzo normale comparirà appena l'ala sarà controventata o rastremata. Quattro grandezze, un solo oggetto.

## 2.4 I casi di carico che studieremo

Nel seguito considereremo, sulla trave incastrata, tre situazioni semplificative di carico che — da sole o combinate — coprono la quasi totalità dei casi aeronautici di interesse:

- a) un **momento attorno all'asse**  $x$ , cioè un momento torcente puro  $M_t = M_x$ : è il caso della torsione (Capitolo 5);
- b) una **forza nel piano**  $xy$ , cioè  $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$  con  $F_z = 0$ : la componente assiale genera sforzo normale (Capitolo 4), quella trasversale genera taglio e flessione (Capitolo 6);
- c) un **carico distribuito** ortogonale all'asse della trave: è la portanza lungo l'apertura, il caso aeronautico per eccellenza (Capitolo 6).

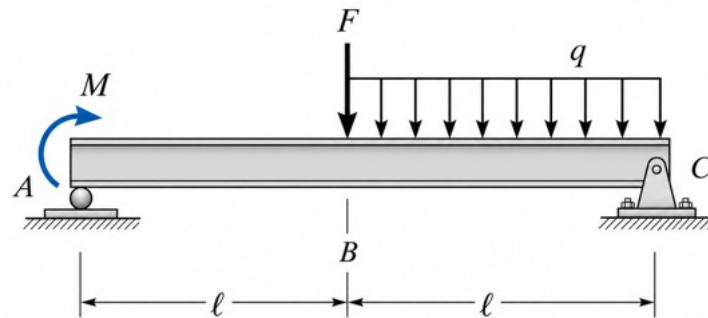


Figura 2.4: I tre casi di carico elementari da cui si costruisce ogni combinazione.

#### ► Approfondimento: Perché bastano questi tre casi

Nel campo elastico lineare — l'unico in cui lavoreremo per il dimensionamento — vale il *principio di sovrapposizione degli effetti*: la risposta a una somma di carichi è la somma delle risposte ai singoli carichi. Un carico complicato si scompone quindi nei casi elementari, si risolve ciascuno per conto suo, e si sommano i risultati. È il principio che useremo sistematicamente per costruire i diagrammi di taglio e momento della semiala con i serbatoi (Capitolo 12). Attenzione però al suo limite: la sovrapposizione cade quando la risposta non è più lineare — e il caso più importante, in aeronautica, è l'instabilità delle aste compresse (Capitolo 4).

#### Dove siamo arrivati, dove andiamo

Abbiamo il linguaggio: la trave, i vincoli, e le quattro caratteristiche della sollecitazione  $N$ ,  $T$ ,  $M_t$ ,  $M_f$  che riassumono, sezione per sezione, ciò che la struttura sta sopportando. Ma quattro numeri globali non bastano a dire se la trave *resiste*: resistere o cedere è una faccenda locale, che si gioca punto per punto nel materiale. Serve il passaggio dalle caratteristiche di sezione alle **tensioni interne** — ed è esattamente il programma del prossimo capitolo.



## Capitolo 3

# Tensioni interne e schema di verifica

### Bussola concettuale

**Studiamo questo perché.** le caratteristiche  $N$ ,  $T$ ,  $M_t$ ,  $M_f$  dicono *quanto* la sezione sta sopportando, ma non dicono se il materiale ce la fa: la rottura è un fatto *locale*, che avviene punto per punto. Il concetto di **tensione** — forza per unità di area — è il ponte fra la statica della trave e la resistenza del materiale, e lo **schema di verifica** è la procedura con cui questo ponte si attraversa, sempre uguale, in ogni problema di costruzioni.

**Da dove veniamo.** dal Capitolo 2: sappiamo tagliare idealmente una trave e leggere le quattro caratteristiche della sollecitazione.

**Dove andiamo.** i tre capitoli successivi svolgono, sollecitazione per sollecitazione, il passaggio tensioni → verifica: sforzo normale, torsione, flessione e taglio.

**Al termine saprai.** definire  $\sigma$  e  $\tau$  e usarne le unità di misura; leggere un diagramma tensione-deformazione; usare la legge di Hooke e le costanti elastiche  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$ ; e applicare lo schema generale di verifica con il coefficiente di sicurezza e il criterio di Von Mises.

### 3.1 Le tensioni interne

Le **tensioni** sono grandezze locali: descrivono l'intensità delle azioni interne *per unità di area*. Se  $dA$  è un elemento infinitesimo di area della sezione, su una faccia normale all'asse  $x$  si definiscono

$$\sigma_x = \frac{dF_x}{dA}, \quad \tau_{xy} = \frac{dF_y}{dA}, \quad \tau_{xz} = \frac{dF_z}{dA}, \quad (3.1)$$

e analogamente sulle facce normali a  $y$  e a  $z$ . La componente perpendicolare alla faccia è la **tensione normale**  $\sigma$ ; le due componenti nel piano della faccia sono le **tensioni tangenziali**  $\tau$ . Il primo pedice indica la normale alla faccia, il secondo la direzione della componente.

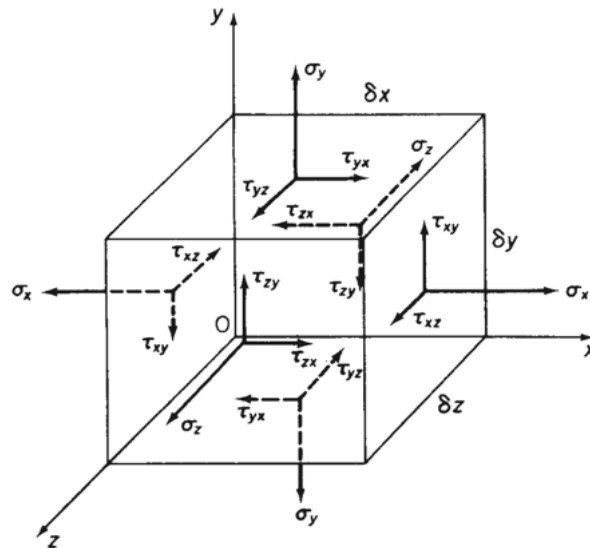


Figura 3.1: Lo stato tensionale elementare: le tensioni sono azioni per unità di area sulle facce di un cubetto infinitesimo.

### 3.1.1 Unità di misura

Nel Sistema Internazionale la tensione si misura in **pascal**:

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2. \quad (3.2)$$

Il pascal è però un'unità minuscola per le strutture: nelle applicazioni aeronautiche si usa quasi sempre il **megapascal**, e vale l'identità, comodissima, con il newton su millimetro quadro:

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N/mm}^2. \quad (3.3)$$

#### Analogia pratica – Farsi un'idea dei numeri

La pressione atmosferica vale circa 0,1 MPa; la pressione di gonfiaggio di uno pneumatico d'automobile circa 0,22 MPa; una lega leggera aeronautica snerva attorno a 300–500 MPa, un acciaio da carrelli oltre 1.000 MPa. Tra la pressione della gomma e la tensione di lavoro di un longherone ci sono tre ordini di grandezza: è per questo che poche decine di millimetri quadri di soletta possono reggere tonnellate.

### 3.1.2 Dal globale al locale

Le caratteristiche della sollecitazione sono grandezze *globali* di sezione; le tensioni sono grandezze *locali*. Ogni verifica strutturale richiede il passaggio dalle une alle altre, secondo una corrispondenza che i prossimi capitoli renderanno quantitativa:

| Caratteristica          | Tensioni prodotte           | Formula (dove)          |
|-------------------------|-----------------------------|-------------------------|
| Sforzo normale $N$      | normali $\sigma$ , uniformi | $\sigma = N/S$ (Cap. 4) |
| Momento flettente $M_f$ | normali $\sigma$ , lineari  | Navier (Cap. 6)         |
| Taglio $T$              | tangenziali $\tau$          | Jourawsky (Cap. 6)      |
| Momento torcente $M_t$  | tangenziali $\tau$          | Bredt (Cap. 5)          |

## 3.2 La prova di trazione

Per caratterizzare un materiale lo si interroga con l'esperimento più semplice possibile: si afferra un *provino* normalizzato fra le ganasce di una macchina di prova e lo si tira, misurando la forza applicata  $F$  e l'allungamento. Riferendo la forza alla sezione iniziale  $S_0$  del provino si ottengono le *tensioni nominali* dei punti caratteristici:

$$\sigma_{\text{lim}} = \frac{F_{\text{lim}}}{S_0}, \quad \sigma_s = \frac{F_s}{S_0}, \quad \sigma_R = \frac{F_R}{S_0}, \quad (3.4)$$

rispettivamente **limite di proporzionalità** (fin dove il diagramma è rettilineo), **tensione di snervamento** (dove iniziano le deformazioni permanenti) e **tensione di rottura**.

Il diagramma tensione–deformazione  $\sigma$ – $\epsilon$  presenta un primo tratto *elastico lineare* — rimuovendo il carico, il provino torna esattamente com'era — seguito dallo *snervamento*, da un tratto *plastico* in cui le deformazioni diventano permanenti, e infine dalla *rottura*.

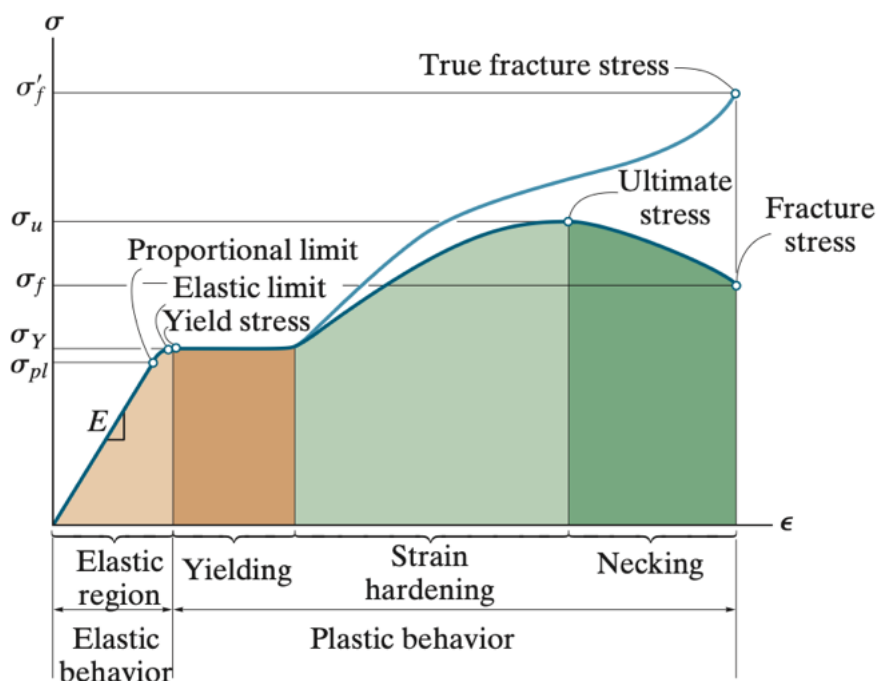


Figura 3.2: La prova di trazione: il tratto elastico lineare, lo snervamento, il campo plastico, la rottura.

**Attenzione – Perché lo snervamento, e non la rottura, comanda**

Una struttura aeronautica che ha *snervato* è già una struttura da riparare: le deformazioni permanenti alterano forme aerodinamiche, accoppiamenti, calettamenti. Per questo il dimensionamento ordinario si fa sullo snervamento (con i *carichi di contingenza*), riservando la rottura alle verifiche di robustezza (carichi di contingenza moltiplicati per il coefficiente 1,5). La regola pratica dei temi d'esame: se il testo fornisce  $\sigma_s$  si lavora a snervamento, se fornisce  $\sigma_R$  si lavora a rottura.

**3.2.1 La legge di Hooke e le costanti elastiche**

Nel tratto elastico lineare tensione e deformazione sono proporzionali:

$$\sigma = E \varepsilon \quad (3.5)$$

dove  $E$  è il **modulo di Young** (o modulo elastico), che misura la *rigidezza* del materiale: a parità di tensione, un materiale con  $E$  alto si deforma poco. Si noti che  $\varepsilon = \Delta\ell/\ell$  è un numero puro, quindi  $E$  ha le dimensioni di una tensione.

Per le deformazioni tangenziali (gli *scorrimenti*  $\gamma$ ) vale l'analoga  $\tau = G\gamma$ , dove  $G$  è il **modulo di elasticità tangenziale**. Le due rigidezze non sono indipendenti: le lega il **coefficiente di Poisson**  $\nu$  — il rapporto fra contrazione trasversale e allungamento assiale — tramite

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \Longleftrightarrow \quad \nu = \frac{E}{2G} - 1. \quad (3.6)$$

Per i metalli  $\nu \simeq 0,3$ , quindi  $G \simeq 0,38 E$ : la rigidezza a scorrimento è poco più di un terzo di quella assiale.

**Analogia pratica – Il coefficiente di Poisson sotto gli occhi**

Tirate un elastico largo e osservatelo restringersi; comprimate una gomma da cancellare e guardatela “spanciare”. Quella contrazione (o dilatazione) trasversale, rapportata alla deformazione assiale, è esattamente  $\nu$ . Il sughero ha  $\nu \simeq 0$  — ed è per questo che il tappo entra nella bottiglia senza gonfiarsi.

**3.2.2 Proprietà tipiche dei materiali strutturali**

| <b>Materiale</b>  | <b>Densità <math>\rho</math> [kg/dm<sup>3</sup>]</b> |
|-------------------|------------------------------------------------------|
| Acciaio           | 7,8                                                  |
| Alluminio         | 2,7                                                  |
| Titanio           | 4,5                                                  |
| Bronzo            | 8,5                                                  |
| Fibre di carbonio | 1,9                                                  |

Tabella 3.1: Densità indicative di alcuni materiali.

| Materiale      | $\sigma_{\max}$ [N/mm <sup>2</sup> ] | $E$ [N/mm <sup>2</sup> ] | $G$ [N/mm <sup>2</sup> ] | $\nu$ |
|----------------|--------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------|
| Acciaio        | 600–800                              | 200000                   | 78000                    | 0,30  |
| Titanio        | 800                                  | 110000                   | 41000                    | 0,34  |
| Alluminio 2024 | 300                                  | 72000                    | 27000                    | 0,33  |
| Alluminio 7075 | 500                                  | 72000                    | 27000                    | 0,33  |

Tabella 3.2: Valori indicativi per alcuni materiali strutturali (i moduli  $E$  e  $G$  rispettano la (3.6)).

### Un controllo di coerenza

Le tabelle dei manuali vanno sempre lette con la (3.6) in mano: per l'alluminio,  $G = 72000 / (2 \cdot 1,33) = 27.000 \text{ N/mm}^2$ . Se una tabella riporta valori di  $E$ ,  $G$  e  $\nu$  che non la soddisfano, almeno uno dei tre è sbagliato — capita più spesso di quanto si creda.

### I valori dipendono dallo stato di trattamento

I moduli in tabella sono indicativi della lega “base”: lo stato di trattamento li sposta di qualche punto percentuale. Negli esercizi svolti di questo volume, per il 2024-T4 (Avional bonificato) adotteremo i valori di scheda  $E = 73.100 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_{p0,2} = 324 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_R = 469 \text{ N/mm}^2$ : in un compito, dichiarare la fonte dei valori usati vale quanto usarli correttamente.

## 3.3 Lo schema generale della verifica strutturale

Ogni verifica strutturale, per quanto complesso sia il problema, procede secondo uno schema logico ricorrente:

1. si definiscono la geometria della trave, il sistema di riferimento e i vincoli;
2. si definiscono i carichi esterni applicati;
3. si calcolano le reazioni vincolari (equilibrio);
4. si ricavano le caratteristiche  $N$ ,  $T$ ,  $M_t$ ,  $M_f$  in ogni sezione;
5. si determinano le tensioni  $\sigma$  e  $\tau$  nelle sezioni critiche;
6. si scelgono materiale, tipo di elemento e coefficiente di sicurezza  $K$ ;
7. si confrontano le tensioni massime con quelle ammissibili.

In forma sintetica, la verifica è soddisfatta se

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{am}, \quad \tau_{\max} \leq \tau_{am}. \quad (3.7)$$

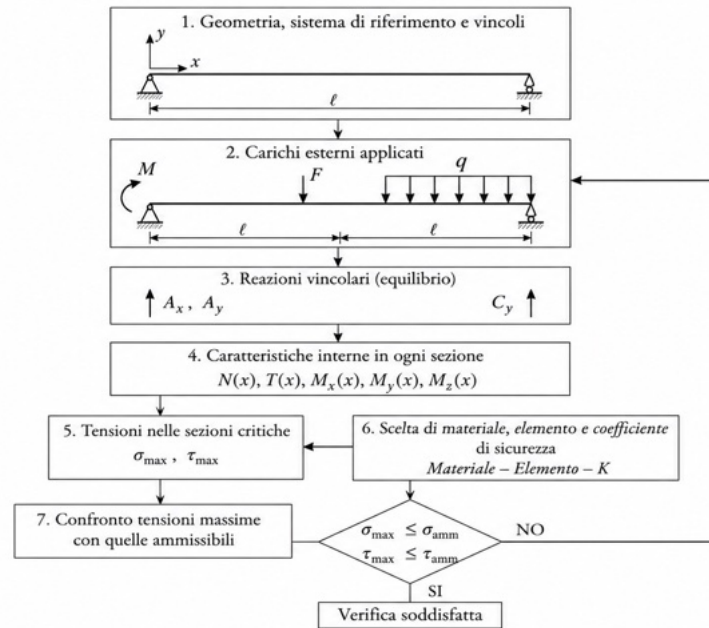


Figura 3.3: Lo schema generale della verifica strutturale: una procedura, tutti i problemi.

### 3.3.1 Tensione ammissibile e coefficiente di sicurezza

La **tensione ammissibile** dipende dal tipo di verifica. Per una verifica a snervamento,

$$\sigma_{am} = \frac{\sigma_s}{K}, \quad (3.8)$$

dove  $K > 1$  è il **coefficiente di sicurezza**: la riserva che copre le incertezze su carichi, materiale, calcolo ed esecuzione. In campo aeronautico  $K$  è tipicamente compreso fra 1,5 e 2: non ci si può permettere il 4 o il 5 delle costruzioni civili, perché ogni chilogrammo di struttura è un chilogrammo in meno di carico utile — e la sicurezza si recupera con la qualità dei materiali, dei controlli e della manutenzione.

La manualistica tradizionale suggerisce, per la scelta di  $K$ , alcune fasce orientative in funzione del materiale e delle condizioni operative:

| Coefficiente $K$ | Quando si adotta                                              |
|------------------|---------------------------------------------------------------|
| 1,5 – 2          | sollecitazioni ben note e condizioni operative normali        |
| 2 – 2,5          | materiali duttili con alte caratteristiche meccaniche         |
| 2,5 – 3          | materiali fragili o con basse caratteristiche meccaniche      |
| 3 – 4            | condizioni operative critiche, o materiali di qualità incerta |

Tabella 3.3: Valori orientativi del coefficiente di sicurezza  $K$ . La logica è sempre la stessa:  $K$  cresce con l'incertezza — sul carico, sul materiale, sull'ambiente.

### Il coefficiente della normativa non è questo $K$

Le norme di aeronavigabilità (CS-23, CS-VLA, FAR 23) prescrivono un *fattore di sicurezza* pari a 1,5; ma attenzione a non confonderlo con il  $K$  della tabella. Quel 1,5 normativo moltiplica i *carichi* (di contingenza → di robustezza), non divide le tensioni ammissibili: è il salto fra “la struttura non snerva al carico limite” e “la struttura non si rompe a una volta e mezza quel carico”. Nei temi d’esame le due strade portano a numeri simili, ma la frase con cui si giustifica la scelta deve essere quella giusta.

### 3.3.2 La tensione tangenziale ammissibile: il criterio di Von Mises

La prova di trazione fornisce  $\sigma_s$ ; ma quanto vale la tensione tangenziale a cui il materiale snerva? Il criterio di **Von Mises** — il più usato per i metalli duttili, fondato sull’energia di distorsione — risponde: lo snervamento a taglio puro avviene a  $\tau_s = \sigma_s / \sqrt{3}$ . Di conseguenza

$$\tau_{am} = \frac{\sigma_{am}}{\sqrt{3}} \simeq 0,58 \sigma_{am}. \quad (3.9)$$

Lo stesso criterio fornisce, quando  $\sigma$  e  $\tau$  agiscono insieme, la **tensione ideale**

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}, \quad (3.10)$$

da confrontare con  $\sigma_{am}$ : ne faremo uso sistematico nella verifica combinata dei longheroni.

#### ► Approfondimento: Da dove viene il fattore $\sqrt{3}$

L’idea di Von Mises è che il materiale duttile snervi quando l’energia elastica di *distorsione* (quella che cambia la forma, non il volume) raggiunge un valore critico. Calcolando questa energia per lo stato di trazione pura e per quello di taglio puro e uguagliandole, si trova esattamente  $\tau_s = \sigma_s / \sqrt{3}$ ; e per uno stato piano con  $\sigma$  e  $\tau$  simultanee l’uguaglianza produce la (3.10). Il fattore 3 sotto radice non è una convenzione: è geometria dell’energia elastica.

### Dove siamo arrivati, dove andiamo

Il ponte è costruito: sappiamo che cosa sono le tensioni, come si misura un materiale, e qual è la liturgia — sempre la stessa — della verifica: carichi, reazioni, caratteristiche, tensioni, confronto con l’ammissibile. Ora la percorreremo sollecitazione per sollecitazione, cominciando dalla più semplice in apparenza: lo sforzo normale. In apparenza, perché la compressione nasconde il fenomeno più insidioso di tutta la meccanica delle strutture: l’instabilità elastica.



## Capitolo 4

# Trazione, compressione e instabilità elastica

### Bussola concettuale

**Studiamo questo perché.** lo sforzo normale è la sollecitazione più semplice da calcolare — una divisione,  $\sigma = N/S$  — eppure la compressione nasconde il fenomeno più insidioso delle strutture snelle: l'**instabilità elastica**, che può far crollare un'asta a tensioni ridicolmente basse. In un aeroplano di aste compresse ce ne sono ovunque: montanti di controvento, aste di comando, gambe di carrello, correnti dei pannelli.

**Da dove veniamo.** dal concetto di tensione e dallo schema di verifica del Capitolo 3.

**Dove andiamo.** la verifica a instabilità tornerà in ogni esercitazione con un'asta compressa; e il fenomeno riapparirà, in forma di imbozzamento, nei pannelli sottili delle strutture a semiguscio.

**Al termine saprai.** verificare e dimensionare un elemento teso; spiegare perché un'asta compressa può cedere molto prima di snervare; usare la formula di Eulero con la corretta lunghezza libera d'inflessione; e dimensionare un'asta al carico di punta con il coefficiente di sicurezza.

### 4.1 Trazione e compressione semplice

Si consideri una trave a sezione costante, incastrata in  $A$  e caricata all'estremità  $B$  da una forza  $F_x$  diretta lungo l'asse. Il taglio ideale in una sezione qualsiasi mostra che l'unica caratteristica non nulla è lo sforzo normale:

$$N = F_x, \quad T = 0, \quad M_t = 0, \quad M_f = 0. \quad (4.1)$$

La tensione normale è uniforme sulla sezione e vale

$$\sigma_x = \frac{N}{S} \quad (4.2)$$

dove  $S$  è l'area della sezione. Uniforme significa che ogni millimetro quadro lavora quanto gli altri: è la sollecitazione più “democratica” e, a trazione, la più efficiente — tutto il materiale contribuisce.

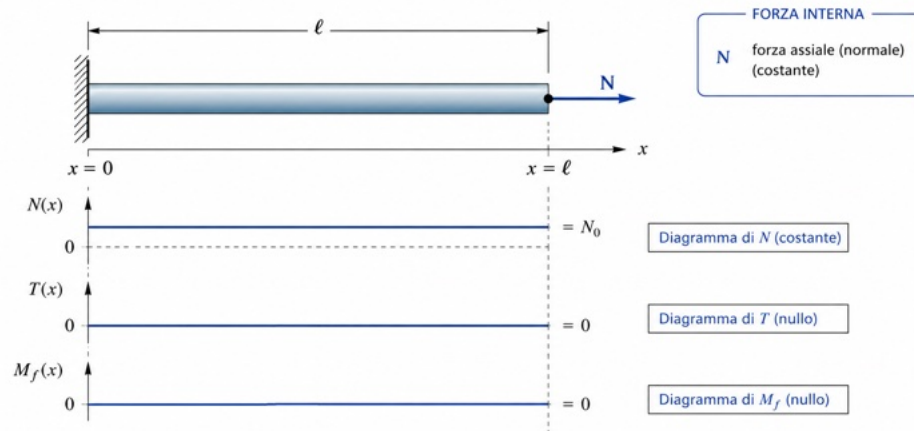


Figura 4.1: Trazione (o compressione) semplice: la sola caratteristica non nulla è lo sforzo normale, costante lungo la trave.

## Esempio 4.1 — Verifica a trazione di un tirante

Una trave in alluminio 2024, a sezione circolare piena di diametro  $d = 10$  mm, è soggetta a  $N = 1.000$  N di trazione. Verificare a snervamento con  $K = 2$ .

### Soluzione

L'area della sezione è

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 78,54 \text{ mm}^2, \quad (4.3)$$

quindi la tensione vale

$$\sigma_x = \frac{N}{S} = \frac{1000}{78,54} = 12,73 \text{ N/mm}^2. \quad (4.4)$$

Con  $\sigma_s = 300 \text{ N/mm}^2$  e  $K = 2$ :

$$\sigma_{am} = \frac{300}{2} = 150 \text{ N/mm}^2. \quad (4.5)$$

Poiché  $12,73 < 150$ , la verifica a snervamento è ampiamente soddisfatta: il tirante lavora all'8% dell'ammissibile.

### 4.1.1 L'allungamento sotto carico

La verifica di resistenza dice se l'elemento *regge*; spesso però interessa anche di *quanto si deforma*: un tirante di comando che si allunga troppo introduce giochi ed elasticità nella catena dei comandi di volo. La risposta è già tutta nella legge di Hooke. Da  $\sigma = E \varepsilon$ , sostituendo  $\sigma = N/S$  e  $\varepsilon = \Delta \ell / \ell$ , si ricava

$$\frac{N}{S} = E \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta \ell = \frac{N \ell}{S E}} \quad (4.6)$$

valida per trazione (allungamento) e compressione (accorciamento), purché il carico resti nel campo elastico lineare. La formula si legge come una scheda tecnica dell'elemento: la deformazione cresce con il

carico e con la lunghezza, e la contrastano l'area della sezione (più materiale) e il modulo  $E$  (materiale più rigido). Il raggruppamento  $SE/\ell$  è la **rigidezza assiale** dell'asta: i newton necessari per allungarla di un millimetro.

### Esempio 4.2 — Quanto si allunga un tirante in Avional

Una barretta in lega 2024-T4 ( $E = 73.100 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_{p0,2} = 324 \text{ N/mm}^2$ ), lunga  $\ell = 1.000 \text{ mm}$  e a sezione circolare piena di diametro  $d = 10 \text{ mm}$ , è tesa da  $N = 13 \text{ kN}$ . Verificare a snervamento con  $K = 1,5$  e calcolare l'allungamento.

#### Soluzione

Area e tensione di esercizio:

$$S = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 78,54 \text{ mm}^2, \quad \sigma = \frac{13000}{78,54} = 165,5 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{am} = \frac{324}{1,5} = 216 \text{ N/mm}^2 : \quad (4.7)$$

la verifica è soddisfatta. L'allungamento, dalla (4.6):

$$\Delta\ell = \frac{N\ell}{SE} = \frac{13000 \cdot 1000}{78,54 \cdot 73100} = 2,26 \text{ mm}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell} = 0,226 \%. \quad (4.8)$$

Poco più di due millimetri su un metro: invisibile a occhio, ma tutt'altro che trascurabile se il tirante comanda una superficie mobile — ed è per questo che nei comandi di volo la verifica di *rigidezza* affianca sempre quella di resistenza.

## 4.2 La compressione e l'instabilità elastica

Se ora la stessa forza *comprime* la trave, la tensione media è identica:  $\sigma = N/S = 12,73 \text{ N/mm}^2$ . Verrebbe da concludere che la verifica sia la stessa. **Non lo è**, e capire perché è uno dei passaggi concettuali più importanti del corso.

#### Analogia pratica — L'esperimento del righello

Prendete il solito righello di plastica. Tiratelo per gli estremi: potete appendervi un peso considerevole senza che accada nulla. Ora appoggiatelo verticalmente sul tavolo e premete dall'alto con il palmo: con una forza modesta — pochi newton — il righello *sbanda* di colpo lateralmente, inflettendosi ad arco. Non si è rotto il materiale: la tensione media era irrisoria. È ceduta la *forma*. Questo fenomeno si chiama **instabilità elastica**, o *carico di punta*: l'equilibrio rettilineo dell'asta compressa diventa instabile, e l'asta “preferisce” inflettersi.

Per una trave compressa, dunque, la verifica  $\sigma = N/S \leq \sigma_{am}$  non basta: occorre anche la **verifica a instabilità**, che confronta il carico  $N$  con il **carico critico di Eulero**:

$$F_{crit} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{\ell_0^2} \quad (4.9)$$

dove:

- $J_{\min}$  è il *minimo* momento d'inerzia della sezione rispetto agli assi baricentrici: l'asta sbanda nel piano in cui è meno rigida, e la formula lo sa;
- $\ell_0$  è la **lunghezza libera d'inflessione**, che dipende dai vincoli: per un'asta *incernierata agli estremi*  $\ell_0 = \ell$ ; per un'asta *incastrata a un estremo e libera all'altro* (la mensola)  $\ell_0 = 2\ell$ ; per un'asta incastrata–incernierata  $\ell_0 = 0,7\ell$ ; per un'asta incastrata a entrambi gli estremi  $\ell_0 = 0,5\ell$ .

La lettura fisica di  $\ell_0$ : è la lunghezza della semionda di senoide che la deformata assume al collasso. La mensola sbanda come *metà* di un'asta incernierata lunga il doppio — ecco il fattore 2.

| Ends                        | $\ell_e/l$ | Boundary conditions                                     |
|-----------------------------|------------|---------------------------------------------------------|
| Both pinned                 | 1.0        | $v = 0$ at $z = 0$ and $l$                              |
| Both fixed                  | 0.5        | $v = 0$ at $z = 0$ and $z = l$ , $dv/dz = 0$ at $z = l$ |
| One fixed, the other free   | 2.0        | $v = 0$ and $dv/dz = 0$ at $z = 0$                      |
| One fixed, the other pinned | 0.6998     | $dv/dz = 0$ at $z = 0$ , $v = 0$ at $z = l$ and $z = 0$ |

Figura 4.2: La lunghezza libera d'inflessione: stessa asta, vincoli diversi, carichi critici diversissimi ( $F_{crit} \propto 1/\ell_0^2$ ).

La verifica richiede

$$\frac{F_{crit}}{N} > 1 \quad \text{e, con coefficiente di sicurezza,} \quad \frac{F_{crit}}{N} \geq K. \quad (4.10)$$

#### Quando basta la compressione semplice?

La regola spiccia dei manuali: se la lunghezza dell'elemento compresso non supera circa *dieci volte* la sua dimensione trasversale minima ( $\ell/d \lesssim 10$ ), l'elemento è *tozzo* e la verifica  $\sigma = N/S \leq \sigma_{am}$  è sufficiente; oltre, la verifica a instabilità è d'obbligo. È una soglia orientativa, non una legge: il criterio rigoroso passa per la *snellezza*  $\lambda = \ell_0/\rho$  e per la snellezza limite del materiale, che troverai sviluppati nel capitolo degli approfondimenti. Nel dubbio, la verifica a Eulero si fa: costa una riga.

#### Attenzione – Perché l'instabilità merita rispetto

Tre ragioni. (i) Il collasso è **improvviso**: non ci sono deformazioni permanenti che avvisano, l'asta sbanda e basta. (ii) Il carico critico dipende da  $E$ , non da  $\sigma_y$ : un acciaio ad altissima resistenza ha lo stesso  $E$  di un acciaio dolce, quindi *non* guadagna nulla a instabilità — errore classico. (iii) La dipendenza da  $\ell_0^2$  e da  $J$  rende il fenomeno violentemente sensibile alla geometria: raddoppiare la lunghezza divide il carico critico per quattro. Per tutto questo, essendo un fenomeno di collasso, l'instabilità si verifica sempre con i carichi di robustezza.

Per la sezione circolare piena il momento d'inerzia (uguale rispetto a ogni asse baricentrico, quindi anche il minimo) vale

$$J = J_{\min} = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (4.11)$$

## Esempio 4.3 — Un'asta lunga cede a un cinquantesimo del carico

La stessa trave dell'Esempio precedente ( $d = 10$  mm, alluminio 2024,  $E = 71.000$  N/mm<sup>2</sup>) sia ora lunga  $\ell = 2.000$  mm, incastrata-libera, e compressa da  $N = 1.000$  N. Verificare a instabilità.

### Soluzione

Momento d'inerzia e lunghezza libera:

$$J = \frac{\pi}{64} 10^4 = 491 \text{ mm}^4, \quad \ell_0 = 2\ell = 4.000 \text{ mm}. \quad (4.12)$$

Il carico critico di Eulero è

$$F_{crit} = \frac{\pi^2 EJ}{\ell_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 71000 \cdot 491}{4000^2} \approx 21,5 \text{ N}. \quad (4.13)$$

Il rapporto di verifica vale

$$\frac{F_{crit}}{N} = \frac{21,5}{1000} = 0,0215 \ll 1 : \quad (4.14)$$

**L'asta collassa per instabilità a circa un cinquantesimo del carico applicato**, pur lavorando — a tensione media — all'8% dell'ammissibile. È il numero più istruttivo del capitolo: a trazione la verifica passava con margine dodici; a compressione la stessa asta non regge nemmeno lontanamente.

### Dimensionamento a instabilità

Quale diametro serve per resistere con  $K = 5$ ? Dalla (4.10) con la (4.9) e la (4.11):

$$K = \frac{F_{crit}}{N} = \frac{\pi^2 E}{\ell_0^2} \frac{\pi d^4}{64} \frac{1}{N} \implies d_{min} = \left( \frac{64 K N \ell_0^2}{\pi^3 E} \right)^{1/4} \approx 39 \text{ mm}. \quad (4.15)$$

Da 10 a 39 mm di diametro: la radice quarta ci dice che il carico critico si compra a caro prezzo con il pieno. È esattamente il motivo per cui, nella pratica aeronautica, le aste compresse si fanno *tubolari*: a parità di area, portare il materiale lontano dall'asse gonfia  $J$  — e quindi  $F_{crit}$  — senza aggiungere un grammo. Lo stesso principio tornerà nella torsione e nella flessione.

#### ► Approfondimento: Il limite di validità di Eulero

La formula di Eulero descrive un collasso *elastico*: vale finché la tensione media al carico critico,  $\sigma_{crit} = F_{crit}/S$ , resta sotto il limite di proporzionalità del materiale. Introducendo il raggio giratore  $\rho = \sqrt{J/S}$  e la **snellezza**  $\lambda = \ell_0/\rho$ , si trova  $\sigma_{crit} = \pi^2 E/\lambda^2$ : un'iperbole nel piano  $\sigma$ - $\lambda$ . Per aste *tozze* (snellezza piccola) l'iperbole prevederebbe tensioni critiche superiori allo snervamento — fisicamente impossibili: lì comanda la resistenza del materiale, non l'instabilità, e si usano formule empiriche di raccordo. Le aste aeronautiche tipiche (montanti, aste di comando) hanno snellezze di 100–150: pieno campo euleriano.

**Dove siamo arrivati, dove andiamo**

Lo sforzo normale ci ha insegnato due cose che valgono per tutto il corso: a trazione decide la *resistenza* ( $\sigma = N/S$  contro  $\sigma_{am}$ ), a compressione può decidere la *forma* (Eulero); e la geometria efficiente è quella che allontana il materiale dall'asse. Con questa lezione in tasca affrontiamo la seconda caratteristica della sollecitazione: il momento torcente — dove scopriremo che la stessa idea, materiale lontano dall'asse, ha già un nome e due formule: quelle di Bredt.



## Capitolo 5

### La torsione

#### Bussola concettuale

**Studiamo questo perché.** la portanza non passa quasi mai per il punto giusto: l'ala di un velivolo è *sempre* torta dal momento aerodinamico, e la fusoliera lo è dalle azioni degli impennaggi. Le strutture aeronautiche rispondono alla torsione con la loro arma migliore — la sezione chiusa in parete sottile — e le formule di Bredt sono lo strumento che la governa.

**Da dove veniamo.** dalle tensioni tangenziali  $\tau$  e da  $\tau_{am} = \sigma_{am}/\sqrt{3}$  (Capitolo 3).

**Dove andiamo.** il flusso di taglio  $q$  introdotto qui è lo stesso che ritroveremo nel taglio delle sezioni a semiguscio; e la formula di Bredt dimensionerà il rivestimento del bordo d'attacco nelle esercitazioni finali.

**Al termine saprai.** calcolare tensione e rotazione di una sezione circolare in torsione; spiegare perché le sezioni non circolari si ingobbano e perché in aeronautica si usano sezioni chiuse sottili; applicare le due formule di Bredt per la verifica di resistenza e di rigidezza.

#### 5.1 La sezione circolare piena

Si consideri una trave incastrata in  $A$ , a sezione circolare costante, soggetta a un momento  $M_x$  attorno all'asse longitudinale. In ogni sezione a distanza  $x$  dall'incastro,

$$N = 0, \quad T = 0, \quad M_f = 0, \quad M_t = M_x : \quad (5.1)$$

il momento torcente è costante lungo la trave.

La sezione circolare gode di una proprietà speciale: per simmetria, ruota *rimanendo piana*. Le sezioni girano rigidamente l'una rispetto all'altra, e la tensione tangenziale cresce linearmente con la distanza  $r$  dall'asse, nulla al centro e massima sul contorno. Introducendo il **momento d'inerzia polare**

$$J_G = J_y + J_z = \frac{\pi d^4}{32}, \quad (5.2)$$

si ha

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{J_G} R \quad \text{e} \quad \vartheta_{unit} = \frac{M_t}{J_G G} \quad (5.3)$$

dove  $\vartheta_{unit}$  è la **rotazione per unità di lunghezza** (rad/mm) e  $G$  il modulo di elasticità tangenziale. L'angolo totale di una trave lunga  $\ell$  è  $\vartheta = \vartheta_{unit} \ell$ .

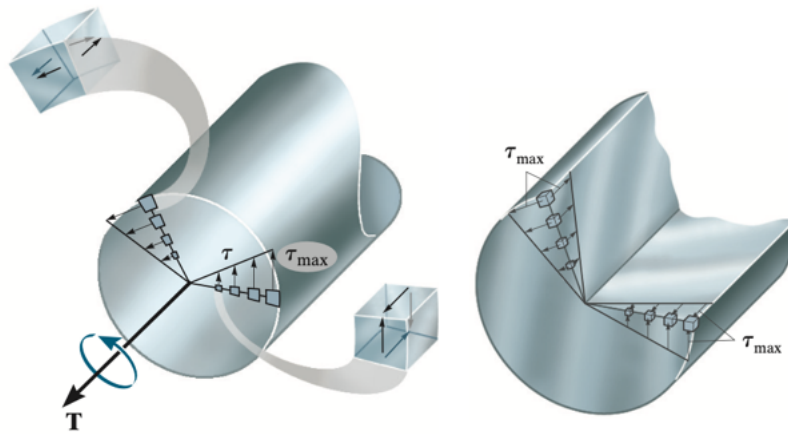


Figura 5.1: Torsione della sezione circolare: la tensione tangenziale è nulla sull'asse e massima sul contorno.

### Il materiale sprecato

La distribuzione lineare denuncia un'inefficienza: il materiale vicino all'asse lavora pochissimo (al centro, zero). La natura del problema suggerisce da sola il rimedio: togliere il materiale da dove non serve e portarlo sul contorno — cioè fare la sezione *cava*. È l'idea che tra poco le formule di Bredt trasformeranno in strumento di calcolo.

## Esempio 5.1 — Verifica e dimensionamento a torsione

Una trave a sezione circolare piena,  $d = 10$  mm, alluminio 2024 ( $\sigma_s = 300$  N/mm<sup>2</sup>,  $G = 27.000$  N/mm<sup>2</sup>), è soggetta a  $M_t = 25.000$  N mm. Verificare a snervamento con  $K = 2$  e, se necessario, ridimensionare; calcolare quindi l'angolo di torsione di una trave lunga 400 mm.

### Soluzione

Con  $J_G = \pi d^4 / 32 = 982$  mm<sup>4</sup>:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{J_G} R = \frac{25000}{982} \cdot 5 = 127,3 \text{ N/mm}^2. \quad (5.4)$$

La tensione ammissibile, con Von Mises, vale

$$\tau_{am} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3} K} = \frac{300}{\sqrt{3} \cdot 2} = 86,6 \text{ N/mm}^2. \quad (5.5)$$

Poiché  $\tau_{\max} > \tau_{am}$ , il diametro non basta. Imponendo  $\tau_{\max} = \tau_{am}$  e risolvendo rispetto a  $d$  ( $\tau_{\max} = 16M_t/(\pi d^3)$ ):

$$d_{\min} = \left( \frac{16 M_t}{\pi \tau_{am}} \right)^{1/3} = 11,4 \text{ mm} \rightarrow d = 12 \text{ mm.} \quad (5.6)$$

Ricontrollando:  $\tau_{\max} = 16 \cdot 25000/(\pi \cdot 12^3) = 73,7 \text{ N/mm}^2 < 86,6$ : verificato.

La rotazione unitaria, con  $J_G(12) = 2.036 \text{ mm}^4$ :

$$\vartheta_{unit} = \frac{M_t}{J_G G} = \frac{25000}{2036 \cdot 27000} = 4,55 \times 10^{-4} \text{ rad/mm} = 0,026^\circ/\text{mm}, \quad (5.7)$$

e su  $\ell = 400 \text{ mm}$  l'estremità ruota di  $\vartheta_B \approx 0,026 \cdot 400 \approx 10,4^\circ$ . Si noti che la trave è *verificata a resistenza* ma ruota di oltre dieci gradi: la rigidezza è una richiesta diversa dalla resistenza, e più avanti la vedremo dettare legge.

## 5.2 Sezioni non circolari: l'ingobbamento

Se la sezione non è circolare, la simmetria che teneva piane le sezioni viene meno: sotto torsione le sezioni si **ingobbano**, cioè escono dal proprio piano, e la trattazione elementare cade.

### Analogia pratica – L'ingobbamento in cucina

Torcete una spugna rettangolare da cucina tenendone ferma un'estremità: le “sezioni” non restano piate, si incurvano a sella. Ora fate lo stesso con un tubo di cartone (il cuore di un rotolo): le sezioni ruotano restando sostanzialmente piane. Sezione piena rettangolare contro sezione chiusa cava: il comportamento a torsione è profondamente diverso, ed è il secondo motivo — dopo il peso — per cui l'aeronautica ama i tubi.

### ► Approfondimento: Rettangoli ed ellissi pieni: dove si annida la $\tau$ massima

Per le sezioni piene non circolari la teoria esatta (dovuta a de Saint-Venant) riserva una sorpresa: la tensione tangenziale massima *non* si trova nei punti più lontani dal centro — gli spigoli, dove anzi  $\tau = 0$  — ma nei punti del contorno *più vicini* all'asse, cioè a metà dei lati lunghi del rettangolo e agli estremi dell'asse *minore* dell'ellisse. Per un'ellisse di semiassi  $a \geq b$ :

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_t}{\pi a b^2}; \quad (5.8)$$

per un rettangolo di lati  $a \geq b$ :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha a b^2}, \quad \alpha = \begin{cases} 0,208 & a/b = 1 \\ 0,246 & a/b = 2 \\ 0,267 & a/b = 3 \\ 1/3 & a/b \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.9)$$

Il caso  $a/b \rightarrow \infty$  è la *lamiera sottile aperta*: pochissimo efficiente a torsione, come vedremo confrontandola con la sezione chiusa. Per il corso queste formule sono un riferimento da prontuario: negli esercizi d'esame le sezioni in torsione sono circolari o in parete sottile chiusa.

## Esempio 5.2 — La piattina in torsione, e il tondino che la umilia

Una piattina in lega 2024-T4 ( $R_{p0,2} = 324 \text{ N/mm}^2$ ,  $K = 1,5$ ) ha sezione rettangolare piena  $a \times b = 60 \times 20 \text{ mm}$  ed è soggetta a  $M_t = 500 \text{ N m}$ . (a) Verificarla a torsione. (b) Confrontare la sua tensione massima con quella di un tondino circolare pieno di pari area, soggetto allo stesso momento.

### Passo 1 — La tensione ammissibile

$$\sigma_{am} = \frac{324}{1,5} = 216 \text{ N/mm}^2, \quad \tau_{am} = \frac{\sigma_{am}}{\sqrt{3}} = 124,7 \text{ N/mm}^2. \quad (5.10)$$

### Passo 2 — La verifica della piattina

Il rapporto di forma è  $a/b = 60/20 = 3$ , cui corrisponde  $\alpha = 0,267$ . La tensione massima — che, ricordiamo, abita a *metà dei lati lunghi*, non negli spigoli — vale

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha a b^2} = \frac{5 \times 10^5}{0,267 \cdot 60 \cdot 20^2} = 78,0 \text{ N/mm}^2 \leq 124,7 \text{ N/mm}^2 : \quad (5.11)$$

verificata, con margine  $124,7/78,0 = 1,60$ .

### Passo 3 — Il tondino di pari area

L'area della piattina è  $A = 60 \cdot 20 = 1.200 \text{ mm}^2$ ; il cerchio pieno di pari area ha diametro

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1200}{\pi}} = 39,1 \text{ mm}, \quad (5.12)$$

e con il modulo di resistenza a torsione della sezione circolare:

$$W_t = \frac{\pi d^3}{16} = 11.726 \text{ mm}^3, \quad \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{5 \times 10^5}{11726} = 42,6 \text{ N/mm}^2. \quad (5.13)$$

### Risultato — Stesso peso, quasi il doppio della tensione

A parità di area — cioè di peso al metro — la piattina lavora a 78,0 contro i 42,6 del tondino: il **83% in più** di tensione per lo stesso momento. La torsione “gira” attorno all’asse, e premia le sezioni che le offrono materiale a distanza uniforme: il cerchio è la forma perfetta, il rettangolo allungato la tradisce — e più si allunga, peggio fa ( $\alpha$  non cresce abbastanza da compensare il  $b^2$  che si assottiglia). È la prima metà di una lezione; la seconda metà, ben più drammatica, arriva a fine capitolo con il confronto fra sezione aperta e chiusa.

Nelle strutture aeronautiche, infatti, non si usano quasi mai sezioni piene: si usano sezioni **tubolari chiuse, cave, in parete sottile** — il tubo di una cloche, il cassone di un’ala, il guscio di una fusoliera. Per queste sezioni esistono formule tanto semplici quanto potenti: le formule di Bredt.

## 5.3 Le formule di Bredt

Sia data una sezione chiusa in parete sottile di spessore  $s$  (costante, per ora), soggetta a  $M_t$ . Si chiami  $A$  l’**area racchiusa dalla linea media** della parete — attenzione: l’area *del buco*, non l’area del materiale.

### Teoria – Prima formula di Bredt: la resistenza

L'equilibrio di un concio di parete impone che il prodotto  $q = \tau s$  — il **flusso di taglio**, in N/mm — sia *costante* lungo tutto il contorno, come la portata di un fluido in un condotto. Imponendo che il momento risultante dei flussi equivalga a  $M_t$  si ottiene

$$\boxed{q = \frac{M_t}{2A}} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{M_t}{2As}. \quad (5.14)$$

Se lo spessore varia lungo il contorno,  $q$  resta costante e la tensione è massima dove la parete è più sottile:  $\tau_{\max} = q/s_{\min}$ .

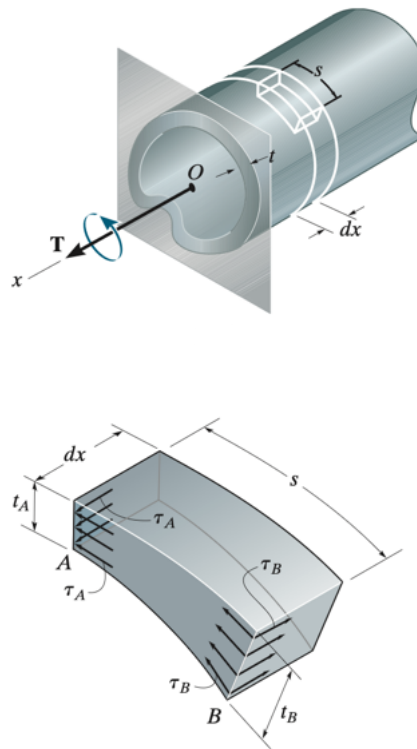


Figura 5.2: Le grandezze delle formule di Bredt: il flusso di taglio  $q$  circola costante lungo il contorno chiuso.

### Teoria – Seconda formula di Bredt: la rigidezza

La rotazione per unità di lunghezza vale

$$\boxed{\vartheta_{unit} = \frac{M_t}{4A^2 G} \frac{\ell_m}{s}} \quad (5.15)$$

dove  $\ell_m$  è la lunghezza della linea media. Il fattore  $A^2$  al denominatore dice tutto: la rigidezza torsionale cresce con il *quadrato* dell'area racchiusa — gonfiare la cella conviene moltissimo.

Se il contorno è formato da tratti di spessore diverso — il caso normale di un **cassone alare**, dove il rivestimento dorsale, quello ventrale e le anime dei longheroni hanno spessori differenti — il rapporto  $\ell_m/s$  si sostituisce con la somma dei contributi dei singoli tratti:

$$\mathfrak{S}_{unit} = \frac{M_t}{4A^2 G} \sum_i \frac{c_i}{s_i}, \quad (5.16)$$

dove  $c_i$  e  $s_i$  sono lunghezza e spessore del tratto  $i$ -esimo. La somma  $\sum c_i/s_i$  è un numero puro, e ogni tratto vi entra come una “resistenza” in serie: il tratto lungo e sottile domina la somma, cioè *comanda la cedevolezza* dell’intera cella.

► **Approfondimento: Da dove viene il fattore  $2A$**

Il momento del flusso rispetto a un polo interno  $O$  è  $M_t = \oint q h ds$ , dove  $h$  è il braccio del tratto  $ds$ . Ma  $h ds/2$  è esattamente l’area del triangolino di vertice  $O$  e base  $ds$ : integrando lungo tutto il contorno, i triangolini piastrellano l’area racchiusa, quindi  $\oint h ds = 2A$  e, con  $q$  costante,  $M_t = 2Aq$ . Una dimostrazione di tre righe per una delle formule più usate dell’aeronautica.

## Esempio 5.3 — Resistenza e rigidezza di una sezione tubolare

Una trave incastrata è soggetta a  $M_t = 7 \times 10^6$  N mm. La sezione è tubolare chiusa a parete sottile, con linea media circolare di raggio  $R = 100$  mm e spessore iniziale  $s = 1$  mm; materiale con  $\sigma_s = 300$  N/mm<sup>2</sup>,  $G = 27.000$  N/mm<sup>2</sup>,  $K = 2$ . (a) Verificare e, se serve, dimensionare lo spessore a snervamento. (b) Se la trave è lunga 4.000 mm e si richiede una rotazione d’estremità non superiore a  $4^\circ$ , quale spessore serve?

### Soluzione

Linea media e area racchiusa:

$$\ell_m = 2\pi R = 628 \text{ mm}, \quad A = \pi R^2 = 31.416 \text{ mm}^2. \quad (5.17)$$

(a) Con la prima formula di Bredt:

$$\tau = \frac{M_t}{2As} = \frac{7 \times 10^6}{2 \cdot 31416 \cdot 1} = 111,4 \text{ N/mm}^2 > \tau_{am} = \frac{300}{\sqrt{3} \cdot 2} = 86,6 \text{ N/mm}^2. \quad (5.18)$$

Lo spessore da 1 mm non basta. Imponendo  $\tau = \tau_{am}$ :

$$s_{\min} = \frac{M_t}{2A \tau_{am}} = \frac{7 \times 10^6}{2 \cdot 31416 \cdot 86,6} = 1,29 \text{ mm} \rightarrow s = 1,3 \text{ mm}. \quad (5.19)$$

(b) La richiesta di rigidezza:  $4^\circ = 0,0698$  rad su  $\ell = 4.000$  mm. Dalla seconda formula di Bredt,  $\mathfrak{S}_B = \mathfrak{S}_{unit} \ell \leq 0,0698$ :

$$s \geq \frac{M_t \ell_m \ell}{4A^2 G \mathfrak{S}_B} = \frac{7 \times 10^6 \cdot 628 \cdot 4000}{4 \cdot 31416^2 \cdot 27000 \cdot 0,0698} = 2,4 \text{ mm}. \quad (5.20)$$

**Risultato – Resistenza e rigidezza: due verifiche, due padroni**

Il risultato merita una sosta: per *non snervare* bastano 1,3 mm; per *non ruotare troppo* ne servono 2,4 mm — quasi il doppio. In questa trave comanda la rigidezza, non la resistenza. In aeronautica succede spesso: un'ala troppo flessibile a torsione cambia incidenza sotto carico, degrada l'efficacia degli alettoni e, al limite, incontra fenomeni aeroelastici pericolosi. La struttura giusta non è quella che semplicemente non si rompe: è quella che mantiene la forma che l'aerodinamica le chiede.

## Esempio 5.4 — Il cassone alare a spessori diversi: quanta torsione ammette la rigidezza

Un tronco d'ala lungo  $L = 3.000$  mm è schematizzato come un cassone rettangolare in parete sottile con linea media di  $500 \times 150$  mm (corda  $\times$  altezza). Gli spessori dei quattro tratti sono: anima anteriore  $s = 2$  mm; rivestimento dorsale, anima posteriore e rivestimento ventrale  $s = 1$  mm. Materiale 2024-T4 ( $G = 27.000$  N/mm<sup>2</sup>,  $R_{p0,2} = 324$  N/mm<sup>2</sup>,  $K = 1,5$ ). Determinare il massimo momento torcente  $M_t$  compatibile con una rotazione d'estremità di  $2^\circ$ , e verificare che a quel momento la resistenza sia soddisfatta.

**Ipotesi**

Cassone monocella chiuso; spessori piccoli rispetto alle dimensioni della sezione (Bredt applicabile);  $M_t$  costante lungo il tronco; si trascura l'effetto irrigidente delle centine sulla torsione d'insieme.

**Passo 1 — Le grandezze geometriche di Bredt**

Area racchiusa dalla linea media e somma dei rapporti  $c_i/s_i$ :

$$A = 500 \cdot 150 = 75.000 \text{ mm}^2, \quad (5.21)$$

$$\sum_i \frac{c_i}{s_i} = \underbrace{\frac{150}{2}}_{\text{anima ant.}} + \underbrace{\frac{500}{1}}_{\text{dorso}} + \underbrace{\frac{150}{1}}_{\text{anima post.}} + \underbrace{\frac{500}{1}}_{\text{ventre}} = 75 + 500 + 150 + 500 = 1225. \quad (5.22)$$

La somma è un numero puro, e la sua composizione è già una diagnosi: dorso e ventre pesano  $500/1225 \approx 41\%$  *ciascuno* — la cedevolezza torsionale del cassone abita quasi tutta nei due rivestimenti lunghi e sottili, non nelle anime.

**Passo 2 — Dalla rotazione ammessa al momento ammesso**

La rotazione limite, in radianti, e la corrispondente rotazione unitaria:

$$\vartheta_B = 2^\circ = 0,0349 \text{ rad}, \quad \vartheta_{unit} = \frac{\vartheta_B}{L} = \frac{0,0349}{3000} = 1,164 \times 10^{-5} \text{ rad/mm}. \quad (5.23)$$

Invertendo la (5.16) rispetto a  $M_t$ :

$$M_t = \vartheta_{unit} \frac{4A^2G}{\sum c_i/s_i} = 1,164 \times 10^{-5} \cdot \frac{4 \cdot 75000^2 \cdot 27000}{1225} \approx 5,77 \times 10^6 \text{ N mm} = 5,77 \text{ kN m}. \quad (5.24)$$

(Il raggruppamento  $4A^2G / \sum c_i/s_i \approx 4,96 \times 10^{11}$  N mm<sup>2</sup> è la *rigidezza torsionale* del cassone: momento per rotazione unitaria.)

### Passo 3 — La verifica di resistenza a quel momento

Con la prima formula di Bredt il flusso è unico per tutta la cella, e la tensione è massima dove lo spessore è minimo:

$$q = \frac{M_t}{2A} = \frac{5,77 \times 10^6}{2 \cdot 75000} = 38,5 \text{ N/mm}, \quad \tau_{\max} = \frac{q}{s_{\min}} = \frac{38,5}{1} = 38,5 \text{ N/mm}^2, \quad (5.25)$$

ben al di sotto di  $\tau_{am} = \sigma_{am}/\sqrt{3} = 216/\sqrt{3} = 124,7 \text{ N/mm}^2$ .

#### Risultato — Chi comanda qui

La resistenza lavora al 31% dell'ammissibile quando la rigidezza ha già detto basta: anche in questo cassone — come nel tubo dell'esempio precedente — **comanda la rigidezza**. E il Passo 1 dice dove intervenire se i 5,77 kN m non bastassero: un decimo di millimetro in più sui rivestimenti (i tratti che dominano  $\sum c_i/s_i$ ) rende più di un millimetro aggiunto alle anime. La formula non si limita a calcolare: suggerisce il progetto.

## 5.4 Il confronto finale: sezione aperta contro sezione chiusa

Resta da saldare un debito. Nell'approfondimento sulle sezioni piene abbiamo lasciato in sospeso il caso  $a/b \rightarrow \infty$  — la lamiera sottile — promettendo un confronto con la sezione chiusa. È il momento di farlo, perché questo confronto è la lezione del capitolo.

#### Teoria — La sezione sottile aperta: il rettangolo srotolato

Una sezione in parete sottile **aperta** — un profilato a C, a L, o un tubo *tagliato* lungo una generatrice — si comporta a torsione come il rettangolo lungo e stretto che si ottiene *srotolandola*: base pari allo sviluppo  $c$  della linea media, altezza pari allo spessore  $t$ . Nel limite di lamiera sottile ( $c/t \rightarrow \infty$ ) le costanti di de Saint-Venant tendono entrambe a  $1/3$ , e le formule del rettangolo diventano

$$J_t = \frac{1}{3} c t^3, \quad \tau_{\max} = \frac{M_t t}{J_t} = \frac{3 M_t}{c t^2}, \quad \vartheta_{unit} = \frac{M_t}{G J_t}. \quad (5.26)$$

Se la sezione è composta da più tratti (le ali e l'anima di una C), i contributi si sommano:  $J_t = \frac{1}{3} \sum_i c_i t_i^3$ . Si noti il contrasto strutturale con Bredt: nella sezione chiusa comandava  $A^2$ , l'area *racchiusa*; qui comanda  $t^3$ , lo *spessore al cubo* — e di area racchiusa non c'è più traccia. Fisicamente: nella sezione aperta il flusso di taglio non può circolare lungo il contorno, è costretto ad andare e tornare *nello spessore* della parete, lavorando su un braccio dell'ordine di  $t$  anziché delle dimensioni della sezione.

### Esempio 5.5 — Il tubo e il tubo tagliato: settantacinque volte peggio

Un tubo in lega 2024-T4 ( $G = 27.000 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_{am} = 216 \text{ N/mm}^2$ , quindi  $\tau_{am} = 124,7 \text{ N/mm}^2$ ) ha linea media circolare di raggio  $R = 50 \text{ mm}$  e spessore  $t = 2 \text{ mm}$ . Un secondo tubo, identico, viene tagliato con

una fresata sottile lungo tutta una generatrice. Per entrambi, sotto  $M_t = 500 \text{ N m}$  e su una lunghezza  $L = 2.000 \text{ mm}$ : (a) calcolare la tensione massima; (b) calcolare la rigidezza torsionale e la rotazione d'estremità; (c) determinare il massimo momento ammissibile.

### Passo 1 — Le grandezze comuni

Sviluppo della linea media e area racchiusa (che servirà solo al tubo chiuso):

$$c = 2\pi R = 314,2 \text{ mm}, \quad A = \pi R^2 = 7.854 \text{ mm}^2. \quad (5.27)$$

### Passo 2 — Il tubo chiuso (Bredt)

Tensione, dalla prima formula di Bredt:

$$\tau = \frac{M_t}{2 A t} = \frac{5 \times 10^5}{2 \cdot 7854 \cdot 2} = 15,9 \text{ N/mm}^2; \quad (5.28)$$

rigidezza e rotazione, dalla seconda (spessore costante,  $\sum c_i/s_i = c/t$ ):

$$J_t = \frac{4A^2}{c/t} = \frac{4 \cdot 7854^2 \cdot 2}{314,2} = 1,571 \times 10^6 \text{ mm}^4, \quad \vartheta = \frac{M_t L}{G J_t} = 0,023.6 \text{ rad} = 1,35^\circ. \quad (5.29)$$

### Passo 3 — Il tubo tagliato (sezione aperta)

Il taglio non asporta materiale — stessa area, stesso peso — ma cambia la topologia: il flusso non può più circolare. Con la (5.26):

$$J_t = \frac{1}{3} c t^3 = \frac{314,2 \cdot 2^3}{3} = 838 \text{ mm}^4, \quad (5.30)$$

$$\tau_{\max} = \frac{3 M_t}{c t^2} = \frac{3 \cdot 5 \times 10^5}{314,2 \cdot 4} = 1.194 \text{ N/mm}^2, \quad \vartheta = \frac{M_t L}{G J_t} \simeq 44 \text{ rad}. \quad (5.31)$$

I due numeri vanno letti per quello che sono:  $1.194 \text{ N/mm}^2$  è quasi quattro volte lo snervamento e  $44$  radianti sono *sette giri completi* — valori ovviamente fuori da ogni validità elastica. Il calcolo non descrive uno stato reale: certifica che il tubo tagliato, sotto quel momento, *non è una struttura torsionale*.

### Passo 4 — I momenti ammissibili e i rapporti

Imponendo  $\tau = \tau_{am}$  nei due casi:

$$M_t^{chiuso} = 2 A t \tau_{am} = 2 \cdot 7854 \cdot 2 \cdot 124,7 \simeq 3,92 \text{ kN m}, \quad M_t^{aperto} = \frac{c t^2}{3} \tau_{am} \simeq 52,2 \text{ N m}. \quad (5.32)$$

I rapporti fra le due sezioni — che hanno lo *stesso peso* — si scrivono in forma chiusa e non dipendono dal carico:

$$\frac{\tau^{aperto}}{\tau^{chiuso}} = \frac{M_t^{chiuso}}{M_t^{aperto}} = \frac{6A}{c t} = \frac{3R}{t} = 75, \quad \frac{J_t^{chiuso}}{J_t^{aperto}} = 3 \left( \frac{R}{t} \right)^2 = 1875. \quad (5.33)$$

**Risultato – Una fresata da un millimetro, un disastro da tre ordini di grandezza**

Il taglio ha lasciato intatti peso, area, materiale e ingombro: ha cambiato solo la *connessione* del contorno. Risultato: resistenza a torsione divisa per 75, rigidezza divisa per 1875. Le formule dei rapporti dicono anche perché: entrambi crescono con  $R/t$ , cioè con quanto la sezione è “grande e sottile” — esattamente la direzione in cui l’aeronautica spinge ogni struttura. Ecco perché un cassone alare *deve* richiudersi (rivestimento dorsale, ventrale e anime formano la cella), perché i portelli e le grandi aperture di fusoliera esigono cornici e rinforzi che ripristinino il percorso del flusso, e perché il longherone a C da solo — sezione aperta — non si difende dalla torsione e la consegna al rivestimento: tutti fili che questa monografia riprende, e che qui hanno il loro fondamento numerico.

**Dove siamo arrivati, dove andiamo**

La torsione ci ha regalato il concetto di *flusso di taglio* e la coppia di formule di Bredt: resistenza con  $q = M_t/2A$ , rigidezza con il fattore  $A^2$ . Restano le due caratteristiche che, nell’ala, la fanno da padrone: il taglio e il momento flettente. Il prossimo capitolo li affronta insieme — perché insieme nascono e insieme si verificano — e culmina nel dimensionamento della sezione simbolo delle costruzioni aeronautiche: il doppio T del longherone.



## Capitolo 6

# Flessione e taglio

### Bussola concettuale

**Studiamo questo perché.** la portanza distribuita lungo l'apertura genera, in ogni sezione dell'ala, taglio e momento flettente: sono le sollecitazioni che dimensionano il longherone, cioè l'ossatura portante del velivolo. Questo capitolo fornisce tutti gli strumenti: i diagrammi di  $T$  e  $M_f$ , la formula di Navier per le tensioni da flessione, i momenti d'inerzia, la formula di Jourawsky per il taglio, e la verifica combinata.

**Da dove veniamo.** dai capitoli precedenti: caratteristiche della sollecitazione, tensioni, schema di verifica, criterio di Von Mises.

**Dove andiamo.** alle esercitazioni finali (Capitolo 12), dove i diagrammi della semiala e il dimensionamento del longherone verranno svolti su un velivolo reale con i carichi dell'involuppo di volo.

**Al termine saprai.** tracciare i diagrammi di taglio e momento per la mensola nei casi fondamentali; distinguere centro di taglio e baricentro, asse neutro e asse di flessione; applicare Navier e Jourawsky; calcolare momenti d'inerzia di sezioni composte con il teorema del trasporto; ed eseguire la verifica combinata flessione più taglio.

## 6.1 I diagrammi di taglio e momento sulla mensola

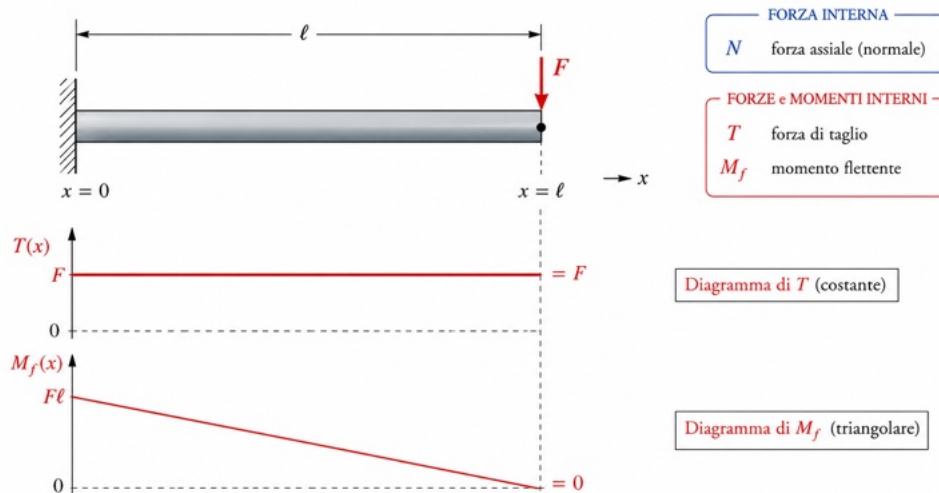
### 6.1.1 Forza concentrata all'estremità

Mensola di lunghezza  $\ell$ , incastrata in  $A$ , forza verticale  $F$  all'estremità libera  $B$ . L'equilibrio fornisce le reazioni

$$R_A = F, \quad M_A = -F \ell, \quad (6.1)$$

e il taglio ideale in una sezione a distanza  $x$  dall'incastro dà

$$N = 0, \quad M_t = 0, \quad T = F, \quad M_f(x) = -F(\ell - x). \quad (6.2)$$


 Figura 6.1: Forza concentrata all'estremità: i diagrammi di  $T$  e  $M_f$ .

Il taglio è *costante*: qualunque sezione deve trasmettere tutta la forza  $F$  verso l'incastro. Il momento flettente è *lineare*: nullo in  $B$  (oltre la sezione non c'è nulla che faccia braccio) e massimo in modulo all'incastro, dove il braccio è massimo.

### 6.1.2 Forza concentrata a distanza $b$ dall'incastro

Se la forza  $F$  agisce a distanza  $b$  dall'incastro, le reazioni diventano  $R_A = F$  e  $M_A = -Fb$ . Il taglio vale  $F$  solo nel tratto caricato  $0 \leq x \leq b$  ed è *nullo* nel tratto scarico oltre il carico; il momento è lineare fino al carico e nullo dopo. La regola generale, che useremo in continuazione: **oltre l'ultimo carico non c'è nulla, quindi non c'è nulla da trasmettere.**

### 6.1.3 Carico uniformemente distribuito

Sia ora la mensola caricata da un carico distribuito uniforme  $p$  (dimensioni: forza su lunghezza, N/m o N/mm) su tutta la luce  $\ell$ . Ai fini delle reazioni, il carico equivale alla risultante  $F = p\ell$  applicata a metà luce:

$$R_A = p\ell, \quad M_A = -\frac{p\ell^2}{2}. \quad (6.3)$$

Nella sezione generica, il taglio raccoglie il carico che sta oltre:

$$T(x) = -p(\ell - x) \quad (\text{lineare: nullo in punta, massimo all'incastro}), \quad (6.4)$$

e il momento ne raccoglie il braccio:

$$M_f(x) = -\frac{p(\ell - x)^2}{2} \quad (\text{parabolico: nullo in punta, massimo all'incastro}). \quad (6.5)$$

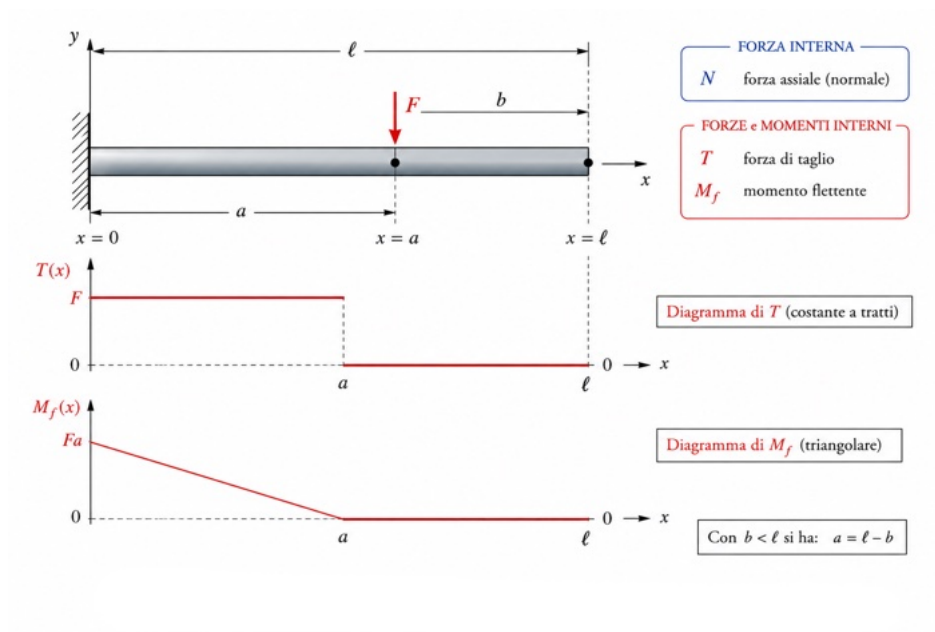


Figura 6.2: Forza concentrata in posizione intermedia.

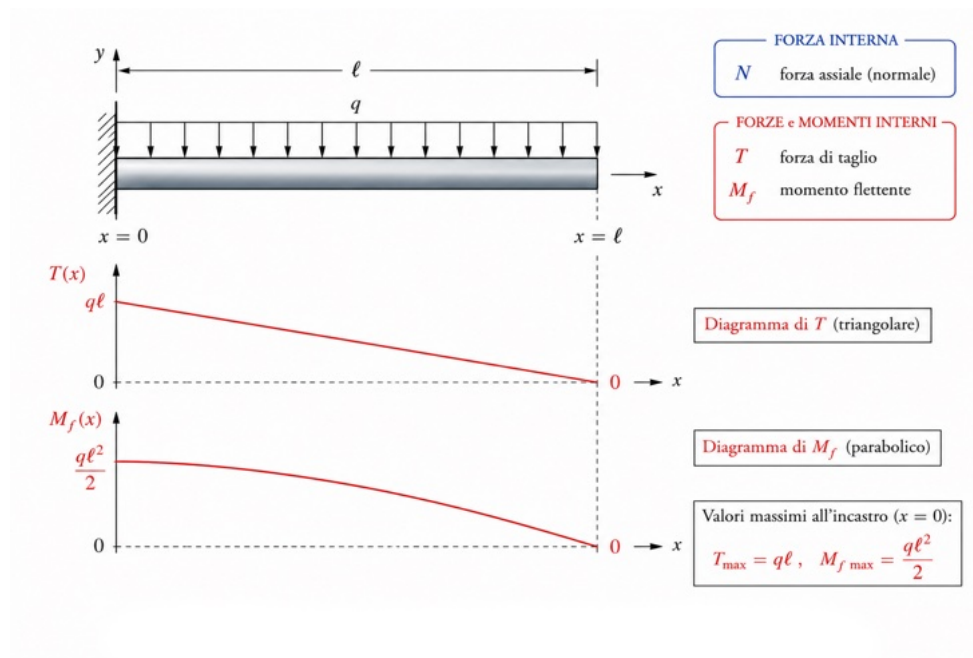


Figura 6.3: Carico uniformemente distribuito: lo schema della semiala.

### Risultato – La regola d'oro dei diagrammi

Fra taglio e momento vale la relazione differenziale  $dM_f/dx = T$ : **la pendenza del diagramma del momento è, punto per punto, il valore del taglio**. Carico distribuito costante → taglio lineare → momento parabolico; forza concentrata → salto nel taglio → spigolo nel momento. È il

controllo di coerenza più rapido che esista: se i vostri diagrammi non lo rispettano, uno dei due è sbagliato di sicuro.

## 6.2 Centro di taglio e asse neutro

### 6.2.1 Il centro di taglio

Ogni sezione possiede un punto caratteristico detto **centro di taglio**  $C$ : se la retta d'azione della forza trasversale passa per  $C$ , la forza genera *solo* taglio e flessione; se non ci passa, compare in aggiunta un **momento torcente di trasporto**, pari alla forza per la distanza dal centro di taglio.

Per le sezioni con due assi di simmetria — circolari piene e tubolari, rettangolari piene e tubolari, doppio T simmetrico — il centro di taglio coincide con il baricentro  $G$ . Per le sezioni aperte non simmetriche, come la C e la L, i due punti *non* coincidono: per la C, in particolare,  $C$  sta addirittura *fuori* dalla sezione, dalla parte opposta dell'anima rispetto alle ali.

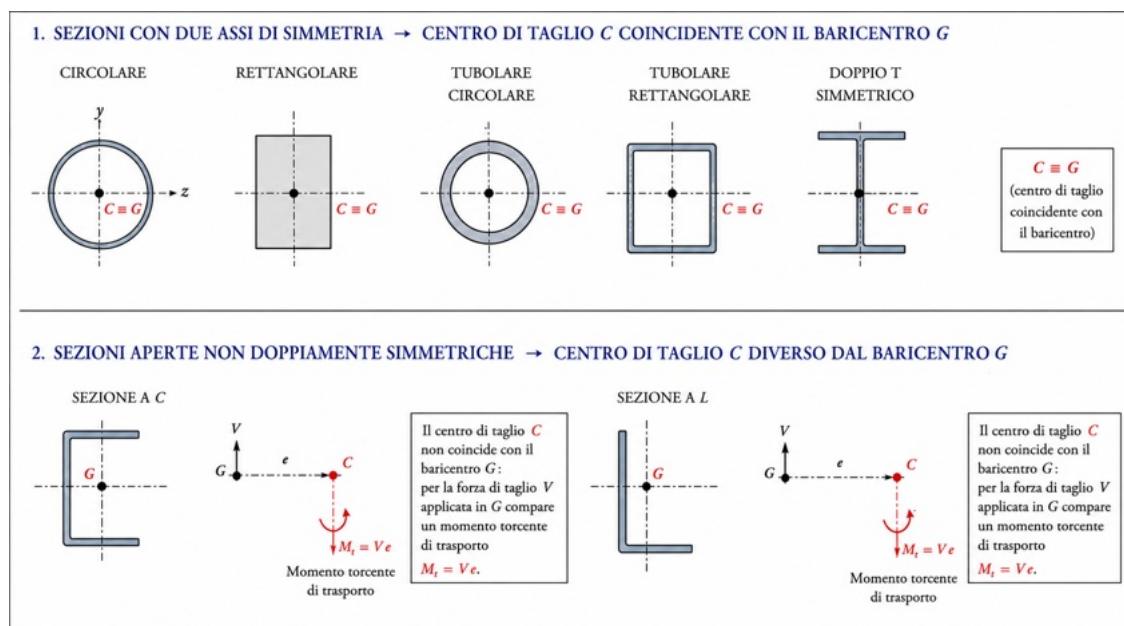


Figura 6.4: Quando  $C$  coincide con  $G$  e quando no: per la sezione a C il centro di taglio è esterno alla sezione.

#### Analogia pratica – Perché all'ala interessa moltissimo

La portanza di un'ala è applicata dove decide l'aerodinamica, non dove vorrebbe la struttura: se la sua retta d'azione non passa per il centro di taglio della sezione, ogni newton di portanza porta in dote anche torsione. È per questo che nelle esercitazioni dichiareremo sempre, come ipotesi, dove passa il carico rispetto al centro di taglio: non è pedanteria, è la differenza fra un'ala che flette e un'ala che flette e si torce.

### 6.2.2 Asse neutro e flessione retta

L'**asse neutro** è la retta della sezione lungo la quale la tensione normale da flessione è nulla: da un lato dell'asse neutro le fibre sono tese, dall'altro compresse. La retta ortogonale all'asse neutro è l'**asse di flessione**, la direzione in cui la trave si incurva.

Se la sezione è simmetrica rispetto all'asse  $z$  e il carico agisce nel piano  $xy$ , allora  $z$  è asse neutro e la flessione è **retta**: la trave si inflette esattamente nel piano del carico. Se la simmetria manca, l'asse neutro ruota e la flessione diventa *deviata*: la trave si inflette anche fuori dal piano del carico. In questi appunti assumeremo sempre, per semplicità, sezioni simmetriche rispetto a  $z$ : lavoreremo cioè in flessione retta, che copre la grande maggioranza dei casi di progetto elementare.

## 6.3 La formula di Navier

### Teoria – Formula di Navier

In una sezione dove agisce il momento flettente  $M_f$ , la tensione normale nel punto a distanza  $y$  dall'asse neutro vale

$$\sigma_x = \frac{M_f}{J_z} y \quad (6.6)$$

dove  $J_z$  è il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro.

La formula si legge in tre proporzionalità: la tensione cresce con il momento nella sezione considerata; cresce linearmente con la distanza dall'asse neutro (le fibre esterne lavorano di più, quelle sull'asse neutro non lavorano affatto); decresce con il momento d'inerzia, che misura quanto la sezione è “ben distribuita” rispetto alla flessione. Per la tensione massima si sceglie dunque la sezione con  $|M_f|$  massimo e, in essa, il punto più lontano dall'asse neutro:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_f|_{\max}}{J_z} y_{\max} \quad (6.7)$$

### 6.3.1 Il modulo di resistenza e la formula di progetto

Nella tensione massima, momento d'inerzia e distanza della fibra estrema compaiono sempre insieme, nel rapporto  $J_z/y_{\max}$ . Conviene dargli un nome: si chiama **modulo di resistenza** (a flessione)

$$W = \frac{J_z}{y_{\max}} \quad [\text{mm}^3], \quad (6.8)$$

ed è la misura, in un solo numero, di quanto la sezione è brava a flettere: racchiude la geometria come  $S$  la racchiudeva per lo sforzo normale. Con  $W$  la verifica a flessione assume la stessa forma pulita della verifica a trazione:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_f|_{\max}}{W} \leq \sigma_{am} \quad (6.9)$$

e — questo è il punto operativo — si *inverte* immediatamente quando l'incognita è la sezione. Se materiale e momento sono noti, la **formula di progetto** è

$$W \geq \frac{|M_f|_{\max}}{\sigma_{am}} : \quad (6.10)$$

si calcola il  $W$  minimo richiesto, poi si sceglie dal prontuario (o dal catalogo dei profilati) la sezione che lo fornisce con il minor peso. Verifica e progetto sono la stessa equazione letta nei due versi: nei temi d'esame conviene dichiarare esplicitamente quale delle due strade si sta percorrendo.

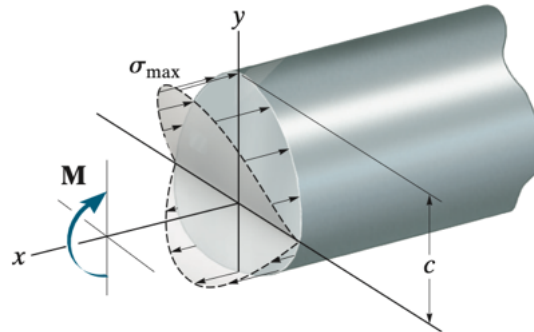


Figura 6.5: La formula di Navier: tensioni lineari, nulle sull'asse neutro, massime sulle fibre estreme.

### 6.3.2 I momenti d'inerzia di sezione

Il **momento d'inerzia** di una sezione  $S$  rispetto a una retta  $z$  è

$$J_z = \int_S y^2 dA, \quad (6.11)$$

dove  $y$  è la distanza dell'areola  $dA$  dall'asse. Dimensionalmente è una lunghezza alla quarta ( $\text{mm}^4$ ). Il quadrato sotto integrale è la chiave di tutto il progetto strutturale: *il materiale lontano dall'asse conta con il quadrato della distanza*. I casi notevoli:

$$\text{cerchio pieno: } J_z = \frac{\pi d^4}{64}; \quad (6.12)$$

$$\text{corona circolare: } J_z = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4); \quad (6.13)$$

$$\text{rettangolo } (A \parallel z, B \perp z): J_z = \frac{1}{12} A B^3. \quad (6.14)$$

Nel rettangolo, il lato *ortogonale* all'asse compare al cubo: una tavola posata di piatto e la stessa tavola posata di coltello hanno momenti d'inerzia che stanno come 1 a  $(B/A)^2$  — provate con un righello, che flette docilmente di piatto e quasi per nulla di coltello.

#### Teoria – Teorema del trasporto (Huygens–Steiner)

Per una parte di sezione di area  $A$ , il momento d'inerzia rispetto a un asse  $z$  parallelo all'asse baricentrico  $z'$  e distante  $b$  da esso vale

$$J_z = J_{z'} + A b^2. \quad (6.15)$$

È lo strumento con cui si calcolano le sezioni composte: si scompone in rettangoli, si calcola il momento proprio di ciascuno e si trasporta all'asse comune.

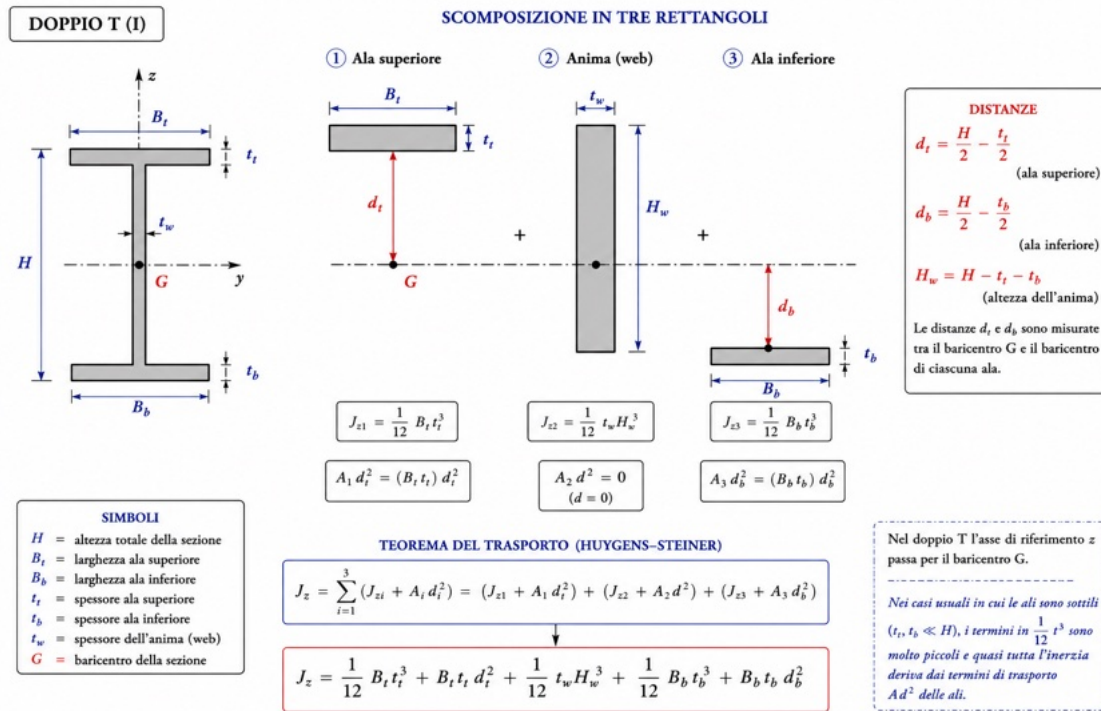


Figura 6.6: Il teorema del trasporto applicato al doppio T: quasi tutta l'inerzia viene dal termine  $A b^2$  delle solette.

### Definizione – Momento statico

Accanto al momento d'inerzia vive una grandezza più semplice, il **momento statico** dell'area  $A$  rispetto all'asse  $z$ :

$$S_z^* = \int_A y \, dA = A y_G \quad [\text{mm}^3], \quad (6.16)$$

dove  $y_G$  è la distanza del baricentro dell'area dall'asse. La distanza compare alla *prima* potenza (nel momento d'inerzia alla seconda: per questo si parla, rispettivamente, di momento del prim'ordine e del second'ordine). Il momento statico ha due impieghi che useremo di continuo: rispetto a un asse *baricentrico* è nullo — ed è così che si *trova* il baricentro delle sezioni composte — e, calcolato per la porzione di sezione “al di sopra” di una corda, è l'ingrediente della formula di Jourawsky che incontreremo fra poco.

### 6.3.3 Il prontuario delle sezioni notevoli

La tabella raccoglie momento d'inerzia  $J_z$  e modulo di resistenza  $W = J_z / y_{\max}$  delle sezioni ricorrenti nei problemi di costruzioni aeronautiche; l'asse  $z$  è sempre quello baricentrico orizzontale, cioè l'asse neutro della flessione retta. Le dimensioni “esterne” sono in maiuscolo, quelle “interne” (cave) in minuscolo.

| Sezione                                                              | $J_z$                                   | $W = J_z / y_{\max}$                    |
|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|
| Rettangolo, base $B$ , altezza $H$                                   | $\frac{B H^3}{12}$                      | $\frac{B H^2}{6}$                       |
| Quadrato di lato $H$                                                 | $\frac{H^4}{12}$                        | $\frac{H^3}{6}$                         |
| Cassone rettangolare cavo ( $B \times H$ fuori, $b \times b$ dentro) | $\frac{B H^3 - b b^3}{12}$              | $\frac{B H^3 - b b^3}{6H}$              |
| Doppio T e C (stesso ingombro $B \times H$ , vuoti $b \times b$ )    | $\frac{B H^3 - b b^3}{12}$              | $\frac{B H^3 - b b^3}{6H}$              |
| Cerchio pieno, diametro $D$                                          | $\frac{\pi D^4}{64} \approx 0,0491 D^4$ | $\frac{\pi D^3}{32} \approx 0,0982 D^3$ |
| Corona circolare ( $D$ esterno, $d$ interno)                         | $0,0491 (D^4 - d^4)$                    | $0,0982 \frac{D^4 - d^4}{D}$            |
| Triangolo, base $B$ , altezza $H$                                    | $\frac{B H^3}{36}$                      | $\frac{B H^2}{24}$                      |

Tabella 6.1: Prontuario: momenti d'inerzia e moduli di resistenza rispetto all'asse baricentrico orizzontale.

Tre osservazioni per usare bene la tabella. (i) Doppio T, C e cassone condividono la stessa formula “per differenza”  $BH^3 - bb^3$ : le tre sezioni hanno la stessa inerzia *flessionale* a parità di ingombri e spessori, perché la flessione non sa dove sono le aperture — sente solo quanto materiale c'è a ogni quota  $y$ . (Ciò che le distingue, il centro di taglio e il comportamento torsionale, è raccontato altrove in questo volume.) (ii) Nel triangolo  $y_{\max} = 2H/3$  è la distanza del vertice, non della base: da qui il 24 al denominatore di  $W$ . (iii) Il modulo  $W$  **non** gode dell'additività per differenza in generale: si ottiene sempre dividendo il  $J_z$  complessivo per l' $y_{\max}$  complessivo, mai sottraendo i  $W$  delle parti.

### Esempio 6.1 — Il prontuario alla prova: due sezioni per lo stesso momento

Una mensola lunga  $\ell = 1.200$  mm porta  $F = 2$  kN all'estremo libero. Materiale 2024-T4 ( $R_{p0,2} = 324$  N/mm<sup>2</sup>,  $K = 1,5$ , quindi  $\sigma_{am} = 216$  N/mm<sup>2</sup>). Dimensionare a flessione la sezione d'incastro (a) come rettangolo pieno con  $H = 2B$  e (b) come corona circolare con  $d = 0,9 D$ , confrontando poi il peso delle due soluzioni.

#### Passo 1 — Il modulo di resistenza richiesto

Il momento massimo è all'incastro:

$$M_f = F \ell = 2000 \cdot 1200 = 2,4 \times 10^6 \text{ N mm}, \quad (6.17)$$

e la formula di progetto (6.10) chiede

$$W \geq \frac{M_f}{\sigma_{am}} = \frac{2,4 \times 10^6}{216} = 11.111 \text{ mm}^3. \quad (6.18)$$

Da qui in poi il problema è solo geometria: cercare nel prontuario (table 6.1) la sezione che fornisce questo  $W$ .

**Passo 2 — Opzione (a): il rettangolo pieno**

Dal prontuario, con  $H = 2B$ :

$$W = \frac{B H^2}{6} = \frac{B (2B)^2}{6} = \frac{2}{3} B^3 \geq 11111 \implies B \geq \left( \frac{3 \cdot 11111}{2} \right)^{1/3} = 25,5 \text{ mm.} \quad (6.19)$$

Il valore calcolato non è una misura commerciale: si prova la coppia  $25 \times 50 \text{ mm}$ , ma  $W = 25 \cdot 50^2/6 = 10.417 \text{ mm}^3 < 11111$  — **bocciata**, l'arrotondamento per difetto non è ammesso. Si adotta  **$26 \times 52$** :  $W = 26 \cdot 52^2/6 = 11.717 \text{ mm}^3$ , con

$$\sigma = \frac{2,4 \times 10^6}{11717} = 204,8 \text{ N/mm}^2 \leq 216 \quad (\text{margine } 5,5\%). \quad \text{Area: } 26 \cdot 52 = 1.352 \text{ mm}^2. \quad (6.20)$$

**Passo 3 — Opzione (b): la corona circolare**

Dal prontuario, con  $d = 0,9D$ :

$$W = 0,0982 \frac{D^4 - (0,9D)^4}{D} = 0,0982 (1 - 0,9^4) D^3 = 0,0338 D^3 \geq 11111 \implies D \geq 69,0 \text{ mm.} \quad (6.21)$$

Si adotta il tubo commerciale  **$D = 70$ ,  $d = 63$**  ( $s = 3,5 \text{ mm}$ ):

$$W = 0,0982 \frac{70^4 - 63^4}{70} = 11.583 \text{ mm}^3, \quad \sigma = 207,2 \text{ N/mm}^2 \leq 216 \quad (\text{margine } 4,3\%), \quad (6.22)$$

con area  $\frac{\pi}{4}(70^2 - 63^2) = 731 \text{ mm}^2$ .

**Risultato — Stesso momento, metà del peso**

Le due sezioni portano lo stesso  $M_f$  con margini quasi identici, ma il rettangolo pieno pesa  $1352/731 = \mathbf{1,85}$  volte il tubo: quasi il doppio. È il quadrato di Navier che presenta il conto — nel pieno, il materiale vicino all'asse neutro lavora poco e pesa uguale; nel tubo, quel materiale semplicemente non c'è. Ed è lo stesso identico motivo per cui il longherone concentra le solette lontano dall'asse: il doppio T è un “tubo” ottimizzato per la flessione retta. Si noti infine la disciplina delle misure: il  $B$  *calcolato* (25,5) non si arrotonda mai per difetto — si sale alla misura commerciale successiva e si *documenta* il margine.

**6.4 Il taglio semplice: perni, bulloni e rivetti**

Prima di studiare come il taglio si distribuisce dentro una trave inflessa, conviene incontrarlo nella sua forma più elementare: due forze uguali e opposte, giacenti nel piano di una sezione, che tendono a far *scorrere* le due metà del solido l'una sull'altra — come le lame di una cesoia, da cui il nome. È la sollecitazione tipica degli **elementi di giunzione**: perni, bulloni, rivetti, spine.

In prima approssimazione si assume che la tensione tangenziale sia uniforme sulla sezione resistente:

$$\tau = \frac{T}{A} \leq \tau_{am} \quad \text{con} \quad \tau_{am} = \frac{\sigma_{am}}{\sqrt{3}} \simeq 0,58 \sigma_{am}. \quad (6.23)$$

L'ipotesi di uniformità è grossolana — la sezione successiva mostrerà che non lo è mai davvero — ma per gli elementi di giunzione, corti e tozzi, è la prassi consolidata di calcolo, e i valori ammissibili dei manuali sono tarati su di essa.

Il punto delicato non è la formula: è *contare le sezioni resistenti*. In un collegamento a semplice sovrapposizione il perno lavora su **una** sezione; in un collegamento a *forchetta* (o a doppio coprighiunto), dove l'occhio centrale è abbracciato da due guance, il perno è cimentato su **due** sezioni, e l'area resistente raddoppia:

$$A = n \frac{\pi \phi^2}{4}, \quad n = 1 \text{ (taglio singolo)}, \quad n = 2 \text{ (taglio doppio)}. \quad (6.24)$$

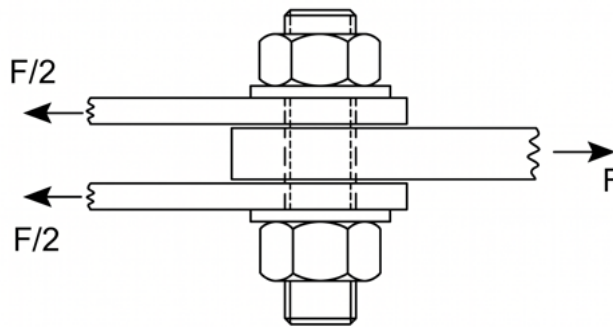


Figura 6.7: Il collegamento a forchetta: il bullone lavora su due sezioni.

## Esempio 6.2 — Il bullone della forchetta

Un collegamento a forchetta trasmette una trazione  $T = 10 \text{ kN}$  attraverso un bullone in acciaio di diametro  $\phi = 10 \text{ mm}$ , con  $\tau_{am} = 100 \text{ N/mm}^2$ . Verificare il bullone; dire poi che cosa accadrebbe con un collegamento a semplice sovrapposizione.

### Soluzione

Nella forchetta il bullone lavora a taglio doppio:

$$A = 2 \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 157,1 \text{ mm}^2, \quad \tau = \frac{10000}{157,1} = 63,7 \text{ N/mm}^2 < 100 \text{ N/mm}^2 : \quad (6.25)$$

verificato, con un buon margine. A semplice sovrapposizione l'area si dimezza e la tensione raddoppia:

$$\tau = \frac{10000}{78,54} = 127,3 \text{ N/mm}^2 > 100 \text{ N/mm}^2 : \quad (6.26)$$

lo *stesso* bullone, con lo *stesso* carico, non è più verificato. Per il taglio singolo la formula di progetto  $A \geq T/\tau_{am} = 100 \text{ mm}^2$  dà  $\phi_{\min} = 11,3 \text{ mm}$ : si adotta il diametro commerciale  $\phi = 12 \text{ mm}$ , con cui  $\tau = 88,4 \text{ N/mm}^2$  e un margine documentato del 13%.

**Attenzione – Il taglio puro non esiste (quasi) mai**

Fra le due forze che cimentano il perno c'è sempre una distanza  $d$ , per quanto piccola: gli spessori delle lamiere collegate. Le due forze formano quindi una coppia  $T d$  che flette il perno, oltre a tagliarlo. Se le lamiere sono sottili e il gioco è modesto, il momento è trascurabile e il calcolo a taglio semplice basta; se il perno è lungo e le forze lontane, la flessione va verificata a parte. È anche uno dei motivi per cui il taglio doppio è costruttivamente migliore del singolo: la simmetria della forchetta elimina la tendenza delle lamiere a ruotare e ripartisce il carico.

**E i rivetti?**

Una fila di rivetti che unisce due lamiere lavora esattamente così: il carico  $T$  si divide (in prima approssimazione in parti uguali) fra i rivetti, e ognuno si verifica a taglio con la (6.23). È il calcolo che sta dietro il passo e il diametro delle rivettature dei pannelli — e il motivo per cui, nel capitolo sui materiali, le sigle dei rivetti dichiarano per prima cosa la lega, cioè la  $\tau$  ammissibile.

**Esempio 6.3 — Quanti rivetti servono a questa giunzione**

Una giunzione a sovrapposizione fra due lamiere deve trasmettere  $T = 12 \text{ kN}$ . Si impiegano rivetti in lega leggera di diametro  $\phi = 4 \text{ mm}$  con  $\tau_{am} = 100 \text{ N/mm}^2$ . Determinare il numero di rivetti necessario.

**Ipotesi**

Il carico si ripartisce in parti uguali fra i rivetti (lamiere rigide nel proprio piano, giunzione simmetrica); ogni rivetto lavora a taglio singolo, essendo la giunzione a semplice sovrapposizione.

**Passo 1 — La capacità di un rivetto**

Area resistente e forza ammissibile del singolo rivetto:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} = 12,57 \text{ mm}^2, \quad T_1 = \tau_{am} A_1 = 100 \cdot 12,57 = 1.257 \text{ N}. \quad (6.27)$$

**Passo 2 — Il numero di rivetti**

$$n \geq \frac{T}{T_1} = \frac{12000}{1257} = 9,55 \implies n = 10 \text{ rivetti}, \quad (6.28)$$

tipicamente disposti su due file da cinque per contenere la lunghezza della giunzione. Il controllo finale, sempre:

$$\tau = \frac{T}{n A_1} = \frac{12000}{10 \cdot 12,57} = 95,5 \text{ N/mm}^2 \leq 100 \text{ N/mm}^2. \quad (6.29)$$

**Attenzione – Che cosa questo calcolo non vede**

Il conto a taglio è necessario ma non racconta tutta la storia della giunzione: il rivetto preme sul bordo del proprio foro (*rifollamento*), la lamiera è indebolita dai fori nella sezione che li contiene, e la ripartizione in parti uguali è tanto più vera quanto più la giunzione è corta — nelle file lunghe i rivetti d'estremità lavorano più di quelli centrali. Al livello del nostro corso il dimensionamento

a taglio è il passo fondamentale; le altre verifiche spiegano però le regole costruttive dei manuali su passo minimo e distanza dai bordi.

## 6.5 La formula di Jourawsky

Una prima stima grossolana della tensione tangenziale da taglio è la media

$$\bar{\tau} = \frac{T}{A}. \quad (6.30)$$

Ma la distribuzione reale non è uniforme, e per capire come è fatta davvero bisogna prima scoprire un fatto sorprendente: nella trave inflessa il taglio genera tensioni tangenziali anche su piani *paralleli* all'asse.

### 6.5.1 Da dove viene la formula: lo scorrimento impedito

#### Analogia pratica – L'esperimento del mazzo di tavole

Impilate alcune tavole libere una sull'altra, incastratele a un estremo e caricate l'estremo libero: la pila flette e le tavole *scorrono* l'una sull'altra — i loro bordi, allineati a riposo, formano una scaletta. Adesso ripetete con le tavole incollate (o imbullonate): lo scorrimento è impedito, la pila flette molto meno, e la colla lavora. Le tensioni tangenziali che la colla sviluppa per impedire lo scorrimento sono esattamente le  $\tau$  longitudinali che, in una trave monolitica, il materiale sviluppa da sé, quota per quota. La trave monolitica è infinitamente più rigida della pila libera *perché* paga questo prezzo interno.

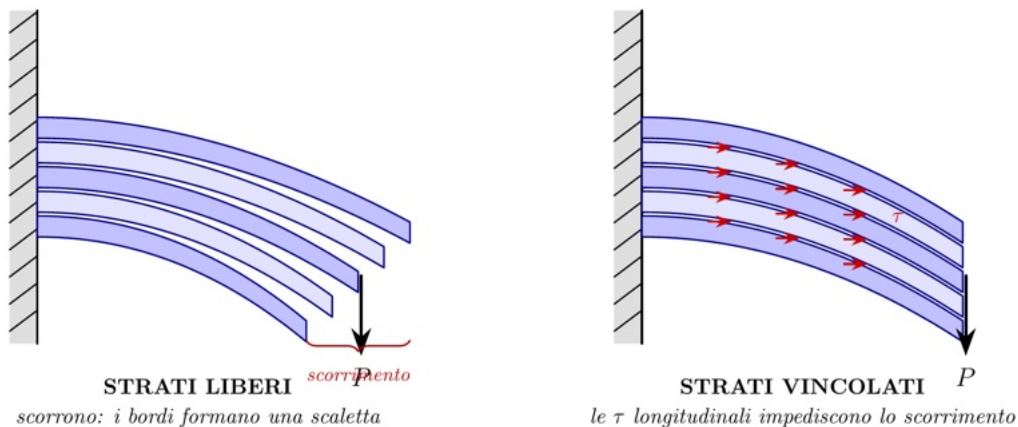


Figura 6.8: Lo scorrimento fra gli strati e le tensioni tangenziali longitudinali che lo impediscono.

Il ragionamento si fa quantitativo con un bilancio di equilibrio. Dove c'è taglio, il momento flettente varia da sezione a sezione ( $T = dM_f/dx$ , come sappiamo dai diagrammi). Si isoli allora, fra due sezioni distanti  $dx$ , la porzione di trave "al di sopra" di una corda di larghezza  $b$  posta a quota  $y$ . Sulle due facce

verticali di questa porzione agiscono le  $\sigma$  di Navier, ma con intensità *diverse*, perché i momenti sono diversi: la risultante assiale non è nulla e vale, usando Navier e la definizione (6.16) di momento statico  $S_z^*$  dell'area isolata,

$$dF = \frac{dM_f}{J_z} S_z^* = \frac{T S_z^*}{J_z} dx. \quad (6.31)$$

Qualcosa deve equilibrare questo sbilancio: è la tensione tangenziale longitudinale  $\tau$  che agisce sulla faccia orizzontale di area  $b dx$  che separa la porzione dal resto della trave. Uguagliando  $\tau b dx = dF$  si ottiene la **formula di Jourawsky** in forma generale:

$$\tau(y) = \frac{T S_z^*(y)}{J_z b(y)} \quad (6.32)$$

dove  $S_z^*(y)$  è il momento statico, rispetto all'asse neutro, della sola parte di sezione oltre la quota  $y$ , e  $b(y)$  la larghezza della sezione a quella quota.

### Teoria – La reciprocità delle tensioni tangenziali

La (6.32) è nata su un piano *orizzontale*; ma l'equilibrio alla rotazione di un cubetto elementare (si riguardi la figura del cubetto nel capitolo sulle tensioni) impone che su due facce ortogonali le componenti di  $\tau$  dirette verso lo spigolo comune siano uguali in modulo:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (6.33)$$

Se così non fosse, il cubetto — che ha braccia infinitesime uguali — ruoterebbe su sé stesso con accelerazione infinita. Dunque la  $\tau$  longitudinale calcolata con Jourawsky è *anche* la  $\tau$  che agisce nel piano della sezione, alla stessa quota: una formula sola, due tensioni. È la reciprocità, inoltre, a garantirci che  $\tau = 0$  sulle fibre estreme: la superficie superiore e inferiore della trave è scarica, quindi la tangenziale nel piano di sezione deve annullarsi lì accanto.

Applichiamo la (6.32) al rettangolo  $b \times h$ . Il momento statico dell'area sopra la quota  $y$  vale

$$S_z^*(y) = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right], \quad (6.34)$$

(area della striscia per la distanza del suo baricentro), e con  $J_z = bh^3/12$ :

$$\tau(y) = \frac{T}{2J_z} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] : \quad (6.35)$$

una **parabola**, nulla per  $y = \pm h/2$  e massima sull'asse neutro, dove vale

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2 \frac{bh^3}{12}} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh}. \quad (6.36)$$

La teoria di Jourawsky conferma dunque l'intuizione e la precisa:  $\tau$  è nulla sulle fibre estreme (dove non c'è materiale oltre da "trattenere") e massima sull'asse neutro. Per le sezioni elementari:

$$\tau_{\max}^{\text{rett}} = \frac{3}{2} \frac{T}{A}, \quad \tau_{\max}^{\text{circ}} = \frac{4}{3} \frac{T}{A}. \quad (6.37)$$

La verifica a taglio confronta  $\tau_{\max}$  con  $\tau_{am} = \sigma_{am}/\sqrt{3}$ .

**Una simmetria elegante**

Flessione e taglio si dividono la sezione come due inquilini che non si pestano i piedi: la  $\sigma$  di Navier è massima sulle fibre estreme e nulla sull'asse neutro; la  $\tau$  di Jourawsky è massima sull'asse neutro e nulla sulle fibre estreme. Tenetelo a mente: fra poco, nella verifica combinata, questa complementarità avrà conseguenze pratiche.

**Esempio 6.4 — La formula generale al lavoro: chi porta il taglio nel doppio T**

Un doppio T ha ingombro  $B = 60$  mm,  $H = 100$  mm, solette spesse  $t = 8$  mm e anima spessa  $a = 4$  mm; la sezione porta un taglio  $T = 20$  kN. Calcolare con la (6.32) la tensione tangenziale all'attacco soletta–anima e sull'asse neutro, e confrontarla con la stima rapida  $T/(a b)$  usata nella pratica del longherone.

**Passo 1 — Il momento d'inerzia**

Con la formula per differenza del prontuario ( $b = B - a = 56$  mm,  $h = H - 2t = 84$  mm):

$$J_z = \frac{B H^3 - b h^3}{12} = \frac{60 \cdot 100^3 - 56 \cdot 84^3}{12} = 2,234 \times 10^6 \text{ mm}^4. \quad (6.38)$$

**Passo 2 — La  $\tau$  all'attacco soletta–anima**

Il momento statico dell'area “oltre il taglio” è quello della sola soletta (area  $B t$ , baricentro a  $(H - t)/2 = 46$  mm dall'asse neutro):

$$S_{sol}^* = B t \frac{H - t}{2} = 60 \cdot 8 \cdot 46 = 22.080 \text{ mm}^3, \quad (6.39)$$

e nella formula di Jourawsky la larghezza da usare, *appena sotto* l'attacco, è quella dell'anima ( $b = a = 4$  mm):

$$\tau_{att} = \frac{T S_{sol}^*}{J_z a} = \frac{20000 \cdot 22080}{2,234 \times 10^6 \cdot 4} = 49,4 \text{ N/mm}^2. \quad (6.40)$$

La tensione, dunque, *non* parte da zero all'inizio dell'anima: la soletta le consegna in blocco tutto il proprio momento statico.

**Passo 3 — La  $\tau$  massima, sull'asse neutro**

Al momento statico della soletta si aggiunge quello della mezza anima (area  $a b/2$ , baricentro a  $b/4$ ):

$$S_{max}^* = S_{sol}^* + a \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{4} = 22080 + 4 \cdot 42 \cdot 21 = 25.608 \text{ mm}^3, \quad (6.41)$$

$$\tau_{max} = \frac{T S_{max}^*}{J_z a} = \frac{20000 \cdot 25608}{2,234 \times 10^6 \cdot 4} = 57,3 \text{ N/mm}^2. \quad (6.42)$$

Dall'attacco all'asse neutro la tensione cresce dunque solo da 49,4 a 57,3 N/mm<sup>2</sup>: nell'anima la  $\tau$  è *quasi uniforme*, perché il grosso del momento statico lo mette la soletta, uguale per ogni quota.

**Passo 4 — Il confronto con le stime rapide**

$$\frac{T}{ab} = \frac{20000}{4 \cdot 84} = 59,5 \text{ N/mm}^2 \quad (+3,9\% \text{ su } \tau_{\max}), \quad (6.43)$$

$$\frac{T}{A_{\text{tot}}} = \frac{20000}{1296} = 15,4 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{del tutto fuori strada}). \quad (6.44)$$

La stima “tutto il taglio all’anima”,  $T/(ab)$ , sbaglia di meno del 4% — e per eccesso, quindi a favore di sicurezza; la media sull’intera sezione sottostima invece la realtà di quasi quattro volte. Integrando la distribuzione di  $\tau$  sulla sola anima si trova che essa porta il **92%** del taglio totale: le solette, larghe e lontane, sono attrezzate per la flessione e quasi inutili al taglio.

**Risultato – La divisione del lavoro, ora con i numeri**

Questo esercizio è la giustificazione quantitativa del modello che useremo per tutto il corso: *le solette portano la flessione, l’anima porta il taglio* — con  $\tau$  praticamente uniforme, ben stimata da  $T/(ab)$  e a favore di sicurezza. Quando, nel semiguscio ideale, assumeremo pannelli che portano solo flussi di taglio e correnti che portano solo sforzi normali, non staremo inventando un’ipotesi comoda: staremo promuovendo a modello ciò che Jourawsky ha appena dimostrato essere il comportamento reale della sezione.

**6.6 Un esempio completo: la mensola a doppio T****Esempio 6.5 — Verifica completa di una trave a doppio T con carico distribuito**

Una trave a mensola lunga  $\ell = 12.000 \text{ mm}$  porta un carico distribuito  $p = 10 \text{ N/mm}$  su tutta la luce. La sezione è un doppio T con anima di spessore  $a_1 = 5 \text{ mm}$  e altezza  $b_1 = 800 \text{ mm}$ , e solette larghe  $b_3 = 400 \text{ mm}$  e spesse  $a_3 = 10 \text{ mm}$ . Materiale: alluminio 2024,  $\sigma_s = 300 \text{ N/mm}^2$ ,  $K = 1,5$ . Verificare a flessione, a taglio e a sollecitazione combinata.

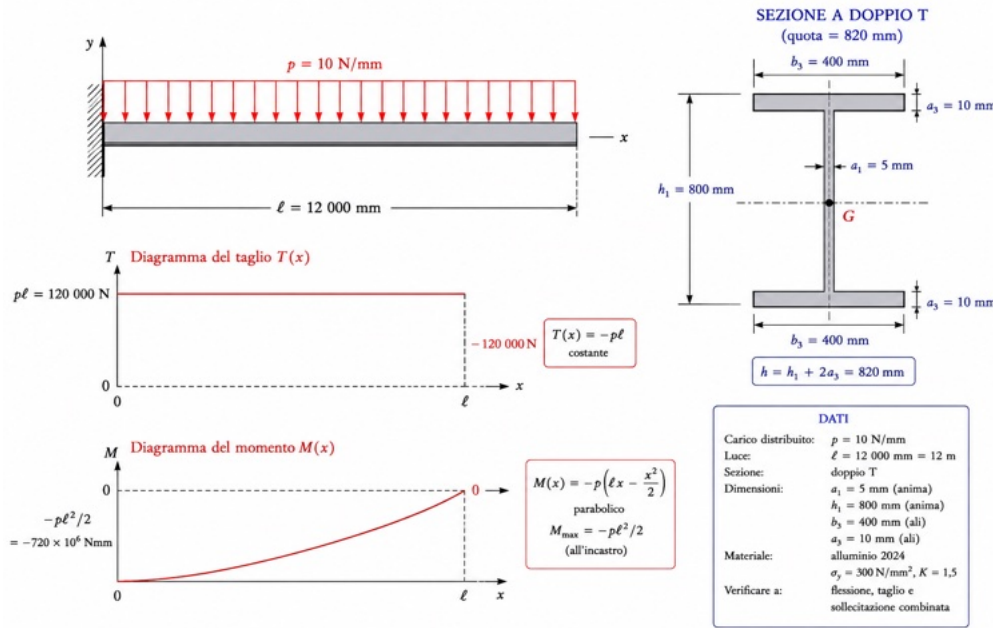


Figura 6.9: La trave dell'esempio: luce di dodici metri, sezione a doppio T alta 820 mm.

### Sollecitazioni massime

All'incastro:

$$T = p\ell = 10 \cdot 12000 = 120.000 \text{ N}, \quad M_{\max} = \frac{p\ell^2}{2} = 7,2 \times 10^8 \text{ N mm}. \quad (6.45)$$

### Momento d'inerzia della sezione

Si scompone in tre rettangoli. Ogni soletta ( $400 \times 10$ , area  $4.000 \text{ mm}^2$ , baricentro a  $b = 405 \text{ mm}$  dall'asse):

$$J_{z, \text{sol}} = \frac{400 \cdot 10^3}{12} + 4000 \cdot 405^2 = 6,561 \times 10^8 \text{ mm}^4; \quad (6.46)$$

l'anima ( $5 \times 800$ , baricentrica):

$$J_{z, \text{an}} = \frac{5 \cdot 800^3}{12} = 2,133 \times 10^8 \text{ mm}^4. \quad (6.47)$$

In totale

$$J_z = 2 \cdot 6,561 \times 10^8 + 2,133 \times 10^8 = 1,526 \times 10^9 \text{ mm}^4. \quad (6.48)$$

Si osservi la contabilità: il momento *proprio* delle solette ( $400 \cdot 10^3 / 12 = 33.333 \text{ mm}^4$ ) è del tutto trascurabile rispetto al loro trasporto: le solette contano quasi solo per l' $Ab^2$ , cioè per quanto sono *lontane* — ancora il quadrato della distanza.

### Verifica a flessione

Con  $y_{\max} = 400 + 10 = 410 \text{ mm}$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J_z} y_{\max} = \frac{7,2 \times 10^8}{1,526 \times 10^9} \cdot 410 = 193,5 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{am} = \frac{300}{1,5} = 200 \text{ N/mm}^2 : \quad (6.49)$$

verificata (di misura).

### Verifica a taglio

Si assume, a favore di semplicità, che il taglio sia assorbito dalla sola anima ( $A = a_1 b_1 = 4.000 \text{ mm}^2$ ), trattata come rettangolo:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{T}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{120000}{4000} = 45 \text{ N/mm}^2 < \tau_{am} = \frac{300}{\sqrt{3} \cdot 1,5} = 115,5 \text{ N/mm}^2 : \quad (6.50)$$

verificata con ampio margine.

### Verifica combinata: il colpo di scena

Le due verifiche separate passano. Ma flessione e taglio agiscono *insieme*: la tensione ideale di Von Mises vale

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3 \tau_{\max}^2} = \sqrt{193,5^2 + 3 \cdot 45^2} = 208,6 \text{ N/mm}^2 > 200 \text{ N/mm}^2 : \quad (6.51)$$

**la verifica combinata non è soddisfatta.** Due verifiche promosse, la terza bocciata: è la lezione più importante dell'esempio. Nelle strutture reali non basta che ogni sollecitazione, presa da sola, sia sopportabile: conta l'*interazione*.

#### ► Approfondimento: Quanto è severa questa bocciatura?

A rigore, la combinazione appena eseguita è *cautelativa*: abbiamo sommato con Von Mises la  $\sigma$  massima — che vive sulle fibre estreme, dove  $\tau \approx 0$  — con la  $\tau$  massima, che vive sull'asse neutro, dove  $\sigma = 0$ . I due massimi *non coesistono nello stesso punto*: la verifica puntuale rigorosa andrebbe fatta dove entrambe sono contemporaneamente significative, tipicamente al raccordo fra anima e soletta, e lì  $\sigma_{id}$  risulterebbe minore. La pratica di combinare i massimi resta però la regola nei calcoli di primo dimensionamento, proprio perché sbaglia dalla parte giusta: se la sezione passa il test severo, passa certamente quello raffinato. Qui non lo passa per il 4%: la risposta da progettisti è aumentare leggermente le solette (o dichiarare la verifica puntuale al raccordo) — e la risposta da studenti, all'esame, è *scrivere esattamente questa discussione*.

#### Dove siamo arrivati, dove andiamo

La cassetta degli attrezzi è completa: diagrammi di  $T$  e  $M_f$ , Navier con i momenti d'inerzia e il trasporto, Jourawsky, e la verifica combinata di Von Mises con la sua morale — le sollecitazioni non vanno mai giudicate una alla volta. Prima di applicare tutto questo a un'ala vera, però, dobbiamo occuparci di ciò di cui le strutture sono *fatte*: materiali, lavorazioni e trattamenti, la fatica che li insidia e i compositi che stanno cambiando le regole del gioco. È la seconda parte del corso.

## **Parte II**

# **Materiali e tecnologie aeronautiche**



## Capitolo 7

# Materiali e tecnologie aeronautiche

### Bussola concettuale

**Studiamo questo perché.** tutte le formule dei capitoli precedenti finiscono in un confronto con  $\sigma_s$  o  $\sigma_R$ : numeri che appartengono ai *materiali*. Ma un materiale non è solo una tensione ammissibile: è un insieme di attitudini — a essere fuso, piegato, saldato, trattato, chiodato — e di debolezze, prima fra tutte la fatica. Il progettista che ignora come si costruisce ciò che calcola progetta male.

**Da dove veniamo.** dalla prova di trazione e dalle costanti elastiche del Capitolo 3.

**Dove andiamo.** i materiali scelti qui entreranno nelle esercitazioni finali con i loro valori di  $\sigma_s$ ,  $E$ ,  $G$ ; e la fatica tornerà come criterio silenzioso dietro molte prescrizioni costruttive (raggi di raccordo, finiture, rivetti).

**Al termine saprai.** classificare le lavorazioni fondamentali e le proprietà tecnologiche; spiegare tempra, rinvenimento e bonifica; leggere una curva di Wöhler e raccontare i tre stadi del danneggiamento a fatica; descrivere i materiali compositi e il loro impiego sul Boeing 787; orientarti fra acciai, leghe di alluminio (con le sigle dei rivetti) e titanio.

## 7.1 Le lavorazioni fondamentali

Le lavorazioni dei materiali si classificano in quattro grandi famiglie.

**Fonderia.** Sfrutta la proprietà dei materiali di essere fusi e colati in uno stampo; il prodotto si chiama *getto*. È adatta ai materiali con buona *fusibilità*: ghise, bronzi, ottoni, leghe leggere.

**Deformazione plastica.** Sfrutta la capacità di alcuni materiali di subire deformazioni permanenti sotto sollecitazione: si modifica la forma senza modificare la massa. Esempi: stampaggio, piegatura, trafilatura, laminazione. Si distingue la lavorazione *a freddo* da quella *a caldo*, convenzionalmente sopra circa i 2/3 della temperatura di fusione.

**Asportazione di truciolo.** Impiega le macchine utensili — trapano, tornio, fresatrice — per rimuovere materiale in piccoli frammenti (*trucioli*) fino alla forma finale.

**Saldatura.** Unisce due pezzi mediante fusione localizzata, con o senza materiale d'apporto.

#### Analogia pratica – Le quattro famiglie su un solo aeroplano

Su un velivolo leggero convivono tutte e quattro: il carter del motore è un getto di fonderia; le centine e i pannelli del rivestimento sono lamiere piegate e stampate; gli attacchi alari e i perni sono ricavati per fresatura e tornitura dal pieno; il castello motore in tubi d'acciaio è saldato. Riconoscere “come è fatto” un pezzo è il primo passo per capirne pregi, limiti e costi.

## 7.2 Le proprietà tecnologiche

Le proprietà tecnologiche indicano l'attitudine di un materiale a subire determinate lavorazioni.

**Fusibilità** attitudine a essere fuso e colato in uno stampo. Ottima per ghise, bronzi, ottoni e leghe leggere; scarsa per l'acciaio.

**Saldabilità** attitudine a unirsi a un altro pezzo mediante fusione localizzata. Curiosamente, saldabilità e fusibilità sono spesso proprietà *opposte*: la ghisa, fusibilissima, si salda male; l'acciaio, poco fusibile, si salda bene.

**Lavorabilità** attitudine all'asportazione di truciolo (tornitura, fresatura, foratura).

**Malleabilità** attitudine a essere ridotto in lamiere (laminazione, con laminatoi o presse).

**Duttilità** attitudine a essere ridotto in fili (trafilatura, attraverso un foro calibrato).

**Estrudibilità** attitudine ad assumere forme assegnate per estrusione, cioè per passaggio forzato attraverso un'apertura sagomata — è così che nascono i profilati a L, a T e a omega dei correnti.

**Temperabilità** attitudine di un metallo a subire il trattamento termico di tempra.

La ghisa, per esempio, è non malleabile, non duttile e non estrudibile: si lavora praticamente solo di fonderia e di truciolo.

## 7.3 I trattamenti termici

La **tempra** è un ciclo termico di riscaldamento, permanenza in temperatura e *raffreddamento rapido*: modifica la struttura cristallina della lega aumentando la durezza ma diminuendo la resilienza — il materiale diventa più duro e più fragile. È tipica degli acciai, tanto più temprabili quanto più ricchi di elementi di lega.

Alla tempra segue di norma il **rinvenimento**: un ciclo a temperatura più bassa con raffreddamento meno brusco, che restituisce resilienza e *tenacità* — la capacità di assorbire energia deformandosi plasticamente prima di rompersi. L'accoppiata tempra più rinvenimento si chiama **bonifica**, ed è il trattamento

standard degli acciai strutturali aeronautici. **Ricottura e normalizzazione** sono invece cicli che riportano il materiale verso una struttura cristallina più regolare e uniforme, tipicamente per cancellare gli effetti di lavorazioni precedenti.

#### Un'immagine per ricordare

La tempra “congela” il materiale in una struttura tesa e nervosa: durissima, ma permalosa agli urti. Il rinvenimento è la seduta di decompressione che le toglie il nervosismo conservandone gran parte della forza. La bonifica è il pacchetto completo.

## 7.4 Le proprietà meccaniche

**Resistenza meccanica** capacità di sopportare sollecitazioni statiche di trazione, compressione, flessione, torsione e taglio: è ciò che la prova di trazione misura.

**Resilienza** capacità di resistere a forze dinamiche di breve durata e forte intensità — gli urti. Si misura con il *pendolo di Charpy*, che spezza un provino intagliato e conta l'energia assorbita.

**Durezza** capacità di resistere a forze concentrate su zone molto piccole. Si misura con *durometri* a penetratore normalizzato: la durezza è inversamente proporzionale alla superficie dell'impronta. A seconda del penetratore e della procedura si parla di durezza *Brinell* (sfera), *Vickers* (piramide di diamante) o *Rockwell*.

**Resistenza all'usura** capacità di resistere all'attrito.

**Resistenza a fatica** capacità di resistere a forze applicate in modo ripetitivo, che possono provocare la rottura anche per valori *inferiori* al carico di rottura e perfino di snervamento. È talmente importante da meritare la sezione che segue.

## 7.5 La fatica dei materiali

### 7.5.1 La scoperta: gli assali che non dovevano rompersi

I primi studi sistematici sulla fatica nacquero alla fine dell'Ottocento da un mistero ferroviario: assali progettati per carichi statici ben superiori a quelli di esercizio si rompevano ugualmente, di colpo, dopo mesi di servizio. L'ingegnere tedesco August Wöhler intuì che il colpevole non era l'*intensità* del carico ma la sua *natura ciclica*: ogni giro di ruota, le fibre dell'assale passavano da tese a compresse e ritorno. Wöhler ricostruì in laboratorio la sollecitazione ciclica e mise in relazione l'ampiezza della sollecitazione con il numero di cicli sopportati prima della rottura: nacquero i **diagrammi di Wöhler**, o curve  $S-N$ , ancora oggi lo strumento fondamentale della progettazione a fatica.

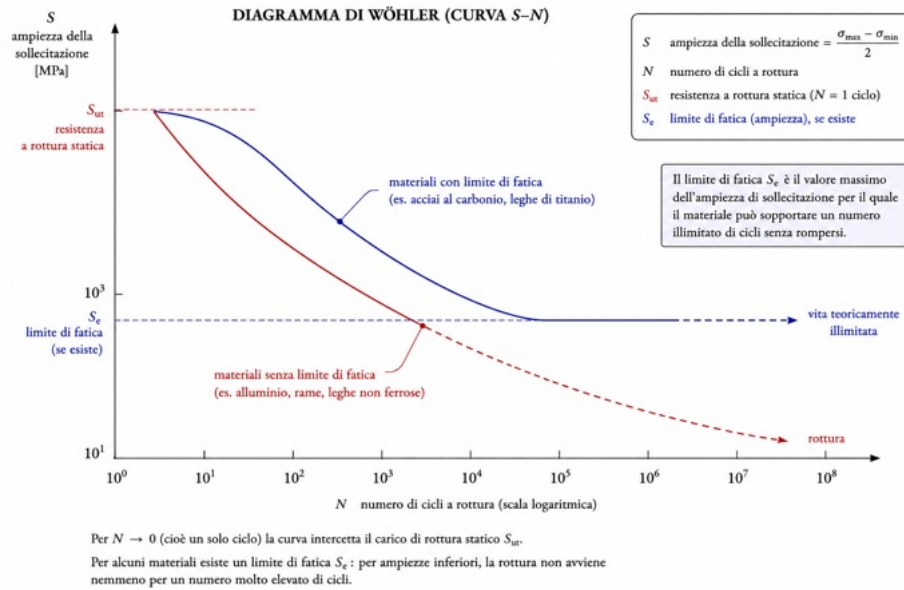


Figura 7.1: La curva di Wohler: per  $N \rightarrow 0$  la curva intercetta il carico di rottura statico; per alcuni materiali esiste un limite di fatica.

Per alcuni materiali (tipicamente gli acciai) la curva presenta un **limite di fatica**: un valore di sforzo al di sotto del quale il materiale non si rompe per fatica nemmeno per un numero di cicli molto elevato. Le leghe di alluminio, che sono l'ossatura dell'aeronautica, in generale *non* hanno un vero limite di fatica: prima o poi, se i cicli continuano, cedono. È il motivo per cui gli aeroplani hanno una *vita a fatica* certificata e ispezioni programmate.

## 7.5.2 Le grandezze del ciclo

Per confrontare prove e componenti serve un linguaggio comune che descriva la sollecitazione ciclica. Detta  $\sigma_{\max}$  la tensione massima del ciclo e  $\sigma_{\min}$  la minima, si definiscono

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}, \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}, \quad R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}, \quad (7.1)$$

rispettivamente **tensione media**, **ampiezza alternata** e **rapporto di ciclo**; il **periodo**  $T$  è la durata di un ciclo completo. Tre casi hanno un nome proprio: il ciclo *alternato simmetrico* ( $\sigma_m = 0$ ,  $R = -1$ : l'assale ferroviario di Wohler, dove ogni fibra passa da tesa a compressa a ogni giro), il ciclo *pulsante dallo zero* ( $\sigma_{\min} = 0$ ,  $R = 0$ : la fusoliera pressurizzata, un ciclo per ogni volo) e il carico *statico* ( $R = 1$ ). A parità di  $\sigma_a$ , una tensione media di trazione *peggiora* la vita a fatica — tiene le microcricche aperte — mentre una media di compressione la *migliora*: è il principio su cui lavora la pallinatura che incontreremo fra poco.

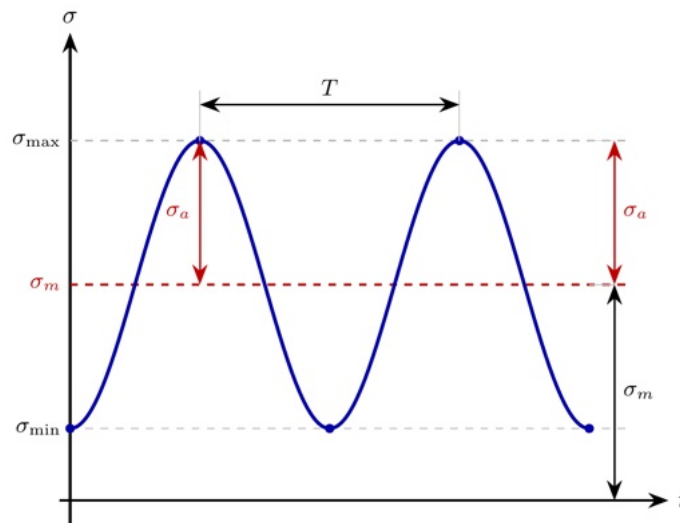


Figura 7.2: Le grandezze che descrivono un ciclo di fatica.

### Esempio 7.1 — Classificare il ciclo di una fusoliera pressurizzata

In un punto del rivestimento di una fusoliera, la pressurizzazione in quota porta la tensione a  $\sigma_{\max} = 110 \text{ N/mm}^2$ ; al suolo, a cabina depressurizzata, la tensione è  $\sigma_{\min} \approx 0$ . Caratterizzare il ciclo.

#### Soluzione

Dalle definizioni (7.1):

$$\sigma_m = \frac{110 + 0}{2} = 55 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_a = \frac{110 - 0}{2} = 55 \text{ N/mm}^2, \quad R = \frac{0}{110} = 0 : \quad (7.2)$$

un ciclo **pulsante dallo zero**, con un ciclo completo *per ogni volo* — il periodo non si misura in secondi ma in tratte. Si noti la combinazione insidiosa: la media è *tutta di trazione* ( $\sigma_m = \sigma_a$ ), cioè la condizione che tiene aperte le microcricche e accorcia la vita; e la tensione massima,  $110 \text{ N/mm}^2$ , è lontanissima dallo snervamento — la struttura statica è tranquilla, quella a fatica no. È esattamente il ciclo che condannò il Comet: non l'intensità del carico, ma la sua paziente ripetizione, decollo dopo decollo.

### 7.5.3 I tre stadi del danneggiamento

1. **Innesco della cricca:** quasi sempre sulla superficie del pezzo, in corrispondenza di irregolarità, microcricche, microintagli o corrosione.
2. **Propagazione:** la cricca cresce, ciclo dopo ciclo, in modo lento e silenzioso.
3. **Frattura finale:** raggiunta una dimensione critica, la sezione resistente residua non basta più e il cedimento è improvviso.

Poiché l'innesco è quasi sempre superficiale, la **finitura superficiale** è decisiva: ridurre la rugosità, eliminare i solchi degli utensili (rettifica, lappatura), limitare la corrosione. Conta anche la **forma**: variazioni brusche di sezione, fori, intagli, aperture e spigoli vivi concentrano le tensioni e diventano zone d'innesco. Al crescere della temperatura, infine, la resistenza a fatica di quasi tutti i materiali diminuisce.

Per *migliorare* la resistenza a fatica si ricorre alla **pallinatura** — un bombardamento di microsfere che comprime la superficie e tende a chiudere le microcricche — o a trattamenti superficiali come **carbocementazione** e **niturazione**, che induriscono la pelle del pezzo senza togliere resilienza al cuore.

Contano infine anche le **dimensioni**: a parità di materiale e di finitura, il pezzo grande resiste a fatica *meno* del provino piccolo, semplicemente perché offre più volume e più superficie in cui la statistica può piazzare un difetto d'innesco. È uno dei motivi per cui i limiti di fatica dei manuali, ricavati su provini normalizzati, vanno corretti con coefficienti riduttivi prima di applicarli al componente reale. Un cenno merita anche la **fatica termica**: cicli di temperatura ampi e ripetuti (un disco di turbina a ogni avviamento e spegnimento) inducono, per dilatazioni contrastate, sollecitazioni cicliche di bassa frequenza ma di grande ampiezza, con gli stessi meccanismi di danno.

#### Attenzione – La lezione più costosa della storia dell'aviazione

Nei primi anni Cinquanta il de Havilland Comet, primo jet di linea al mondo, perse in volo due esemplari a pochi mesi di distanza. Le indagini — condotte pressurizzando ciclicamente una fusoliera intera in una vasca d'acqua — trovarono il colpevole: cricche di fatica innescate agli angoli delle aperture della fusoliera pressurizzata, dove la concentrazione di tensioni era massima, e propagate ciclo dopo ciclo, un ciclo per ogni volo. Da allora i finestrini degli aerei hanno gli angoli raccordati, le aperture sono bordate di rinforzi, e la fatica è al centro della certificazione. Ogni oblò arrotondato che vedete è un monumento a quella lezione.

### 7.5.4 I criteri di progetto a fatica: safe-life, fail-safe, damage tolerance

Sapere *come* il materiale si danneggia non basta: bisogna decidere *quale filosofia di progetto* adottare perché il danneggiamento, inevitabile, non diventi mai una catastrofe. La storia dell'aeronautica — anche sulla spinta di lezioni come quella del Comet — ha prodotto tre criteri, che sono in sostanza tre risposte diverse alla stessa domanda: *che cosa facciamo delle cricche?*

**Safe-life (vita sicura): le cricche non devono fare in tempo.** Alla struttura si assegna una **vita operativa certificata** — in ore di volo, cicli o atterraggi — al termine della quale il componente viene *ritirato dal servizio*, che presenti danni visibili o no. La vita si dimostra con prove di fatica su strutture complete, protratte ben oltre la vita dichiarata (tipicamente un multiplo, per coprire la dispersione statistica del fenomeno). È il criterio giusto quando l'ispezione è impossibile o inaffidabile e il cedimento non ammette riserve: gambe di carrello, mozzi d'elica, componenti forgiati a percorso di carico unico. Il prezzo è duplice: coefficienti di sicurezza severi (quindi peso) e il ritiro di componenti magari ancora sani (quindi costi).

**Fail-safe (sicurezza al cedimento): una cricca può arrivare in fondo, la struttura no.** La struttura è concepita perché il cedimento completo di *un* elemento non comprometta la sicurezza del volo: **percorsi di carico multipli** — una struttura iperstatica, in cui gli elementi superstiti si ripartiscono il carico dell'elemento ceduto — oppure *barriere ferma-cricca* che arrestano la propagazione. La struttura danneggiata deve garantire una **resistenza residua** sufficiente a concludere la missione. Il criterio funziona

però a una condizione non negoziabile: l'elemento ceduto deve poter essere *trovato* e sostituito, quindi al fail-safe si accompagna sempre l'**ispezionabilità** e un programma di controlli — altrimenti i cedimenti si accumulano in silenzio, e la ridondanza si consuma senza che nessuno se ne accorga.

**Damage tolerance (tolleranza al danno): le cricche ci sono già, conviviamoci con metodo.** È l'evoluzione moderna, oggi al centro delle norme per i velivoli da trasporto: si *assume* che difetti esistano fin dall'origine (inclusioni, difetti di lavorazione, cricche di fatica o di corrosione) e si dimostra, con la meccanica della frattura, che la loro **propagazione è lenta e prevedibile**: abbastanza lenta perché una cricca, partita dalla più piccola dimensione rilevabile, non raggiunga la dimensione critica prima che *almeno una* ispezione programmata abbia l'occasione di scoprirla. Gli **intervalli di ispezione** non sono più una consuetudine manutentiva: sono un *risultato del calcolo*, parte integrante del progetto.

|               | Safe-life                                                  | Fail-safe                                     | Damage tolerance                              |
|---------------|------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| Idea guida    | vita certificata, poi ritiro                               | ridondanza dei percorsi di carico             | convivenza controllata con i difetti          |
| Le cricche... | non devono raggiungere dimensioni pericolose entro la vita | possono cedere un elemento: gli altri reggono | esistono per ipotesi: crescono lentamente     |
| Richiede      | prove di fatica estese, margini severi                     | ispezionabilità, resistenza residua           | meccanica della frattura, ispezioni calcolate |
| Tipico di     | carrelli, mozzi d'elica, pezzo unico                       | strutture alari e di fusoliera ridondanti     | velivoli da trasporto moderni                 |
| Limite        | peso e ritiro di pezzi sani                                | la ridondanza va sorvegliata                  | richiede controlli periodici affidabili       |

Tabella 7.1: I tre criteri di progetto a fatica a confronto.

### I tre criteri convivono sullo stesso aeroplano

Non sono tre epoche che si sostituiscono, ma tre strumenti che si scelgono *componente per componente*: lo stesso velivolo ha il carrello progettato safe-life, i cassoni alari fail-safe con più correnti e più longheroni, e il programma di ispezioni della fusoliera dettato dalla damage tolerance. Nelle parti poco accessibili — dove l'ispezione promessa dalla damage tolerance non si può mantenere — si torna, per coerenza, al safe-life. È una domanda classica della seconda parte dei temi d'esame: la risposta forte non elenca i tre criteri, li *assegna* ai componenti giusti spiegando il perché.

## 7.6 I materiali compositi

Un **materiale composito** è un materiale eterogeneo costituito da due o più materiali, con caratteristiche meccaniche complessivamente superiori a quelle dei singoli costituenti. Vi si distinguono una **matrice** — il componente a maggior percentuale volumica, che dà forma e protegge — e un **rinforzo** inglobato nella matrice, che porta il carico. La matrice può essere polimerica, metallica o ceramica; il rinforzo, fibre lunghe, filamenti, fili o polveri.

Il capostipite di larga diffusione è la *vetroresina* (matrice polimerica, fibre di vetro); in campo aeronautico dominano i **CFRP** (*Carbon Fiber Reinforced Polymer*), a fibra di carbonio. Fra le fibre ad alte prestazioni merita menzione il *Kevlar*, dall'elevatissima resistenza a trazione per unità di massa, impiegato in applicazioni protettive, sportive e aeronautiche.

### 7.6.1 La laminazione in autoclave

Le fibre di carbonio si acquistano tipicamente in rotoli di tessuto *preimpregnato* di resina termoindurente non ancora polimerizzata, il **prepreg**, da conservare al freddo. Il processo di laminazione:

1. si tagliano i pezzi di tessuto della forma desiderata;
2. si posizionano e impilano gli strati con le *orientazioni* delle fibre previste dal progetto;
3. si aggiungono strati dove servono più spessore o più resistenza;
4. si ricopre il manufatto con un sacco a vuoto;
5. si inserisce il tutto in **autoclave**, dove temperatura e pressione controllate completano la polimerizzazione.

#### Risultato – Il vantaggio che cambia il mestiere

Con i metalli si progetta la *struttura* dentro un materiale dato; con i compositi si progetta *anche il materiale*: orientando gli strati si mette la rigidità esattamente dove serve e nella direzione in cui serve. Un'ala in composito può essere rigidissima a flessione e deliberatamente più cedevole a torsione — o viceversa — semplicemente cambiando la sequenza di laminazione. È un grado di libertà che i capitoli sulla trave non contemplavano: il materiale smette di essere un dato e diventa una variabile di progetto.

### 7.6.2 I compositi in linea di volo: il Boeing 787

I compositi volano da decenni — già nel 1982 l'Airbus A310 adottò una deriva in fibra di carbonio — ma il salto di scala è il **Boeing 787 Dreamliner**: oltre il 50% del peso strutturale in composito, fusoliera compresa, con rinforzi in titanio. Sviluppato inizialmente come 7E7, uscì dalla fabbrica (roll-out) l'8 luglio 2007; quote importanti del programma produttivo sono realizzate in stabilimenti italiani, fra cui Grottaglie, Foggia, Pomigliano d'Arco e Venegono.

I numeri spiegano la scelta: le fibre di carbonio hanno densità circa  $1,9 \text{ kg/dm}^3$  contro i 2,7 dell'alluminio e i 7,8 dell'acciaio; il risparmio di peso strutturale rispetto a un equivalente in alluminio supera il 20%, con riduzione diretta dei consumi. In più i compositi non si corrodono come l'alluminio, con benefici di manutenzione. Un rovescio della medaglia c'è: non essendo conduttori, non proteggono dai fulmini — e negli strati esterni si annegano perciò fibre o reti metalliche, che realizzano l'equivalente di una gabbia di Faraday.

## 7.7 I materiali metallici

### 7.7.1 Ferro, acciaio e ghisa

Il ferro si estrae dai minerali ferrosi della crosta terrestre, che vengono frantumati, lavati e trattati nei processi siderurgici. La classificazione delle leghe ferro-carbonio è netta: **acciaio** se il carbonio è sotto il 2%, **ghisa** fra il 2% e il 6%. Il ferro puro, ottenibile per via elettrolitica, ha scarso impiego industriale.

### 7.7.2 Alluminio e leghe leggere

L'alluminio è diffusissimo nella crosta terrestre sotto forma di composti; il minerale di partenza è la **bauxite**, dal nome della località francese di Les Baux dove fu scoperta nel 1821. Allo stato puro ha caratteristiche meccaniche modeste, che però migliorano moltissimo alligandolo: nascono così le **leghe leggere**, la spina dorsale delle costruzioni aeronautiche.

| Serie | Elemento principale di lega |
|-------|-----------------------------|
| 2000  | Rame                        |
| 3000  | Manganese                   |
| 4000  | Silicio                     |
| 5000  | Magnesio                    |
| 7000  | Zinco                       |

Tabella 7.2: Le principali serie delle leghe di alluminio.

In aeronautica dominano la serie **2000** (le leghe *Avional*, come il 2024: ottimo comportamento a fatica, tipiche del ventre teso) e la serie **7000** (le leghe *Ergal*, come il 7075: massima resistenza statica, tipiche del dorso compresso).

I trattamenti termici dell'alluminio si indicano con la lettera T seguita da numeri: **T0** ricotto; **T3** temprato e incrudito a freddo; **T4** temprato e invecchiato naturalmente a temperatura ambiente; **T6** temprato e invecchiato artificialmente in forno.

### 7.7.3 I rivetti di alluminio

I rivetti per i pannelli aeronautici sono identificati da sigle che ne dichiarano lega e trattamento:

**AD** lega 2117: si usano così come sono, senza trattamento prima dell'impiego. Sono i rivetti “di tutti i giorni”.

**D** lega 2017: più resistenti ma più duri; richiedono trattamento termico prima dell'uso e vanno ribattuti entro un tempo limitato dall'estrazione dal congelatore.

**DD** lega 2024: resistenza ancora maggiore; se non usati subito vanno riposti a bassa temperatura e impiegati entro tempi più brevi.

**► Approfondimento: Perché i rivetti stanno in freezer**

Le leghe 2017 e 2024 appena temprate sono tenere e si ribattono bene; poi, *invecchiando naturalmente* a temperatura ambiente (è il meccanismo del trattamento T4), induriscono nel giro di ore — e un rivetto indurito si cricca sotto il martello. Il freddo rallenta drasticamente l'invecchiamento: il congelatore è, letteralmente, un freno chimico. Da qui il nome gergale di *icebox rivets* e la regola d'officina: estratti dal freezer, si usano entro il tempo prescritto o si buttano.

**7.7.4 Rame e titanio**

Il **rame** è fra i metalli più antichi usati dall'uomo; le sue leghe principali, l'*ottone* (rame–zinco) e il *bronzo* (rame–stagno), sono molto fusibili, adatte alla fonderia e resistenti all'usura — tipiche di boccole e bronzine.

Il **titanio** è costoso, ma unisce elevate caratteristiche meccaniche, ottima resistenza al calore e alla corrosione: trova impiego nelle costruzioni aeronautiche, missilistiche e aerospaziali (attacchi motore, zone calde, rinforzi della fusoliera del 787) e, per la sua biocompatibilità, perfino nelle protesi ossee.

**Dove siamo arrivati, dove andiamo**

Ora sappiamo di che cosa sono fatte le strutture e come si costruiscono: le leghe leggere con le loro sigle, gli acciai bonificati, i compositi laminati; e sappiamo di che cosa si ammalano — la fatica — e come si cura. Manca l'ultimo ingrediente della catena: *quali carichi* la struttura dovrà sopportare. La risposta non la dà la fantasia del progettista ma il regolamento, attraverso l'inviluppo di volo: il diagramma di manovra e di raffica, protagonista della terza parte.

## **Parte III**

### **Le strutture aeronautiche**



## Capitolo 8

# Strutture a guscio e a semiguscio

### Bussola concettuale

**Studiamo questo perché.** finora la struttura è stata una *trave*: un oggetto pieno, di cui calcoliamo tensioni e verifiche. Ma un'ala vera non è una trave piena — è un guscio sottile, curvo, irrigidito da un'orditura interna. Capire *come è fatta* davvero una struttura aeronautica, e quale modello la descrive, è ciò che dà senso a tutto il resto: al longherone che dimensioneremo, al rivestimento che porta il taglio, alle centine che tengono il profilo.

**Da dove veniamo.** dai materiali (Capitolo 7) e da tutte le sollecitazioni della Parte I: sforzo normale, taglio, flessione, torsione. Qui scopriamo *chi*, dentro l'ala, si prende ciascuna di queste sollecitazioni.

**Dove andiamo.** al dimensionamento delle strutture (Capitolo 10), dove il modello introdotto qui diventerà procedura di calcolo; poi all'involuppo di volo, che stabilirà i carichi, e alle esercitazioni, dove dimensioneremo il longherone: e vedremo che il “metodo del longherone” è semplicemente il caso più elementare del modello introdotto qui.

**Al termine saprai.** distinguere una struttura a guscio da una a semiguscio; spiegare il ruolo di rivestimento, correnti, centine e longheroni; enunciare le ipotesi del modello del semiguscio ideale e riconoscere perché, in aeronautica, il semiguscio ha quasi sempre la meglio.

### 8.1 Il problema: leggerezza e forma insieme

Una struttura aeronautica deve conciliare tre esigenze che tirano in direzioni diverse: essere **leggera** (ogni chilogrammo di struttura è un chilogrammo tolto al carico utile o al carburante), realizzare **forme aerodinamiche** precise (il profilo alare va mantenuto lungo tutta l'apertura, altrimenti l'aerodinamica peggiora), e possedere adeguate **rigidezza** e **robustezza**.

**Definizione – Rigidezza e robustezza**

Sono due qualità distinte, che conviene non confondere. La **rigidezza** è l'attitudine a contenere le *deformazioni* sotto i carichi di esercizio (un'ala rigida flette e si torce poco); la **robustezza** è l'attitudine a contenere le *sollecitazioni*, cioè a non raggiungere le condizioni critiche di resistenza (un'ala robusta non si rompe e non snerva). Come già visto per il tubo in torsione (Capitolo 5), una struttura può essere robusta ma poco rigida: resiste, ma si deforma troppo.

Per conciliare peso e forma, la soluzione è quasi obbligata: la **parete sottile**. Il materiale si dispone in un rivestimento (il *fasciame*) di spessore ridotto, che avvolge un volume e ne definisce la forma. Nascono così sezioni sottili, spesso variabili e prive di simmetria — la sezione di una semiala, quella di un piano di coda — lontanissime dai rettangoli e dai cerchi pieni dei primi capitoli.

## 8.2 Due famiglie: guscio e semiguscio

Nell'ambito delle strutture a parete sottile si distinguono, in prima approssimazione, due grandi famiglie.

**Definizione – Guscio e semiguscio**

Una **struttura a guscio** (*shell*) è costituita essenzialmente dal solo rivestimento esterno: una parete sottile che porta i carichi da sola, senza orditura interna. Una **struttura a semiguscio** è un guscio *rinforzato*: al fasciame si aggiunge un'orditura interna fatta di elementi *longitudinali* (i **correnti**, o *stringers*) e di elementi *trasversali* (le **centine** nell'ala, le **ordinate** nella fusoliera).

Gli elementi trasversali svolgono una duplice funzione: (i) mantengono la forma della sezione — le centine sono le “costole” che tengono il profilo aerodinamico lungo l'apertura — e (ii) irrigidiscono il rivestimento contro l'instabilità locale, alzando la tensione di compressione che i pannelli possono sopportare prima di imbozzarsi. In alcuni casi irrigidimenti e fasciame si ricavano da un unico blocco per lavorazione meccanica: sono i *pannelli integrali*, oggi diffusissimi.

**Analogia pratica – Il guscio dell'uovo e la cannuccia**

Due immagini chiariscono il comportamento — e il limite — del guscio puro. Un **uovo** resiste sorprendentemente bene a una pressione distribuita (stringerlo nel palmo, uniformemente, è difficilissimo), ma cede di colpo a un'azione *concentrata*: la punta di un coltello lo fora senza sforzo. Una **cannuccia** è difficile da schiacciare tirandola per il lungo (sforzo assiale membranale), ma si accartocchia con una minima pressione laterale. Il guscio sottile è un fuoriclasse degli sforzi distribuiti nel proprio piano (sforzi *membranali*) e un dilettante di fronte ai carichi trasversali o concentrati. Tenete a mente questa immagine: spiega da sola perché in aeronautica il guscio puro raramente basta.

## 8.3 Perché il “solo guscio” non basta

Un guscio puro è raramente conveniente, per due ordini di ragioni.

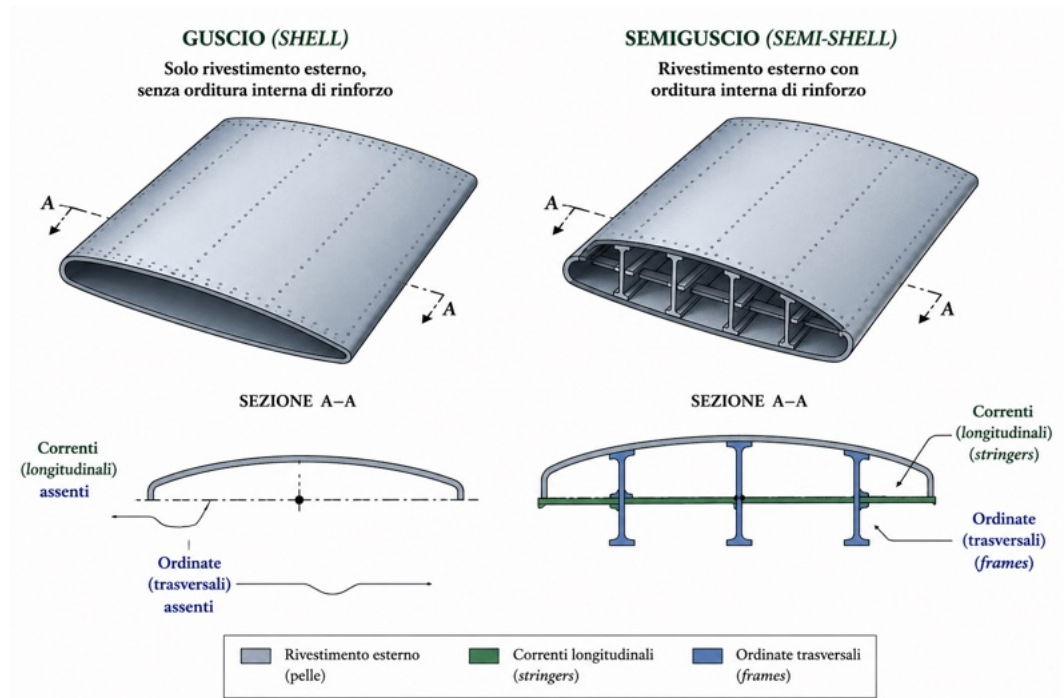


Figura 8.1: Guscio e semiguscio: la stessa pelle, con e senza orditura interna di rinforzo.

**L'instabilità dei pannelli.** La ricerca della leggerezza spinge lo spessore del fasciame verso valori minimi; ma un pannello sottile e compresso non cede per superamento della tensione di rottura — cede per **instabilità**, imbozzandosi, esattamente come il righello del Capitolo 4 sbandava sotto una forza modesta. Aumentare lo spessore per contrastare l'imbozzamento farebbe lievitare il peso, e ricorrere a materiali più resistenti non aiuta: l'instabilità dipende dal modulo elastico  $E$ , non dalla resistenza (lo abbiamo visto con Eulero). La via d'uscita è geometrica, non materiale: si irrigidisce la pelle con i correnti, che ne riducono la campata libera e ne alzano la tensione critica di imbozzamento. È esattamente la funzione degli *stringers*.

**I carichi concentrati.** Sulle strutture aeronautiche non agiscono solo carichi distribuiti (aerodinamici e di massa): agiscono anche **carichi concentrati** — le cerniere delle superfici mobili, gli attacchi degli ipersostentatori, i giunti fra parti smontabili, le gondole motore, i carrelli, i serbatoi esterni. La retta d'azione di queste forze quasi mai giace nel piano del fasciame; e un guscio non rinforzato, di fronte a una componente *normale* alla sua parete, è nella condizione della cannuccia premuta di lato. Non regge.

### Risultato – Il triedro che salva la struttura

Il semiguscio risolve il problema del carico concentrato distribuendolo su più elementi concorrenti. Nell'ala, per esempio, **rivestimento, anima del longherone e centina** si possono leggere come tre piani che si incontrano lungo spigoli comuni, formando localmente un *triedro*. Se la retta d'azione del carico concentrato passa per il vertice di questo triedro — o gli passa vicino — e la zona è opportunamente rinforzata, la forza non grava più come azione trasversale su un'unica parete debole: si ripartisce lungo tre superfici portanti, ciascuna sollecitata nel proprio piano, dove sa lavorare bene. La forza "trasversale" per il singolo pannello diventa una combinazione di azioni *membranali* per

il triedro. È il principio che rende un'ala capace di reggere il peso concentrato di un carrello o di un serbatoio senza sfondarsi.

Da qui la conclusione operativa, valida per la quasi totalità dei velivoli: **la struttura a semiguscio è la soluzione più comune in aeronautica**. Il guscio puro sopravvive in nicchie (piccoli gusci in composito, carenature scariche), ma l'ossatura di ali e fusoliere è, salvo eccezioni, un semiguscio.

► **Approfondimento: Il pannello sandwich: un'altra risposta allo stesso problema**

Esiste una via alternativa al problema dello spessore minimo: il **pannello sandwich**. Due pelli sottili e resistenti vengono separate e incollate a un *cuore* leggero (schiuma, balsa, o un favo a nido d'ape metallico o in composito). Il principio è quello, ormai familiare, del momento d'inerzia: allontanare le aree resistenti dall'asse neutro moltiplica la rigidezza flessionale — il quadrato della distanza, Capitolo 6 — mentre il cuore, leggerissimo, pesa pochissimo e tiene distanziate le pelli. Un sandwich ottiene con due lamine e un riempitivo la rigidezza che un pannello pieno equivalente pagherebbe in peso. Non è in alternativa concettuale al semiguscio: è un altro modo di mettere il materiale “dove serve, lontano dall'asse”, ed è diffusissimo in superfici mobili, pavimenti, paratie e carenature.

## 8.4 Il modello del semiguscio ideale

Riconoscere che l'ala è un semiguscio non basta a calcolarla: una sezione reale — rivestimento curvo, spessori variabili, molti correnti dalla geometria complicata — resta troppo complessa per gli integrali della Parte I. Serve un **modello**: una versione idealizzata che conservi l'essenziale e trascuri il resto. Quello che adotteremo si fonda su una divisione dei compiti tanto drastica quanto efficace.

### Teoria – Il modello del semiguscio ideale

Nel modello del semiguscio ideale si assume che:

- i **correnti** (e i lembi del longherone) lavorino *esclusivamente* a **tensione normale**  $\sigma$  — cioè si prendano tutta la flessione, sotto forma di trazione e compressione lungo l'apertura;
- i **pannelli** del rivestimento lavorino *esclusivamente* a **tensione tangenziale**  $\tau$  — cioè si prendano tutto il taglio e la torsione, sotto forma di flusso di taglio.

È, evidentemente, un'idealizzazione: nella realtà anche i pannelli contribuiscono un po' alla resistenza a flessione, e i correnti un po' al taglio. Ma la semplificazione è ciò che rende il problema *risolvibile a mano*: gli sforzi normali si concentrano in poche aree note, i flussi di taglio diventano costanti a tratti, e il dimensionamento di un longherone si riduce alle poche righe che vedremo nelle esercitazioni.

### Analogia pratica – La divisione del lavoro in una porta

Pensate a una porta di legno con i suoi due montanti verticali robusti e i pannelli sottili incastornati fra loro. Se provate a farla flettere nel suo piano, sono i *montanti* a opporsi — si tendono e si comprimono — mentre i pannelli, da soli, non contano quasi nulla a flessione. Se invece cercate di “sghembare” la porta, di deformarla a rombo, sono i *pannelli* a reagire, contrastando lo scorrimento. Montanti che portano gli sforzi normali, pannelli che portano il taglio: è esattamente la divisione dei compiti del semiguscio ideale, e la vostra porta la applica ogni giorno.

#### 8.4.1 Quando il modello è attendibile

Il modello del semiguscio ideale è tanto più fedele quanto più sono soddisfatte tre condizioni:

- a) pannelli e correnti hanno caratteristiche geometriche pressoché costanti fra due irrigidimenti trasversali consecutivi (fra due centine, nel tratto d'ala);
- b) i carichi esterni *normali* all'asse della struttura (la portanza, i pesi) sono applicati agli irrigidimenti trasversali (le centine), non direttamente al rivestimento nudo;
- c) i carichi esterni *longitudinali* sono applicati ai correnti.

Sono, si noti, le condizioni che il progetto *realizza apposta*: le centine si mettono dove servono a raccogliere i carichi, i correnti si disegnano continui per portare gli sforzi normali. Il modello non è imposto alla struttura dall'esterno: è la struttura a essere costruita in modo da somigliargli.

#### ► Approfondimento: La striscia collaborante: onestà verso i pannelli

Assumere tensione normale *nulla* nei pannelli sottostimerebbe la resistenza a flessione: un po' di flessione, i pannelli, la portano davvero. Per non buttare via quel contributo senza rinunciare alla semplicità del modello, si usa un accorgimento elegante: a ciascun corrente si associa una **striscia collaborante** di rivestimento adiacente, e si lavora con l'area “concentrata” data dal corrente *più* la sua striscia di lamiera efficace. In questo modo tutta la capacità flessionale resta concentrata nei correnti (come vuole il modello), ma il valore di quell'area tiene conto anche della pelle che effettivamente collabora. È il ponte fra il modello ideale e la struttura reale — e la ragione per cui, nel dimensionamento del longherone, le solette potranno legittimamente rappresentare “anche un po' di rivestimento”.

### 8.5 L'anatomia di un'ala a semiguscio

Mettiamo insieme i pezzi con il vocabolario che useremo nelle esercitazioni. In un'ala a semiguscio:

**il rivestimento (fasciame)** è la pelle esterna: definisce la forma aerodinamica e, nel modello, porta il flusso di taglio (taglio e torsione);

**i correnti (stringers)** sono i profilati longitudinali che irrigidiscono la pelle e, nel modello, portano gli sforzi normali di flessione; riducono inoltre la campata libera dei pannelli, alzandone la tensione critica di imbozzamento;

**il longherone** è l'elemento longitudinale principale, l'"ossatura portante": i suoi lembi (le *solette*, superiore e inferiore) portano la flessione come una coppia di forze, la sua *anima* porta il taglio. È il protagonista del dimensionamento;

**le centine** sono gli elementi trasversali: mantengono il profilo, raccolgono i carichi aerodinamici e i carichi concentrati per consegnarli al longherone e ai correnti, e irrigidiscono il tutto.

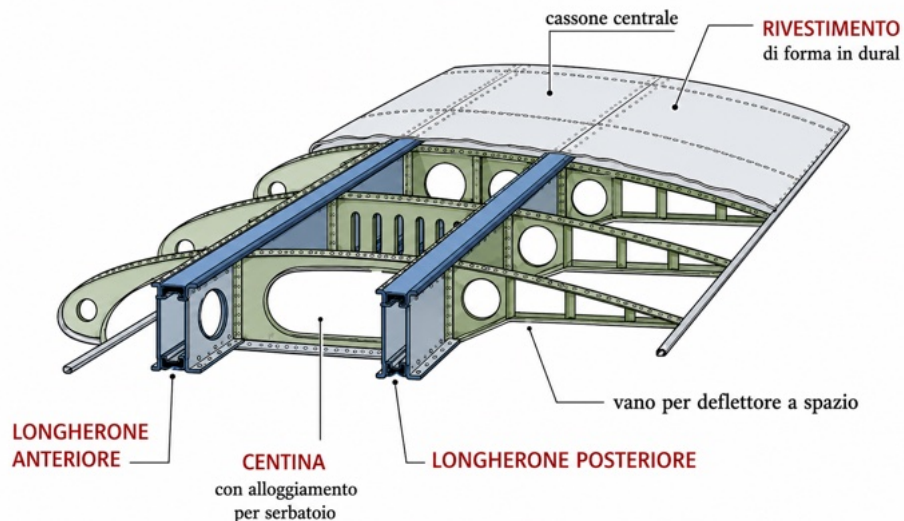


Figura 8.2: L'anatomia di un'ala a semiguscio: ogni elemento con il suo compito.

### Risultato – Il longherone è un semiguscio con due soli correnti

Nelle esercitazioni dimensioneremo il longherone con il “metodo delle solette e dell'anima”: solette che portano la flessione come coppia di forze, anima che porta il taglio. Ora sappiamo che quel metodo non è una regola a sé: è il **caso più semplice del modello del semiguscio ideale**, quello con due soli “correnti” (le due solette) e un solo “pannello” (l'anima). La stessa divisione dei compiti — normali ai lembi, taglio all'anima — che governa l'intera sezione a semiguscio, letta sul più elementare dei suoi casi. Quando, nel Capitolo 12, scriveremo  $N = M_f/b$  per le solette e  $\tau = \frac{3}{2} T/(a_1 b_1)$  per l'anima, staremo applicando — senza più chiamarlo per nome — il modello introdotto qui.

### Dove siamo arrivati, dove andiamo

Ora sappiamo *che cosa* calcoleremo: non una trave piena, ma un semiguscio — una pelle sottile irrigidita, in cui i correnti (e le solette del longherone) si prendono gli sforzi normali e i pannelli si prendono il taglio. Sappiamo perché questa architettura vince: doma l'instabilità dei pannelli e incassa i carichi concentrati con il gioco del triedro. Il passo successivo è imparare a *dimensionare* questa architettura: nel prossimo capitolo, dai carichi della sezione alare arriveremo ai millimetri di solette, anime, lamiere e rivetti. Resterà poi da stabilire *quali* carichi la struttura dovrà reggere — e a deciderlo non è il progettista, ma il regolamento, attraverso l'involuppo di volo, che apre la parte

successiva.



## Capitolo 9

# Dal guscio ideale al semiguscio: la genesi del modello

### Bussola concettuale

**Studiamo questo perché.** nel capitolo precedente abbiamo *accettato* il modello del semiguscio: correnti che portano gli sforzi normali, pannelli che portano il taglio. Una divisione dei compiti ragionevole — ma su quali basi? In questo approfondimento la ricostruiamo due volte: prima *per via genetica*, mostrando che il semiguscio è l'ultimo anello di una catena di soluzioni scartate una dopo l'altra; poi *per via numerica*, dimostrando con Navier e Jourawsky che in un longherone vero le sollette si prendono davvero quasi tutta la flessione e l'anima quasi tutto il taglio. Alla fine il modello non sarà più un'ipotesi da credere sulla parola: sarà una conseguenza, con tanto di percentuali.

**Da dove veniamo.** dal Capitolo 8, che ha introdotto guscio, semiguscio e la divisione dei compiti; e dalla Parte I, di cui useremo gli strumenti più affilati: Navier e Jourawsky (Capitolo 6) e la lezione della sezione aperta contro quella chiusa (Capitolo 5).

**Dove andiamo.** al dimensionamento (Capitolo 10), che di questo modello fa una procedura di calcolo. Ci arriveremo però con una consapevolezza in più: sapremo *quanto* costa la semplificazione, e da che parte pende — perché non pende sempre dalla parte della sicurezza.

**Al termine saprai.** ricostruire la catena logica ala piena → ala cava → guscio ideale → guscio rinforzato; classificare gli elementi strutturali in schemi a una, due e tre dimensioni; dimostrare con i numeri il passaggio dal continuo al discreto su un longherone a doppio T; indicare dove il modello del semiguscio è prudente e dove, invece, va maneggiato con attenzione.

### 9.1 Un esperimento mentale: quattro ali, tre bocciature

Il modo più istruttivo di capire *perché* le strutture aeronautiche sono fatte come sono fatte è progettarle da capo, per assurdo, partendo dalla soluzione più ingenua e scartandola con un argomento alla volta.

**Prima ipotesi: l'ala piena.** Immaginiamo di realizzare la semiala come un blocco pieno di lega leggera, sagomato a profilo alare. La bocciatura è doppia, e non serve nemmeno un calcolo. Primo: il **peso**. Un volume pieno mette materiale anche dove le tensioni sono minime — l'abbiamo imparato con la flessione e con la torsione: vicino all'asse neutro il materiale lavora poco e pesa uguale. Secondo, e più radicale: la **funzione**. Dentro l'ala devono starci il carburante (i serbatoi integrali occupano gran parte del cassone), i comandi delle superfici mobili, gli impianti, spesso il carrello retrainato. Dentro la fusoliera, a maggior ragione, devono starci il carico pagante e le persone. I corpi di un aeroplano non *possono* essere pieni: devono essere **cavi** per contratto, prima ancora che per convenienza.

**Seconda ipotesi: il guscio ideale.** Se il corpo dev'essere cavo, la soluzione concettualmente più elegante è affidare tutto alla sola parete esterna, dosandone lo spessore punto per punto.

### Definizione – Guscio ideale

Si dice **guscio ideale** una struttura costituita dal solo rivestimento — una parete sottile e curva — il cui spessore vari con continuità da punto a punto, calibrato ovunque sul *minimo* necessario a sopportare lo stato di tensione locale. È il limite teorico dell'ottimizzazione: nessun grammo di materiale dove non serve, e la forma aerodinamica coincide con la struttura.

Sulla carta è la perfezione. Nella pratica raccoglie tre bocciature, una tecnologica e due strutturali.

- a) **La tecnologia non c'è.** Non esistono processi industriali affidabili per produrre pareti metalliche con spessore variabile *con continuità* su dimensioni dell'ordine di un'ala o di una fusoliera. Le lavorazioni per asportazione dei pannelli integrali (Capitolo 7) si avvicinano all'idea, ma procedono per gradini di spessore, su pannelli di dimensioni limitate — non realizzano il guscio ideale: lo *approssimano* localmente.
- b) **I carichi concentrati.** Attacchi delle superfici mobili, cerniere, gondole motore, carrelli: forze intense, applicate in punti precisi, con rette d'azione che quasi mai giacciono nel piano della parete. È la situazione della cannuccia premuta di lato del Capitolo 8: il guscio, fuoriclasse degli sforzi membranali, davanti al carico concentrato trasversale non regge.
- c) **Le aperture.** Un aeroplano vero è pieno di buchi: porte, finestrini, portelli d'ispezione, vani carrello, passaggi d'impianto. Ogni apertura interrompe la continuità della parete — e che cosa succeda a una sezione sottile quando il suo contorno viene interrotto lo abbiamo misurato nell'esercizio del tubo tagliato (Esempio 5.5): il flusso delle tensioni non può più richiudersi, e resistenza e rigidità torsionale crollano di uno o due ordini di grandezza. Un guscio ideale bucato non è più un guscio ideale: è un guscio ferito.

### Analoga pratica – Il portello d'ispezione

Aprite la fotografia di un ventre d'ala: è costellato di portelli circolari o ovali, chiusi da coperchi avvitati. Ognuno di quei fori, per il rivestimento che lavora a taglio e torsione, è un'interruzione del flusso  $q$ . Il progetto risponde sempre allo stesso modo: *bordando* l'apertura con una cornice irrigidente, che raccoglie il flusso in arrivo e lo riconsegna oltre il foro. È il rinforzo locale che il guscio puro non possiede e che il semiguscio, per costruzione, sa offrire. (Agli angoli delle aperture, inoltre, le tensioni si concentrano: e dove le tensioni si concentrano, la fatica del Capitolo 7 trova

terreno fertile.)

**Terza ipotesi, quella buona: il guscio rinforzato.** Se il guscio da solo non convive con carichi concentrati e aperture, la soluzione è *aiutarlo*: mantenere la parete sottile — che resta insuperabile per leggerezza e forma — e aggiungerle un'orditura di irrigidimenti. Nelle zone in cui i carichi entrano nella struttura occorre disporre elementi resistenti lungo **tre direzioni non complanari**: è il principio del triedro già incontrato nel Capitolo 8, qui letto come *criterio di progetto* e non solo come osservazione. Nascono così, con i nomi ormai familiari, i tre attori del semiguscio: il **pannello** (il tratto di guscio bordato dagli irrigidimenti), gli irrigidimenti **trasversali** (centine nell'ala, ordinate nella fusoliera), gli irrigidimenti **longitudinali** (correnti e longheroni).



Figura 9.1: La genesi del semiguscio: due soluzioni bocciate e una promossa.

### Un lessico che sa di mare

Centine, ordinate, fasciame, longheroni: il vocabolario delle strutture aeronautiche è preso in prestito, quasi parola per parola, dalle costruzioni navali — che dei gusci rinforzati sono state la prima grande palestra. Anche l'edilizia offre una corrispondenza utile per fissare le idee: i correnti lavorano come i pilastri (sforzi normali), i pannelli come i solai e le pareti di controvento (azioni nel proprio piano), le centine come i telai trasversali che tengono in forma l'insieme.

## 9.2 Tre taglie di modello: 3D, 2D, 1D

La genesi del semiguscio suggerisce anche una lezione di metodo, che vale per qualunque struttura: prima di calcolare un elemento, occorre scegliere *con quante dimensioni* conviene descriverlo.

### Teoria – La regola dell'ordine di grandezza

Fissata una terna di riferimento sull'elemento, si confrontano le sue tre dimensioni caratteristiche.

- **Schema unidimensionale (1D):** una dimensione è almeno un ordine di grandezza *maggiore* delle altre due. È la trave della Parte I: tutto si descrive lungo un'ascissa. Così si modellano correnti, longheroni, aste di controvento, montanti.
- **Schema bidimensionale (2D):** una dimensione (lo spessore) è almeno un ordine di grandezza *minore* delle altre due. È il pannello: lamiere di rivestimento, anime dei longheroni, pareti delle centine.

- **Schema tridimensionale (3D):** le tre dimensioni sono confrontabili, e nessuna semplificazione è lecita. È il caso degli elementi compatti: attacchi, forgiati, cerniere, perni — le zone dove i carichi concentrati entrano nella struttura.

Nessuna struttura reale appartiene per intero a una sola di queste famiglie: il calcolo di un aeroplano è sempre una *combinazione ragionata* dei tre schemi, dove l'abilità sta nel riconoscere quale semplificazione è lecita in quale zona. Ed è una lezione che non invecchia: anche il metodo degli elementi finiti, lo strumento con cui oggi si analizzano le strutture al calcolatore, ragiona esattamente così — elementi *beam* per le travi, *shell* per i pannelli, *solid* per le zone compatte. Cambia la potenza di calcolo, non la domanda di fondo.

#### Risultato – Il semiguscio ideale, letto con questa lente

Il modello del semiguscio ideale è precisamente questo: la scelta di descrivere i correnti con lo schema 1D più povero possibile (un'area concentrata che porta solo sforzo normale) e i pannelli con lo schema 2D più povero possibile (una linea di spessore che porta solo flusso di taglio). Le zone genuinamente 3D — gli attacchi — restano fuori dal modello, e infatti nel Capitolo 10 le tratteremo a parte, con le verifiche di forcelle, perni e rivetti.

## 9.3 Il passaggio dal continuo al discreto: la prova dei numeri

Fin qui la genesi. Ora la dimostrazione. Il modello del semiguscio sostituisce a una sezione *continua* — dove tensioni  $\sigma$  e  $\tau$  variano da punto a punto, come vogliono Navier e Jourawsky — una sezione *discreta*, fatta di poche aree concentrate e di pannelli. Perché questa sostituzione sia legittima, il continuo deve già comportarsi *quasi* come il discreto. Vediamo se è vero, sul caso più semplice: il longherone isolato.

### Esempio 9.1 — La sezione che vota due volte 91 a 9

Riprendiamo il tratto di longherone fra due centine, incastrato alla radice e caricato in punta da un taglio  $T$  nel piano dell'anima: nella generica sezione convivono un taglio  $T$  e un momento flettente  $M$ . E riprendiamo la sezione a doppio T dell'Esempio 6.4, che ormai conosciamo bene.

#### Dati

Sezione a doppio T: larghezza  $b = 60$  mm, altezza  $H = 100$  mm, solette di spessore  $t_s = 8$  mm, anima di spessore  $t_a = 4$  mm; altezza dell'anima  $h = H - 2t_s = 84$  mm; distanza fra i baricentri delle solette  $\hat{h} = H - t_s = 92$  mm. Momento d'inerzia (già calcolato):  $J = 2,234 \times 10^6$  mm<sup>4</sup>. Sollecitazioni di prova nella sezione d'incastro:  $M = 5$  kN m,  $T = 20$  kN.

**Passo 1 — Dove abita la flessione.** Scomponiamo il momento d'inerzia nei suoi tre contributi: il trasporto delle solette (Huygens), il momento proprio delle solette, l'anima:

$$J_{\text{trasp}} = 2 (b t_s) \left( \frac{H - t_s}{2} \right)^2 = 2 \cdot 480 \cdot 46^2 = 2,031 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \rightarrow 90,9\%, \quad (9.1)$$

$$J_{\text{anima}} = \frac{t_a b^3}{12} = \frac{4 \cdot 84^3}{12} = 0,198 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \rightarrow 8,8\%, \quad (9.2)$$

$$J_{\text{prop}} = 2 \frac{b t_s^3}{12} = 0,005 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \rightarrow 0,2\%. \quad (9.3)$$

Il novanta per cento della rigidezza flessionale sta nel *trasporto* delle solette: nell'area delle solette moltiplicata per il quadrato della loro distanza dall'asse neutro. È il ritornello dell'intero corso — materiale lontano dall'asse — letto stavolta come censimento.

**Passo 2 — Le risultanti assiali.** Integriamo la farfalla di Navier,  $\sigma = My/J$ , separatamente sulla soletta e su metà anima. Per la soletta il conto è immediato col momento statico  $S_{\text{sol}}^* = b t_s (H - t_s)/2 = 22.080 \text{ mm}^3$  (lo stesso dell'esempio di Jourawsky):

$$P_s = \frac{M S_{\text{sol}}^*}{J} = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 22.080}{2,234 \cdot 10^6} \simeq 49,4 \text{ kN}, \quad P_a = \frac{M}{J} \int_0^{b/2} y t_a dy = \frac{M t_a b^2}{8J} \simeq 7,9 \text{ kN}. \quad (9.4)$$

La soletta tesa raccoglie una risultante oltre *sei volte* maggiore di quella dell'intera metà tesa dell'anima. Ma il confronto giusto non è fra le forze: è fra i *momenti* che esse producono. La coppia delle solette vale  $P_s \hat{b} = 49.417 \cdot 92 \simeq 4,55 \text{ kN m}$ , cioè il 90,9% di  $M$  — esattamente la quota del trasporto nel Passo 1, come deve essere. All'anima resta l'8,8%, alle solette “in proprio” lo 0,2%.

**Passo 3 — E dove abita il taglio.** Il censimento del taglio lo abbiamo già fatto con Jourawsky nell'Esempio 6.4: integrando le  $\tau$  sulle aree, l'anima raccoglie

$$T_a \simeq 18,4 \text{ kN} = 91,9\% \text{ di } T, \quad T_s \simeq 1,6 \text{ kN} = 8,1\% \text{ di } T, \quad (9.5)$$

con un rapporto  $T_a/T_s \simeq 11$ .

#### Risultato — La sezione vota due volte 91 a 9

Sottoposta a flessione, la sezione consegna il 91% del momento alle solette; sottoposta a taglio, consegna il 92% della forza all'anima. La divisione dei compiti del semiguscio ideale non è un'ipotesi calata dall'alto: è ciò che la sezione *già fa da sola*, letto con Navier e Jourawsky. Il modello si limita ad arrotondare due 91 a due 100.

**Passo 4 — La discretizzazione.** Arrotondiamo, dunque. Se le solette portano (quasi) tutta la flessione e l'anima (quasi) tutto il taglio, possiamo sostituire alla sezione continua un modello a tre elementi: due **aree concentrate** nei baricentri delle solette — d'ora in poi, i *correnti* — e un **pannello** d'anima che le tiene a distanza  $\hat{b}$  e porta il taglio. Le formule del longherone discretizzato diventano di una riga:

$$P = \frac{M}{\hat{b}}, \quad q = \frac{T}{\hat{b}}, \quad J \simeq 2 A_s \left( \frac{\hat{b}}{2} \right)^2 = \frac{A_s \hat{b}^2}{2}, \quad (9.6)$$

dove  $P$  è la forza assiale nei correnti (trazione da una parte, compressione dall'altra),  $q$  il flusso di taglio nel pannello e  $A_s$  l'area di ciascun corrente. Un problema che aveva infinite incognite — una  $\sigma$  e una  $\tau$  per ogni quota  $y$  — si è ridotto a due numeri,  $P$  e  $q$ .

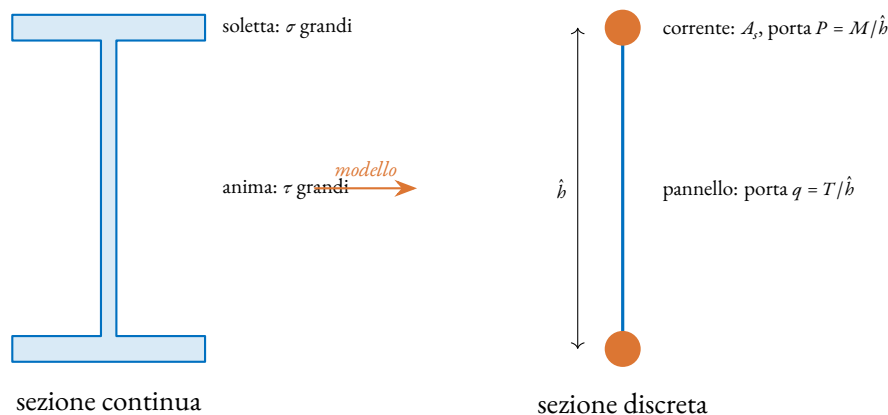


Figura 9.2: Il passaggio dal continuo al discreto: il doppio T diventa due aree concentrate (i correnti) e un pannello che le tiene a distanza  $\hat{h}$ .

## 9.4 L'onestà del modello: prudente, ma non ovunque

Ogni modello è un contratto: si rinuncia a qualcosa in cambio della semplicità. Conviene leggere le clausole, perché due meritano attenzione.

### 9.4.1 Che cosa il modello ha perso

Il longherone discretizzato di figura 9.2 sa resistere *soltanto* a carichi che giacciono nel piano dell'anima: flessione attorno all'asse orizzontale della sezione e taglio verticale. Provate a caricarlo fuori da quel piano — una flessione attorno all'asse verticale, una torsione attorno all'asse longitudinale — e il modello non oppone *nulla*: due punti e un segmento non hanno rigidità in quelle direzioni. Non è un difetto del longherone reale, che qualche riserva fuori piano la possiede: è una rinuncia del modello. Nella struttura vera, a quelle sollecitazioni provvede il resto della sezione alare — il cassone chiuso dal rivestimento, con la sua area di Bredt — ed è per questo che il dimensionamento del Capitolo 10 affiancherà sempre, al longherone che porta flessione e taglio, il cassone che porta la torsione. Il modello del semiguscio non è il modello di un pezzo: è il modello di una *squadra*, e ogni giocatore copre la zona in cui gli altri non arrivano.

### 9.4.2 Da che parte pende l'approssimazione

Si è tentati di concludere che il semiguscio ideale sia comunque una scelta prudente: in fondo assegna alle solette *più* momento di quanto ne portino davvero. Per le solette è vero, e i numeri dell'esempio lo confermano: la forza del modello,  $P = M/\hat{h} = 54,3 \text{ kN}$ , sovrastima la risultante reale  $P_r = 49,4 \text{ kN}$  del 10% — un margine nascosto, a favore di sicurezza. Ma la prudenza *globale* non garantisce la prudenza *locale*, e l'anima lo dimostra.

**Attenzione – Quale altezza al denominatore**

Per la tensione tangenziale nell'anima il modello suggerisce  $\tau = q/t_a = T/(t_a \hat{b})$ . Con i numeri dell'esempio:

$$\frac{T}{t_a \hat{b}} = \frac{20\,000}{4 \cdot 92} = 54,3 \text{ N/mm}^2 \quad \text{contro} \quad \tau_{\max} = 57,3 \text{ N/mm}^2 \text{ (Jourawsky)} : \quad (9.7)$$

una *sottostima* del 5,2% — contro sicurezza. Usando invece l'altezza dell'anima,  $\tau = T/(t_a b) = 20\,000/(4 \cdot 84) = 59,5 \text{ N/mm}^2$ , si *soprastima*  $\tau_{\max}$  del 3,9%: è l'approssimazione a favore di sicurezza già adottata nel Capitolo 6, ed è quella da preferire nelle verifiche. Morale: il flusso  $q = T/\hat{b}$  è lo strumento giusto per gli *equilibri* (e per i rivetti che l'anima la collegano); per la *tensione* nell'anima, il denominatore onesto è l'altezza dell'anima.

È un esempio piccolo di una verità generale: un modello di discretizzazione può essere equilibrato nel complesso e sbilanciato nei dettagli. Il progettista che lo usa deve sapere in quali punti l'approssimazione pende dalla parte sbagliata — e lì, correggere la mira.

**“Sforzo” e “forza”: una tolleranza di linguaggio**

Nella pratica tecnica sentirete usare come sinonimi “sforzo di taglio” e “forza di taglio”, “sforzo normale” e “forza normale”. In questi appunti manteniamo la distinzione pulita —  $N$  e  $T$  sono *caratteristiche della sollecitazione* (forze interne, in newton),  $\sigma$  e  $\tau$  sono *tensioni* (in  $\text{N/mm}^2$ ) — ma è bene riconoscere l'uso corrente per non farsi confondere dai testi e dai temi d'esame.

**Dove siamo arrivati, dove andiamo**

Il semiguscio non è più un'ipotesi: è un punto d'arrivo. Genetico — l'ultima soluzione rimasta in piedi dopo l'ala piena, l'ala cava e il guscio ideale — e numerico: la sezione continua consegna da sola il 91% della flessione alle solette e il 92% del taglio all'anima, e il modello si limita a completare l'opera. Conosciamo anche le clausole del contratto: niente rigidità fuori dal piano dell'anima (ci penserà il cassone), margine del 10% sulle solette, attenzione al denominatore della  $\tau$ . Con questa consapevolezza possiamo entrare nel capitolo del dimensionamento: dai carichi della sezione ai millimetri di solette, anime, lamiere e rivetti — sapendo, stavolta, esattamente che cosa stiamo approssimando.



## Capitolo 10

# Dal carico alla struttura: il dimensionamento

### Bussola concettuale

**Studiamo questo perché.** sappiamo ormai *che cosa* è una struttura aeronautica (un semiguscio, Capitolo 8) e sappiamo calcolare tensioni e verifiche su una trave (Parte I). Manca il passaggio di mestiere: partire dai carichi che l'aria e il peso scaricano sull'ala e arrivare ai *millimetri* — spessori di solette, anime e lamiere, diametri di perni e rivetti. È il cuore della seconda prova d'esame: ogni tema di maturità, comunque sia vestito, chiede in fondo questo percorso.

**Da dove veniamo.** dalla trave e dalle sue sollecitazioni (Capitoli 2–6), dal carico di punta (Capitolo 4), dalla torsione di Bredt (Capitolo 5) e dal modello del semiguscio (Capitolo 8).

**Dove andiamo.** all'involuppo di volo (Capitolo 11), che ci dirà con quale fattore di carico  $n$  fare i conti, e alle esercitazioni sul SF-260 (Capitolo 12), dove la procedura di questo capitolo verrà ripercorsa su un velivolo vero. Qui il fattore di carico è un *dato*; là impareremo a ricavarlo.

**Al termine saprai.** ridurre i carichi alari alle tre sollecitazioni  $T$ ,  $M_f$ ,  $M_t$  di una sezione; dimensionare le solette (simmetriche e asimmetriche), l'anima e il rivestimento del cassone di un'ala monolongherone; descrivere l'ala bilongherone e le tre famiglie di fusoliere; verificare collegamenti bullonati e rivettati; e condurre da cima a fondo il dimensionamento di un montante di controventatura con i suoi attacchi.

### 10.1 Dai carichi alle sollecitazioni della sezione

Nei capitoli precedenti abbiamo imparato a vedere l'ala come una trave incastrata alla fusoliera e a determinarne, punto per punto, taglio e momento flettente. Ora cambiamo domanda: fissata una *sezione* dell'ala, quali sollecitazioni deve sopportare, e *chi*, dentro la sezione, se le prende?

Consideriamo un'ala a sbalzo e una generica sezione posta a distanza  $x$  dall'incastro in fusoliera. Si definisce **risultante dei carichi rispetto alla sezione** la risultante  $R$  di tutti i carichi agenti fra la sezione stessa e l'estremità libera: dal carico  $p$  distribuito sulla superficie alare esterna alla sezione si arriva a un'unica forza  $R$ , applicata nel baricentro di quella distribuzione, a distanza  $d$  dalla sezione lungo l'apertura e, in generale, non passante per il punto della sezione rispetto a cui misuriamo la torsione.

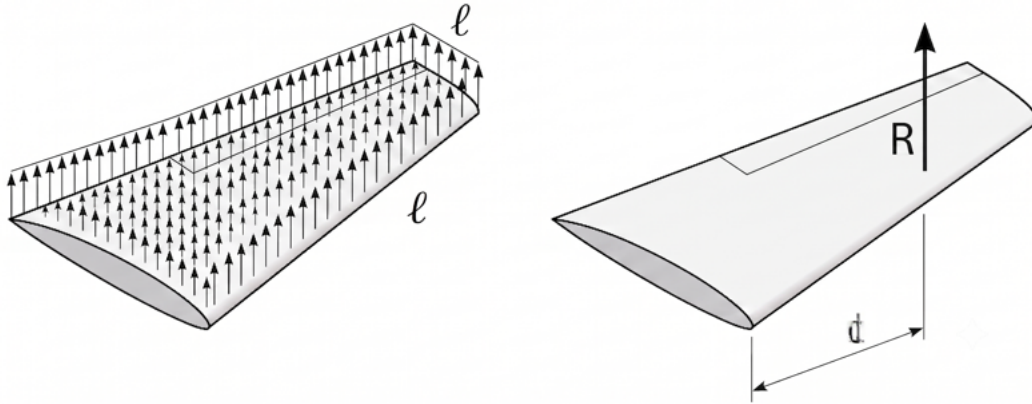


Figura 10.1: La porzione di ala esterna alla sezione genera una risultante  $R$  con braccio  $d$  rispetto alla sezione stessa.

Questa forza  $R$  genera sulla sezione, in generale, tre sollecitazioni:

- una **forza di taglio**

$$T = R; \quad (10.1)$$

- un **momento flettente**, momento di  $R$  rispetto alla sezione, agente nel piano individuato dalla verticale e dall'apertura alare:

$$M_f = R d; \quad (10.2)$$

- un **momento torcente**, momento di  $R$  rispetto a un punto prefissato della sezione — per esempio l'anima del longherone — con braccio  $b$  misurato lungo la corda:

$$M_t = R b. \quad (10.3)$$

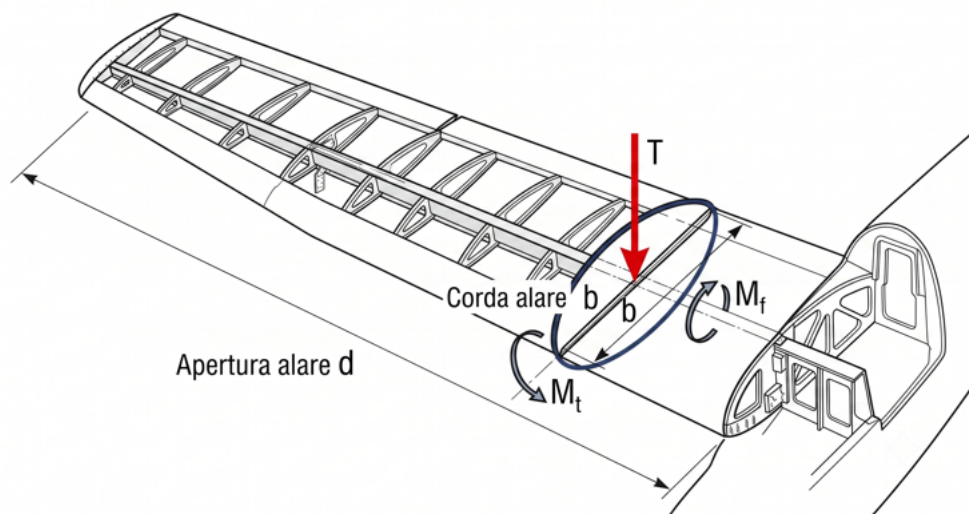


Figura 10.2: Le tre sollecitazioni della generica sezione alare.

**Definizione – Convenzioni di segno per la sezione alare**

Coerentemente con quanto faremo nelle esercitazioni, si assume:

$M_f > 0$  se tende le fibre inferiori;

$T > 0$  se orientato verso l'alto;

$M_t > 0$  se è cabrante.

In volo diritto e in richiamata la portanza, diretta verso l'alto, produce su una semiala  $T > 0$  e  $M_f > 0$ : le fibre tese sono quelle del ventre.

**E le forze nel piano alare?**

La portanza non è l'unica forza aerodinamica: c'è anche la resistenza, e nel piano alare agiscono pure le azioni propulsive. Ma l'ala, per la sua stessa costituzione, è nel proprio piano una struttura estremamente robusta e rigida (basta guardare quanto è “alta” la sezione resistente in quella direzione: l'intera corda). I carichi nel piano alare, salvo casi particolari, non dimensionano nulla: in questa trattazione, come d'uso, li trascuriamo e ci concentriamo sulle forze perpendicolari al piano alare.

Determinate le sollecitazioni, si può procedere al dimensionamento degli elementi resistenti. Ma *quali* elementi? La risposta dipende dall'architettura della struttura alare, ed è cambiata molto nella storia.

**► Approfondimento: Un secolo di soluzioni costruttive**

I primi velivoli erano in **legno e tela**, spesso irrobustiti da tiranti e fili: il rivestimento aveva funzione esclusivamente di forma, non collaborava ad alcuna resistenza, e l'intera struttura alare — longheroni, centine, correntini — doveva assorbire da sola taglio, flessione e torsione; i tiranti esterni irrigidivano il tutto al prezzo di un evidente aggravio di resistenza aerodinamica. Con l'evoluzione dei materiali si è arrivati al concetto di **cassone alare**: il rivestimento, realizzato con materiali rigidi (compensati prima, lamiera poi), smette di essere pura pelle e riceve il compito di resistere a determinati tipi di carico. Le soluzioni attuali, come l'ala a semiguscio del Capitolo 8, portano questa idea al limite: non si individuano più singoli elementi “responsabili” di una singola sollecitazione, ma è l'ala nel suo insieme a resistere a ogni sollecitazione. Nel seguito analizziamo la struttura **monolongherone**, la più semplice e la più istruttiva: per le soluzioni più evolute il bagaglio matematico cresce rapidamente, e il modello di riferimento resta quello del semiguscio ideale già introdotto.

## 10.2 L'ala monolongherone

L'ala **monolongherone** è caratterizzata dalla sua estrema semplicità costruttiva: la sezione presenta un *unico longherone*, posto generalmente nel punto di massimo spessore del profilo, che sopporta gli sforzi di taglio e di flessione, e un *cassone anteriore*, formato dal rivestimento del bordo d'attacco richiuso sull'anima del longherone stesso, che assorbe gli sforzi di torsione. La parte di sezione posteriore al longherone è di pura forma.

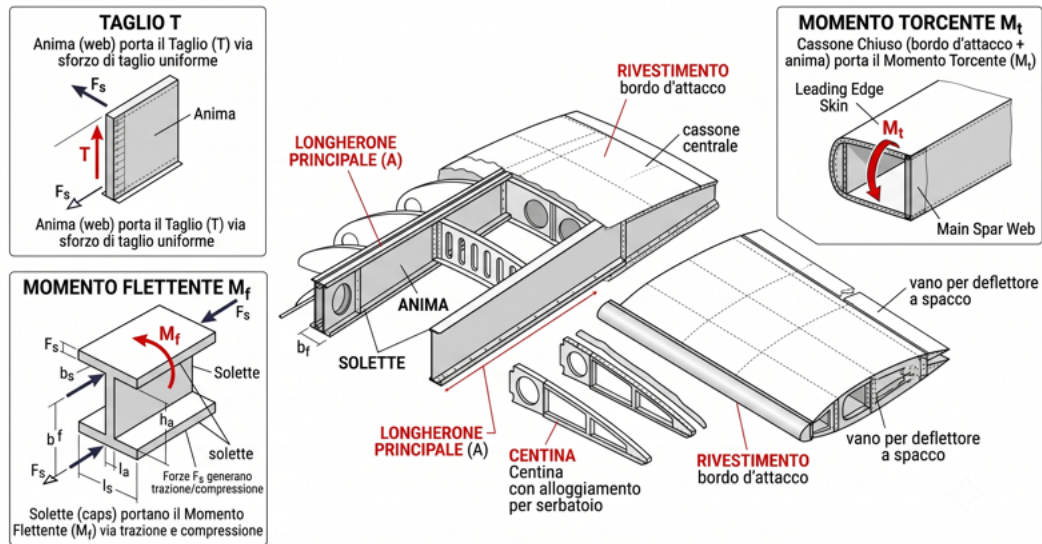


Figura 10.3: La divisione dei compiti nell'ala monolongherone.

Le sollecitazioni della sezione vengono così, per così dire, *disaccoppiate*, e ciascuna viene sopportata da un preciso elemento strutturale:

- il **taglio**  $T$  è sopportato esclusivamente dall'*anima* del longherone;
- il **momento flettente**  $M_f$  è sopportato esclusivamente dalle *solette* del longherone, mediante sforzi di trazione (soletta inferiore) e di compressione (soletta superiore);
- il **momento torcente**  $M_t$  è sopportato dal rivestimento del bordo d'attacco che, insieme all'anima del longherone, forma il *cassone alare* resistente a torsione.

Profilo alare monolongherone: ripartizione dei compiti strutturali

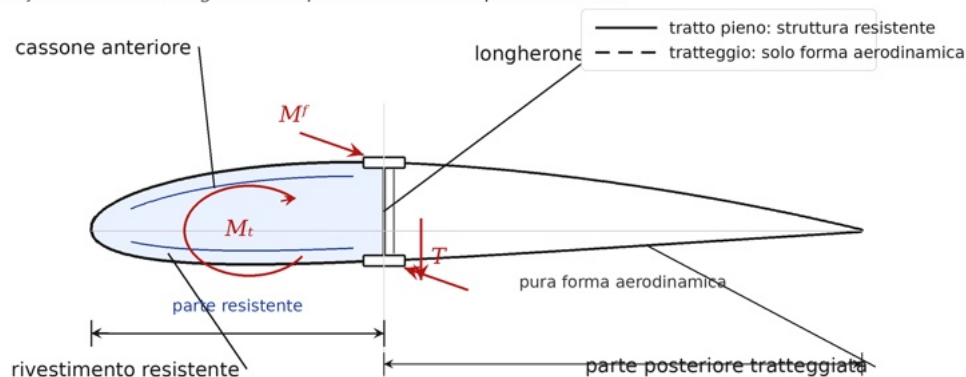


Figura 10.4: Dal punto di vista strutturale, dell'ala monolongherone "conta" solo la parte anteriore; il resto è forma.

**Attenzione – Il disaccoppiamento è un’idealizzazione**

La divisione dei compiti appena descritta è una semplificazione — ottima per un primo dimensionamento, ma non perfetta. L’esempio più evidente: l’anima del longherone è *anche* una parete del cassone di torsione, quindi assorbe sia il flusso di taglio dovuto a  $T$  sia quello dovuto a  $M_t$ . Non è possibile disaccoppiare del tutto le sollecitazioni; lo stesso accade, in grande, nel semiguscio (Capitolo 8), dove parte del rivestimento collabora pure alla flessione. Quando serve maggiore finezza, i flussi si sommano algebricamente pannello per pannello — come faremo nelle esercitazioni.

La soluzione monolongherone è tuttora diffusa su aerei leggeri, ultraleggeri e alianti, e non mancano applicazioni su velivoli più pesanti. Vediamo ora, uno per uno, i procedimenti di dimensionamento dei suoi elementi.

**10.2.1 Le solette a flessione: longherone simmetrico**

Le solette sono dimensionate per sopportare gli sforzi assiali generati dal momento flettente: con  $M_f > 0$  la soletta superiore è compressa, quella inferiore è tesa. In determinate manovre — volo rovescio, richiamate negative — gli sforzi si invertono; ma il fattore di carico massimo negativo è, in modulo, molto inferiore a quello positivo (lo vedremo formalizzato nell’involuppo di volo), per cui il dimensionamento si conduce sul caso positivo.

Per stabilire le sezioni resistenti occorre fissare alcuni dati. La distanza fra i due lati esterni delle solette, indicata con  $S_{\max}$ , è di norma un dato noto a priori: dipende dal profilo alare adottato, perché il longherone si colloca — ed è buona norma collocarlo — in corrispondenza del punto di massimo spessore del profilo.

**Analogia pratica – Perché proprio nel punto più spesso?**

È il solito gioco del momento d’inerzia, visto con gli occhi del progettista. A parità di momento flettente, il momento si equilibra con una coppia di forze nelle solette: più le solette sono *distanti*, minore è la forza che ciascuna deve portare, minore la sezione resistente necessaria, minore il peso. Pensate a due persone che devono tenere ferma una porta spinta al centro: se si mettono ai bordi opposti faticano poco; se si avvicinano al centro, per lo stesso effetto devono spingere molto di più. Il profilo, però, non si può ingrossare a piacere: profili più spessi generano più resistenza aerodinamica. La soluzione, come sempre in aeronautica, è un compromesso fra esigenze aerodinamiche ed esigenze strutturali — e il punto di massimo spessore del profilo è il posto dove il compromesso rende di più.

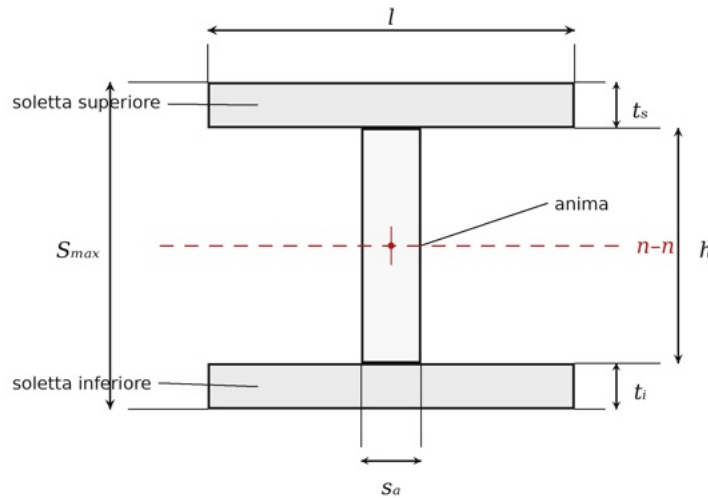


Figura 10.5: Il longherone simmetrico: nomenclatura.

Analizziamo due casi distinti: **longherone simmetrico**, con le due solette uguali fra loro, e **longherone asimmetrico**, con solette diverse.

Nel caso simmetrico gli spessori delle due solette coincidono,

$$b_s = b_i = b, \quad (10.4)$$

e la distanza interna  $b$  fra le solette si trova subito:

$$b = S_{\max} - 2b. \quad (10.5)$$

Trascurando il contributo dell'anima, il momento d'inerzia  $J$  della sezione resistente a flessione — cioè dell'area delle due solette — rispetto all'asse neutro  $n-n$  si calcola per differenza fra il rettangolo pieno  $l \times S_{\max}$  e il vuoto interno  $l \times b$ :

$$J = \frac{1}{12} l (S_{\max}^3 - b^3). \quad (10.6)$$

Ponendo  $y = S_{\max}/2$  (la fibra più lontana) e ricordando la formula di Navier (Capitolo 6)

$$\sigma = \frac{M_f y}{J}, \quad (10.7)$$

la sostituzione della (10.6) fornisce subito la tensione massima nelle solette:

$$\sigma = \frac{6 M_f S_{\max}}{l (S_{\max}^3 - b^3)} \quad (10.8)$$

Questa formula lavora in due direzioni. In *verifica*: nota la geometria, calcola  $\sigma$  e la confronta con l'ammissibile. In *progetto*: fissata la tensione ammissibile  $\sigma_a$  del materiale scelto, dalla (10.8) si ricava  $b$ ,

$$b = \sqrt[3]{S_{\max}^3 - \frac{6 M_f S_{\max}}{\sigma_a l}} \quad (10.9)$$

e quindi lo spessore delle solette:

$$b = \frac{S_{\max} - b}{2}. \quad (10.10)$$

## Esempio 10.1 — Dimensionamento delle solette di un longherone simmetrico

### Dati

Longherone a doppio T simmetrico con  $S_{\max} = 120$  mm (spessore massimo del profilo in corrispondenza del longherone), larghezza delle solette  $l = 80$  mm, momento flettente di progetto  $M_f = 12 \times 10^6$  N mm. Lega leggera Al 2024-T4 con tensione di snervamento  $\sigma_s = 324$  N/mm<sup>2</sup>; coefficiente di sicurezza regolamentare  $k = 2$ , da cui  $\sigma_a = \sigma_s/k = 162$  N/mm<sup>2</sup>.

**Progetto.** Dalla (10.9):

$$b = \sqrt[3]{120^3 - \frac{6 \cdot 12 \cdot 10^6 \cdot 120}{162 \cdot 80}} = \sqrt[3]{1\,728\,000 - 666\,667} = \sqrt[3]{1\,061\,333} \approx 102,0 \text{ mm}, \quad (10.11)$$

da cui, con la (10.10),

$$b = \frac{120 - 102,0}{2} = 9,0 \text{ mm}. \quad (10.12)$$

**Scelta commerciale e verifica.** Lo spessore calcolato non è detto che esista a listino: si adotta il primo spessore commerciale *superiore*,  $b = 10$  mm, da cui  $b = 120 - 20 = 100$  mm. La verifica con la (10.8):

$$\sigma = \frac{6 \cdot 12 \cdot 10^6 \cdot 120}{80 (120^3 - 100^3)} = \frac{8,64 \cdot 10^9}{80 \cdot 728\,000} \approx 148,4 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a = 162 \text{ N/mm}^2. [\text{verificato}] \quad (10.13)$$

### Risultato – La logica da portare all'esame

Prima il *progetto* con la formula inversa, poi l'*arrotondamento* al valore commerciale per eccesso, infine la *verifica* con la formula diretta e il margine esplicito. Riportare come risultato il valore “esatto” di calcolo ( $b = 9,0$  mm) senza passare dal valore commerciale è un errore di metodo: nessuna officina lamina uno spessore su misura per noi.

## 10.2.2 Le solette a flessione: longherone asimmetrico

Indipendentemente dal materiale utilizzato, un elemento strutturale come la soletta — sempre molto lungo rispetto alla massima dimensione trasversale — lavora molto meglio a *trazione* che a *compressione*: la soletta compressa, come qualunque elemento snello compresso, è insidiata dall'instabilità (Capitolo 4), locale o d'insieme, che ne abbassa la tensione realmente sfruttabile. Se si impone alle due solette la stessa tensione ammissibile — necessariamente quella, più bassa, della compressione — si finisce per *sovradimensionare* la soletta tesa, che potrebbe lavorare a tensione più alta.

Per questa ragione, per determinate applicazioni può convenire una soluzione con solette diverse fra loro: il **longherone asimmetrico**, in cui la soletta compressa (superiore, per  $M_f > 0$ ) ha area maggiore e lavora a una tensione ammissibile  $\sigma_c$  inferiore, mentre la soletta tesa lavora alla propria tensione ammissibile  $\sigma_t > \sigma_c$ . Il calcolo è più laborioso — si arriva a un sistema di due equazioni non risolubile in forma elementare, da trattare *per tentativi* — ma il procedimento è istruttivo e i risultati, per un dimensionamento di massima, sono accurati.

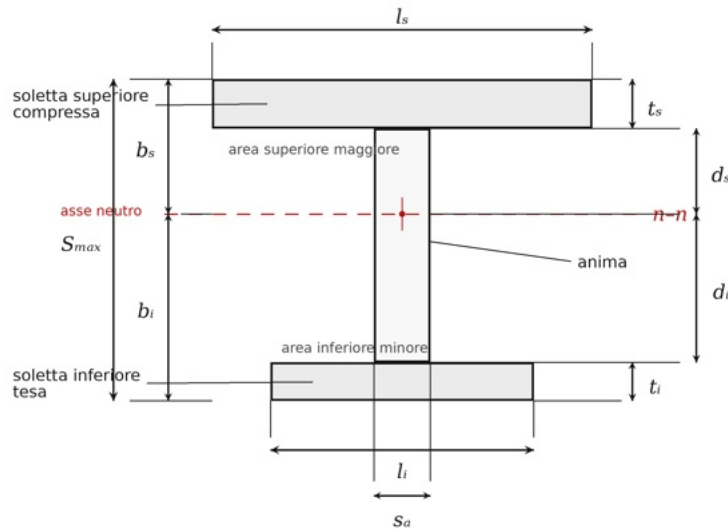


Figura 10.6: Il longherone asimmetrico: nomenclatura. Si noti che l'asse neutro non è più a metà altezza.

**Le tensioni ripartiscono l'altezza.** Nell'ipotesi, ormai consueta, che le tensioni assiali dovute alla flessione siano proporzionali alla distanza dall'asse neutro (Navier), la tensione di compressione e quella di trazione stanno fra loro come le distanze dei lembi esterni dall'asse neutro:

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_t} = \frac{h_s}{h_i}. \quad (10.14)$$

Qui serve una proprietà delle proporzioni, che conviene dimostrare una volta per tutte.

#### Teoria – Una proprietà delle proporzioni (il “comporre”)

Le due scritture seguenti sono equivalenti:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}. \quad (10.15)$$

*Dimostrazione.* Dalla prima, passando ai reciproci e sommando l'unità ad ambo i membri:

$$\frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}, \quad (10.16)$$

e passando di nuovo ai reciproci si ottiene la tesi. Il percorso è reversibile, quindi vale il “se e solo se”. ■

Applicando questa proprietà alla (10.14), e tenendo presente che  $S_{\max} = h_s + h_i$ :

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_t + \sigma_c} = \frac{h_s}{h_i + h_s} = \frac{h_s}{S_{\max}}, \quad (10.17)$$

da cui si ricavano subito le due distanze esterne:

$$h_s = S_{\max} \frac{\sigma_c}{\sigma_t + \sigma_c}, \quad h_i = S_{\max} \frac{\sigma_t}{\sigma_t + \sigma_c}. \quad (10.18)$$

Introducendo per comodità i due rapporti adimensionali

$$a = \frac{\sigma_c}{\sigma_t + \sigma_c}, \quad b = \frac{\sigma_t}{\sigma_t + \sigma_c}, \quad (a + b = 1) \quad (10.19)$$

le (10.18) si scrivono  $h_s = a S_{\max}$  e  $h_i = b S_{\max}$ ; quadrando e sottraendo membro a membro si trova la relazione

$$h_i^2 - h_s^2 = S_{\max}^2 (b^2 - a^2). \quad (10.20)$$

**L'asse neutro impone i momenti statici.** Per definizione stessa di asse neutro (baricentrico), i momenti statici delle due solette rispetto a esso devono essere uguali fra loro. Per un rettangolo di larghezza  $l$  compreso fra le distanze  $d$  ed  $b$  dall'asse (con  $b > d$ ), il momento statico vale area per distanza del baricentro:

$$S_n = l (b - d) \frac{b + d}{2} = \frac{l}{2} (b^2 - d^2). \quad (10.21)$$

Uguagliando i momenti statici della soletta superiore e di quella inferiore e semplificando  $l/2$ :

$$h_s^2 - d_s^2 = h_i^2 - d_i^2 \quad \implies \quad d_i^2 - d_s^2 = h_i^2 - h_s^2, \quad (10.22)$$

che, per la (10.20), diventa la *prima equazione* del nostro sistema:

$$\boxed{d_i^2 - d_s^2 = S_{\max}^2 (b^2 - a^2)} \quad (10.23)$$

**Il momento d'inerzia chiude il sistema.** Il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro si ottiene componendo i rettangoli (momento d'inerzia di un rettangolo rispetto alla propria base:  $J = l b^3 / 3$ ):

$$J = \frac{l}{3} [(h_s^3 + h_i^3) - (d_s^3 + d_i^3)]. \quad (10.24)$$

Lo stesso momento d'inerzia, dal punto di vista dei carichi applicati, deve garantire che al lembo compresso la tensione valga esattamente  $\sigma_c$ ; da  $\sigma_c = M_f h_s / J$ :

$$J = \frac{M_f h_s}{\sigma_c}. \quad (10.25)$$

Uguagliando i secondi membri delle (10.24)–(10.25) e indicando con

$$X = \frac{3 M_f h_s}{l \sigma_c} \quad (10.26)$$

il gruppo di termini tutti noti, si ottiene la *seconda equazione*:

$$\boxed{d_i^3 = (h_s^3 + h_i^3) - d_s^3 - X} \quad (10.27)$$

**Risultato – Il sistema del longherone asimmetrico**

Il dimensionamento si riduce al sistema nelle due incognite  $d_s, d_i$ :

$$\begin{cases} d_i^3 = (b_s^3 + b_i^3) - d_s^3 - X \\ d_i = \sqrt{S_{\max}^2 (b^2 - a^2) + d_s^2} \end{cases} \quad (10.28)$$

Non è risolubile in maniera elementare: si assegna un valore di primo tentativo a  $d_s$ , si ricava  $d_i$  dalla prima equazione e lo si confronta con il valore fornito dalla seconda; variando opportunamente  $d_s$  si giunge, entro qualche tentativo, alla coppia che soddisfa entrambe con la precisione voluta. Gli spessori delle solette seguono per differenza:  $b_s = b_s - d_s$  e  $b_i = b_i - d_i$ .

**Esempio 10.2 — Dimensionamento per tentativi di un longherone asimmetrico****Dati**

Stessa sezione dell'esempio precedente ( $S_{\max} = 120 \text{ mm}$ ,  $l = 80 \text{ mm}$ ,  $M_f = 12 \times 10^6 \text{ N mm}$ ), ma con tensioni ammissibili diverse:  $\sigma_c = 140 \text{ N/mm}^2$  per la soletta compressa (limitata dall'instabilità locale) e  $\sigma_t = 180 \text{ N/mm}^2$  per quella tesa.

**Passo 1 — Le distanze esterne.** I rapporti adimensionali:

$$a = \frac{140}{180 + 140} = 0,4375, \quad b = \frac{180}{320} = 0,5625, \quad (10.29)$$

da cui, con le (10.18),

$$b_s = 0,4375 \cdot 120 = 52,5 \text{ mm}, \quad b_i = 0,5625 \cdot 120 = 67,5 \text{ mm}. \quad (10.30)$$

L'asse neutro si sposta verso la soletta compressa, come dev'essere: la soletta più grande “attira” il baricentro.

**Passo 2 — I termini noti.**

$$X = \frac{3 \cdot 12 \cdot 10^6 \cdot 52,5}{80 \cdot 140} = 168.750 \text{ mm}^3, \quad (10.31)$$

$$b_s^3 + b_i^3 = 144\,703 + 307\,547 = 452.250 \text{ mm}^3, \quad (10.32)$$

$$S_{\max}^2 (b^2 - a^2) = 14\,400 \cdot (0,31641 - 0,19141) = 1.800 \text{ mm}^2. \quad (10.33)$$

**Passo 3 — La ricerca per tentativi.** Assegnato  $d_s$ , ciascuna delle due equazioni fornisce il proprio valore di  $d_i$ :

$$d_i^{(1)} = \sqrt[3]{452\,250 - 168\,750 - d_s^3}, \quad d_i^{(2)} = \sqrt{1800 + d_s^2};$$

si cerca il valore di  $d_s$  che li rende uguali.

| $d_s$ [mm] | $d_i^{(1)}$ [mm] | $d_i^{(2)}$ [mm] | Esito                                              |
|------------|------------------|------------------|----------------------------------------------------|
| 40,0       | 61,05            | 58,99            | $d_i^{(1)} > d_i^{(2)}$ : aumentare $d_s$          |
| 43,0       | 58,87            | 60,41            | $d_i^{(1)} < d_i^{(2)}$ : troppo, tornare indietro |
| 42,0       | 59,39            | 59,70            | vicini, ancora un ritocco                          |
| 41,7       | 59,55            | 59,49            | quasi coincidenti                                  |
| 41,75      | 59,52            | 59,52            | <b>convergenza</b>                                 |

Tabella 10.1: Ricerca per tentativi della coppia  $(d_s, d_i)$ .

**Passo 4 — Gli spessori e la scelta commerciale.** Dalla convergenza  $d_s = 41,75$  mm,  $d_i = 59,52$  mm:

$$b_s = b_s - d_s = 52,5 - 41,75 = 10,75 \text{ mm}, \quad b_i = b_i - d_i = 67,5 - 59,52 = 7,98 \text{ mm}. \quad (10.34)$$

La soletta compressa risulta più spessa di quella tesa: fisicamente coerente. Si adottano gli spessori commerciali  $b_s = 11$  mm e  $b_i = 9$  mm, da cui  $d_s = 41,5$  mm,  $d_i = 58,5$  mm.

**Passo 5 — Verifica finale.** Con la (10.24):

$$J = \frac{80}{3} [452\,250 - (71\,473 + 200\,202)] \approx 4,82 \times 10^6 \text{ mm}^4, \quad (10.35)$$

e con Navier sui due lembi:

$$\sigma_c = \frac{12 \cdot 10^6 \cdot 52,5}{4,82 \cdot 10^6} \approx 130,8 \text{ N/mm}^2 < 140 \text{ N/mm}^2, \quad (10.36)$$

$$\sigma_t = \frac{12 \cdot 10^6 \cdot 67,5}{4,82 \cdot 10^6} \approx 168,2 \text{ N/mm}^2 < 180 \text{ N/mm}^2. [\text{verificato}] \quad (10.37)$$

### Rigore e onestà del metodo

A convergenza esatta ( $d_s = 41,75$ ;  $d_i = 59,52$ ) le tensioni ai lembi valgono *esattamente*  $\sigma_c = 140$  e  $\sigma_t = 180 \text{ N/mm}^2$ : il sistema è costruito apposta perché entrambe le solette lavorino alla propria ammissibile, senza sprechi. L'arrotondamento commerciale introduce poi il margine che si vede nella verifica. Se aveste imposto a entrambe le solette la  $\sigma_c = 140 \text{ N/mm}^2$  (longherone simmetrico), l'area della soletta tesa sarebbe risultata maggiore del necessario: l'asimmetria è, in sostanza, un risparmio di peso.

## 10.2.3 L'anima a taglio

Dimensionate le solette per il momento flettente, occorre dimensionare (o verificare) l'*anima* del longherone per la sollecitazione di taglio. La sollecitazione  $T$  induce nella sezione dell'anima — un rettangolo di altezza  $b$  (la distanza fra le solette) e spessore  $l_a$  — una tensione tangenziale *media*

$$\tau_{med} = \frac{T}{b l_a}. \quad (10.38)$$

Ma sappiamo dal Capitolo 6 (Jourawsky) che nella sezione rettangolare la tensione di taglio ha andamento parabolico e raggiunge in mezzzeria il valore massimo

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \tau_{med} = \frac{3}{2} \frac{T}{b l_a}. \quad (10.39)$$

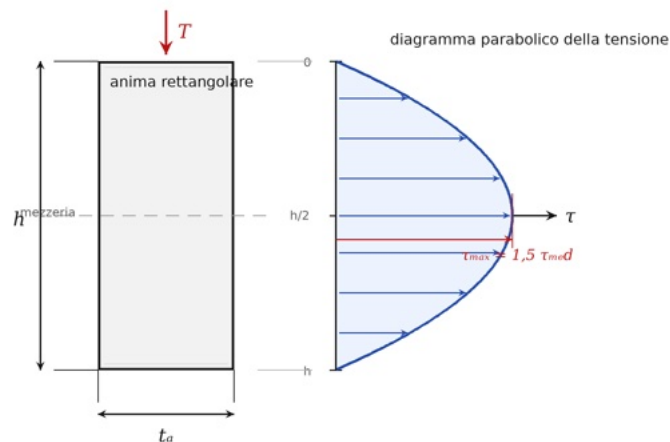


Figura 10.7: La distribuzione del taglio nell'anima.

In fase di progetto si impone che la tensione massima uguagli l'ammissibile a taglio  $\tau_a$  del materiale, e si ricava lo spessore dell'anima:

$$l_a = \frac{3}{2} \frac{T}{b \tau_a} \quad (10.40)$$

Anche qui, lo spessore effettivo si sceglie come il valore commerciale più vicino, *per eccesso*, a quello calcolato.

#### Da dove viene $\tau_a = 0,58 \sigma_s$ ?

Per i materiali metallici la tensione tangenziale ammissibile si lega a quella normale tramite il criterio di Von Mises (lo stesso della verifica combinata, Capitolo 6): al puro taglio lo snervamento avviene quando  $\tau = \sigma_s / \sqrt{3} \approx 0,577 \sigma_s$ . Di qui la regola pratica, che useremo sistematicamente:  $\tau_a = 0,58 \sigma_s$ .

### 10.2.4 Il cassone a torsione

Resta il momento torcente. Per l'ala monolongherone la struttura resistente alla torsione è il *cassone* formato dal rivestimento del bordo d'attacco e dall'anima del longherone: una sezione chiusa in parete sottile, esattamente il caso delle formule di Bredt del Capitolo 5.

Determinate le dimensioni del longherone, dell'intero cassone resta da dimensionare una sola grandezza: lo spessore  $h_t$  della lamiera del bordo d'attacco. L'area  $A_t$  racchiusa dalla linea media del cassone, infatti, è già nota: dipende solo dal profilo alare e dalla posizione dell'anima; e lo spessore dell'anima è stato fissato dalla verifica a taglio.

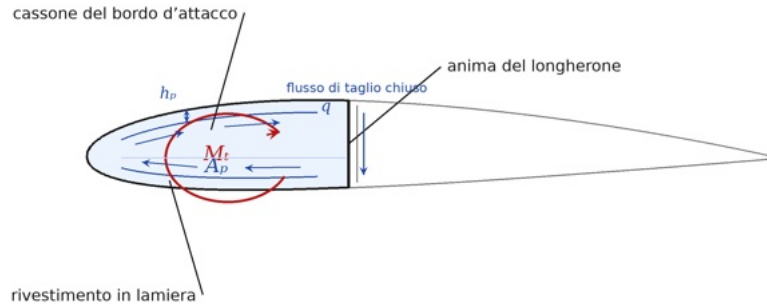


Figura 10.8: Il cassone di torsione dell'ala monolongherone.

Dalla prima formula di Bredt, il flusso di taglio nel lamierato vale

$$q = \frac{M_t}{2 A_t}, \quad \text{e quindi} \quad \tau = \frac{q}{h_t} = \frac{M_t}{2 A_t h_t}. \quad (10.41)$$

In verifica si controlla  $\tau < \tau_a$ ; in progetto si ricava direttamente lo spessore minimo:

$$h_t = \frac{M_t}{2 A_t \tau_a} \quad (10.42)$$

scegliendo poi, al solito, la lamiera commerciale immediatamente superiore.

**La verifica di rigidità.** Per le strutture aeronautiche la robustezza non basta: occorre verificare anche la *rigidità*, perché le deformazioni modificano le forze aerodinamiche e quindi le condizioni di carico della struttura stessa. Per la torsione, la seconda formula di Bredt fornisce la rigidità torsionale della sezione chiusa,

$$B = \frac{4 G A_t^2}{\sum_i \frac{c_i}{t_i}}, \quad (10.43)$$

dove la sommatoria percorre i tratti della linea media (lunghezza  $c_i$ , spessore  $t_i$ : per il nostro cassone, l'arco del bordo d'attacco e l'anima). Detta  $\ell$  la lunghezza della semiala, l'estremità presenterà un angolo di torsione massimo

$$\Delta\theta = \frac{M_t \ell}{B}. \quad (10.44)$$

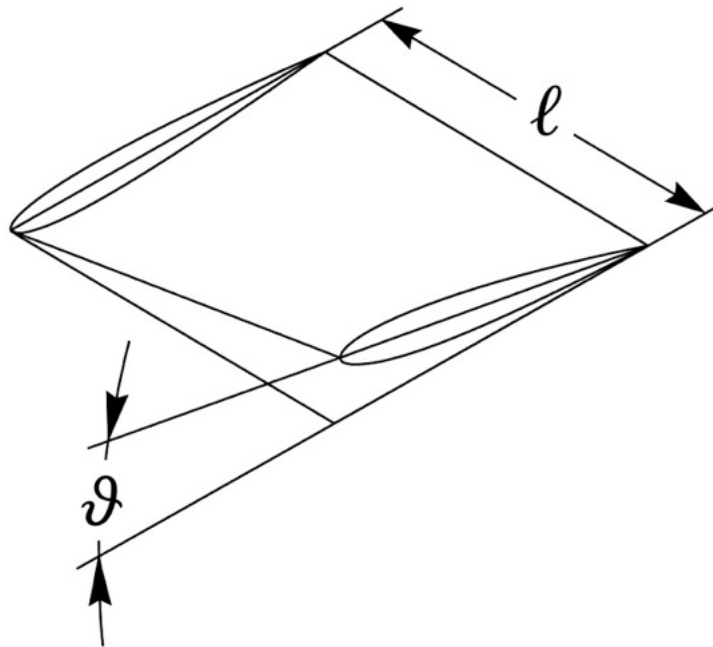


Figura 10.9: L'angolo di torsione dell'estremità alare.

**Attenzione – L'angolo di torsione non deve superare pochi gradi**

Il valore di  $\Delta\theta$  deve restare dell'ordine di *qualche grado*: i regolamenti dei velivoli assegnano un massimo all'angolo di torsione dell'estremità rispetto alla radice, tipicamente intorno a  $4^\circ$ . La ragione è aeroelastica: una torsione che aumenta l'incidenza fa crescere la portanza, che a sua volta fa crescere il momento torcente e quindi la torsione — un circolo che, oltre certe velocità, può divergere con effetti catastrofici per l'integrità dell'ala. Se il calcolo fornisce un  $\Delta\theta$  troppo alto, occorre aumentare la rigidezza torsionale  $B$ : in pratica, ispessire la lamiera del bordo d'attacco, *anche se la verifica di robustezza era già soddisfatta*. È l'esempio più chiaro della distinzione fra robustezza e rigidezza introdotta nel Capitolo 8.

## 10.3 Il calcolo completo della sezione alare

Dopo avere analizzato per grandi linee i criteri di dimensionamento dei singoli elementi, mettiamo in fila un *procedimento di calcolo completo*, che richiama tutte le informazioni, le ipotesi e le assunzioni necessarie per un corretto dimensionamento della sezione alare di un'ala monolongherone. Sono dati la geometria alare e i pesi; il profilo alare può essere assegnato oppure viene scelto da apposite tabelle.

**Passo 1 — Le forze agenti**

Detto  $n$  il fattore di carico (o *fattore di contigenza*: il regolamento lo fissa, e lo studieremo nel Capitolo 11) e  $W$  il peso del velivolo, all'equilibrio la portanza totale vale

$$L_{tot} = nW. \quad (10.45)$$

Si calcola poi la superficie alare *esterna* alla sezione considerata,  $S_{est}$ : nell'ipotesi che la portanza sia uniformemente distribuita sulla superficie ( $L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L$ , quindi  $L$  proporzionale a  $S$ ), la portanza esterna è

$$\frac{L_{est}}{L_{tot}} = \frac{S_{est}}{S_{tot}} \quad \Rightarrow \quad L_{est} = L_{tot} \frac{S_{est}}{S_{tot}}. \quad (10.46)$$

Facendo l'ulteriore ipotesi che l'ala abbia struttura omogenea (peso dell'ala proporzionale alla superficie), lo stesso rapporto ripartisce il peso alare:  $Q_{est}/Q_{ala} = S_{est}/S_{tot}$ .

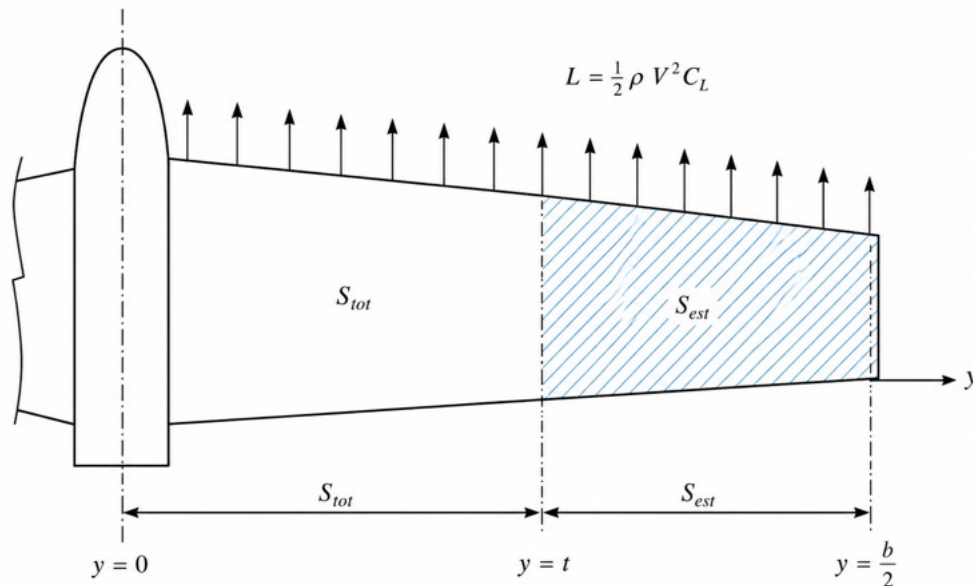


Figura 10.10: La superficie alare esterna alla sezione considerata.

**Passo 2 — La risultante sulla sezione**

Sulla parte esterna dell'ala agiscono la portanza  $L_{est}$  (verso l'alto) e il peso proprio  $Q_{est}$  (verso il basso). In un calcolo di robustezza il peso, come la portanza, va moltiplicato per il fattore di carico: la risultante delle forze esterne è dunque

$$F_{est} = L_{est} - n Q_{est}. \quad (10.47)$$

Il peso dell'ala, si noti, *allevia* la flessione: è lo stesso effetto di sgravio che abbiamo già incontrato e che ritroveremo, formalizzato dalla formula di Gabrielli, nelle esercitazioni.

**Passo 3 — Taglio e momento flettente**

Il punto di applicazione di  $F_{est}$  si può ritenere il baricentro della superficie esterna  $S_{est}$ , distante  $y_G$  dalla sezione in analisi. La sezione da dimensionare risulta quindi sollecitata da

$$T = F_{est}, \quad M_f = T y_G. \quad (10.48)$$

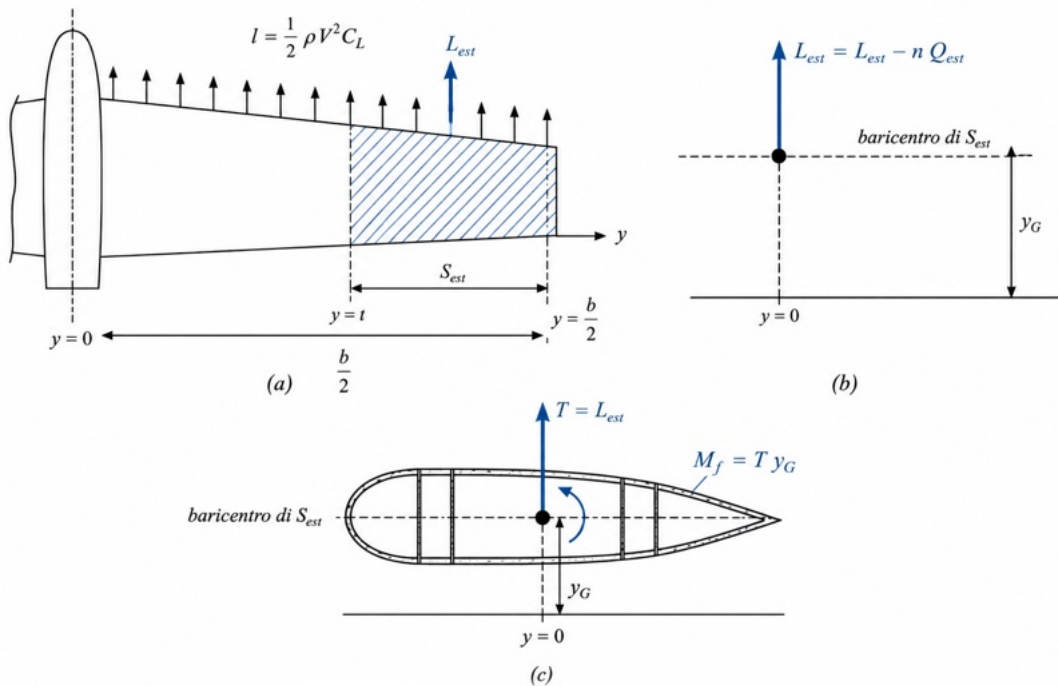


Figura 10.11: Dalla risultante esterna alle sollecitazioni della sezione.

**Passo 4 — Le solette**

Trattandosi di ala monolongherone, al taglio resiste l'anima, al momento flettente resistono le due solette: quella superiore compressa, quella inferiore tesa. Il momento flettente è equilibrato dalla coppia delle due forze  $F_s$ , distanti fra loro del braccio  $b_f$  (la distanza fra i baricentri delle solette):

$$M_f = F_s b_f \quad \Rightarrow \quad F_s = \frac{M_f}{b_f}. \quad (10.49)$$

Noto lo spessore massimo del profilo  $s_{max}$  e ipotizzato lo spessore  $t_s$  della soletta, il braccio vale

$$b_f = s_{max} - 2 \frac{t_s}{2} = s_{max} - t_s, \quad (10.50)$$

perché ciascun baricentro dista  $t_s/2$  dal lembo esterno. Ammettendo che la sollecitazione su ciascuna soletta sia uniformemente distribuita sulla sezione (l'area è piccola e vicina al lembo: l'approssimazione è buona), scelto il materiale e desunto dalle tabelle il carico di snervamento  $R_s$ , il

regolamento fissa il coefficiente di sicurezza

$$k = 2, \quad (10.51)$$

da cui la tensione ammissibile  $\sigma_a = R_s/k$  e l'area resistente della singola soletta:

$$A_s = \frac{F_s}{\sigma_a}, \quad A_s = l_s t_s \implies l_s = \frac{A_s}{t_s}. \quad (10.52)$$

Con  $t_s$  già fissato, si ricava la larghezza  $l_s$  e il dimensionamento delle solette è terminato.

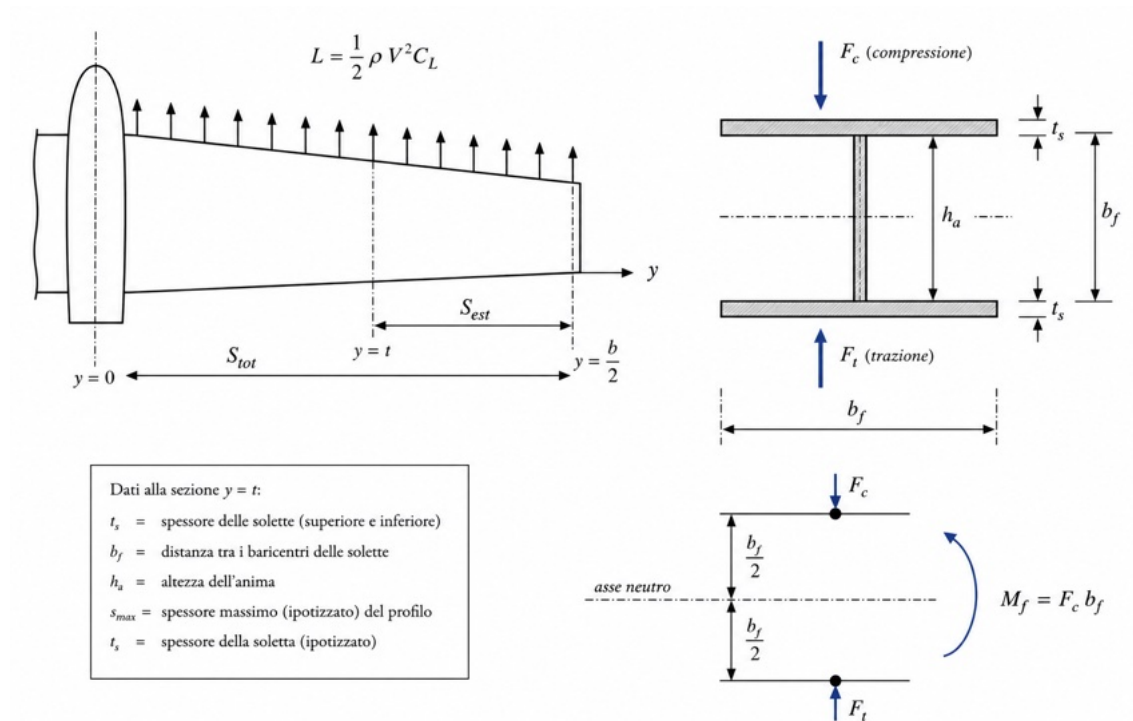


Figura 10.12: Il momento flettente diventa una coppia di forze nelle solette.

### Perché il longherone sta nel punto più spesso del profilo

Poiché  $F_s = M_f/b_f$ , a un aumento del braccio corrisponde una diminuzione delle forze: il longherone andrà posizionato nella parte di sezione alare avente il massimo spessore. È la stessa conclusione del paragrafo 10.2.1, ritrovata per altra via.

### Passo 5 — L'anima

La dimensione verticale dell'anima è ormai fissata:

$$h_a = s_{max} - 2 t_s. \quad (10.53)$$

Se il materiale dell'anima è lo stesso delle solette (come spesso accade), la tensione ammissibile a taglio si ottiene dal criterio di Von Mises,

$$\tau_a = 0,58 \sigma_a, \quad (10.54)$$

e, essendo la sezione dell'anima rettangolare ( $\tau_{\max} = 1,5 \tau_{med}$ , con  $\tau_{med} = T/A_l$ ), imponendo  $\tau_{\max} = \tau_a$  si ricava l'area resistente al taglio e quindi lo spessore:

$$A_l = 1,5 \frac{T}{\tau_a}, \quad l_a = \frac{A_l}{b_a}. \quad (10.55)$$

Lo spessore dell'anima viene poi scelto come il valore più vicino, per eccesso, tra i prodotti disponibili sul mercato.

### Passo 6 — Il momento torcente e il bordo d'attacco

L'espressione aerodinamica del momento torcente della porzione d'ala esterna è

$$M_t = \frac{1}{2} \rho S_{est} V^2 C_M c_{ma}, \quad (10.56)$$

in cui  $C_M$  è il coefficiente di momento (adimensionale) e  $c_{ma}$  la corda media aerodinamica. Poiché  $M_t$  cresce con il quadrato della velocità, ci si pone nelle condizioni di *massima velocità* di volo; se  $C_M$  non è noto, lo si ricava dal diagramma  $C_M = f(C_L)$  del profilo, calcolando prima il coefficiente di portanza in quelle condizioni:

$$L = n W = \frac{1}{2} \rho S V_{\max}^2 C_L \quad \implies \quad C_L = \frac{2 n W / S}{\rho V_{\max}^2}. \quad (10.57)$$

Nota la geometria del profilo si determina l'area  $A_t$  racchiusa dal cassone; con Bredt (eqs. (10.41) and (10.42)) si ricava il flusso  $q = M_t / (2A_t)$  e lo spessore minimo del lamierato  $h_t = q / \tau_a$ , arrotondato alla lamiera commerciale superiore. Infine si verifica la rigidezza con le eqs. (10.43) and (10.44).

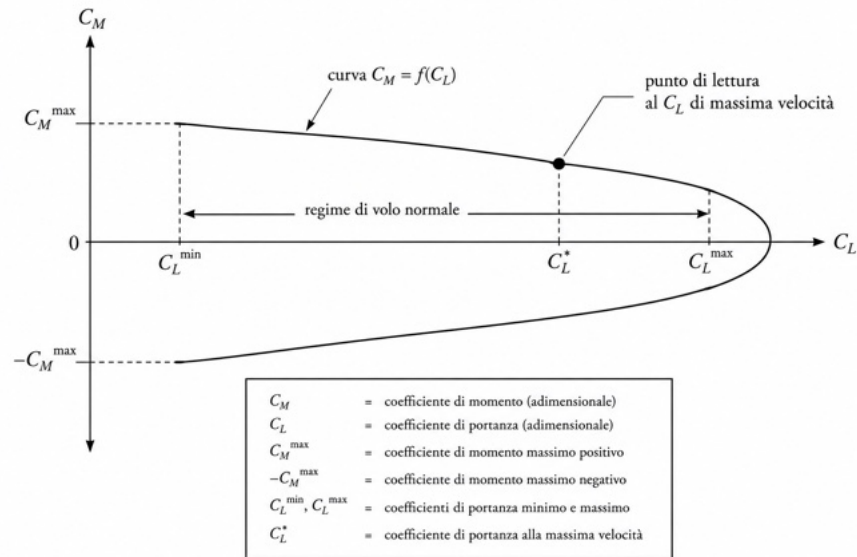


Figura 10.13: La lettura del coefficiente di momento dalla polare del profilo.

### Esempio 10.3 — Il calcolo completo della sezione alla radice

Applichiamo l'intera procedura a un monomotore leggero, sviluppando ogni passaggio come andrebbe presentato in sede d'esame.

#### Dati

Peso massimo  $Q = 1.000 \text{ kg}$  ( $W = 9.810 \text{ N}$ ); fattore di carico  $n = 3,8$ ; ala rettangolare: apertura  $b = 10 \text{ m}$ , corda  $c = 1,2 \text{ m}$ , superficie  $S = 12 \text{ m}^2$ ; peso dell'ala  $Q_{ala} = 100 \text{ kg}$ ; profilo con spessore relativo del 12%; velocità massima  $V_{\max} = 280 \text{ km/h} = 77,8 \text{ m/s}$  al livello del mare ( $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$ ); dal diagramma  $C_M = f(C_L)$  del profilo, in condizioni di massima velocità,  $|C_M| = 0,05$ ; area del cassone di torsione (da rilievo grafico del profilo)  $A_t = 3,0 \times 10^4 \text{ mm}^2$ ; sviluppo dell'arco del bordo d'attacco  $c_1 = 800 \text{ mm}$ . Materiale: Al 2024-T4,  $R_s = 324 \text{ N/mm}^2$ ,  $G = 27.000 \text{ N/mm}^2$ ; coefficiente di sicurezza  $k = 2$ . Sezione di calcolo: la *radice* della semiala. Lo spessore delle solette è ipotizzato  $t_s = 20 \text{ mm}$ .

**Passo 1 — Le forze agenti.** La portanza totale:

$$L_{tot} = nW = 3,8 \cdot 9810 = 37.278 \text{ N.} \quad (10.58)$$

Alla radice, la superficie esterna è l'intera semiala:  $S_{est} = 5 \cdot 1,2 = 6 \text{ m}^2$ , cioè  $S_{est}/S_{tot} = 0,5$ ; quindi

$$L_{est} = 37.278 \cdot 0,5 = 18.639 \text{ N}, \quad Q_{est} = \frac{100}{2} \cdot 9,81 = 490,5 \text{ N.} \quad (10.59)$$

**Passo 2 — La risultante.** Con la (10.47):

$$F_{est} = 18.639 - 3,8 \cdot 490,5 = 18.639 - 1864 = 16.775 \text{ N.} \quad (10.60)$$

**Passo 3 — Taglio e momento flettente.** Per l'ala rettangolare con portanza uniforme, il baricentro di  $S_{est}$  è a metà semiala:  $y_G = 2,5$  m. Dunque

$$T = 16.775 \text{ N}, \quad M_f = 16.775 \cdot 2,5 = 41.938 \text{ N m} \approx 4,19 \times 10^7 \text{ N mm}. \quad (10.61)$$

**Passo 4 — Le solette.** Spessore massimo del profilo:  $s_{\max} = 0,12 \cdot 1200 = 144$  mm. Con  $t_s = 20$  mm, il braccio della coppia:

$$b_f = s_{\max} - t_s = 144 - 20 = 124 \text{ mm}, \quad (10.62)$$

e la forza su ciascuna soletta:

$$F_s = \frac{M_f}{b_f} = \frac{4,194 \cdot 10^7}{124} \approx 338.210 \text{ N}. \quad (10.63)$$

Tensione ammissibile e area resistente:

$$\sigma_a = \frac{R_s}{k} = \frac{324}{2} = 162 \text{ N/mm}^2, \quad A_s = \frac{F_s}{\sigma_a} = \frac{338.210}{162} \approx 2.088 \text{ mm}^2, \quad (10.64)$$

da cui la larghezza

$$l_s = \frac{A_s}{t_s} = \frac{2088}{20} = 104,4 \text{ mm} \rightarrow l_s = 105 \text{ mm}. \quad (10.65)$$

Verifica con la misura commerciale:  $A_s = 105 \cdot 20 = 2.100 \text{ mm}^2$ ,  $\sigma = 338.210/2100 \approx 161,1 \text{ N/mm}^2 < 162 \text{ N/mm}^2$ . [verificato]

**Passo 5 — L'anima.** Altezza e ammissibile a taglio:

$$h_a = s_{\max} - 2 t_s = 144 - 40 = 104 \text{ mm}, \quad \tau_a = 0,58 \cdot 162 \approx 94 \text{ N/mm}^2. \quad (10.66)$$

Area resistente e spessore:

$$A_t = 1,5 \frac{T}{\tau_a} = 1,5 \cdot \frac{16.775}{94} \approx 268 \text{ mm}^2, \quad l_a = \frac{A_t}{h_a} = \frac{268}{104} \approx 2,6 \text{ mm} \rightarrow l_a = 3 \text{ mm}. \quad (10.67)$$

Verifica:  $\tau_{\max} = 1,5 \cdot 16.775 / (104 \cdot 3) \approx 80,6 \text{ N/mm}^2 < 94 \text{ N/mm}^2$ . [verificato]

**Passo 6 — Il momento torcente.** Il coefficiente di portanza in condizioni di massima velocità:

$$C_L = \frac{2 n W / S}{\rho V_{\max}^2} = \frac{2 \cdot 37.278 / 12}{1,225 \cdot 77,8^2} \approx 0,84, \quad (10.68)$$

valore con cui, sul diagramma del profilo, si legge  $|C_M| = 0,05$  (dato). Il momento torcente della semiala:

$$M_t = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 6 \cdot 77,8^2 \cdot 0,05 \cdot 1,2 \approx 1.334 \text{ N m} = 1,334 \times 10^6 \text{ N mm}. \quad (10.69)$$

Il flusso di taglio e lo spessore minimo del bordo d'attacco:

$$q = \frac{M_t}{2 A_t} = \frac{1,334 \cdot 10^6}{2 \cdot 3,0 \cdot 10^4} \approx 22,2 \text{ N/mm}, \quad h_t = \frac{q}{\tau_a} = \frac{22,2}{94} \approx 0,24 \text{ mm}. \quad (10.70)$$

Un risultato istruttivo: la *robustezza* a torsione richiederebbe una lamiera sottilissima. Ma una lamiera da 0,24 mm non si può né chiodare né maneggiare: si adotta la lamiera commerciale minima ragionevole,  $h_t = 0,8$  mm.

**Passo 7 — La verifica di rigidezza.** Con  $h_t = 0,8$  mm, la rigidezza torsionale (10.43):

$$\sum_i \frac{c_i}{t_i} = \frac{800}{0,8} + \frac{104}{3} \approx 1035, \quad B = \frac{4 \cdot 27\,000 \cdot (3,0 \cdot 10^4)^2}{1035} \approx 9,39 \times 10^{10} \text{ N mm}^2, \quad (10.71)$$

e l'angolo di torsione dell'estremità (a favore di sicurezza,  $M_t$  costante sulla semiala,  $\ell = 5.000$  mm):

$$\Delta\theta = \frac{M_t \ell}{B} = \frac{1,334 \cdot 10^6 \cdot 5000}{9,39 \cdot 10^{10}} \approx 0,071 \text{ rad} \approx 4,1^\circ > 4^\circ. \quad (10.72)$$

La robustezza era a posto, la **rigidezza no**: l'angolo supera il limite regolamentare. Si passa alla lamiera successiva,  $h_t = 1,0$  mm:

$$\sum_i \frac{c_i}{t_i} = 800 + 34,7 \approx 835, \quad B \approx 1,16 \times 10^{11} \text{ N mm}^2, \quad \Delta\theta \approx 0,057 \text{ rad} \approx 3,3^\circ < 4^\circ. [\text{verificato}] \quad (10.73)$$

#### Risultato — La sezione dimensionata — e tre lezioni di metodo

Solette  $105 \times 20$  mm; anima  $104 \times 3$  mm; lamiera del bordo d'attacco  $1,0$  mm. E tre lezioni: (i) il taglio richiedeva  $0,24$  mm di lamiera, la *tecnologia* ne ha imposti  $0,8$ , la *rigidezza* ne ha pretesi  $1,0$  — a dimensionare non è sempre la resistenza; (ii) ogni grandezza calcolata è stata arrotondata al valore commerciale superiore, e la verifica è stata rifatta con quel valore; (iii) l'intera catena parte da due soli ingredienti,  $n$  e la geometria: è il motivo per cui l'involuppo di volo, che di  $n$  è la sorgente, sarà il prossimo grande tema.

## 10.4 L'ala bilongherone

L'ala **bilongherone** è formata dai seguenti elementi strutturali: *due longheroni* — intesi stavolta, sostanzialmente, come anime — uno anteriore e uno posteriore; una serie di *correntini*, che sostituiscono o integrano le solette dei longheroni; il *rivestimento* superiore e inferiore della parte di profilo compresa fra i due longheroni. Le parti di profilo esterne al cassone, anteriore e posteriore, sono di pura forma aerodinamica.

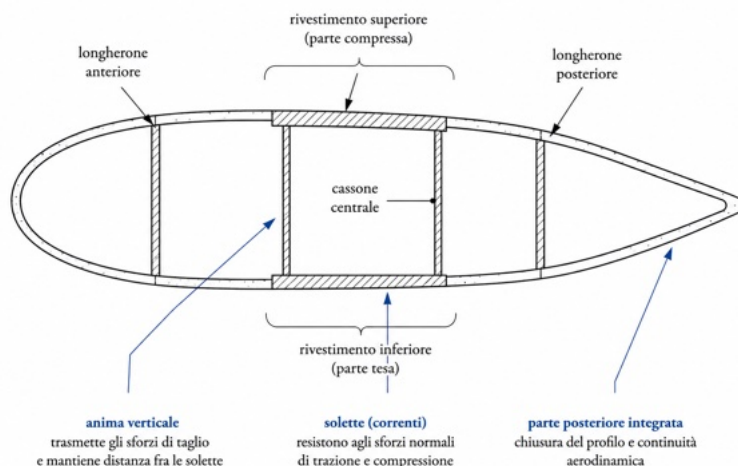


Figura 10.14: L'ala bilongherone: il cassone centrale è la struttura resistente.

La sollecitazione su una generica sezione, dovuta alle forze aerodinamiche agenti sulla parte di ala esterna, è al solito riducibile a una forza di taglio, un momento flettente e un momento torcente, con le convenzioni di segno già accettate. In una prima ipotesi, i carichi si possono pensare ripartiti così:

- le *anime* dei due longheroni supportano la forza di taglio  $T$ ;
- i *correntini* supportano il momento flettente  $M_f$ , mediante compressione di quelli superiori e trazione di quelli inferiori;
- il momento torcente  $M_t$  viene sopportato dalla struttura “tubolare” formata dai rivestimenti superiore e inferiore e dalle due anime: una sezione chiusa, di nuovo terreno di Bredt.

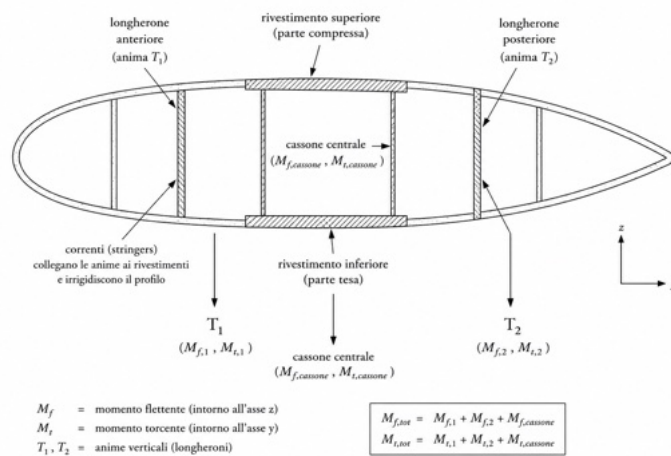


Figura 10.15: La divisione dei compiti nell'ala bilongherone.

**L'area collaborante dei correntini.** Riguardo ai correntini occorre una precisazione. Nel calcolo delle loro aree resistenti si tiene di solito conto anche di parte della lamiera di rivestimento, la quale, nei dintorni del singolo correntino, per così dire “collabora” alla resistenza a trazione o compressione. L'area della sezione vera e propria del correntino,  $A$ , viene aumentata di una quantità  $A_c$  dovuta alla porzione di rivestimento compresa fra gli interassi dei correntini stessi, ottenendosi così l'**area equivalente**

$$A_e = A + A_c. \quad (10.74)$$

Dal punto di vista del calcolo a flessione, la struttura correntino più lamiera viene quindi pensata come un'unica area resistente  $A_e$  collocata nel baricentro del correntino stesso.

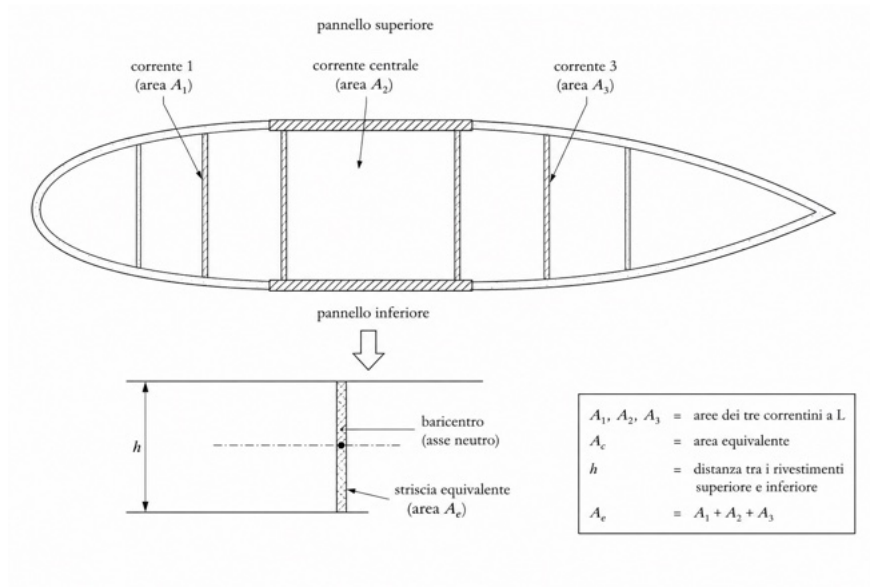


Figura 10.16: L'area equivalente: correntino più lamiera collaborante.

### Un volto già noto

È esattamente la *striscia collaborante* introdotta parlando del semiguscio ideale (Capitolo 8): il ponte fra il modello — tutta la flessione ai correnti, tutto il taglio ai pannelli — e la struttura reale, in cui la pelle un po' di flessione la porta davvero.

La situazione, in realtà, non è così semplice: nel caso dell'ala bilongherone, e ancor più nei casi complessi, diventa via via più difficile disaccoppiare le sollecitazioni e dimensionare i particolari per un preciso tipo di carico — come si è appena visto con il rivestimento, che collabora alla flessione oltre che resistere a torsione. L'analisi completa di queste strutture richiede il modello del semiguscio ideale nella sua forma generale, con i flussi di taglio pannello per pannello: un bagaglio che esula dai limiti di questa trattazione e per il quale si rimanda ai testi specializzati; il caso monolongherone, con il suo disaccoppiamento pulito, resta il riferimento per la prova d'esame.

## 10.5 La fusoliera

Per completare la struttura dell'aeroplano occorre un organo capace di collegare la cellula, gli impennaggi, il gruppo motopropulsore e il carrello, nonché di alloggiare il carico pagante e il personale di volo: la **fusoliera**. Deve essere progettata per resistere alle sollecitazioni aerodinamiche durante il volo e a quelle meccaniche generate dal gruppo motopropulsore e dal carrello durante le manovre a terra; a queste si aggiungono i carichi d'inerzia generati dalle masse durante le manovre.

### 10.5.1 Le sollecitazioni della fusoliera

Durante il volo le sollecitazioni derivano dalle forze aerodinamiche sugli impennaggi e dalle reazioni d'inerzia delle masse contenute nella fusoliera stessa. In generale:

- **flessione nel piano verticale**, per effetto dei carichi aerodinamici sugli impennaggi orizzontali e delle reazioni d'inerzia delle masse (per esempio nella manovra di richiamata);
- **flessione nel piano orizzontale**, per effetto dei carichi aerodinamici sugli impennaggi verticali; a questa si accompagna sempre una **torsione** attorno all'asse longitudinale;
- **torsione** per effetto dei carichi non simmetrici rispetto all'asse longitudinale (per esempio la manovra degli alettoni in virata);
- nelle manovre di decollo e atterraggio, le sollecitazioni trasmesse dal **carrello**: dipendono dalle masse della fusoliera e da quelle contenute, e sono sempre di flessione nel piano verticale.

Vediamo il caso più istruttivo. La normale deportanza di coda si può schematizzare come un carico concentrato  $P_c$  applicato all'estremità della fusoliera, vista come una *mensola incastrata* all'altezza del baricentro del velivolo: il carico genera una sollecitazione di taglio *costante* e un momento flettente *variabile linearmente* lungo la fusoliera — il primo caso di carico del Capitolo 6, ritrovato in coda a un aeroplano. La stessa cosa accade sotto l'azione delle forze aerodinamiche del piano verticale: in questo caso però, essendo il carico del timone non simmetrico rispetto all'asse della fusoliera, nasce anche un momento torcente.

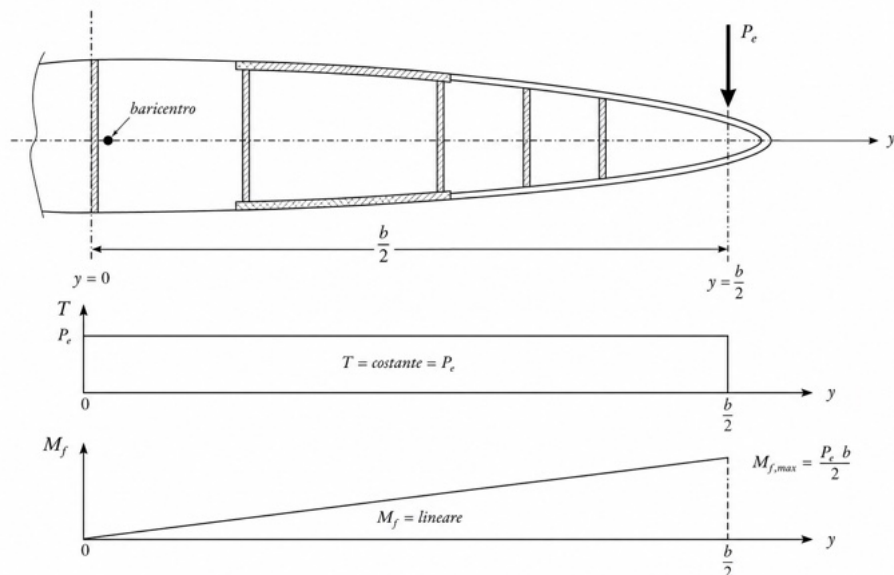


Figura 10.17: La fusoliera come mensola: il carico di coda.

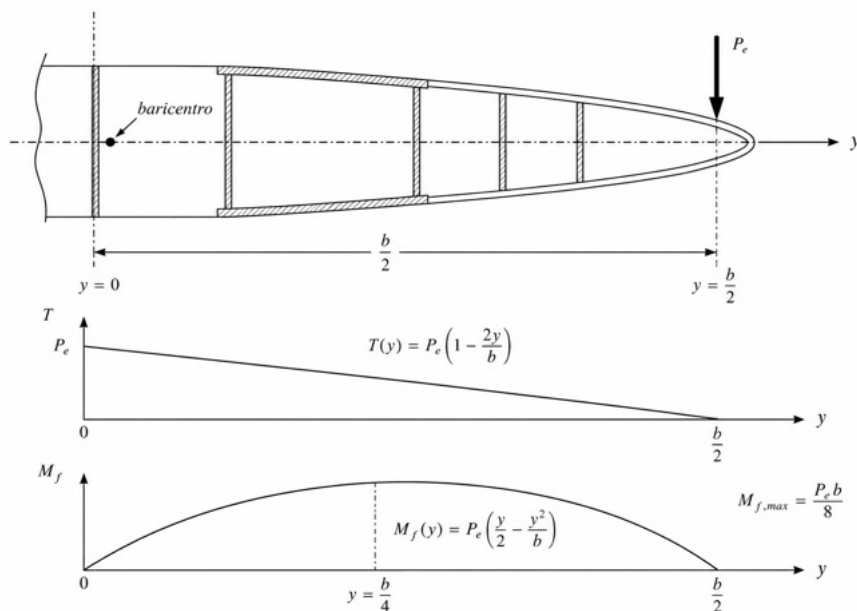


Figura 10.18: Il carico della deriva: flessione orizzontale più torsione.

Riguardo alla parte anteriore, anch'essa può essere vista come una mensola, ancorata in corrispondenza degli attacchi alari e sollecitata da carichi verticali verso il basso, pari al peso in volo orizzontale o alle forze di inerzia in manovra.

## 10.5.2 Le tre famiglie costruttive

Dal punto di vista costruttivo le fusoliere si distinguono in tre grandi categorie, definite dagli elementi che ne costituiscono la struttura resistente: fusoliere **a guscio**, **a semiguscio** e **a traliccio**. Le prime due famiglie ci sono già note dal Capitolo 8; qui le rileggiamo con gli occhi della fusoliera.

**Strutture a guscio.** Tutti i carichi sono sopportati dal rivestimento, che pertanto è rigido e resistente. Perché possa svolgere questa funzione, il rivestimento è appoggiato su elementi longitudinali (*correnti*) e trasversali (*ordinate*), che però nel guscio puro non sopportano alcun carico: hanno funzione esclusivamente di forma. I vantaggi: blocco unico di elevata rigidità e solidità; libertà nelle forme aerodinamiche; possibilità di *pressurizzare* l'ambiente interno; ottima resistenza agli agenti atmosferici. Gli svantaggi: mancano nodi strutturali che si prestino a sopportare carichi concentrati; peso e costo elevati.

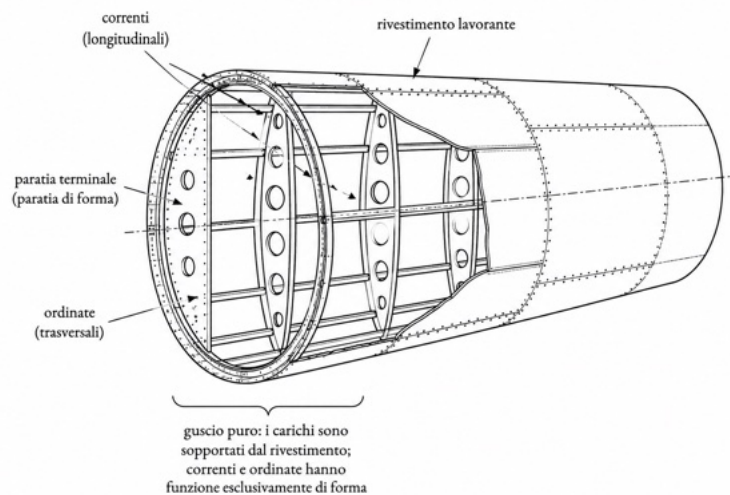


Figura 10.19: La fusoliera a guscio.

**Strutture a semiguscio.** I carichi sono sopportati in parte dal rivestimento e in parte dagli elementi longitudinali e trasversali. La struttura è costituita da un rivestimento rigido, da correnti orizzontali e da elementi di forza trasversali — le *centine di fusoliera*, che costituiscono le **ordinate** e formano la sezione maestra. I correnti sono profilati distribuiti a distanze convenienti lungo tutto il contorno; le ordinate possono essere realizzate con profilati piegati o con elementi separati collegati mediante chiodature. Il rivestimento, di norma in lamierino di alluminio, viene chiodato sulla struttura longitudinale e trasversale, preferibilmente con *rivetti a testa svasata*, per ottenere superfici esterne il più possibile levigate e prive di asperità. Vantaggi e svantaggi ricalcano quelli del guscio, con i vantaggi maggiormente esaltati: è la soluzione pressoché universale per i velivoli commerciali moderni.

I tre elementi strutturali del semiguscio di fusoliera, ciascuno con la sua funzione:

- i **correnti**, destinati ad assorbire gli sforzi longitudinali derivanti dalle sollecitazioni di flessione;
- il **rivestimento**, destinato ad assorbire gli sforzi tangenziali derivanti da flessione, taglio e torsione, con evidenti compiti anche di forma; per le fusoliere moderne dotate di impianto di pressurizzazione nasce anche il compito di resistere alle sollecitazioni indotte dalla sovrappressione interna;
- le **ordinate**, elementi trasversali con il compito di fornire appoggio ai correnti e al rivestimento e, evidentemente, di forma.

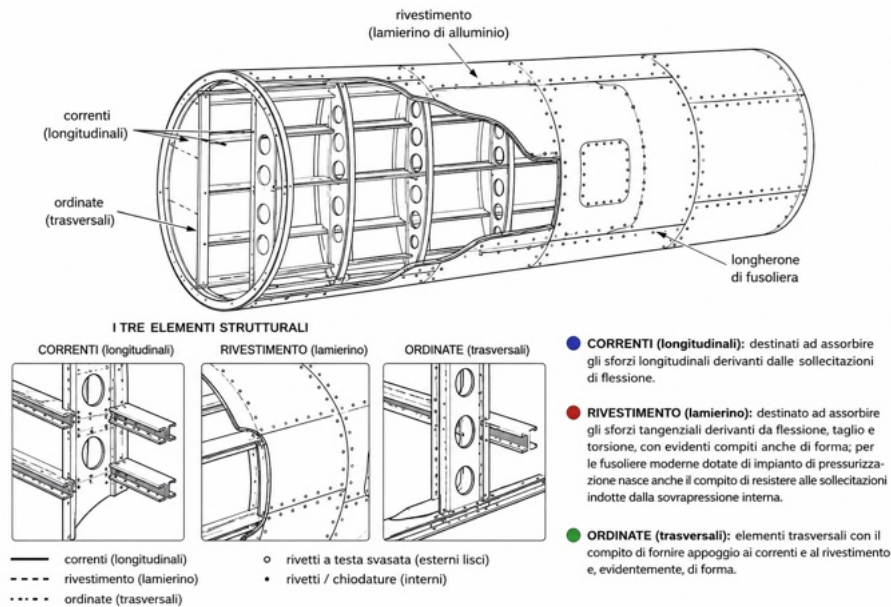


Figura 10.20: La fusoliera a semiguscio e i suoi elementi.

**Strutture a traliccio (o reticolari).** Tutti i carichi sono sopportati da un insieme di elementi longitudinali, verticali e trasversali che formano la struttura resistente; l'intersezione di questi elementi individua dei *punti nodali*, idonei a sopportare i carichi concentrati. I carichi aerodinamici si esercitano comunque sul rivestimento, che qui ha il solo compito di trasmetterli alla struttura sottostante. È il sistema più usato nella costruzione di aerei leggeri e ultraleggeri. Vantaggi: notevole leggerezza rispetto al semiguscio, basso costo, numerosi punti nodali per l'ancoraggio di carichi concentrati. Svantaggi: non permette elevati carichi aerodinamici né fusoliere pressurizzate, presenta elevata possibilità di incendio rispetto agli altri due tipi e scarsa resistenza agli agenti atmosferici.

Delle strutture a traliccio si distinguono sostanzialmente due tipi.

**Traliccio tipo Pratt:** è costituito da una serie di “gabbie” in tubi di acciaio incastrate una dietro l'altra, a cannocchiale; il diametro dei tubi longitudinali decresce dal muso verso la coda, dove le sollecitazioni sono minori. Gli elementi longitudinali si dicono, al solito, longeroni; gli elementi verticali e trasversali, assimilabili alle centine di fusoliera, sopportano tutti i tipi di sollecitazione; i tiranti metallici diagonali (*cavi di raffittimento*), che uniscono gli spigoli delle gabbie, irrigidiscono la struttura e sopportano solamente sollecitazioni a trazione.

**Traliccio tipo Warren:** la fusoliera è formata da quattro tubi longitudinali uniti reciprocamente da altri tubi in diagonale, in modo da formare una serie di elementi triangolari alternati in grado di sopportare sollecitazioni sia di compressione che di trazione, a seconda dei carichi.

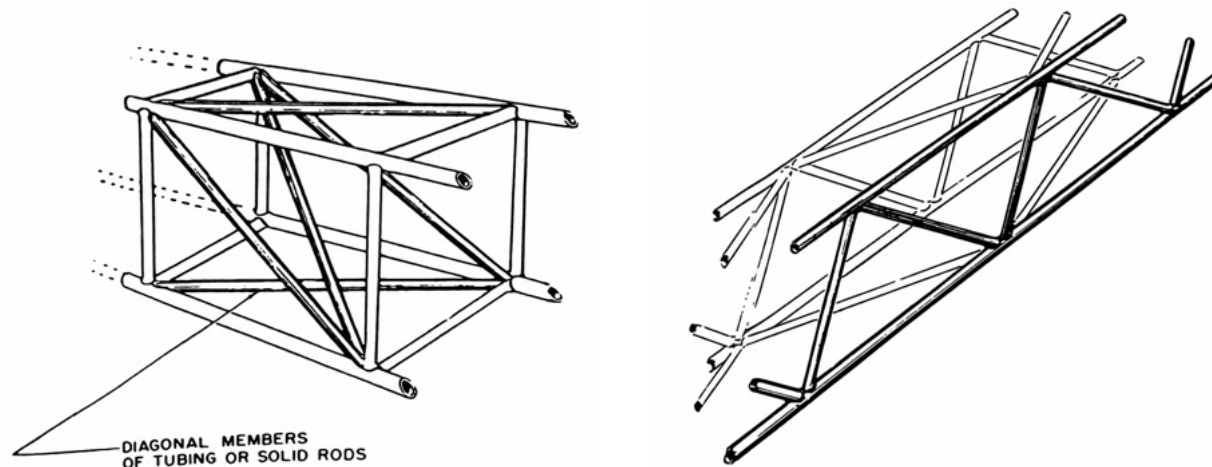


Figura 10.21: Le due architetture reticolari a confronto.

### Analogia pratica – Perché nel Warren la stessa asta è ora tesa, ora compressa

Si consideri una struttura bidimensionale di tipo Warren: in pratica una trave reticolare, incastrata da un lato, con un carico all'estremità rivolto ora verso l'alto e ora verso il basso. Seguendo il percorso del carico lungo i triangoli si vede che, a seconda della direzione della forza applicata, *lo stesso elemento strutturale* una volta è teso, l'altra è compresso: la “compressione” e la “tensione” scritte sulle aste si scambiano di posto quando il carico si inverte. Ecco perché le diagonali del Warren devono essere *tubi*, capaci di lavorare nei due versi — mentre nel Pratt, dove lo schema garantisce a ogni diagonale la sola trazione, bastano cavi tesi, più leggeri. Rispetto al Pratt, il Warren a parità di peso risulta più rigido, è costituito da un minor numero di elementi e offre una migliore ripartizione degli sforzi; l'unione mediante saldatura ne migliora ulteriormente la leggerezza.

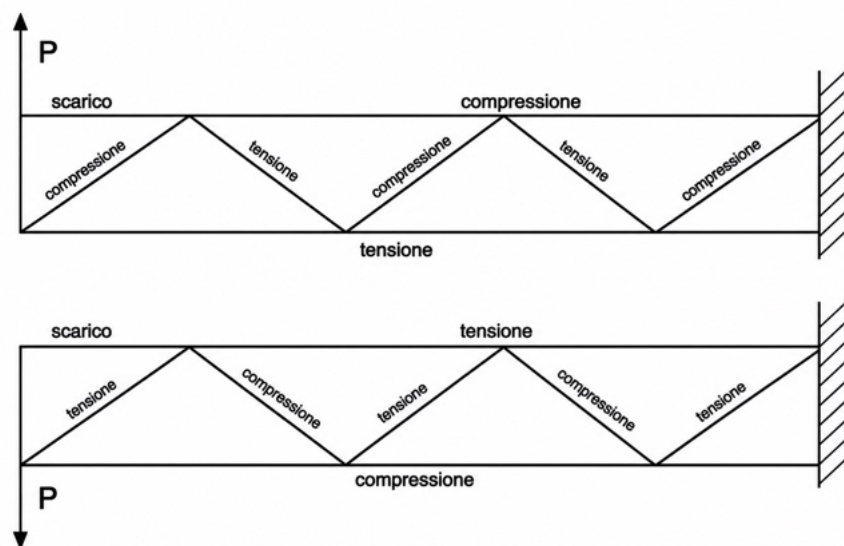
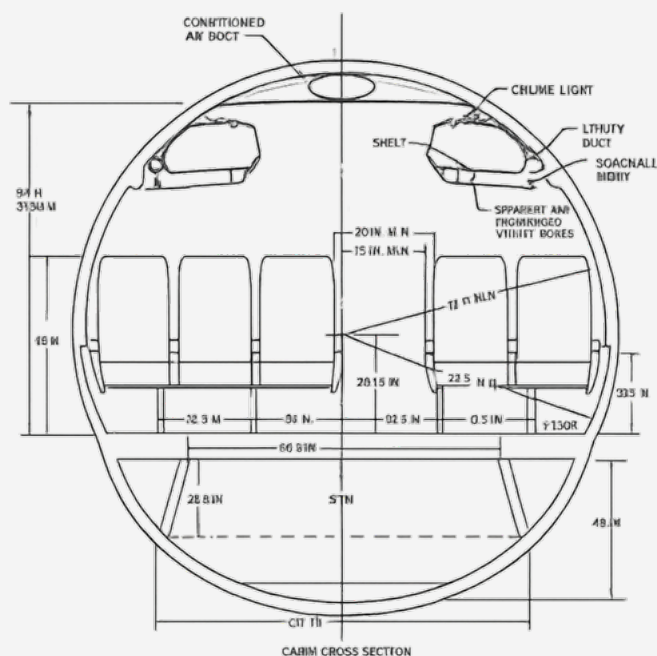


Figura 10.22: Il traliccio Warren sotto carico alternato: le aste si scambiano i ruoli.

La struttura a traliccio non ha una propria forma esterna tale da offrire appoggio adeguato ai rivestimenti: vengono perciò spesso interposti dei listelli longitudinali in legno (*correntini di forma*) su cui tendere la tela o fissare i pannelli. In definitiva, molte sono le soluzioni possibili; per i grandi velivoli commerciali moderni è pressoché universalmente adottata la soluzione a semiguscio, mentre le soluzioni reticolari sono ormai confinate a velivoli leggeri e ultraleggeri, perlopiù di costruzione amatoriale.

► **Approfondimento: Dentro la sezione di un bimotore commerciale**

A titolo di esempio, la sezione trasversale di un bimotore commerciale a corridoio singolo (la famiglia del DC-9/MD-80) mostra bene quanto la fusoliera sia, oltre che struttura, *architettura degli spazi*: cinque sedili per fila divisi da un corridoio in due gruppi (tre più due), vani portabagagli sopra i sedili, condotto dell'aria condizionata in alto. La sezione non è esattamente circolare ma a *due lobi*: nel lobo inferiore, sotto il pavimento, trovano posto bagagli e merci — e il pavimento stesso, con le sue traverse, diventa un elemento strutturale che lega i due lobi. La forma quasi circolare non è un vezzo: è la forma che meglio resiste alla pressurizzazione, con il rivestimento sollecitato da sforzi membranali uniformi — il guscio dell'uovo del Capitolo 8, nella sua condizione di lavoro preferita.



## 10.6 I collegamenti bullonati e rivettati

Le strutture aeronautiche sono composte dall'unione di numerose parti, ciascuna delle quali, a sua volta, è formata dall'unione di particolari. Tutti questi elementi vanno uniti mediante *collegamenti* o *giunzioni*. Nel campo delle costruzioni aeronautiche le tecniche più diffuse sono quattro: collegamenti **bullonati**, **rivettati**, **saldati** e **con adesivo**. Per quanto si cerchi di ridurne al minimo il numero — per motivi sia di economicità che di robustezza — il loro numero rimane comunque elevato.

L'analisi tensionale rigorosa dei collegamenti è piuttosto complicata, a causa di concentrazioni di tensioni, tensioni di intaglio e stati di tensione composti; in quest'ambito ci limitiamo a esporre criteri di massima per il corretto dimensionamento e la verifica dei collegamenti bullonati e rivettati — che sono, non a caso, quelli che compaiono nei temi d'esame.

### 10.6.1 I collegamenti bullonati

Per fornire strumenti semplici di verifica, analizziamo i modi in cui un collegamento bullonato può *cedere*: ogni modo di cedimento è una verifica da fare.

**Tranciamento del bullone.** Nel collegamento a doppio coprighiunto il bullone è sottoposto a taglio su *due* sezioni. Indicando con  $F_{lim}$  il carico limite, con  $d$  il diametro del bullone e con  $\tau_R$  la tensione tangenziale di rottura del materiale del bullone:

$$F_{lim} = 2 \left( \frac{\pi d^2}{4} \right) \tau_R. \quad (10.75)$$

È il carico limite *teorico*, che causa la rottura. Per il progetto o la verifica si impone che la tensione tangenziale massima sia pari all'ammissibile; poiché la sezione del bullone è circolare, la tensione massima si lega alla media tramite il fattore di forma della sezione circolare (Capitolo 6):

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \tau_{med} = \frac{4}{3} \frac{F}{2 (\pi d^2 / 4)} = \frac{8 F}{3 \pi d^2}. \quad (10.76)$$

Imponendo  $\tau_{max} = \tau_{am}$  si ricava la formula di progetto del diametro:

$$d = \sqrt{\frac{8 F_{max}}{3 \pi \tau_{am}}} \quad (10.77)$$

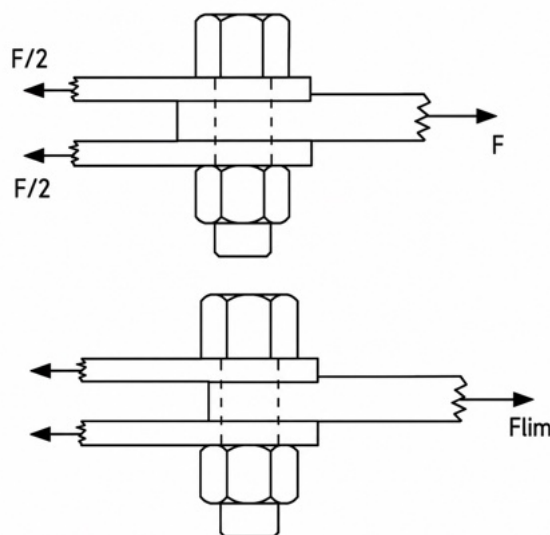


Figura 10.23: Il bullone lavora a taglio su due sezioni.

**Versione semplificata**

In molti manuali il fattore  $4/3$  viene omissso e si lavora direttamente con la tensione media:  $d = \sqrt{2F/(\pi\tau_{am})}$ . È una semplificazione non conservativa (sottostima il diametro del 15% circa): all'esame conviene la forma completa (10.77), dichiarando l'ipotesi.

**Esempio 10.4 — Dimensionamento di un bullone in acciaio****Dati**

Bullone in acciaio con  $\sigma_{am} = 300 \text{ N/mm}^2$ , sollecitato in doppia sezione da un carico  $F_{\max} = 40 \text{ kN}$ .

La tensione tangenziale ammissibile, con Von Mises:

$$\tau_{am} = 0,58 \sigma_{am} = 174 \text{ N/mm}^2. \quad (10.78)$$

Dalla (10.77):

$$d = \sqrt{\frac{8 \cdot 40\,000}{3 \pi \cdot 174}} = \sqrt{\frac{320\,000}{1640}} \approx 13,97 \text{ mm} \rightarrow d = 14 \text{ mm. [bullone M14]} \quad (10.79)$$

**Tranciamento della piastra.** La piastra (o l'occhiello di una forcina) può cedere per tranciamento in corrispondenza del bullone: il perno “sfonda” in avanti portandosi via il materiale lungo due superfici di scorrimento. Detto  $t$  lo spessore della piastra,  $R$  il raggio esterno dell'occhiello e  $r$  il raggio del foro, l'area resistente è quella delle due corde di lunghezza  $\sqrt{R^2 - r^2}$ :

$$F_{lim} = 2 \left( t \sqrt{R^2 - r^2} \right) \tau_R. \quad (10.80)$$

**Strappo della piastra.** La piastra cede per superamento della tensione di rottura  $\sigma_R$  nelle due sezioni perpendicolari alla direzione del carico, ai lati del foro:

$$F_{lim} = 2 (R - r) t \sigma_R. \quad (10.81)$$

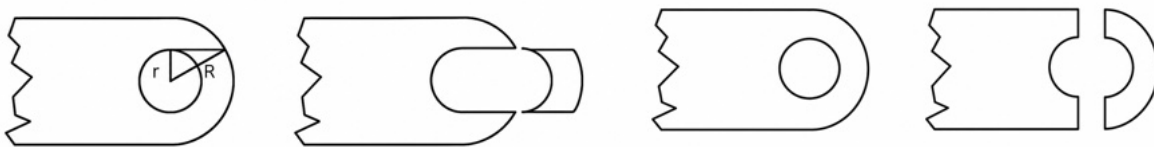


Figura 10.24: I due modi di cedimento dell'occhiello.

### Esempio 10.5 — Verifica a strappo e tranciamento di una forcella

#### Dati, breakable

Forcella in acciaio ( $\sigma_{am} = 300 \text{ N/mm}^2$ , quindi  $\tau_{am} = 0,58 \cdot 300 = 174 \text{ N/mm}^2$ ) con occhiello di larghezza 30 mm ( $R = 15 \text{ mm}$ ), foro  $\varnothing 15 \text{ mm}$  ( $r = 7,5 \text{ mm}$ ), due guance di spessore  $t = 5 \text{ mm}$  ciascuna. Carico  $F_{\max} = 40 \text{ kN}$ . Verificare il corretto dimensionamento per strappo e tranciamento.

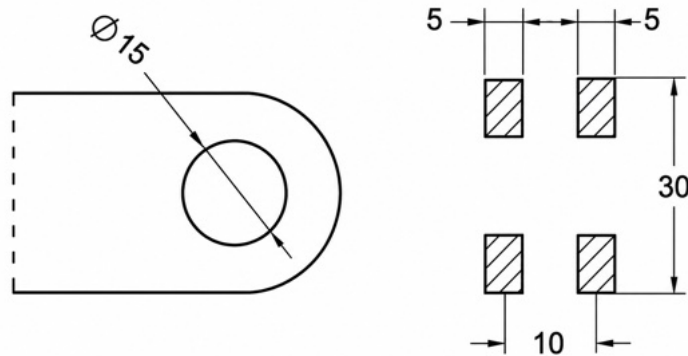


Figura 10.25: La forcella dell'esempio.

**Verifica a strappo.** L'area resistente allo strappo è la somma delle *quattro* sezioni resistenti (due per guancia, ai lati del foro):

$$A_{str} = 4 (R - r) t = 4 \cdot 7,5 \cdot 5 = 150 \text{ mm}^2, \quad (10.82)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{\max}}{A_{str}} = \frac{40\,000}{150} \approx 266,7 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{am} = 300 \text{ N/mm}^2. [\text{verificato}] \quad (10.83)$$

**Verifica a tranciamento.** L'area resistente al taglio, per le due guance (due superfici di scorrimento ciascuna):

$$A_{tr} = 4 t \sqrt{R^2 - r^2} = 4 \cdot 5 \cdot \sqrt{15^2 - 7,5^2} = 20 \cdot 12,99 \approx 259,8 \text{ mm}^2, \quad (10.84)$$

$$\tau_{\max} = \frac{F_{\max}}{A_{tr}} = \frac{40\,000}{259,8} \approx 154 \text{ N/mm}^2 < \tau_{am} = 174 \text{ N/mm}^2. [\text{verificato}] \quad (10.85)$$

La forcella è ben dimensionata sia allo strappo che al tranciamento.

#### 10.6.2 I collegamenti rivettati

Per una scelta accurata del tipo, del numero e delle dimensioni dei rivetti da utilizzare nelle giunzioni è opportuno tenere presenti i modi di rottura possibili di una giunzione rivettata:

**Taglio del rivetto:** le lamiere resistono al carico applicato e il cedimento avviene nel gambo del rivetto, all'altezza della superficie di separazione delle lamiere;

**Schiacciamento del rivetto:** le lamiere resistono e il gambo del rivetto cede per schiacciamento (rifollamento del gambo);

**Ovalizzazione del foro:** è il rivetto, stavolta, a resistere; la lamiera cede per effetto del carico e i fori passanti si ovalizzano;

**Tranciamento della lamiera:** i rivetti assorbono il carico ma i fori sono troppo vicini a un bordo della lamiera, che viene tranciata;

**Strappo della lamiera:** caso analogo al precedente, ma la lamiera cede per strappo lungo la linea che collega i centri dei fori.

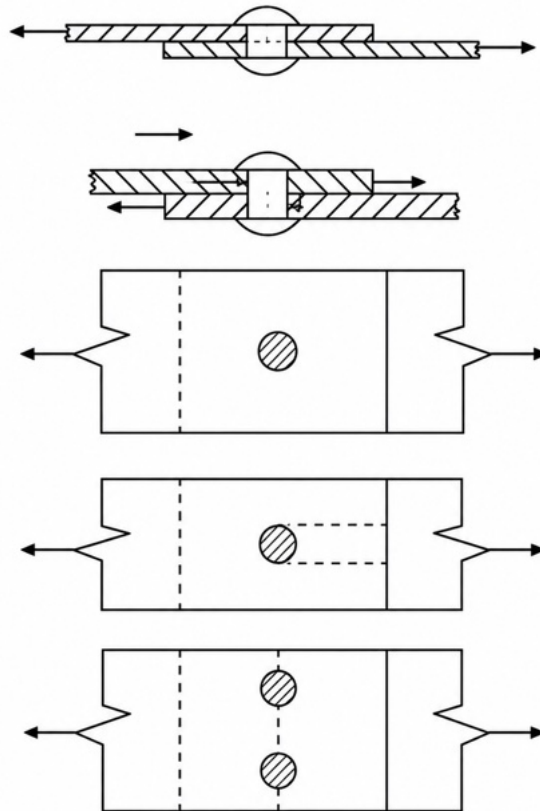


Figura 10.26: I modi di cedimento della giunzione rivettata.

### Teoria – Il criterio di progetto della giunzione

Sovradimensionare il diametro del rivetto evita i primi due modi di rottura, propri del rivetto; ma è inutile che il rivetto sostenga carichi elevati se poi cede la lamiera. In genere si impone quindi che *lamiera e rivetto possano trasmettere gli stessi carichi*: se i carichi applicati eccedono quelli di progetto, si avranno contemporaneamente il taglio del rivetto e l'ovalizzazione del foro. Meglio ancora, si preferisce che **l'ovalizzazione preceda di poco il taglio**: un foro ovalizzato si vede all'ispezione e si ripara; un rivetto tranciato è un cedimento secco e nascosto.

Per dimensionare correttamente una giunzione rivettata si dispone di apposite tabelle, realizzate per diversi tipi di giunzione: fissato lo spessore della lamiera in millimetri si ottiene, per un dato materiale del rivetto, il diametro minimo al quale si verifica l'ovalizzazione. Se le lamiere della giunzione sono di spessore diverso, il dimensionamento si esegue sulla lamiera di spessore *minore*. Le giunzioni a testa sporgente si preferiscono dove non ci sono problemi di flusso aerodinamico (per esempio nel collegamento fra anima del longherone e centine); quelle a testa svasata (*flush*) garantiscono la finitura superficiale dei componenti esposti al flusso, come il collegamento fra rivestimento esterno e centina nel bordo d'attacco alare. Per le lamiere si considerano tipicamente leghe leggere (Avional), mentre per i rivetti sono previsti materiali più duttili o pari lega (Peraluman, Avional in diverse leghe): il rivetto va ribadito, e la sua lega deve permetterlo.

Per un dimensionamento pratico e rapido, l'esperienza costruttiva ha condensato tutto questo in *tabelle di selezione* — una per ciascun tipo di giunzione — che, fissati lo spessore della lamiera e il materiale del rivetto, forniscono direttamente il diametro corretto. A questo strumento, e alla procedura di progetto completa che vi si appoggia, dedichiamo la sezione conclusiva del capitolo (§10.8), dove le tabelle sono riportate per intero insieme a esempi svolti passo passo.

**Regole pratiche per la rivettatura del rivestimento.** Per un dimensionamento rapido, noto lo spessore  $t$  della lamiera, si adottano le seguenti proporzioni: per il diametro del rivetto

$$\frac{d}{t} = 3 \div 3,5; \quad (10.86)$$

noto  $d$ , per il passo  $p$  della rivettatura (distanza fra i centri di due fori successivi)

$$\frac{p}{d} = 2,5 \div 3; \quad (10.87)$$

e infine, noto  $p$ , per la distanza  $a$  fra l'asse dei fori e il bordo libero della lamiera

$$1,5 \leq \frac{a}{d} \leq 2. \quad (10.88)$$

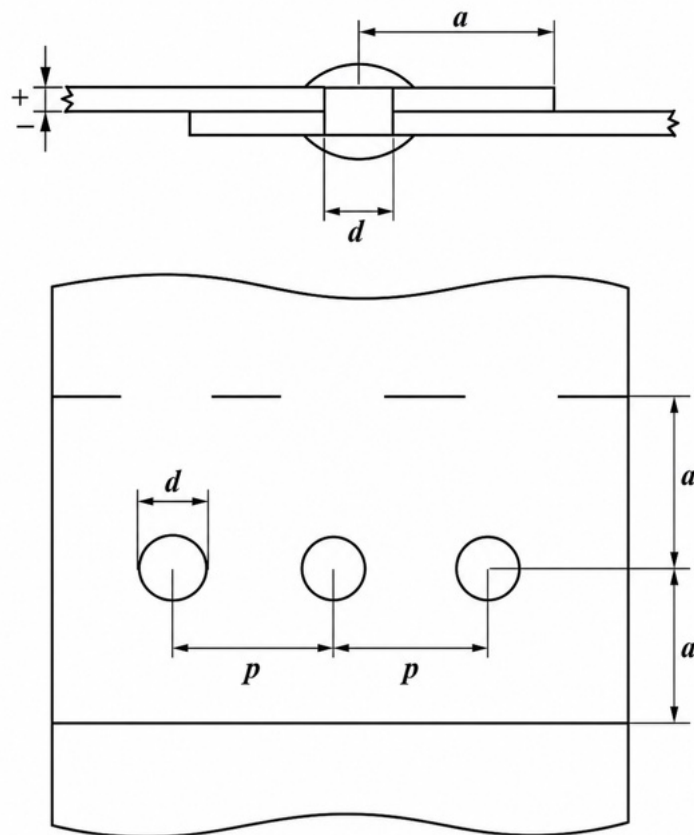


Figura 10.27: Le grandezze della rivettatura di rivestimento.

**La concentrazione delle tensioni nei fori.** Quanto detto finora si basa sull'ipotesi che il carico si ripartisca uniformemente sulla sezione che lo sopporta: una lamiera forata, sottoposta a trazione, si comporterebbe come una barra con sezione resistente pari a quella netta residua. La realtà è più complicata: l'indebolimento causato dal foro si ripercuote non tanto sulla diminuzione di area resistente, quanto sulla *distribuzione* delle tensioni. In particolare, in posizione diametrale rispetto alla direzione del carico la tensione raggiunge un massimo  $\sigma_{\max}$  **triplo** rispetto alla tensione  $\sigma$  che si avrebbe in assenza del foro. È bene tenere presente questo fenomeno quando i fori sono ravvicinati tra loro o quando il diametro del foro è grande rispetto alla dimensione trasversale dell'elemento.

#### Analogia pratica – Le linee di flusso come corrente in un fiume

Immaginate le tensioni come l'acqua di un fiume e il foro come la pila di un ponte: la corrente non “scompare” in corrispondenza dell'ostacolo, deve *aggirarlo*, e ai fianchi della pila l'acqua accelera. Le linee di flusso delle tensioni fanno lo stesso: si addensano ai lati del foro, e lì la tensione locale sale fino a tre volte quella nominale. È anche il motivo per cui una piccola cricca conviene fermarla *forando* l'apice con una punta da trapano: sembra un paradosso (aggiungere un foro per fermare una rottura!), ma un foro liscio e tondo concentra le tensioni molto meno della punta acuminata

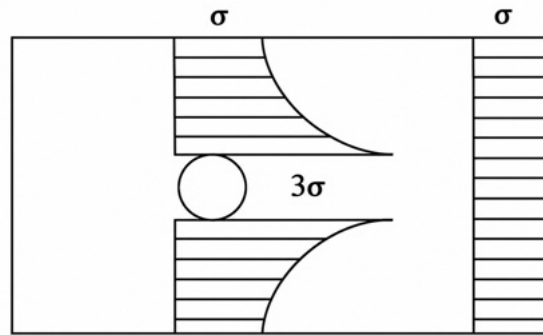


Figura 10.28: La concentrazione delle tensioni attorno a un foro.

della cricca.

## 10.7 Il montante di controventatura: un dimensionamento completo

Chiudiamo il capitolo con un esempio che tiene insieme *tutto*: carichi dall'equilibrio, instabilità, trazione, attacchi bullonati e rivettati. È il dimensionamento del **montante** (o asta di controventatura) di un velivolo ad ala alta, con i relativi accessori di fissaggio — una tipologia di problema che i temi d'esame amano, perché percorre l'intera catena delle competenze del corso.

### Esempio 10.6 — Il montante e i suoi attacchi, dall'equilibrio ai rivetti

#### Dati

Velivolo monomotore ad ala alta controventata; peso  $Q = 450 \text{ kg}$  ( $W = 4.415 \text{ N}$ ); fattori di carico massimi  $n_1 = +4$  e  $n_2 = -2$ ; il montante forma con l'ala un angolo  $\beta = 25^\circ$  e ha lunghezza libera  $\ell = 2.500 \text{ mm}$ , incernierato a entrambi gli estremi. Ciascuna semiala sviluppa metà della portanza, e si assume che il montante raccolga il carico della semiala. Materiale dell'asta: profilato tubolare in Avional con  $E = 71.000 \text{ N/mm}^2$  e  $\sigma_s = 255 \text{ N/mm}^2$ ; coefficiente di sicurezza  $k = 1,5$ . Per gli *attacchi* (terminale, perno) il regolamento impone il coefficiente di sicurezza  $k_{att} = 2$  applicato al carico. Acciaio del terminale a forcilla e del perno:  $\sigma_s = 450 \text{ N/mm}^2$ . Rivetti in Avional:  $\sigma_s = 300 \text{ N/mm}^2$ .

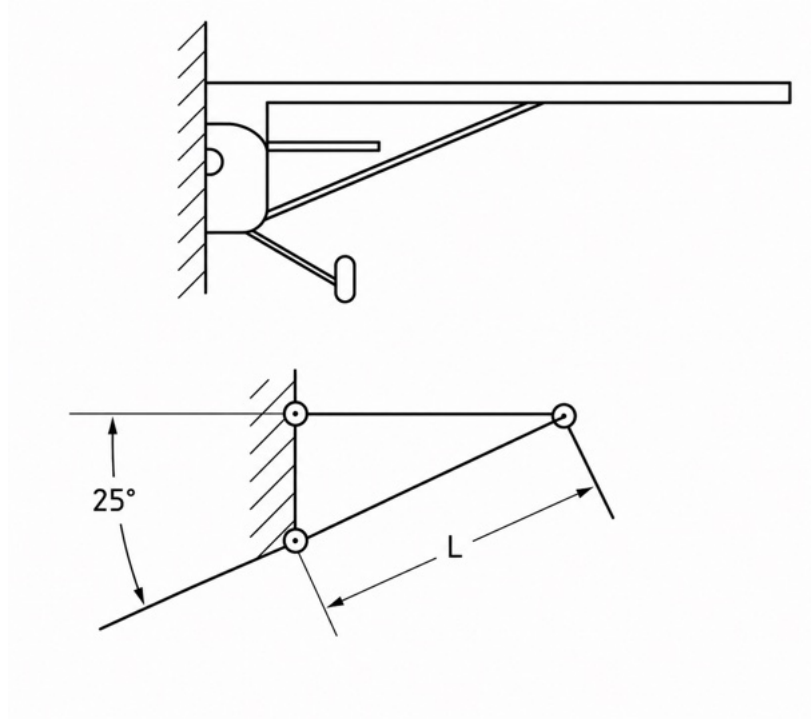


Figura 10.29: Il montante di controventatura e il suo schema di carico.

**Passo 1 — I carichi sul montante.** Con fattore di carico massimo positivo, sulla semiala agisce la forza diretta verso l'alto

$$P_1 = n_1 \frac{Q}{2} g = 4 \cdot 225 \cdot 9,81 \approx 8.829 \text{ N}, \quad (10.89)$$

e con il fattore massimo negativo la forza diretta verso il basso

$$P_2 = |n_2| \frac{Q}{2} g = 2 \cdot 225 \cdot 9,81 \approx 4.415 \text{ N}. \quad (10.90)$$

Il montante lavora lungo il proprio asse: proiettando, i due carichi generano rispettivamente uno sforzo di *trazione*

$$T = \frac{P_1}{\sin \beta} = \frac{8829}{\sin 25^\circ} \approx 20.891 \text{ N} \quad (10.91)$$

e uno sforzo di *compressione*

$$C = \frac{P_2}{\sin \beta} = \frac{4415}{\sin 25^\circ} \approx 10.446 \text{ N}. \quad (10.92)$$

### Perché il seno amplifica

Il montante quasi “sdraiato” ( $\beta$  piccolo) deve sviluppare una forza assiale grande per fornire la stessa componente verticale: al denominatore c'è  $\sin \beta$ , e con  $\beta = 25^\circ$  lo sforzo nel montante è oltre il doppio del carico verticale che equilibra. È la stessa geometria delle aste del carrello che incontreremo nel tema del 2019: le aste molto inclinate pagano care le componenti.

**Passo 2 — Verifica a compressione (Eulero).** Il caso critico a compressione è l'*instabilità*: il montante è lungo e snello, e il volo rovescio lo carica di punta. Applichiamo la formula di Eulero (Capitolo 4) con il carico di progetto maggiorato del coefficiente di sicurezza:

$$P_{cr} = k C = 1,5 \cdot 10\,446 \simeq 15.669 \text{ N}, \quad (10.93)$$

da cui il momento d'inerzia minimo richiesto (cerniera–cerniera:  $\ell_0 = \ell$ ):

$$J_1 = \frac{P_{cr} \ell^2}{\pi^2 E} = \frac{15\,669 \cdot 2500^2}{\pi^2 \cdot 71\,000} \simeq 1,398 \times 10^5 \text{ mm}^4. \quad (10.94)$$

L'asta dovrà avere un momento d'inerzia *minimo* che soddisfi  $J_{\min} \geq J_1$ .

**Passo 3 — La scelta della sezione.** Essendo il montante esposto al flusso dell'aria, è opportuna una sezione che offra poca resistenza aerodinamica; il criterio della leggerezza è già servito dalla scelta del materiale. Si adotta un **tubo a sezione ellittica** con l'asse maggiore disposto lungo la corrente: semiassi esterni  $a$  (maggiore) e  $b$  (minore), spessore di parete  $t$ , semiassi interni  $c = a - t$  e  $d = b - t$ .

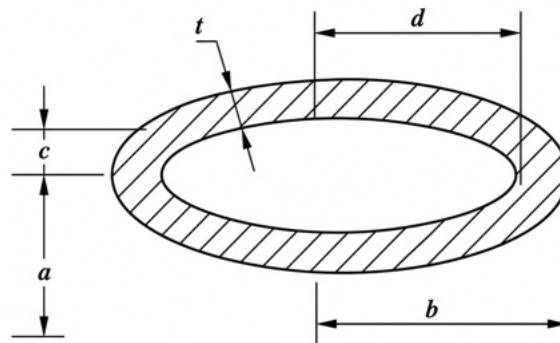


Figura 9.31: La sezione ellittica cava del montante.

Figura 10.30: La sezione ellittica cava del montante.

Da manuale, i momenti d'inerzia dell'ellisse cava rispetto ai due assi di simmetria valgono

$$J_x = \frac{\pi}{4} (a b^3 - c d^3), \quad J_y = \frac{\pi}{4} (a^3 b - c^3 d), \quad (10.95)$$

con  $\pi/4 \simeq 0,7854$ .

#### Attenzione – Quale momento d'inerzia? Il minimo!

Con  $a > b$  risulta  $J_x < J_y$ : l'asta, libera di sbandare in qualunque piano, si infletterà attorno all'asse di *minor* rigidezza, cioè attorno all'asse maggiore (quello “aerodinamico”). Nella formula di Eulero va quindi il momento d'inerzia **minimo**  $J_{\min} = J_x = \frac{\pi}{4} (a b^3 - c d^3)$ : usare  $J_y$  — errore purtroppo frequente, favorito dalla tentazione di prendere “il numero più grande” — significherebbe sopravvalutare la resistenza all'instabilità anche di un ordine di grandezza. La sezione affusolata che piace

all'aria è, per Eulero, la direzione debole.

Fissato  $t = 2 \text{ mm}$  e un rapporto aerodinamicamente sensato  $a/b = 2$ , si compila una tabella di tentativi (dimensioni in millimetri):

| Tent. | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $J_{\min} [\text{mm}^4]$ | Esito                       |
|-------|-----|-----|-----|-----|--------------------------|-----------------------------|
| 1     | 44  | 22  | 42  | 20  | 104.075                  | $< J_1$ : insufficiente     |
| 2     | 48  | 24  | 46  | 22  | 136.458                  | $< J_1$ : quasi             |
| 3     | 50  | 25  | 48  | 23  | 154.907                  | $\geq J_1$ : <b>va bene</b> |

Tabella 10.2: Ricerca per tentativi della sezione ellittica ( $J_1 = 1,398 \times 10^5 \text{ mm}^4$ ).

Si sceglie dunque la sezione  $a = 50 \text{ mm}$ ,  $b = 25 \text{ mm}$ ,  $t = 2 \text{ mm}$ ; naturalmente si potrebbe fare di meglio — in termini di peso e di resistenza aerodinamica — provando altre misure tra quelle disponibili in commercio.

**Passo 4 — La verifica di snellezza.** Dimensionare con Eulero *presuppone* il campo elastico: va confermato (è la disciplina del Capitolo 13). Snellezza limite dell'Avional:

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_s}} = \pi \sqrt{\frac{71\,000}{255}} \approx 52,4. \quad (10.96)$$

Area e raggio d'inerzia della sezione scelta:

$$A = \pi (ab - cd) = \pi (1250 - 1104) \approx 459 \text{ mm}^2, \quad \rho = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{154\,907}{459}} \approx 18,4 \text{ mm}, \quad (10.97)$$

da cui

$$\lambda = \frac{\ell}{\rho} = \frac{2500}{18,4} \approx 136 \gg \lambda_0. [Eulero \text{ legittimo}] \quad (10.98)$$

**Passo 5 — Verifica a trazione.** Sotto il carico di trazione massimo l'asta lavora a

$$\sigma_{tr} = \frac{T}{A} = \frac{20\,891}{459} \approx 45,5 \text{ N/mm}^2, \quad (10.99)$$

ampiamente al di sotto dell'ammissibile

$$\sigma_{am} = \frac{\sigma_s}{k} = \frac{255}{1,5} = 170 \text{ N/mm}^2. [verificato] \quad (10.100)$$

Come quasi sempre per le aste snelle, *comanda l'instabilità*: la sezione dettata da Eulero è sovrabbondante per la trazione, anche se il carico di trazione è il doppio di quello di compressione.

**Passo 6 — Il perno del terminale a forcella.** Per il terminale a forcella e il relativo perno si sceglie un acciaio con  $\sigma_s = 450 \text{ N/mm}^2$ ; con  $k = 1,5$ :

$$\sigma_{am} = 300 \text{ N/mm}^2, \quad \tau_{am} = 0,58 \sigma_{am} = 174 \text{ N/mm}^2. \quad (10.101)$$

Il carico di progetto degli attacchi, per prescrizione regolamentare, è il carico d'asta maggiorato con  $k_{att} = 2$ :

$$T_{att} = k_{att} T = 2 \cdot 20\,891 \approx 41\,783 \text{ N}. \quad (10.102)$$

Il perno lavora a taglio su due sezioni (come il bullone dell'Esempio 10.4); dalla (10.77):

$$d = \sqrt{\frac{8 T_{att}}{3 \pi \tau_{am}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 41\,783}{3 \pi \cdot 174}} \approx 14,3 \text{ mm} \rightarrow d = 15 \text{ mm}. \quad (10.103)$$

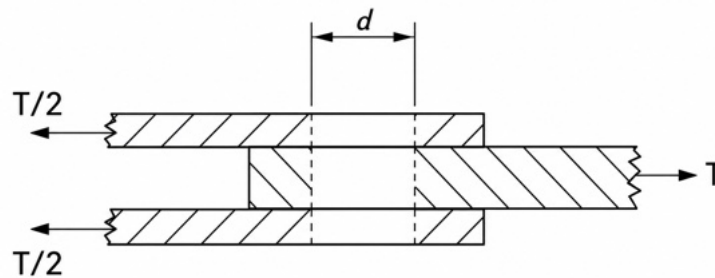


Figura 10.31: Il perno a taglio in doppia sezione.

**Passo 7 — Lo schiacciamento del perno.** Il contatto fra perno e occhielli non deve superare una pressione specifica pari, al più, alla tensione ammissibile. L'area di appoggio è la proiezione  $A_s = b d$  (dove  $b$  è lo spessore complessivo delle due guance della forcella):

$$\sigma_{am} = \frac{T_{att}}{b d} \implies b = \frac{T_{att}}{d \sigma_{am}} = \frac{41\,783}{15 \cdot 300} \approx 9,3 \text{ mm} \rightarrow b = 10 \text{ mm}, \quad (10.104)$$

cioè due guance da 5 mm ciascuna.

**Passo 8 — Lo strappo trasversale della forcella.** Perché la forcella non ceda per strappo nella direzione normale al carico, l'area resistente ai lati del foro,  $A_{str} = b (D - d)$  (con  $D$  larghezza dell'occhiello), deve bastare:

$$\sigma_{am} = \frac{T_{att}}{b (D - d)} \implies D = \frac{T_{att}}{b \sigma_{am}} + d = \frac{41\,783}{10 \cdot 300} + 15 \approx 28,9 \text{ mm} \rightarrow D = 29 \text{ mm}. \quad (10.105)$$

**Passo 9 — Il tranciamento delle guance.** Per la verifica allo strappo nella direzione del carico (tranciamento), dalla geometria dell'occhiello la dimensione resistente vale

$$f = \sqrt{\frac{D^2}{4} - \frac{d^2}{4}} = \frac{\sqrt{29^2 - 15^2}}{2} \approx 12,4 \text{ mm}, \quad (10.106)$$

e l'area resistente complessiva (due guance, due superfici ciascuna, di altezza  $b/2$ ):

$$A'' = 2 \cdot 2 \cdot \left(f \frac{b}{2}\right) = 2fb = 2 \cdot 12,4 \cdot 10 \approx 248 \text{ mm}^2, \quad (10.107)$$

da cui

$$\tau_{\max} = \frac{T_{att}}{A''} = \frac{41783}{248} \approx 168,4 \text{ N/mm}^2 < \tau_{am} = 174 \text{ N/mm}^2. [\text{verificato}] \quad (10.108)$$

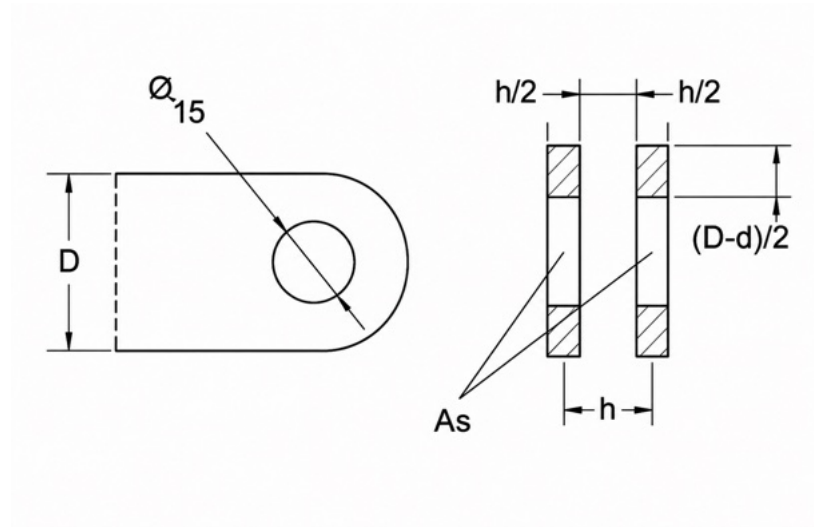


Figura 10.32: Le verifiche dell'occhiello: strappo trasversale e tranciamento.

**Passo 10 — L'unione forcella–asta.** Il terminale prosegue in un *gambo* a sezione ellittica piena (semiassi 15 mm e 5 mm) che si innesta nell'estremità del tubo, opportunamente rastremata su di esso; l'unione è realizzata con rivetti in Avional ( $\sigma_s = 300 \text{ N/mm}^2$ , quindi  $\sigma_{am} = 200 \text{ N/mm}^2$  e  $\tau_{am} = 0,58 \cdot 200 = 116 \text{ N/mm}^2$ ), che lavorano a taglio su *due* sezioni ciascuno (attraversano le due pareti del tubo).

Prima di tutto, il gambo: a sezione piena lorda

$$A_g = \pi a_g b_g = \pi \cdot 15 \cdot 5 \approx 235,6 \text{ mm}^2, \quad \sigma = \frac{T_{att}}{A_g} \approx 177 \text{ N/mm}^2 < 300 \text{ N/mm}^2, \quad (10.109)$$

ma la sezione critica è quella *netta*, indebolita dal foro del rivetto: detta  $d_r$  il diametro del rivetto, la sezione resistente allo strappo del gambo è

$$A'_g = \pi a_g b_g - 2 b_g d_r = 235,6 - 10 d_r, \quad (10.110)$$

e imponendo  $A'_g \geq T_{att} / \sigma_{amm,acc} = 41783 / 300 = 139,3 \text{ mm}^2$  si ottiene il diametro massimo del rivetto:

$$d_r \leq \frac{235,6 - 139,3}{10} \approx 9,6 \text{ mm} \rightarrow d_r = 8 \text{ mm}, \quad (10.111)$$

scegliendo fra i diametri disponibili quello minore che più si avvicina al massimo.

Il numero dei rivetti discende dalla condizione a taglio. L'area resistente complessiva richiesta:

$$A_{tot} \geq \frac{T_{att}}{\tau_{am}} = \frac{41783}{116} \approx 360 \text{ mm}^2; \quad (10.112)$$

ciascun rivetto offre due sezioni,  $2 \cdot \pi d_r^2 / 4 = 2 \cdot 50,3 = 100,5 \text{ mm}^2$ , quindi

$$n_r \geq \frac{360}{100,5} \approx 3,6 \rightarrow n_r = 4 \text{ rivetti } \varnothing 8 \text{ mm.} \quad (10.113)$$

Verifica finale:  $\tau = 41\,783 / (4 \cdot 100,5) \approx 104 \text{ N/mm}^2 < 116 \text{ N/mm}^2$ . [verificato]

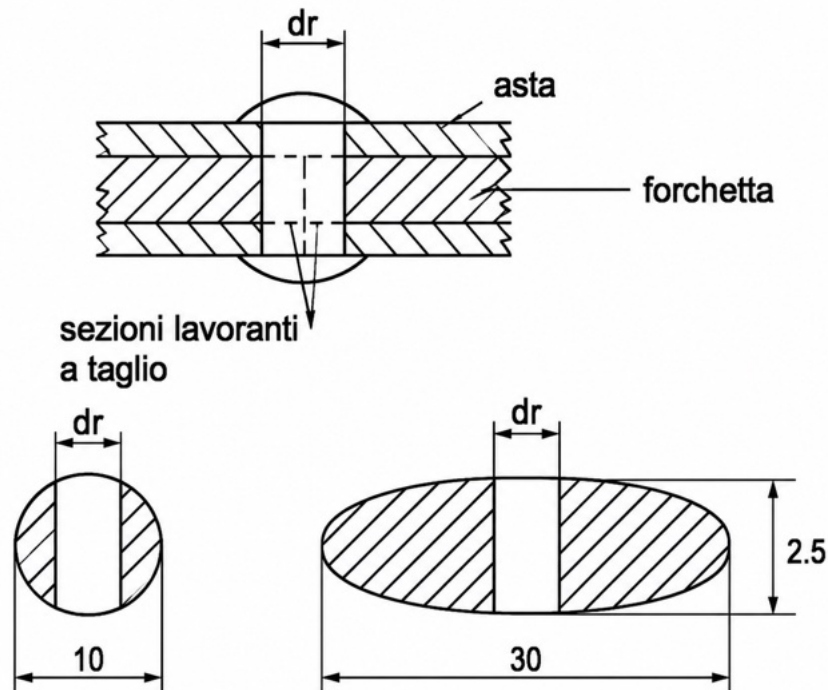


Figura 10.33: L'unione rivettata fra il terminale a forcella e il tubo del montante.

#### Una verifica che qui tralasciamo

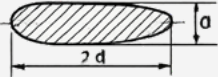
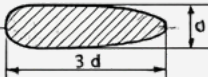
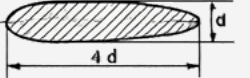
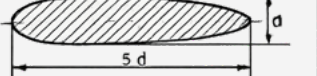
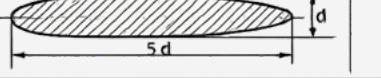
A rigore andrebbe controllato anche il *rifollamento* (ovalizzazione) della parete del tubo attorno ai rivetti — la parete è sottile,  $t = 2 \text{ mm}$ , e il paragrafo 10.6.2 ci ha insegnato che i fori nelle lamiere sottili sono il punto debole. Nella pratica si ricorre alle tabelle di giunzione già viste, o a un locale aumento di spessore (rinforzo) all'estremità del tubo: la rastrematura stessa, raddoppiando localmente le pareti sul gambo, lavora in questo senso.

#### Risultato – Il montante dimensionato

Tubo ellittico  $100 \times 50$  esterno ( $a = 50$ ,  $b = 25 \text{ mm}$ ), parete  $t = 2 \text{ mm}$ ,  $J_{\min} \approx 1,55 \times 10^5 \text{ mm}^4$ ,  $\lambda \approx 136$ ; terminale a forcella in acciaio: perno  $\varnothing 15 \text{ mm}$ , guance  $2 \times 5 \text{ mm}$ , occhiello  $D = 29 \text{ mm}$ ; unione al tubo con 4 rivetti  $\varnothing 8 \text{ mm}$  in Avional. Si noti la struttura del percorso: *ogni* elemento della catena — asta, perno, occhiello, gambo, rivetti — è stato dimensionato sul *suo* modo di cedimento critico, e ogni quota calcolata è stata arrotondata al valore commerciale prima della verifica finale.

### ► Approfondimento: L'aerodinamica dei montanti

La scelta della forma della sezione, oltre che dai criteri di resistenza e leggerezza, è dettata dall'aerodinamica: il montante è immerso nel flusso e contribuisce non poco alla resistenza totale del velivolo. Gli ordini di grandezza sono eloquenti: a parità di spessore frontale, una sezione *circolare* genera una resistenza di circa **trenta volte** maggiore di quella di una sezione affusolata a goccia con lunghezza pari a circa tre volte lo spessore massimo. Allungare ulteriormente il profilo, a parità di spessore, torna però a far crescere la resistenza: aumenta la superficie bagnata, e con essa l'attrito. Esiste dunque una finezza ottima ( $\ell/s \approx 3$ ), ed è il motivo per cui i montanti carenati hanno tutti quella proporzione familiare.

| Tipo di sezione                                                                     | roo $C_r$ |     |      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-----|------|
|                                                                                     | 0°        | 5°  | 10°  |
|    | 62        | 62  | 62   |
|    | 31,5      | 41  | 94   |
|    | 0,5       | 7,2 | 10,5 |
|   | 2,8       | 3,8 | 8,4  |
|  | 4,8       | 5,6 | 12,9 |
|  | 4,3       | 5,6 | 12,9 |

## 10.8 Il progetto della giunzione rivettata in sei fasi

I criteri di massima del paragrafo precedente bastano per orientarsi, ma la pratica costruttiva ha bisogno di un procedimento sistematico e ripetibile — lo stesso che si chiede all'esame. Lo organizziamo in **sei fasi**, dalla raccolta dei dati alla designazione completa del rivetto, appoggiandoci a *tabelle di selezione* che condensano l'esperienza di officina. È la naturale estensione operativa di quanto già visto sui cinque modi di rottura.

### La rivettatura, oggi come ieri

Nonostante saldature e incollaggi strutturali abbiano guadagnato terreno, la **chiodatura** resta la tecnica di giunzione più diffusa nelle strutture in lega leggera: un cassone alare o una fusoliera a semiguscio contano *decine di migliaia* di rivetti. Sapere scegliere il rivetto giusto — tipo, materiale, diametro, lunghezza, passo — e verificarne la tenuta è perciò una competenza di mestiere, non un esercizio

accademico.

### 10.8.1 I cinque modi di rottura, in sintesi operativa

Prima dell'algoritmo, richiamiamo in forma compatta i cinque modi di cedimento di una giunzione rivettata: ogni modo è una *verifica* da soddisfare, e le prime tre condividono la logica già incontrata per i collegamenti bullonati.

#### Teoria – I cinque modi e le loro condizioni di resistenza

Detto  $F$  il carico trasmesso da un rivetto,  $d$  il suo diametro,  $t$  lo spessore della lamiera (la più sottile, se diverse),  $p$  il passo e  $A$  la distanza dell'asse del foro dal bordo libero:

**Modo I — Taglio del rivetto.** Il gambo si trancia sulla superficie di separazione delle lamiere.

Cede il *rivetto*:

$$\tau = \frac{F}{\pi d^2 / 4} \leq \tau_{a,riv} \implies d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi \tau_a}}.$$

**Modo II — Schiacciamento del rivetto.** Il gambo si rifolla (si schiaccia) contro la parete del foro. Cede il *rivetto*:

$$\sigma_{sc} = \frac{F}{d t} \leq \sigma_{sc,a,riv}.$$

**Modo III — Ovalizzazione del foro.** Stessa formula del Modo II, ma riferita alla *lamiera*, che si deforma e allarga il foro. Cede la *lamiera*:

$$\sigma_{rif} = \frac{F}{d t} \leq \sigma_{rif,a,lam}.$$

**Modo IV — Tranciamento al bordo (*shear-out*).** La striscia di materiale fra foro e bordo si strappa di netto. Cede la *lamiera*; si previene con

$$\frac{A}{d} \geq 1,5 \text{ (minimo)}, \quad \frac{A}{d} = 2 \text{ (normale)}.$$

**Modo V — Strappo lungo la fila (*tension failure*).** La lamiera si apre lungo la linea dei fori, sulla *sezione netta*  $n(p - d)t$  (con  $n$  numero di fori nella fila). Cede la *lamiera*:

$$\sigma = \frac{F_{\max}}{n t (p - d)} \leq \sigma_{a,lam}.$$

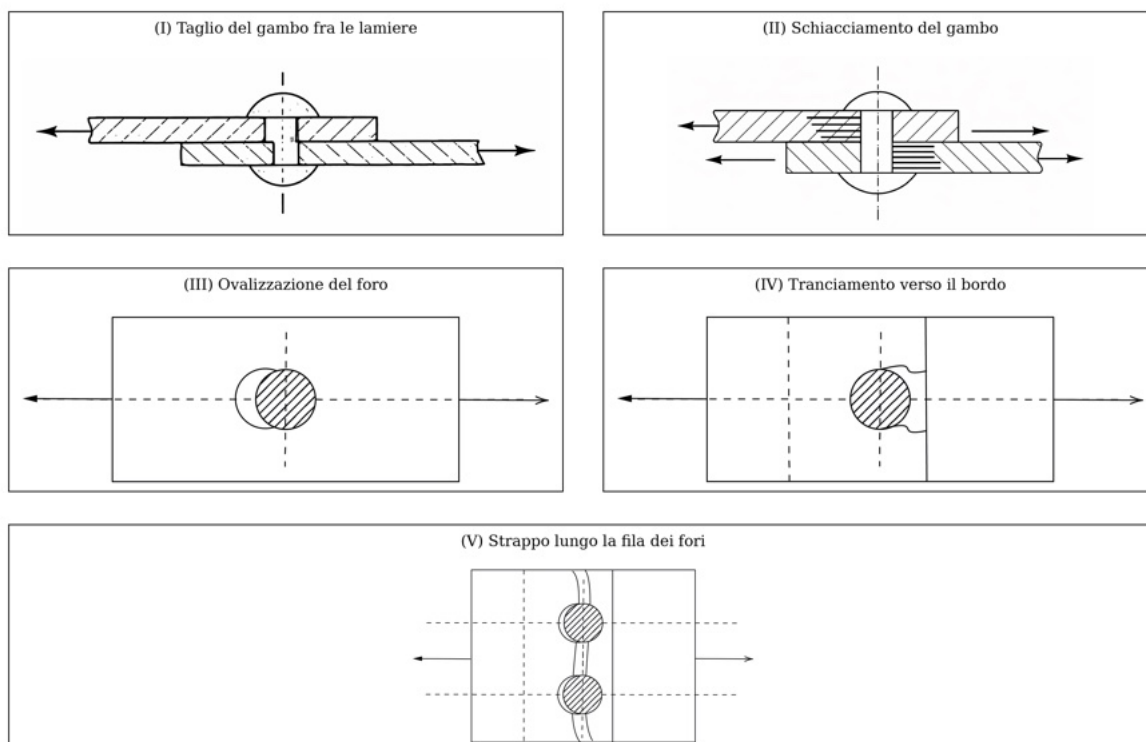


Figura 10.34: I cinque modi di cedimento della giunzione rivettata.

#### Analogia pratica – Modo II e Modo III: una formula, due materiali

I Modi II e III usano *la stessa* espressione  $F/(d t)$ , ma la confrontano con ammissibili di materiali diversi: il rivetto (Modo II) e la lamiera (Modo III). Poiché la lamiera è spesso di lega più tenera del rivetto, di regola  $\sigma_{rif,a,lam} < \sigma_{sc,a,riv}$ : è la lamiera a comandare, ed è il motivo per cui il progetto “mira” all’ovalizzazione come primo cedimento — un difetto visibile e riparabile, non una rottura secca.

## 10.8.2 L’algoritmo di dimensionamento

Le sei fasi vanno eseguite *in sequenza*: ognuna produce risultati che alimentano la successiva. Al termine si hanno tutti i dati per la designazione completa e per il disegno costruttivo: tipo di rivetto (AN 430 o AN 426), diametro  $d$ , lunghezza del gambo  $\ell$ , materiale, passo  $p$  e distanza dal bordo  $A$ .

### Fase A — Raccolta dei dati

Si analizza il problema *prima* di ogni calcolo. Si identifica l’applicazione strutturale (rivestimento-centina al bordo d’attacco; anima-centine nei pannelli interni; anima-soletta del longherone, dove il passo segue il flusso di Jourawsky), si stabilisce lo spessore di riferimento  $t$  — **sempre la lamiera più sottile**, che cede per prima ai Modi III e V — e si annotano i materiali di lamiera e rivetto e il

carico  $F$  trasmesso per rivetto.

### Fase B — Scelta del tipo di giunzione

La scelta fra testa sporgente e testa svasata dipende dall'esposizione al flusso:

- **Tabella 1 — AN 430**, testa tonda sporgente: pannelli interni, non esposti all'aria.
- **Tabella 2 — AN 426**, testa svasata fresata  $100^\circ$ : rivestimento esterno, dove serve finitura aerodinamica e la lamiera è abbastanza spessa da essere fresata.
- **Tabella 3 — AN 426**, testa svasata imbutita  $100^\circ$ : bordo d'attacco con lamiera sottile, dove la sede si ottiene per imbutitura anziché per fresatura.

Le verifiche strutturali (Modi I–V) restano invece le stesse per tutti i tipi.

### Fase C — Lettura del diametro dalla tabella

Sulla tabella scelta si individua la riga del materiale e diametro del rivetto e la colonna dello spessore  $t$ : la cella colorata (zona ovalizzazione) indica un accoppiamento corretto, la cella bianca (zona taglio) un accoppiamento da evitare. Si sceglie il diametro corrispondente alla **cella colorata immediatamente a sinistra del “gradino”** che separa le due zone: è il diametro minimo per cui la lamiera ovalizza prima che il rivetto si tranci.

### Attenzione – Leggere la tabella dalla parte giusta

Le celle a *destra* del gradino sono la zona di taglio del rivetto (Modo I): inammissibili in progetto. Una cella troppo a *sinistra* dà un diametro superiore al necessario (giunzione sbilanciata verso il rivetto, peso inutile). Il diametro corretto è sempre quello della prima cella colorata a ridosso del gradino. E si ricordi il limite delle tabelle: per spessori elevati, con qualunque materiale e tipo, la giunzione ricade comunque nel taglio del rivetto — il criterio “ovalizzazione prima del taglio” è un obiettivo, non sempre un risultato raggiungibile.

### Fase D — Criteri geometrici rapidi per $d$ , $p$ , $A$

Noto  $d$ , si fissano passo e distanza dal bordo con i rapporti adimensionali della pratica industriale:

$$\frac{d}{t} = 3 \div 3,5, \quad \frac{p}{d} = 2,5 \div 3, \quad 1,5 \leq \frac{A}{d} \leq 2.$$

Il rapporto  $d/t$  nasce dall'equilibrio fra taglio e ovalizzazione;  $p/d$  garantisce sezione netta sufficiente (Modo V);  $A/d$  previene il tranciamento al bordo (Modo IV). Sono valori *orientativi*: vanno poi confrontati con i minimi tabulati (Fase E), e in caso di conflitto prevale il tabulato.

### Fase E — Verifiche analitiche dei cinque modi

Fissati  $d$ ,  $p$ ,  $A$  si eseguono le cinque verifiche del box 10.8.1: taglio del rivetto (I), schiacciamento (II), ovalizzazione (III), tranciamento al bordo (IV) e strappo a trazione (V). Tutte devono risultare soddisfatte. Le tensioni ammissibili si ricavano dai carichi di rottura dei materiali (tabella nel §10.8.3).

### Fase F — Designazione completa

Si compone la sigla AN [tipo] -- Ø[d mm] × [L mm] -- [materiale], dove qui L indica la lunghezza del gambo. La lunghezza del gambo è

$$\ell = \sum_i t_i + 1,5 d,$$

dove  $\sum_i t_i$  è la somma degli spessori di *tutte* le lamiere attraversate e il termine  $1,5 d$  è il materiale necessario a formare la *controtesta* per ribaditura. Il valore si arrotonda **al normalizzato superiore** disponibile (tabelle di pag. 131 e 132).

## 10.8.3 Esempi numerici completi

Applichiamo il percorso a due casi tipici. I valori ammissibili si ricavano dai carichi di rottura  $R_m$  dei materiali normalizzati, con coefficiente di sicurezza  $k = 1,5$ :

$$\sigma_a = \frac{R_m}{k}, \quad \tau_a = 0,58 \sigma_a, \quad \sigma_{rif,a} = \sigma_a \text{ (approccio conservativo del corso)}.$$

| Materiale            | Sigla | $R_m$ [N/mm <sup>2</sup> ] | $\sigma_a$ [N/mm <sup>2</sup> ] | $\tau_a$ [N/mm <sup>2</sup> ] |
|----------------------|-------|----------------------------|---------------------------------|-------------------------------|
| Peraluman 50 (Al-Mg) | PE 50 | 230                        | 153                             | 89                            |
| Avional 22 (2017-T4) | AV 22 | 330                        | 220                             | 128                           |
| Avional 24 (2024-T4) | AV 24 | 370                        | 247                             | 143                           |

Tabella 10.3: Valori ammissibili dei materiali dei rivetti ( $k = 1,5$ ). I carichi di rottura sono quelli del manuale di aerotecnica (17 ST = 330 N/mm<sup>2</sup>, 24 ST = 370 N/mm<sup>2</sup>).

### Attenzione – Due convenzioni di sicurezza nello stesso capitolo

In questa sezione il coefficiente di sicurezza è  $k = 1,5$  e la tensione ammissibile si ricava dal *carico di rottura*  $R_m$  ( $\sigma_a = R_m/k$ ), coerentemente con il manuale da cui provengono le tabelle. Nel resto del capitolo (solette, anima, cassone, montante) abbiamo invece usato  $k = 2$  sul *carico di snervamento*  $R_{p0,2}$  ( $\sigma_a = R_{p0,2}/k$ ). Non è una svista: sono *due tradizioni regolamentari* legate al tipo di elemento e alla fonte dei dati. All'esame, la regola è dichiarare sempre **quale**  $k$  e **quale** carico di riferimento ( $R_m$  o  $R_{p0,2}$ ) si stanno usando, e restare coerenti all'interno dello stesso calcolo. Confrontare un margine ottenuto con  $k = 1,5$  su  $R_m$  con uno ottenuto con  $k = 2$  su  $R_{p0,2}$  senza dirlo è l'errore da evitare.

**Esempio 10.7 — Rivettatura anima–centina (pannello interno, Tabella 1)****Dati**

Collegamento fra l'anima di una centina e il corrente di bordo d'uscita. Due lamiere identiche,  $t = 1,5$  mm. Rivetto in AV 22 (Avional 22), accesso bilaterale. Carico trasmesso per rivetto  $F = 300$  N.

**Fasi A–B.** Pannello interno, non esposto al flusso: si usa la **Tabella 1** (AN 430, testa tonda sporgente). Spessore di riferimento  $t = 1,5$  mm.

**Fase C.** Sulla Tabella 1, riga AV 22 / Ø4, colonna  $t = 1,5$  mm: cella colorata a ridosso del gradino  $\Rightarrow d = 4$  mm.

**Fase D.**  $d/t = 4/1,5 = 2,67 \approx 3$ ;  $p = 3 \times 4 = 12$  mm e  $A = 2 \times 4 = 8$  mm (orientativi).

**Fase E.** Adottati i valori tabulati  $A = 9$  mm,  $p = 20$  mm; per AV 22:  $\sigma_a = 330/1,5 = 220$  N/mm<sup>2</sup>,  $\tau_a = 0,58 \cdot 220 = 128$  N/mm<sup>2</sup>.

$$\text{Modo I: } \tau = \frac{F}{\pi d^2/4} = \frac{300}{12,57} = 23,9 \text{ N/mm}^2 \leq 128 \text{ N/mm}^2 \quad (10.114)$$

$$\text{Modo II: } \sigma_{sc} = \frac{F}{d t} = \frac{300}{4 \cdot 1,5} = 50 \text{ N/mm}^2 \leq 220 \text{ N/mm}^2 \quad (10.115)$$

$$\text{Modo III: } \sigma_{rif} = \frac{F}{d t} = 50 \text{ N/mm}^2 \leq 220 \text{ N/mm}^2 \quad (10.116)$$

$$\text{Modo IV: } A = 9 \text{ mm} \geq A_{\min} = 8 \text{ mm} \quad (10.117)$$

$$\text{Modo V: } \sigma = \frac{F}{n t (p - d)} = \frac{300}{1 \cdot 1,5 \cdot (20 - 4)} = 12,5 \text{ N/mm}^2 \leq 220 \text{ N/mm}^2 \quad (10.118)$$

**Fase F.**  $\ell = 2 \cdot 1,5 + 1,5 \cdot 4 = 3 + 6 = 9$  mm, già normalizzato.

**Risultato – Esempio 1**

AN 430 --- Ø4 × 9 --- AVIONAL 22  
 $d = 4$  mm,  $\ell = 9$  mm, passo  $p = 20$  mm, distanza dal bordo  $A = 9$  mm. Tutti e cinque i modi verificati.

**Esempio 10.8 — Rivestimento del bordo d'attacco (Tabella 3)****Dati**

Collegamento fra il rivestimento del bordo d'attacco alare e la relativa centina. Rivestimento  $t_1 = 1,2$  mm, flangia della centina  $t_2 = 1,5$  mm. Rivetto in PE 50 (Peraluman 50). Zona esposta al flusso, accesso bilaterale. Carico per rivetto  $F = 400$  N.

**Fasi A–B.** Zona esposta, lamiera sottile: si sceglie la lamiera più sottile come riferimento,  $t = 1,2$  mm, e la **Tabella 3** (AN 426, testa svasata imbutita).

**Fase C.** Riga PE 50 / Ø4,8, colonna  $t = 1,2$  mm: cella colorata a ridosso del gradino  $\Rightarrow d = 4,8$  mm.

**Fase D.**  $d/t = 4,8/1,2 = 4 > 3,5$ : leggermente sopra il valore guida, ma è il diametro minimo di tabella per questa combinazione, e si accetta.  $p = 3 \times 4,8 = 14,4$  mm,  $A = 2 \times 4,8 = 9,6$  mm (orientativi).

**Fase E.** Valori tabulati  $A = 13$  mm,  $p = 32$  mm; per PE 50:  $\sigma_a = 230/1,5 = 153$  N/mm<sup>2</sup>,  $\tau_a = 0,58 \cdot 153 = 89$  N/mm<sup>2</sup>.

$$\text{Modo I: } \tau = \frac{400}{\pi \cdot 4,8^2 / 4} = \frac{400}{18,10} = 22,1 \text{ N/mm}^2 \leq 89 \text{ N/mm}^2 \quad (10.119)$$

$$\text{Modo II: } \sigma_{sc} = \frac{400}{4,8 \cdot 1,2} = 69,4 \text{ N/mm}^2 \leq 153 \text{ N/mm}^2 \quad (10.120)$$

$$\text{Modo III: } \sigma_{rif} = \frac{F}{d t_1} = 69,4 \text{ N/mm}^2 \leq 153 \text{ N/mm}^2 \quad (10.121)$$

$$\text{Modo IV: } A = 13 \text{ mm} \geq A_{\min} = 11,1 \text{ mm} \quad (10.122)$$

$$\text{Modo V: } \sigma = \frac{400}{1 \cdot 1,2 \cdot (32 - 4,8)} = \frac{400}{32,64} = 12,3 \text{ N/mm}^2 \leq 153 \text{ N/mm}^2 \quad (10.123)$$

**Fase F.**  $\sum t_i = 1,2 + 1,5 = 2,7$  mm;  $\ell = 2,7 + 1,5 \cdot 4,8 = 2,7 + 7,2 = 9,9$  mm, arrotondato al normalizzato superiore  $\ell = 10$  mm.

#### Risultato – Esempio 2

AN 426 --- Ø4,8 × 10 --- PERALUMAN 50  
 $d = 4,8$  mm,  $\ell = 10$  mm, passo  $p = 32$  mm, distanza dal bordo  $A = 13$  mm. Tutti e cinque i modi verificati.

### 10.8.4 Vademecum degli errori tipici

#### Attenzione – Da rileggere prima di ogni esercizio

- Sbagliare la lamiera di riferimento.** Con due lamiere di spessore diverso si considera *sempre la più sottile*: è quella che cede per ovalizzazione (Modo III) o strappo (Modo V). Usare la più spessa sottodimensiona il rivetto rispetto alla lamiera debole.
- Leggere il diametro dalla zona sbagliata.** Le celle a destra del gradino (zona taglio, Modo I) sono inammissibili in progetto: si prende sempre la cella colorata immediatamente a sinistra del gradino.
- Non verificare le distanze geometriche.** Un rivetto di diametro corretto ma troppo vicino al bordo cede per tranciamento (Modo IV):  $A$  e  $p$  vanno confrontati con i minimi tabulati; se il valore dei rapporti adimensionali è inferiore, si adotta il tabulato.
- Calcolare male la lunghezza del gambo.** Se  $\ell < \sum t_i + 1,5 d$  la controtesta non si forma: la giunzione *sembra* installata ma non trasmette il carico. Arrotondare sempre al normalizzato superiore.

5. **Usare AN 426 dove la lamiera è troppo sottile per la sede.** La testa svasata richiede una sede (fresata o imbutita): se la lamiera è troppo sottile persino per l'imbutitura, la testa sporge comunque. In quel caso si riduce il diametro o si passa a una testa tonda.

#### Un esercizio di conteggio: quanti rivetti su una fila

Su un tratto di lunghezza  $\ell = 120$  mm da rivettare a fila singola, con  $A = 8$  mm e passo  $p = 16$  mm (primo e ultimo rivetto a distanza  $A$  dagli estremi): la lunghezza utile è  $\ell_u = \ell - 2A = 120 - 16 = 104$  mm; il numero di interassi è  $\lfloor \ell_u / p \rfloor = \lfloor 104 / 16 \rfloor = 6$ , dunque  $n = 6 + 1 = 7$  rivetti. Per una *doppia* fila, la larghezza minima di lamiera è  $W_{\min} = 2A + p = 16 + 16 = 32$  mm (quote verticali  $A-p-A$ ).

### 10.8.5 Le tabelle di selezione

Seguono le tre tabelle di selezione (una per tipo di giunzione) e le due schede dimensionali dei rivetti normalizzati AN 430 e AN 426. Nelle tabelle di selezione, la campitura  indica la *zona di ovalizzazione* (progetto corretto), la cella bianca la *zona di taglio* (da evitare); il “gradino” fra le due individua, per ciascuno spessore, il diametro minimo da adottare.

Tabella 1 | Giunzione tipo 1 — Testa tonda sporgente (AN 430) — Pannelli interni

| rivetti |       | spessore lamiera in mm |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------|-------|------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| mat.    | Ø(mm) | 0,4                    | 0,5 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 5,0 |
| PE 50   | 2,4   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 3,2   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 4     |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 4,8   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 6,4   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| AV 22   | 2,4   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 3,2   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 4     |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| AV 24   | 4,8   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 6,4   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |

Schema del tipo di giunzione (Tab. 1)

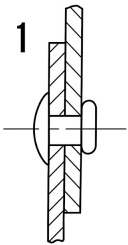


Tabella 2 | Giunzione tipo 2 — Testa svasata fresata 100° (AN 426) — Rivestimento esterno

| rivetti |       | spessore lamiera in mm |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------|-------|------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| mat.    | Ø(mm) | 0,4                    | 0,5 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 5,0 |
| PE 50   | 2,4   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 3,2   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 4     |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 4,8   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 6,4   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| AV 22   | 2,4   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 3,2   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 4     |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| AV 24   | 4,8   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 6,4   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |

Schema del tipo di giunzione (Tab. 2)

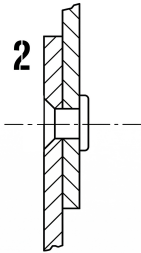


Tabella 3 | Giunzione tipo 3 — Testa svasata imbutita 100° (AN 426) — Bordo d'attacco

| rivetti |       | spessore lamiera in mm |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------|-------|------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| mat.    | Ø(mm) | 0,4                    | 0,5 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 5,0 |
| PE 50   | 2,4   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 3,2   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 4     |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 4,8   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 6,4   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| AV 22   | 2,4   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 3,2   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 4     |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| AV 24   | 4,8   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|         | 6,4   |                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |

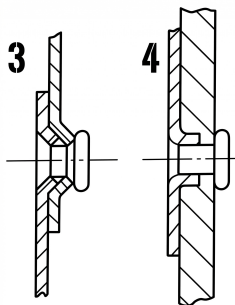
■ Zona ovalizzazione (progetto corretto)



□ Zona taglio (da evitare).

*Nota:* la posizione del gradino è ricostruita dagli appunti originali; verificare con la tabella del manuale prima dell'uso in sede d'esame.

### Schema del tipo di giunzione (Tab. 3)

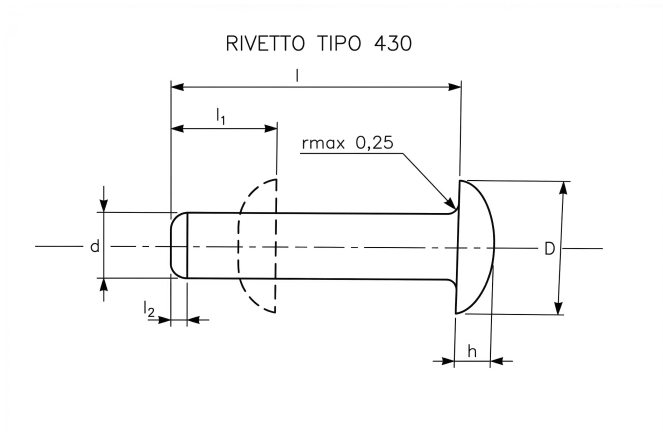


AN 430 (USA) | Rivetto a testa tonda sporgente

Dati dimensionali

| Par.                | d 2,4                                 | d 3,2                                 | d 4,0                                 | d 4,8                                 | d 6,4                                 |
|---------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| d (mm)              | 2,4 <sup>+0,05</sup> <sub>-0,04</sub> | 3,2 <sup>+0,05</sup> <sub>-0,05</sub> | 4,0 <sup>+0,04</sup> <sub>-0,06</sub> | 4,8 <sup>+0,03</sup> <sub>-0,07</sub> | 6,4 <sup>+0,03</sup> <sub>-0,07</sub> |
| D (mm)              | 4,7 ± 0,2                             | 6,3 ± 0,3                             | 7,9 ± 0,4                             | 9,5 ± 0,5                             | 12,6 ± 0,7                            |
| h (mm)              | 1,0 <sup>+0,25</sup> <sub>-0</sub>    | 1,4 <sup>+0,25</sup> <sub>-0</sub>    | 1,7 <sup>+0,25</sup> <sub>-0</sub>    | 2,0 <sup>+0,25</sup> <sub>-0</sub>    | 2,7 <sup>+0,25</sup> <sub>-0</sub>    |
| ℓ <sub>1</sub> (mm) | 3,6                                   | 4,8                                   | 5,9                                   | 7,1                                   | 9,5                                   |
| ℓ <sub>2</sub> (mm) | 0,6 ± 0,25                            | 0,8 ± 0,25                            | 1,0 ± 0,25                            | 1,2 ± 0,25                            | 1,6 ± 0,25                            |

Schema quotato



Designazione: AN 430 -- Ø[d] × [L] -- [mat.]  
Esempio: AN 430 -- Ø4 × 20 -- AVIONAL 24

Lunghezze disponibili

| d   | 3 | 3,5 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 40 |
|-----|---|-----|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2,4 |   |     |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 3,2 |   |     |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 4,0 |   |     |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 4,8 |   |     |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 6,4 |   |     |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

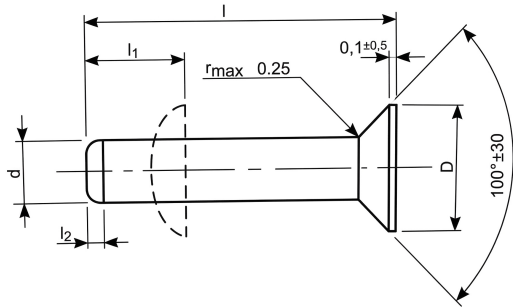
Disponibile Non disponibile (lunghezze in mm)

AN 426 (USA) | Rivetto a testa svasata 100°

Dati dimensionali

| Par.                | d 2,4                                 | d 3,2                                 | d 4,0                                 | d 4,8                                 | d 6,4                                 |
|---------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| d (mm)              | 2,4 <sup>+0,05</sup> <sub>-0,04</sub> | 3,2 <sup>+0,05</sup> <sub>-0,05</sub> | 4,0 <sup>+0,04</sup> <sub>-0,06</sub> | 4,8 <sup>+0,03</sup> <sub>-0,07</sub> | 6,4 <sup>+0,03</sup> <sub>-0,07</sub> |
| D (mm)              | 4,54 ± 0,1                            | 5,72 ± 0,1                            | 7,26 ± 0,1                            | 9,00 ± 0,1                            | 12,10 ± 0,1                           |
| b (mm)              | 0,90 ± 0,05                           | 1,06 ± 0,05                           | 1,40 ± 0,05                           | 1,78 ± 0,05                           | 2,40 ± 0,05                           |
| ℓ <sub>1</sub> (mm) | 3,6                                   | 4,8                                   | 5,9                                   | 7,1                                   | 9,5                                   |
| ℓ <sub>2</sub> (mm) | 0,6 ± 0,25                            | 0,8 ± 0,25                            | 1,0 ± 0,25                            | 1,2 ± 0,25                            | 1,6 ± 0,25                            |

Schema quotato



Designazione: AN 426 -- Ø[d] × [L] -- [mat.]

Esempio: AN 426 -- Ø4 × 20 -- AVIONAL 22

Lunghezze disponibili

| d   | 3 | 3,5 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 40 |
|-----|---|-----|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2,4 |   |     |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 3,2 |   |     |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 4,0 |   |     |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 4,8 |   |     |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 6,4 |   |     |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

Disponibile Non disponibile (lunghezze in mm)

### 10.8.6 Esercizi proposti

Per ogni esercizio si applichi il percorso in sei fasi (A→F). I risultati riportano i valori finali adottati ( $d$ ,  $A$ ,  $p$ ,  $\ell$ ) e la designazione AN.

1. AN 430, fila singola, pannelli interni.  $t_1 = 0,8$  mm,  $t_2 = 1,2$  mm, rivetto AV 22. *Risultato:* AN 430 —  $\varnothing 3,2 \times 7$  — AVIONAL 22;  $A = 8$  mm,  $p = 16$  mm.
2. AN 430, fila singola, pannelli interni.  $t_1 = 1,0$  mm,  $t_2 = 1,5$  mm, rivetto AV 22. *Risultato:* AN 430 —  $\varnothing 4,0 \times 9$  — AVIONAL 22;  $A = 9$  mm,  $p = 20$  mm.
3. AN 430, fila singola, pannelli interni.  $t_1 = 1,2$  mm,  $t_2 = 1,8$  mm, rivetto AV 24. *Risultato:* AN 430 —  $\varnothing 4,8 \times 12$  — AVIONAL 24;  $A = 11$  mm,  $p = 24$  mm.
4. AN 430, fila singola, pannelli interni.  $t_1 = 0,5$  mm,  $t_2 = 0,8$  mm, rivetto PE 50. *Risultato:* AN 430 —  $\varnothing 2,4 \times 5$  — PERALUMAN 50;  $A = 6$  mm,  $p = 12$  mm.
5. AN 430, fila singola, pannelli interni.  $t_1 = 1,5$  mm,  $t_2 = 2,0$  mm, rivetto PE 50. *Risultato:* AN 430 —  $\varnothing 6,4 \times 14$  — PERALUMAN 50;  $A = 14$  mm,  $p = 32$  mm.
6. AN 426 (imbutita  $100^\circ$ ), fila singola, bordo d'attacco.  $t_1 = 1,0$  mm,  $t_2 = 1,5$  mm, rivetto PE 50. *Risultato:* AN 426 —  $\varnothing 4,0 \times 9$  — PERALUMAN 50;  $A = 11$  mm,  $p = 20$  mm.
7. AN 426 (imbutita  $100^\circ$ ), fila singola, bordo d'attacco.  $t_1 = 1,2$  mm,  $t_2 = 1,5$  mm, rivetto PE 50. *Risultato:* AN 426 —  $\varnothing 4,8 \times 10$  — PERALUMAN 50;  $A = 13$  mm,  $p = 32$  mm.
8. AN 426 (imbutita  $100^\circ$ ), fila singola, bordo d'attacco.  $t_1 = 0,8$  mm,  $t_2 = 1,2$  mm, rivetto AV 22. *Risultato:* AN 426 —  $\varnothing 3,2 \times 7$  — AVIONAL 22;  $A = 9$  mm,  $p = 16$  mm.
9. AN 426 (imbutita  $100^\circ$ ), fila singola, bordo d'attacco.  $t_1 = 0,6$  mm,  $t_2 = 0,8$  mm, rivetto AV 22. *Risultato:* AN 426 —  $\varnothing 2,4 \times 5$  — AVIONAL 22;  $A = 7$  mm,  $p = 12$  mm.
10. AN 426 (imbutita  $100^\circ$ ), fila singola, bordo d'attacco.  $t_1 = 1,8$  mm,  $t_2 = 2,0$  mm, rivetto AV 24. *Risultato:* AN 426 —  $\varnothing 6,4 \times 14$  — AVIONAL 24;  $A = 16$  mm,  $p = 32$  mm.

#### Dove siamo arrivati, dove andiamo

Il mestiere del dimensionamento è ora nelle nostre mani: sappiamo ridurre i carichi alari a  $T$ ,  $M_f$  e  $M_t$ ; distribuirli fra solette, anima e cassone di un'ala monolongherone e dimensionare ciascun elemento, fino alla verifica di rigidità torsionale; conosciamo le architetture — ala bilongherone, fusoliere a guscio, semiguscio e traliccio — e sappiamo verificare ciò che tiene tutto insieme: bulloni, perni, forcelle e rivetti, questi ultimi fino alla scelta del diametro sulle tabelle di selezione e alla designazione AN completa. In ogni formula di questo capitolo, però, compariva un ospite non ancora presentato ufficialmente: il fattore di carico  $n$ . Da dove viene? Chi decide quanto vale? La risposta è l'involuppo di volo — il patto fra il progettista e il regolamento — ed è il tema con cui si apre la prossima parte.

## **Parte IV**

### **L'inviluppo di volo e le esercitazioni**



## Capitolo 11

# L'inviluppo di volo: manovra e raffica

### Bussola concettuale

**Studiamo questo perché.** tutte le verifiche delle prime due parti presuppongono di conoscere i carichi; ma *chi* decide quanto vale il carico di progetto di un'ala? Non il costruttore, per sua libera scelta: lo decide il regolamento, attraverso l'**inviluppo di volo** — il diagramma che delimita, nel piano velocità–fattore di carico, tutte le condizioni che la struttura deve sopportare, in manovra e in raffica.

**Da dove veniamo.** dall'aerodinamica di base: portanza, coefficiente di portanza, stallo, pressione dinamica.

**Dove andiamo.** al capitolo delle esercitazioni, dove l'inviluppo verrà costruito numericamente per un velivolo reale e i suoi punti diventeranno i carichi del dimensionamento strutturale.

**Al termine saprai.** distinguere velocità indicata e velocità vera e spiegare perché i diagrammi si tracciano in IAS; definire il fattore di carico e le parabole di stallo; costruire il diagramma di manovra con le velocità caratteristiche regolamentari; interpretare gli archi dell'anemometro; e ricavare le rette del diagramma di raffica.

### 11.1 Velocità indicata e velocità vera

Si indica con **IAS** (*Indicated Air Speed*) la velocità letta sull'anemometro di bordo, e con **TAS** (*True Air Speed*) la velocità vera del velivolo rispetto alla massa d'aria. Le due coincidono solo al livello del mare in atmosfera standard, e capire perché divergono in quota è essenziale per tutto il capitolo.

L'anemometro, infatti, non misura una velocità: misura una **pressione dinamica**,

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2, \quad (11.1)$$

e la converte in velocità *come se* la densità fosse quella al suolo,  $\rho_0$ . Uguagliando le due pressioni dinamiche

— quella vera in quota, con densità  $\rho$ , e quella equivalente al livello del mare —

$$\frac{1}{2} \rho_0 \text{IAS}^2 = \frac{1}{2} \rho \text{TAS}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{IAS} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \text{TAS}.} \quad (11.2)$$

In quota  $\rho < \rho_0$ , quindi, a parità di velocità vera, la velocità indicata è *minore*: un velivolo che vola a 200 km/h veri a 4.000 m ne legge sull'anemometro circa 163.

### Risultato – Perché i diagrammi si tracciano in IAS

Portanza, resistenza e momento aerodinamico dipendono tutti dalla pressione dinamica:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L, \quad D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D, \quad M = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_M \bar{c}. \quad (11.3)$$

Scrivendo queste relazioni in funzione della IAS si lavora sempre con  $\rho_0$ : **a una data IAS corrisponde un dato carico aerodinamico, qualunque sia la quota**. Per la struttura — e quindi per il diagramma di manovra — la velocità che conta è la IAS: è la “velocità del carico”. Ed è anche la velocità che serve al pilota: lo stallo, a parità di peso e configurazione, avviene sempre alla stessa IAS.

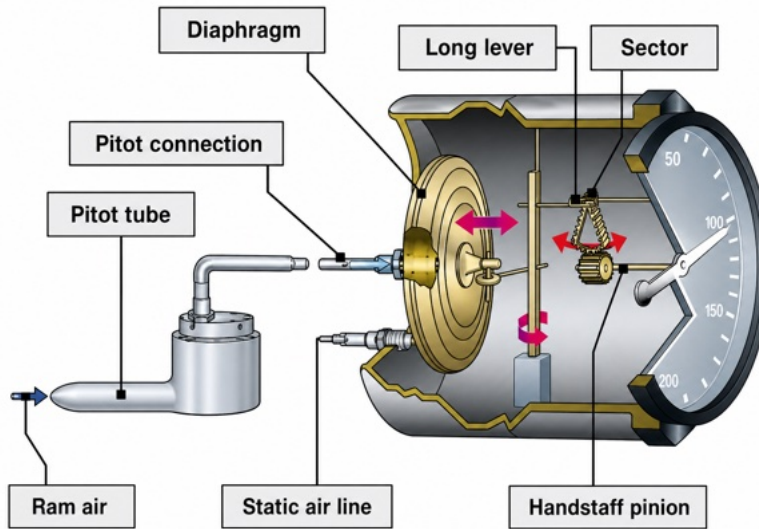


Figura 11.1: IAS e TAS: l'anemometro misura la pressione dinamica, cioè il carico aerodinamico equivalente.

#### 11.1.1 La velocità di stallo in IAS e in TAS

Lo stallo si raggiunge quando, per sostenere il peso, serve il coefficiente di portanza massimo. In velocità indicata:

$$\frac{1}{2} \rho_0 V_{s, \text{IAS}}^2 S C_{L, \text{max}} = W \quad \Rightarrow \quad V_{s, \text{IAS}} = \sqrt{\frac{2W}{\rho_0 S C_{L, \text{max}}}}, \quad (11.4)$$

che non dipende dalla quota; in velocità vera,  $V_{s,TAS} = \sqrt{2W/(\rho S C_{L,max})}$ , che invece *cresce* con la quota al diminuire di  $\rho$ . Il pilota, guardando l'anemometro, vede lo stallo sempre allo stesso valore: un'altra ragione per cui la IAS è la grandezza operativa.

## 11.2 Il fattore di carico e le parabole di stallo

### Definizione – Fattore di carico

Il **fattore di carico** (o *coefficiente di contingenza*) è il rapporto fra la portanza e il peso:

$$n = \frac{L}{W}. \quad (11.5)$$

In volo orizzontale rettilineo uniforme  $L = W$  e  $n = 1$ ; in una richiamata o in una virata stretta  $n > 1$ ; in volo rovescio  $n < 0$ . Il fattore di carico è ciò che il pilota “sente” (a  $n = 4$  il suo corpo pesa quattro volte tanto) e ciò che la struttura “paga”: tutti i carichi aerodinamici e inerziali scalano con  $n$ .

Esprimendo la portanza in velocità indicata,

$$n = \frac{\frac{1}{2}\rho_0 V^2 S C_L}{W} : \quad (11.6)$$

a parità di velivolo, il fattore di carico dipende da  $V$  e da  $C_L$ . Ma  $C_L$  non può superare  $C_{L,max}$  (né scendere sotto  $C_{L,min}$  in volo rovescio): sostituendo i valori limite si ottengono le **parabole di stallo**

$$n^+(V) = \frac{\frac{1}{2}\rho_0 V^2 S C_{L,max}}{W}, \quad n^-(V) = \frac{\frac{1}{2}\rho_0 V^2 S C_{L,min}}{W}, \quad (11.7)$$

che delimitano il campo aerodinamicamente raggiungibile: sopra la parabola positiva (o sotto quella negativa) l'ala è già stallata, e quei punti del piano  $(V, n)$  semplicemente non si possono occupare. Si noti la forma elegante della parabola positiva: poiché  $n^+(V_s) = 1$ , si può scrivere  $n^+(V) = (V/V_s)^2$ .

## 11.3 Il diagramma di manovra

L'aerodinamica limita il campo con le parabole; il **regolamento** lo limita con i fattori di carico massimi che la struttura deve sopportare. Le norme di aeronavigabilità per i velivoli leggeri (la famiglia JAR-23, oggi CS-23, nata in ambito europeo sull'impianto delle norme americane) distinguono tre categorie di impiego:

| Categoria  | $n_{max}$ | $n_{min}$ |
|------------|-----------|-----------|
| Normale    | 3,8       | -1,52     |
| Utility    | 4,4       | -1,76     |
| Acrobatica | 6,0       | -3,0      |

Tabella 11.1: Fattori di carico limite secondo JAR/CS-23. Si noti la regola interna:  $n_{min} = -0,4 n_{max}$  per normale e utility,  $n_{min} = -0,5 n_{max}$  per l'acrobatica.

Il **diagramma di manovra** si ottiene intersecando il campo aerodinamico (le parabole) con le rette regolamentari  $n = n_{\max}$  e  $n = n_{\min}$ , e chiudendolo a destra con le velocità caratteristiche di progetto.

### 11.3.1 La velocità di manovra

Il punto d'incontro fra la parabola di stallo positiva e la retta  $n = n_{\max}$  è il **punto di manovra**  $A$ ; la velocità corrispondente è la **velocità di manovra**  $V_A$ . Dalla (11.7):

$$n_{\max} = \frac{\frac{1}{2}\rho_0 V_A^2 S C_{L,\max}}{W} \implies V_A = \sqrt{\frac{2 n_{\max} W}{\rho_0 S C_{L,\max}}}, \quad (11.8)$$

e ricordando l'espressione di  $V_s$  si ottiene la forma memorabile

$$V_A = V_s \sqrt{n_{\max}}. \quad (11.9)$$

#### Analogia pratica – Che cosa significa davvero $V_A$

Sotto  $V_A$  il velivolo è *protetto dallo stallo*: anche tirando la barra a fondo corsa, l'ala stalla *prima* di raggiungere  $n_{\max}$  — il fusibile aerodinamico salta prima di quello strutturale. Sopra  $V_A$  accade il contrario: una manovra brusca può caricare la struttura oltre il limite prima che l'ala stalli. Ecco perché  $V_A$  è anche la velocità massima alla quale è consentita l'escursione completa dei comandi, e perché in aria turbolenta si rallenta *sotto*  $V_A$ : è l'unica zona del diagramma dove l'aerodinamica fa da guardia del corpo alla struttura. In modo analogo si definisce la velocità di manovra in volo rovescio, con  $C_{L,\min}$  e  $n_{\min}$ .

### 11.3.2 Le velocità di progetto

Il regolamento fissa poi le velocità che chiudono il diagramma a destra:

$V_C$  velocità di progetto per la crociera (*design cruise speed*). La norma ne prescrive il valore minimo in funzione del carico alare; in unità SI, con  $W/S$  in  $\text{N/m}^2$  e  $V$  in  $\text{m/s}$ :

$$V_C \geq 2,455 \sqrt{\frac{W}{S}} \quad (\text{normale e utility}), \quad V_C \geq 2,669 \sqrt{\frac{W}{S}} \quad (\text{acrobatica}). \quad (11.10)$$

$V_D$  velocità di progetto in affondata (*design dive speed*), legata a  $V_C$  da

$$V_D = 1,40 V_C \quad (\text{normale}), \quad V_D = 1,50 V_C \quad (\text{utility}), \quad V_D = 1,55 V_C \quad (\text{acrobatica}). \quad (11.11)$$

$V_{NE}$  velocità da non superare mai (*never exceed speed*), fissata al di sotto di  $V_D$  come margine operativo di sicurezza (tipicamente  $V_{NE} = 0,9 V_D$ ; per alcuni velivoli il costruttore adotta prudenzialmente valori inferiori).

► **Approfondimento: Da dove vengono 2,455 e 2,669**

Le costanti della (11.10) non hanno nulla di misterioso: la norma originale prescrive  $V_C \geq 33 \sqrt{W/S}$  nodi per normale e utility e  $V_C \geq 36 \sqrt{W/S}$  nodi per l'acrobatica, con il carico alare in libbre su piede quadro. Convertendo nodi in metri al secondo ( $\times 0,5144$ ) e  $\text{lb/ft}^2$  in  $\text{N/m}^2$  ( $\times 47,88$ ) si ottiene  $33 \cdot 0,5144 / \sqrt{47,88} = 2,453 \approx 2,455$  e  $36 \cdot 0,5144 / \sqrt{47,88} = 2,676 \approx 2,669$  (le piccole differenze dipendono dagli arrotondamenti storici delle conversioni). Un avvertimento pratico: in alcuni appunti circolanti la costante acrobatica compare come 2,699 — è un refuso di trascrizione di 2,669, e il controllo numerico lo smaschera subito: per il velivolo dell'esercitazione,  $2,669 \sqrt{1059,4} = 86,87 \text{ m/s}$ , che è il valore corretto riscontrato in tutti i calcoli successivi.

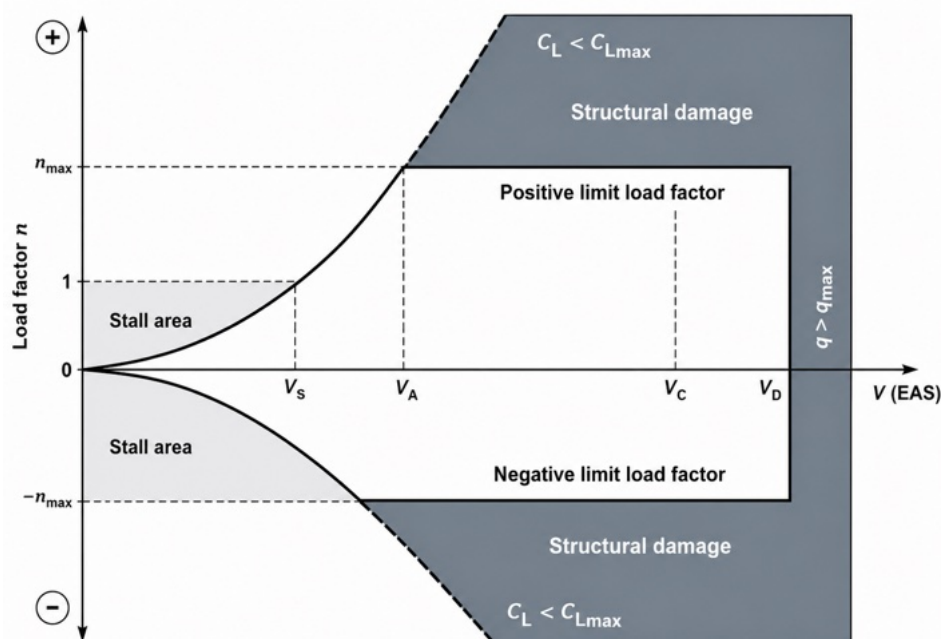


Figura 11.2: Il diagramma di manovra regolamentare: l'aerodinamica lo limita a sinistra, il regolamento in alto, in basso e a destra.

## 11.4 Gli archi dell'anemometro

Dal diagramma di manovra discendono direttamente le velocità che delimitano gli **archi colorati** dell'anemometro — il modo in cui l'involuppo di volo entra, letteralmente, nel campo visivo del pilota:

$V_{S0}$  velocità di stallo in volo diritto con flap estesi;

$V_{S1}$  velocità di stallo in volo diritto senza flap;

$V_{S2}$  velocità di stallo in volo rovescio senza flap;

$V_{FE}$  velocità massima con flap estesi (*flaps extended*);

$V_{NO}$  velocità massima in aria calma (*normal operating*), al confine fra arco verde e arco giallo, coincidente con la  $V_C$  di progetto;

$V_{NE}$  velocità da non superare mai, marcata dalla linea rossa.

Gli archi si leggono così: **arco bianco** da  $V_{S0}$  a  $V_{FE}$ , campo d'impiego dei flap; **arco verde** da  $V_{S1}$  a  $V_{NO}$ , campo normale d'impiego; **arco giallo** da  $V_{NO}$  a  $V_{NE}$ , campo di cautela, consentito solo in aria calma; **linea rossa** a  $V_{NE}$ .

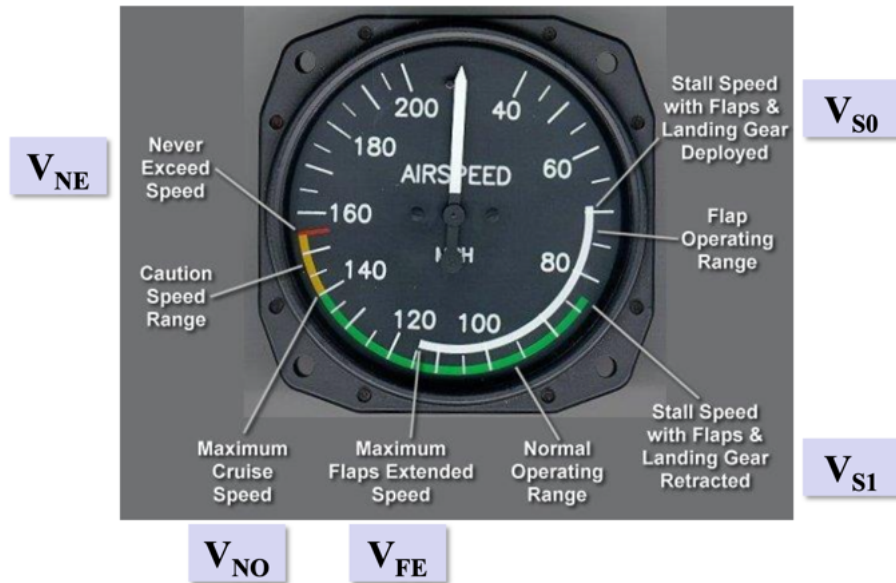


Figura 11.3: Gli archi dell'anemometro: l'involuppo di volo tradotto in colori sul cruscotto.

#### Perché l'arco giallo esiste

L'arco giallo non è “velocità proibita”: è velocità in cui la struttura ha esaurito il margine per gli imprevisti. In aria calma il velivolo vi vola legittimamente; ma una raffica incontrata lì dentro può sommare al volo un fattore di carico che, come vedremo subito, cresce proprio con la velocità.

## 11.5 Il diagramma di raffica

Il diagramma di manovra descrive i carichi che il *pilota* può imporre; ma anche l'*atmosfera* sa caricare la struttura. Si consideri un velivolo in volo orizzontale rettilineo uniforme a velocità  $V$  che incontra una **raffica verticale** istantanea di velocità  $w$ : la corrente relativa cambia direzione e l'angolo d'attacco varia di

$$\Delta\alpha \approx \frac{w}{V} \quad (11.12)$$

(approssimazione di piccoli angoli:  $w \ll V$ ). La variazione di coefficiente di portanza è proporzionale tramite il gradiente della retta di portanza:

$$\Delta C_L = C_{L\alpha} \Delta\alpha = C_{L\alpha} \frac{w}{V}, \quad (11.13)$$

quindi la variazione di portanza vale

$$\Delta L = \frac{1}{2} \rho_0 V^2 S \Delta C_L = \frac{1}{2} \rho_0 V S C_{L\alpha} w : \quad (11.14)$$

si noti che nel prodotto una potenza di  $V$  si è semplificata con quella a denominatore di  $\Delta\alpha$ : **il sovraccarico di raffica cresce linearmente con la velocità di volo**. Il fattore di carico diventa

$$n = 1 + \frac{\Delta L}{W} = 1 \pm \frac{\rho_0 C_{L\alpha} V w}{2 W/S}, \quad (11.15)$$

con il segno positivo per raffica ascendente e negativo per raffica discendente. Nel piano  $(V, n)$  la (11.15) è una **retta uscente dal punto**  $(0, 1)$ : pendenza proporzionale all'intensità  $w$  della raffica e inversamente proporzionale al carico alare  $W/S$ .

I regolamenti non impongono direttamente il fattore di carico di raffica: impongono *valori convenzionali* di  $w$  alle velocità di riferimento (tipicamente  $w = \pm 15,2$  m/s, cioè  $\pm 50$  ft/s, a  $V_C$ , e  $w = \pm 7,6$  m/s a  $V_D$ ; in affondata si ammette che il pilota eviti l'aria peggiore). Il **diagramma di raffica** si costruisce tracciando le quattro rette e leggendone i valori alle velocità regolamentari; l'involuppo complessivo del velivolo è, punto per punto, il più severo fra manovra e raffica.

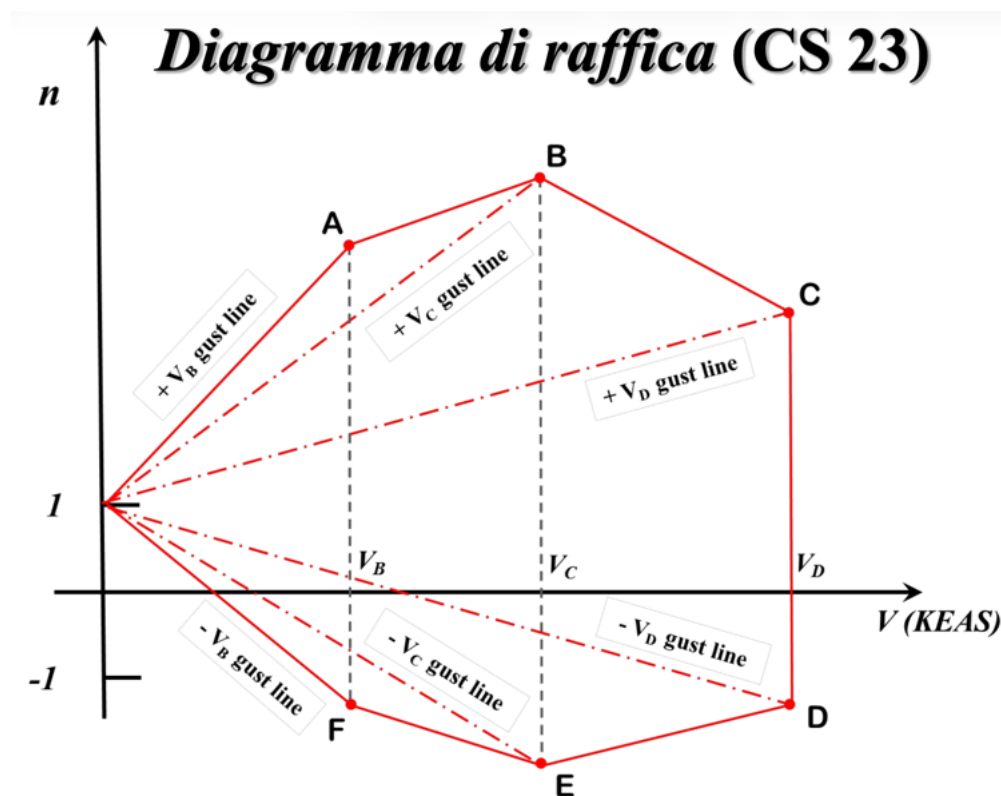


Figura 11.4: Il diagramma di raffica: l'atmosfera carica la struttura con rette, il pilota con parabole e segmenti.

### 11.5.1 La correzione del gradiente di portanza

Nella (11.15) il gradiente  $C_{L\alpha}$  è quello dell'*ala reale*, non del profilo. Il valore di profilo  $C_{L\alpha,\infty}$  (teoricamente  $2\pi$  per radiante, in pratica poco meno) va corretto per l'allungamento alare finito:

$$C_{L\alpha} = \frac{C_{L\alpha,\infty}}{1 + \frac{C_{L\alpha,\infty}}{\pi e AR}}, \quad AR = \frac{b^2}{S}, \quad (11.16)$$

dove  $e$  è il fattore di Oswald ( $e \approx 0,9$  per un'ala ben progettata). Un'ala di basso allungamento risponde più docilmente alle variazioni d'incidenza — il suo  $C_{L\alpha}$  è minore — e quindi, a parità di raffica, incassa un sovraccarico minore: è uno dei motivi per cui i velivoli da alta velocità in bassa quota hanno ali corte.

#### Un affinamento che qui trascuriamo

La (11.15) suppone la raffica *istantanea* e il velivolo *fermo* nella sua risposta: nella realtà la raffica ha un gradiente spaziale e il velivolo inizia a salire assecondandola, alleggerendo il colpo. I regolamenti ne tengono conto con un fattore di attenuazione ( $K_g$ , funzione di un parametro di massa adimensionale) che riduce la pendenza delle rette. Per i nostri scopi didattici lavoreremo con la forma non attenuata, che è conservativa.

#### Dove siamo arrivati, dove andiamo

Il cerchio si sta chiudendo: ora sappiamo da dove vengono i carichi — dall'involuppo di volo, con i suoi fattori limite di categoria, le velocità caratteristiche e le rette di raffica. Non resta che mettere tutto in fila su un velivolo vero: nel prossimo capitolo costruiremo numericamente l'involuppo completo di un addestratore acrobatico, ne ripartiremo la portanza fra ala e impennaggio, traccieremo i diagrammi di taglio e momento della semiala con i suoi serbatoi, e dimensioneremo il longerone. Tutta la catena, dall'aria al millimetro quadro.



## Capitolo 12

# Le esercitazioni: dall'inviluppo al longherone

### Bussola concettuale

**Studiamo questo perché.** la teoria diventa mestiere solo quando produce numeri su un velivolo vero. In questo capitolo l'intera catena del corso viene percorsa senza salti su un addestratore acrobatico reale, il SIAI SF-260: inviluppo di volo, ripartizione della portanza fra ala e impennaggio, diagrammi di taglio e momento della semiala con i serbatoi subalari, e dimensionamento del longherone.

**Da dove veniamo.** da tutto il libro: servono i diagrammi della mensola e la verifica combinata (Capitolo 6), i materiali (Capitolo 7) e l'inviluppo di volo (Capitolo 11).

**Dove andiamo.** oltre questo capitolo c'è la pratica: le simulazioni di prova scritta e i temi d'esame, che di queste quattro esercitazioni sono varianti.

**Al termine saprai.** costruire numericamente un inviluppo di manovra e di raffica; risolvere l'equilibrio longitudinale per ripartire la portanza; costruire per sovrapposizione i diagrammi di una semiala comunque caricata; e condurre un dimensionamento iterativo del longherone fino alla verifica combinata.

### 12.1 Il velivolo delle esercitazioni

Il SIAI-Marchetti SF-260 è un monomotore biposto da addestramento acrobatico: piccolo, robusto e documentato quanto basta per farne il banco di prova ideale del corso. I dati che useremo:

| Grandezza                                  | Simbolo              | Valore                 |
|--------------------------------------------|----------------------|------------------------|
| Peso massimo                               | $W$                  | 10.700 N               |
| Apertura alare                             | $b$                  | 8,35 m                 |
| Superficie alare                           | $S$                  | 10,1 m <sup>2</sup>    |
| Coefficiente di portanza massimo           | $C_{L,max}$          | 1,5                    |
| Coefficiente di portanza massimo con flap  | $C_{L,max}^{flap}$   | 2,4                    |
| Coefficiente di portanza minimo (rovescio) | $C_{L,min}$          | -1,02                  |
| Gradiente di portanza del profilo          | $C_{L\alpha,\infty}$ | 5,07 rad <sup>-1</sup> |
| Fattore di carico massimo (acrobatico)     | $n_{max}$            | 6                      |
| Fattore di carico minimo                   | $n_{min}$            | -3                     |

Tabella 12.1: Dati del SIAI SF-260 al peso massimo, categoria acrobatica.

## 12.2 Esercitazione A: l'involuppo di volo del SF-260

### 12.2.1 Le velocità caratteristiche

Il carico alare vale  $W/S = 10700/10,1 = 1.059,4 \text{ N/m}^2$ . Applicando in ordine le formule del Capitolo 11:

*Velocità di crociera di progetto* (categoria acrobatica, (11.10)), che assumiamo coincidente con la  $V_{NO}$  dell'anemometro:

$$V_{NO} = 2,669 \sqrt{\frac{W}{S}} = 2,669 \sqrt{1059,4} = 86,87 \text{ m/s} = 313 \text{ km/h} = 169 \text{ kt.} \quad (12.1)$$

*Velocità di affondata* ( $V_D = 1,55 V_C$  per l'acrobatica):

$$V_D = 1,55 \cdot 86,87 = 134,65 \text{ m/s} = 485 \text{ km/h} = 262 \text{ kt.} \quad (12.2)$$

*Velocità da non superare*, che il costruttore fissa prudenzialmente a  $0,8 V_D$  (più severa del consueto  $0,9 V_D$ ):

$$V_{NE} = 0,8 V_D = 107,72 \text{ m/s} = 388 \text{ km/h} = 209 \text{ kt;} \quad (12.3)$$

il diagramma di manovra verrà chiuso a destra su questo valore.

*Velocità di stallo e di manovra* (dalla (11.4) e dalla (11.9)):

$$V_{S1} = \sqrt{\frac{2W}{\rho_0 S C_{L,max}}} = 33,95 \text{ m/s} = 122 \text{ km/h} = 66 \text{ kt,} \quad (12.4)$$

$$V_{S0} = \sqrt{\frac{2W}{\rho_0 S C_{L,max}^{flap}}} = 26,84 \text{ m/s} = 97 \text{ km/h} = 52 \text{ kt,} \quad (12.5)$$

$$V_{S2} = \sqrt{\frac{2W}{\rho_0 S |C_{L,min}|}} = 41,18 \text{ m/s} = 148 \text{ km/h} = 80 \text{ kt,} \quad (12.6)$$

$$V_A = V_{S1} \sqrt{n_{max}} = 33,95 \sqrt{6} = 83,18 \text{ m/s} = 299 \text{ km/h} = 162 \text{ kt.} \quad (12.7)$$

*Velocità massima con flap*, assunta pari al maggiore fra  $1,4 V_{S1}$  e  $1,8 V_{S0}$ :

$$V_{FE} = \max(47,53; 48,32) = 48,32 \text{ m/s} = 174 \text{ km/h} = 94 \text{ kt.} \quad (12.8)$$

### 12.2.2 Il diagramma di manovra

I punti principali:

| Punto                  | $n$ | $V$ [m/s] | $V$ [kt] |
|------------------------|-----|-----------|----------|
| $A$ (manovra)          | 6   | 83,18     | 162      |
| $D$                    | 6   | 107,72    | 209      |
| $B_1$                  | -1  | 107,72    | 209      |
| $G$                    | -3  | 86,87     | 169      |
| $F$ (manovra rovescia) | -3  | 70,99     | 138      |

Tabella 12.2: Punti caratteristici del diagramma di manovra del SF-260.

Gli archi dell'anemometro seguono immediatamente: **bianco** da 52 a 94 kt, **verde** da 66 a 169 kt, **giallo** da 169 a 209 kt, **linea rossa** a 209 kt.

### 12.2.3 Il diagramma di raffica

L'allungamento alare e il gradiente di portanza corretto ((11.16), con  $e = 0,9$ ):

$$AR = \frac{b^2}{S} = \frac{8,35^2}{10,1} = 6,90, \quad C_{L\alpha} = \frac{5,07}{1 + \frac{5,07}{0,9\pi \cdot 6,90}} = 4,02 \text{ rad}^{-1}. \quad (12.9)$$

Le rette di raffica (11.15) hanno pendenza  $\rho_0 C_{L\alpha} w / (2W/S)$ ; con le intensità regolamentari:

| Velocità                     | $w$ [m/s] | $n$   |
|------------------------------|-----------|-------|
| $V_{NO} = 86,87 \text{ m/s}$ | 15,2      | 4,07  |
| $V_{NO} = 86,87 \text{ m/s}$ | -15,2     | -2,07 |
| $V_D = 134,65 \text{ m/s}$   | 7,6       | 3,38  |
| $V_D = 134,65 \text{ m/s}$   | -7,6      | -1,38 |

Tabella 12.3: I quattro punti regolamentari del diagramma di raffica.

Per il SF-260, dunque, la raffica non supera mai la manovra ( $4,07 < 6$ ;  $|-2,07| < 3$ ): è il destino tipico dei velivoli acrobatici, il cui  $n_{\max}$  di categoria è talmente alto da coprire l'atmosfera. Su un velivolo da turismo in categoria normale ( $n_{\max} = 3,8$ ) gli stessi conti danno spesso l'esito opposto, e a dimensionare è la raffica.

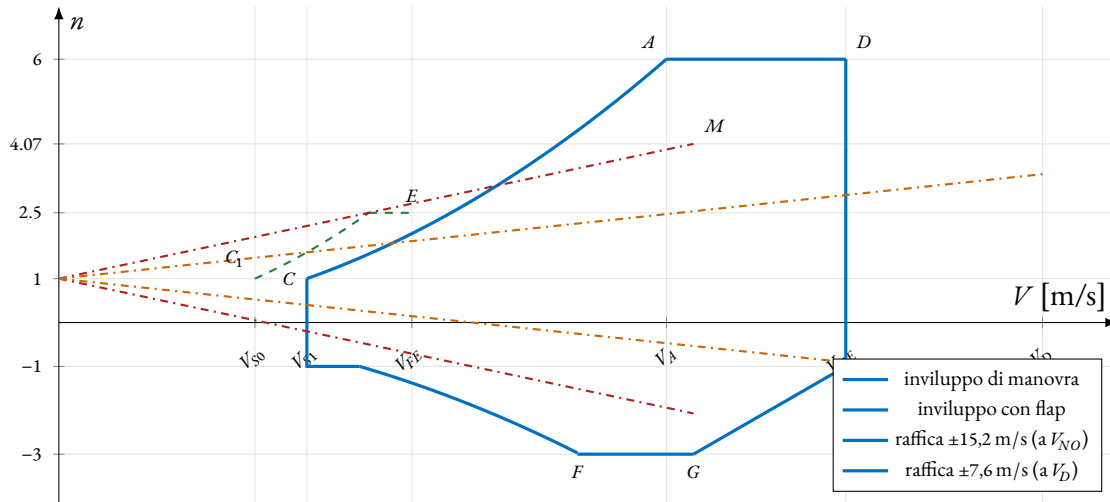


Figura 12.1: Diagramma di manovra e di raffica del SIAI SF-260 (peso massimo, quota zero). Le rette di raffica escono dal punto (0, 1) con pendenza proporzionale all'intensità  $w$  della raffica.

## 12.3 Esercitazione B: la ripartizione della portanza

Il fattore di carico dice quanta portanza *totale* serve:  $nW$ . Ma la portanza totale è la somma algebrica di ciò che genera l'ala e di ciò che genera l'impennaggio orizzontale — e per dimensionare l'ala serve la *sua* quota, non il totale. Dati aggiuntivi del SF-260:

| Grandezza                                     | Simbolo   | Valore  |
|-----------------------------------------------|-----------|---------|
| Corda media geometrica                        | $\bar{c}$ | 1,144 m |
| Distanza interfocale ala-impennaggio          | $d$       | 4,048 m |
| Coefficiente di momento focale                | $C_{M0}$  | -0,078  |
| Centraggio (baricentro avanti al fuoco alare) | $c$       | 0,17 m  |

Tabella 12.4: Dati per l'equilibrio longitudinale.

### 12.3.1 Le equazioni dell'equilibrio longitudinale

Sia  $L_a$  la portanza dell'ala (applicata nel fuoco alare, positiva verso l'alto) e  $L_c$  la forza dell'impennaggio, che conteremo *positiva verso il basso* (deportanza), applicata nel fuoco di coda a distanza  $d$  dietro il fuoco alare. Il peso  $nW$  agisce nel baricentro, che sta  $c$  *davanti* al fuoco alare (centraggio anteriore: è la condizione di stabilità statica). Il momento focale dell'ala, picchiante, vale in modulo

$$M_0 = \frac{1}{2} \rho_0 V^2 S \bar{c} |C_{M0}| = 0,552 V^2 \quad [\text{N m}, V \text{ in m/s}]. \quad (12.10)$$

L'equilibrio alla traslazione verticale e alla rotazione attorno al fuoco alare (momenti cabranti positivi) dà il sistema

$$\begin{cases} L_a - L_c = nW & (\text{traslazione}), \\ L_c d - nW c - M_0 = 0 & (\text{rotazione}), \end{cases} \quad (12.11)$$

dove nella seconda equazione il peso, agendo davanti al fuoco, picchia ( $-nW c$ ), il momento focale picchia per definizione ( $-M_0$ ) e la deportanza di coda, agendo dietro, cabra ( $+L_c d$ ): l'impennaggio esiste esattamente per pareggiare questo conto. La soluzione è immediata:

$$L_c = \frac{M_0 + nW c}{d}, \quad L_a = nW + L_c. \quad (12.12)$$

### 12.3.2 I risultati su tutti i punti dell'involuppo

Applicando la (12.12) a ogni punto del diagramma (compresi i quattro punti di raffica  $M$ ,  $D'$ ,  $E'$ ,  $N$ ) si ottiene la tabella che segue. L'ultima colonna riporta la rotazione dell'equilibratore stimata con un criterio di proporzionalità: alla massima deportanza corrisponde la massima rotazione a cabrare ( $24^\circ$ , equilibratore in su), alla massima portanza di coda la massima a picchiare ( $-16^\circ$ ), e i valori intermedi seguono in proporzione.

| Punto | $n$   | $V$ [m/s] | $M_0$ [N m] | $L_c$ [N] | $L_a$ [N] | Verso $L_c$ | $\varepsilon$ [°] |
|-------|-------|-----------|-------------|-----------|-----------|-------------|-------------------|
| $C_1$ | 1     | 26,84     | 397,7       | 548       | 11.248    | deporta     | 3                 |
| $C$   | 1     | 33,95     | 636,2       | 607       | 11.307    | deporta     | 3                 |
| $E$   | 2,5   | 48,32     | 1.288,8     | 1.442     | 28.192    | deporta     | 8                 |
| $A$   | 6     | 83,18     | 3.819,3     | 3.640     | 67.840    | deporta     | 20                |
| $D$   | 6     | 107,72    | 6.405,3     | 4.278     | 68.478    | deporta     | 24                |
| $B_1$ | -1    | 107,72    | 6.405,3     | 1.133     | -9.567    | deporta     | 6                 |
| $G$   | -3    | 83,18     | 3.819,3     | -405      | -32.505   | porta       | -10               |
| $F$   | -3    | 70,99     | 2.781,9     | -661      | -32.761   | porta       | -16               |
| $M$   | 4,07  | 83,18     | 3.819,3     | 2.772     | 46.321    | deporta     | 16                |
| $D'$  | 3,38  | 134,65    | 10.008,3    | 3.991     | 40.157    | deporta     | 22                |
| $E'$  | -2,07 | 83,18     | 3.819,3     | 13        | -22.136   | $\approx 0$ | 0                 |
| $N$   | -1,38 | 134,65    | 10.008,3    | 1.852     | -12.914   | deporta     | 10                |

Tabella 12.5: Ripartizione della portanza fra ala e impennaggio su tutti i punti dell'involuppo;  $\varepsilon > 0$  indica equilibratore ruotato in su.

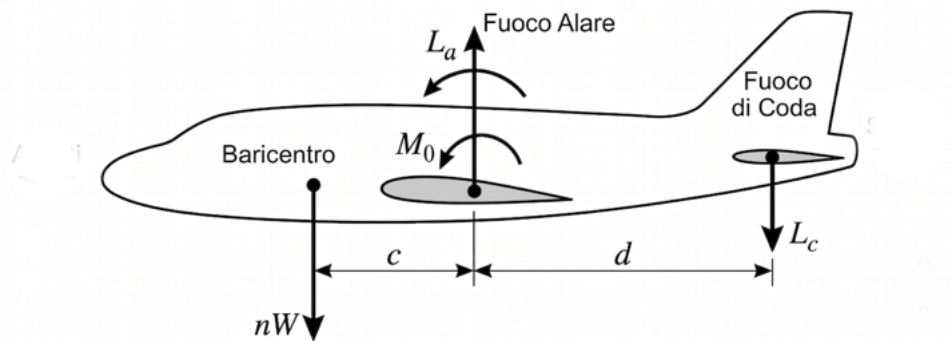


Figura 12.2: Lo schema dell'equilibrio longitudinale per la ripartizione della portanza.

**Risultato – L'ala lavora più del velivolo**

Il risultato che sorprende sempre: nel punto  $D$  la portanza richiesta al velivolo è  $nW = 64.200 \text{ N}$ , ma l'ala ne deve generare  $68.478 \text{ N}$  — il 6,7% *in più*. La deportanza che l'impennaggio produce per equilibrare il momento picchiante è portanza che l'ala deve rigenerare: il prezzo della stabilità si paga in newton, ed è l'ala a pagarlo. Ecco perché il dimensionamento strutturale usa  $L_a$ , non  $nW$ : chi dimensionasse sull' $nW$  regalerebbe alla struttura un deficit del 7% già in partenza.

**12.4 Esercitazione C: la semiala con i serbatoi subalari****12.4.1 Il formulario generale**

Si consideri una semiala di lunghezza strutturale  $l$ , incastrata alla radice  $A$ , con: portanza della semiala  $L_a/2$  distribuita uniformemente; peso proprio della semiala  $W_{sem}$ , anch'esso distribuito; due carichi concentrati verso il basso  $nW_1$  e  $nW_2$  (serbatoi subalari), alle ascisse  $x_1$  e  $x_2$  dalla radice. Se il serbatoio contiene un volume  $C$  di benzina avio di peso specifico  $\gamma$ , il suo peso è semplicemente

$$W_i = \gamma C_i. \quad (12.13)$$

Il carico distribuito netto per unità di lunghezza vale

$$p = \frac{1}{l} \left( \frac{L_a}{2} - nW_{sem} \right), \quad (12.14)$$

dove il peso della semiala compare moltiplicato per  $n$ : in manovra anche la struttura “pesa”  $n$  volte tanto, e alleggerisce d'altrettanto il carico aerodinamico netto.

Nella sezione di ascissa  $x$ , contando le azioni delle sole forze *a valle* della sezione (fra  $x$  e l'estremità), taglio e momento si ottengono per sovrapposizione:

$$T(x) = -p(l-x) + nW_1 [x_1 > x] + nW_2 [x_2 > x], \quad (12.15)$$

$$M(x) = \frac{p(l-x)^2}{2} - nW_1 (x_1 - x) [x_1 > x] - nW_2 (x_2 - x) [x_2 > x], \quad (12.16)$$

dove la parentesi  $[\cdot]$  vale 1 se la condizione è vera e 0 altrimenti: ogni serbatoio contribuisce solo nelle sezioni più interne della sua posizione — oltre, non c'è più nulla da trasmettere. Le reazioni alla radice sono i valori in  $x = 0$ :  $R_A = T(0)$ ,  $M_A = M(0)$ .

Sui **segni**: assumiamo qui la portanza netta verso l'alto positiva per i carichi e la convenzione per cui il taglio alla radice risulta negativo e il momento positivo (fibre inferiori tese: l'ala che porta flette verso l'alto). Ciò che conta, in un compito come in un progetto, non è la convenzione scelta ma la sua *coerenza* e la corrispondenza con la fisica: la portanza punta verso l'alto, i pesi verso il basso.

Un'ipotesi va dichiarata esplicitamente: i pesi si assumono applicati sul bordo d'attacco, e il bordo d'attacco si assume coincidente con il centro di taglio della sezione (Capitolo 6). Sotto questa ipotesi i serbatoi *non* aggiungono momento torcente: modificano solo taglio e flessione.

### 12.4.2 La simulazione numerica: ala bassa nel punto $D$

#### Dati della simulazione

Semiala del SF-260 in configurazione ala bassa: lunghezza strutturale  $l = 3,581$  m; condizione di calcolo: punto  $D$  dell'involuppo ( $n = 6$ ,  $L_a = 68.478$  N dalla Tabella 12.5); peso della semiala  $W_{sem} = 500$  N; serbatoi subalari di capacità  $C_1 = 49,3$  L a  $x_1 = 0,750$  m e  $C_2 = 71,4$  L a  $x_2 = 3,500$  m; peso specifico della benzina avio  $\gamma = 7,063$  N/dm<sup>3</sup>. Sezioni di verifica richieste:  $x = 0,4; 1,4; 3,0$  m.

#### Pesi dei serbatoi e carico distribuito.

$$W_1 = 7,063 \cdot 49,3 = 348 \text{ N}, \quad W_2 = 7,063 \cdot 71,4 = 504 \text{ N}, \quad (12.17)$$

quindi  $nW_1 = 2.088$  N e  $nW_2 = 3.024$  N. Dalla (12.14):

$$p = \frac{1}{3,581} \left( \frac{68478}{2} - 6 \cdot 500 \right) = \frac{34239 - 3000}{3,581} = 8.723,5 \text{ N/m}. \quad (12.18)$$

**Reazioni alla radice.** Dalle (12.15) e (12.16) in  $x = 0$ :

$$R_A = T(0) = -p l + nW_1 + nW_2 = -31239 + 2088 + 3024 = -26.127 \text{ N}, \quad (12.19)$$

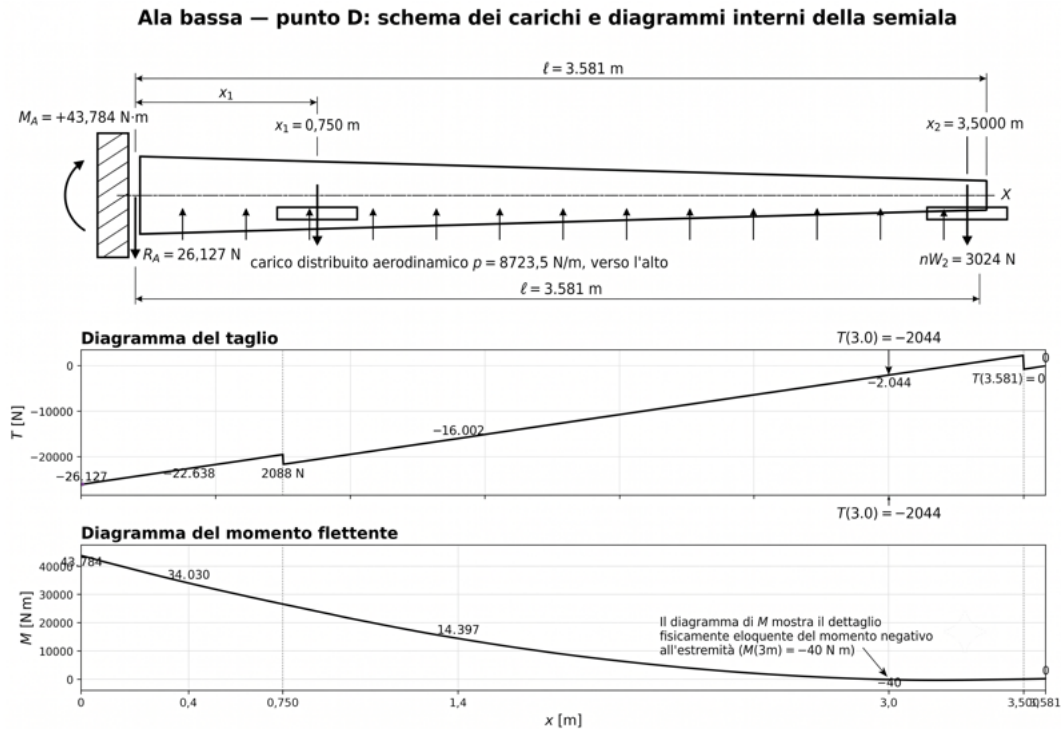
$$M_A = M(0) = \frac{p l^2}{2} - nW_1 x_1 - nW_2 x_2 = 55934 - 1566 - 10584 = 43.784 \text{ N m}. \quad (12.20)$$

**Le sezioni richieste.** Applicando le stesse formule:

| $x$ [m] | $T$ [N] | $M$ [N m] |
|---------|---------|-----------|
| 0       | -26.127 | 43.784    |
| 0,400   | -22.638 | 34.030    |
| 1,400   | -16.002 | 14.397    |
| 3,000   | -2.044  | -40       |
| 3,581   | 0       | 0         |

Tabella 12.6: Taglio e momento flettente lungo la semiala (valori verificati al calcolatore).

Si osservi il dettaglio fisicamente eloquente in  $x = 3$  m: il momento è *leggermente negativo*. Il serbatoio d'estremità, con i suoi 3.024 N verso il basso applicati quasi in punta, riesce localmente a vincere la portanza del breve tratto residuo e a flettere l'estremità *verso il basso*: un'inversione di segno minuscola (-40 N m su un massimo di 43784) ma concettualmente preziosa, perché mostra i carichi concentrati al lavoro contro il carico distribuito.



### Attenzione – I tre controlli prima di consegnare

Ogni tabella di  $T$  e  $M$  va sottoposta a tre controlli, che costano un minuto e intercettano quasi tutti gli errori. (i) In  $x = 0$  i valori devono coincidere con le reazioni vincolari:  $T(0) = R_A$ ,  $M(0) = M_A$ . (ii) All'estremità libera taglio e momento devono annullarsi: oltre la punta non c'è nulla da trasmettere. (iii) Fra un punto e l'altro, la pendenza del momento deve valere il taglio ( $dM/dx = T$ ): dove  $T$  è grande e negativo,  $M$  deve scendere ripido; dove  $T$  attraversa lo zero,  $M$  è stazionario. La nostra tabella li supera tutti e tre — e i valori in punta li esibisce esplicitamente.

## 12.5 Esercitazione D: il dimensionamento del longherone

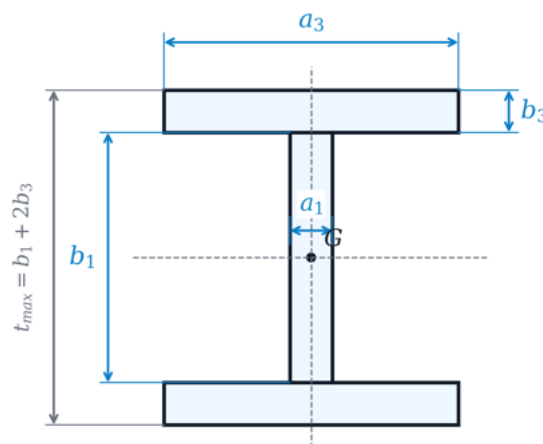
L'ultimo anello della catena: trasformare  $T$  e  $M$  della radice in *millimetri* di longherone. La sezione è il doppio T del Capitolo 6 — ovvero, come sappiamo dal Capitolo 8, il caso più semplice del modello del semiguscio ideale, con due soli correnti (le solette) e un solo pannello (l'anima): anima di spessore  $a_1$  e altezza  $b_1$  (che assorbe il taglio), due solette di larghezza  $a_3$  e spessore  $b_3$  (che assorbono la flessione). A differenza della verifica — dove le quote sono date — qui le quote vanno *trovate*: è un dimensionamento, e come tutti i dimensionamenti procede per tentativi guidati.

### 12.5.1 La procedura in otto passi

#### Procedura di dimensionamento del doppio T

1. si sceglie  $a_1$  (di primo tentativo, pari allo spessore del rivestimento già dimensionato) e si verifica preliminarmente l'anima a taglio con  $\tau_{\max} = \frac{3}{2} T / (a_1 b_1) \leq \tau_{am}$ ; se fallisce, si aumenta  $a_1$ ;
2. si assume inizialmente  $b_3 = a_1$  (spessori confrontabili conviene averli, in vista della chiodatura rivestimento–longherone);
3. si ricava  $b_1$  dalla geometria del profilo:  $b_1 + 2b_3 = t_{\max}$ , lo spessore massimo del profilo alare (per un NACA a quattro cifre, le ultime due cifre in percento della corda);
4. si stima  $a_3$  schematizzando il momento come coppia di forze nelle solette, con braccio  $b_1 + 2b_3$ :  $a_3 = M_f / [(b_1 + 2b_3) b_3 \sigma_{am}]$ ;
5. se  $a_3$  risulta costruttivamente eccessivo, si aumenta  $b_3$  e si ripete dal passo 3;
6. con le quote fissate si calcolano aree e momenti d'inerzia (trasporto di Huygens–Steiner);
7. si verifica a flessione con Navier:  $\sigma_{\max} = M_f y_{\max} / J_z \leq \sigma_{am}$ ;
8. si verifica a sollecitazione combinata con Von Mises:  $\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau_{\max}^2} \leq \sigma_{am}$ .

Se il passo 7 o il passo 8 falliscono, si torna indietro (più  $a_3$ , più  $b_3$ , più  $a_1$ ) e si ripete: **il progetto è un ciclo, non una formula.**



Sezione a doppio T: quote geometriche di progetto

Figura 12.4: La sezione da dimensionare e il ciclo di progetto.

## 12.5.2 Il dimensionamento alla radice: due tentativi

### Esempio 12.1 — Il longerone della simulazione, dal primo tentativo alla verifica

Dimensionare il longerone alla radice della semiala dell'Esercitazione C:  $T = 26.127 \text{ N}$ ,  $M_f = 43,78 \times 10^6 \text{ N mm}$ . Materiale: alluminio 2024,  $\sigma_s = 300 \text{ N/mm}^2$ ,  $K = 1,5$  ( $\sigma_{am} = 200 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_{am} = 115,5 \text{ N/mm}^2$ ). Corda locale 1.600 mm, profilo con spessore massimo al 12%:  $t_{\max} = 192 \text{ mm}$ .

#### Soluzione

**Passo 1 — l'anima.** Con lo spessore del rivestimento,  $a_1 = 1,5 \text{ mm}$  (e  $b_1 = 192 - 2 \cdot 1,5 = 189 \text{ mm}$ ):

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{26127}{1,5 \cdot 189} = 138,2 \text{ N/mm}^2 > 115,5 \text{ N/mm}^2 : \text{ non passa.} \quad (12.21)$$

Si aumenta ad  $a_1 = 2 \text{ mm}$ : con  $b_1 = 188 \text{ mm}$ ,  $\tau_{\max} = 104,2 \text{ N/mm}^2 < 115,5$ : l'anima è a posto (per ora).

**Passi 2–5 — le solette, primo tentativo.** Con  $b_3 = a_1 = 2 \text{ mm}$  la stima del passo 4 darebbe  $a_3 \approx 570 \text{ mm}$ : una soletta larga mezzo metro, costruttivamente assurda. Si aumenta  $b_3$  (passo 5): con  $b_3 = 8 \text{ mm}$ ,  $b_1 = 176 \text{ mm}$  e

$$a_3 = \frac{43,78 \times 10^6}{192 \cdot 8 \cdot 200} = 142,5 \text{ mm} \rightarrow a_3 = 145 \text{ mm.} \quad (12.22)$$

**Passi 6–8 — verifica del primo tentativo.** Con  $a_1 = 2$ ,  $b_1 = 176$ ,  $a_3 = 145$ ,  $b_3 = 8$ :  $J_z = 2,06 \times 10^7 \text{ mm}^4$ ,  $y_{\max} = 96 \text{ mm}$ , da cui

$$\sigma_{\max} = 204,4 \text{ N/mm}^2 > 200, \quad \sigma_{id} = \sqrt{204,4^2 + 3 \cdot 111,3^2} = 281 \text{ N/mm}^2 \gg 200 : \quad (12.23)$$

**il primo tentativo fallisce**, e fallisce due volte. La stima del passo 4 usa come braccio l'ingombro esterno  $b_1 + 2b_3$ , che sopravvaluta il braccio reale della coppia: Navier, che non si fa ingannare, trova un  $\sigma_{\max}$  oltre l'ammissibile già da solo; e la combinazione con un taglio così vicino al suo limite ( $\tau = 111,3 \text{ N/mm}^2$  con  $a_1 = 2$  e  $b_1 = 176$ ) manda la tensione ideale fuori scala.

**Secondo tentativo.** La diagnosi guida la cura: serve margine sul taglio (più anima) e più inerzia flessionale (più soletta). Si adottano  $a_1 = 3 \text{ mm}$ ,  $b_3 = 10 \text{ mm}$  (quindi  $b_1 = 172 \text{ mm}$ ) e, imponendo che la *combinata* chiuda sotto i 200 — con  $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot 26127 / (3 \cdot 172) = 76,0 \text{ N/mm}^2$ , da  $\sigma_{id} \leq 200$  segue  $\sigma_{\max} \leq 150,6 \text{ N/mm}^2$  — si ricava  $a_3 = 165 \text{ mm}$ . Verifica finale:

$$J_z = 2,86 \times 10^7 \text{ mm}^4, \quad \sigma_{\max} = 146,8 \text{ N/mm}^2, \quad \tau_{\max} = 76,0 \text{ N/mm}^2, \quad (12.24)$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{146,8^2 + 3 \cdot 76,0^2} = 197,1 \text{ N/mm}^2 < 200 \text{ N/mm}^2 : \quad [\text{verificato.}] \quad (12.25)$$

**Risultato – Le due morali del dimensionamento**

*Prima morale:* la formula del passo 4 è una **stima d'innescio**, non un risultato — serve a entrare nel ciclo con un numero sensato, e va sempre processata da Navier e da Von Mises. *Seconda morale:* quando taglio e flessione sono entrambi importanti, **a comandare è la verifica combinata**: conviene impostare il secondo tentativo direttamente su  $\sigma_{id} \leq \sigma_{am}$ , ripartendo il budget fra  $\sigma$  e  $\tau$ , come fatto qui. Chi dimensiona sulla sola Navier e “spera” nella combinata ricomincia quasi sempre da capo.

**► Approfondimento: Quanto è severa la combinazione dei massimi**

Come già osservato nel Capitolo 6, sommare con Von Mises la  $\sigma$  delle fibre estreme e la  $\tau$  dell'asse neutro è cautelativo: i due massimi non abitano lo stesso punto. Nel doppio T reale il punto critico è il raccordo anima-soletta, dove  $\sigma$  è poco sotto il massimo e  $\tau$  poco sotto il suo: la verifica puntuale lì darebbe un  $\sigma_{id}$  inferiore al nostro 197. Il progetto qui condotto è dunque leggermente conservativo — che per un primo dimensionamento è esattamente il difetto giusto.

**Il filo di tutto il corso**

Riavvolgiamo il nastro, perché il percorso appena concluso è il corso. L'inviluppo di volo ha stabilito i fattori di carico e le velocità ( $n = 6$  nel punto  $D$ ); l'equilibrio longitudinale ha detto quanta portanza tocca all'ala (68.478 N, più del  $nW$ ); la sovrapposizione degli effetti ha trasformato portanza, peso e serbatoi nei diagrammi di  $T$  e  $M$  (26.127 N e 43,78 kN m alla radice); e Navier, Jourawsky e Von Mises hanno convertito quei diagrammi in millimetri di alluminio 2024, passando per un tentativo fallito che ha insegnato più della teoria. Il volo produce carichi, i carichi diventano sollecitazioni, le sollecitazioni tensioni, le tensioni si confrontano con il materiale: la catena annunciata nella guida alla lettura si è chiusa. Da qui in avanti, ogni tema d'esame è una variazione su questo tema.



## Capitolo 13

# Approfondimenti ed esercizi svolti

### Bussola concettuale

**Studiamo questo perché.** due argomenti meritano un trattamento più esteso di quello che il filo principale del corso consente. Il primo è il **carico di punta**: nel Capitolo 4 ne abbiamo dato la formula di Eulero come strumento operativo; qui la *dimostriamo* a partire dalla linea elastica, ne ricaviamo la snellezza e l'iperbole, e la estendiamo con le curve di Johnson al campo inelastico. Il secondo è il **dimensionamento del longherone**: qui lo svolgiamo per intero su un'ala trapezia reale, chiudendo la catena con un esercizio completo dalla geometria al rivestimento.

**Da dove veniamo.** dalla trazione e instabilità (Capitolo 4), dalla flessione e taglio (Capitolo 6), dal modello del semiguscio (Capitolo 8) e dall'involuppo di volo (Capitolo 11).

**Dove andiamo.** questi due approfondimenti sono la cassetta degli attrezzi “avanzata” con cui affrontare i temi d'esame: l'asta di controvento e la gamba di carrello poggiano sul carico di punta; il progetto dell'ala poggia sul longherone.

**Al termine saprai.** derivare il carico critico di Eulero come problema agli autovalori; definire snellezza, snellezza limite e campo di validità; usare le curve di Johnson per le aste tozze; dimensionare un'asta di controvento a instabilità; e condurre il dimensionamento completo di un longherone su un'ala trapezia.

### 13.1 Il carico di punta: dalla linea elastica a Eulero

Nel Capitolo 4 abbiamo introdotto il carico di punta con l'esperimento del righello e ne abbiamo dato la formula di Eulero come dato di fatto. È tempo di dimostrarla. L'obiettivo è mostrare che l'equilibrio rettilineo di un'asta compressa *smette di essere l'unico possibile* quando il carico raggiunge un valore ben preciso, il carico critico: da lì in poi l'asta “preferisce” inflettersi.

### 13.1.1 L'equazione della trave-colonna

Si consideri un'asta rettilinea, elastica, di lunghezza  $l$ , incastrata alla base e compressa in testa da un carico  $P$  applicato con una piccola **eccentricità**  $e$  rispetto all'asse. Detta  $z(y)$  la deflessione laterale (con  $y$  lungo l'asse), il carico assiale, agendo sul braccio  $e + z(y)$ , produce un momento flettente

$$M(y) = P(e + z(y)). \quad (13.1)$$

Questo è il punto concettuale: in una trave inflessa da carichi trasversali il momento è *dato*; qui invece il momento *dipende dalla deformazione stessa* che esso provoca. È un problema accoppiato — una **trave-colonna** — ed è da questo accoppiamento che nasce l'instabilità.

Nel campo elastico vale la relazione momento-curvatura  $EI z'' = M(y)$ , che con la (13.1) diventa

$$EI z''(y) = P(e + z(y)) \quad \implies \quad z''(y) - \alpha^2 z(y) = \alpha^2 e, \quad \alpha^2 = \frac{P}{EI}. \quad (13.2)$$

La soluzione generale (una particolare  $z_p = -e$  più l'omogenea iperbolica) è  $z(y) = C_1 \cosh(\alpha y) + C_2 \sinh(\alpha y) - e$ ; imponendo l'incastro alla base ( $z(0) = 0$ ,  $z'(0) = 0$ ) si trova  $C_1 = e$ ,  $C_2 = 0$ , cioè

$$z(y) = e(\cosh(\alpha y) - 1), \quad f = z(l) = e(\cosh(\alpha l) - 1). \quad (13.3)$$

La freccia in testa  $f$  cresce con  $P$  (dentro  $\alpha$ ), ma la (13.3) non diverge a carico finito: per far emergere il *carico critico* bisogna studiare l'asta **perfetta**.

### 13.1.2 Il carico critico come problema agli autovalori

Poniamo  $e = 0$ : asta ideale, perfettamente rettilinea, caricata in asse. La (13.2) diventa omogenea e, cercando le configurazioni *inflesse non banali*, la si scrive nella forma oscillante

$$z''(y) + \beta^2 z(y) = 0, \quad \beta^2 = \frac{P}{EI}, \quad z(y) = A \sin(\beta y) + B \cos(\beta y). \quad (13.4)$$

La domanda non è più “quanto vale la freccia”, ma: *esiste un  $z \neq 0$  compatibile con i vincoli?* È un problema agli autovalori — e la risposta è sì, ma solo per valori discreti di  $P$ .

**Asta incernierata alle estremità.** Con  $z(0) = 0$  (da cui  $B = 0$ ) e  $z(l) = 0$  si ottiene  $A \sin(\beta l) = 0$ . La soluzione non banale ( $A \neq 0$ ) richiede  $\sin(\beta l) = 0$ , cioè  $\beta l = n\pi$ . Il primo modo ( $n = 1$ ) dà il carico critico minimo:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (13.5)$$

**Asta incastrata-libera (mensola).** Imponendo alla base l'incastro e in testa l'assenza di momento e taglio si ottiene, con passaggi analoghi,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}. \quad (13.6)$$

### Risultato – La forma generale e la lunghezza libera d'inflessione

Tutti i casi di vincolo si riassumono in un'unica formula:

$$P_{cr} = k \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}, \quad l_0 = \frac{l}{\sqrt{k}}, \quad (13.7)$$

dove  $l_0$  è la **lunghezza libera d'inflessione** già introdotta nel Capitolo 4: incernierata–incernierata  $l_0 = l$  ( $k = 1$ ); incastrata–libera  $l_0 = 2l$  ( $k = 1/4$ ); incastrata–incernierata  $l_0 \approx 0,7l$ ; incastrata–incastrata  $l_0 = 0,5l$ . La mensola, con  $l_0 = 2l$ , ha carico critico *quattro volte* più piccolo dell'asta incernierata di pari lunghezza: ecco perché una gamba di carrello a sbalzo va verificata con cura al carico di punta.

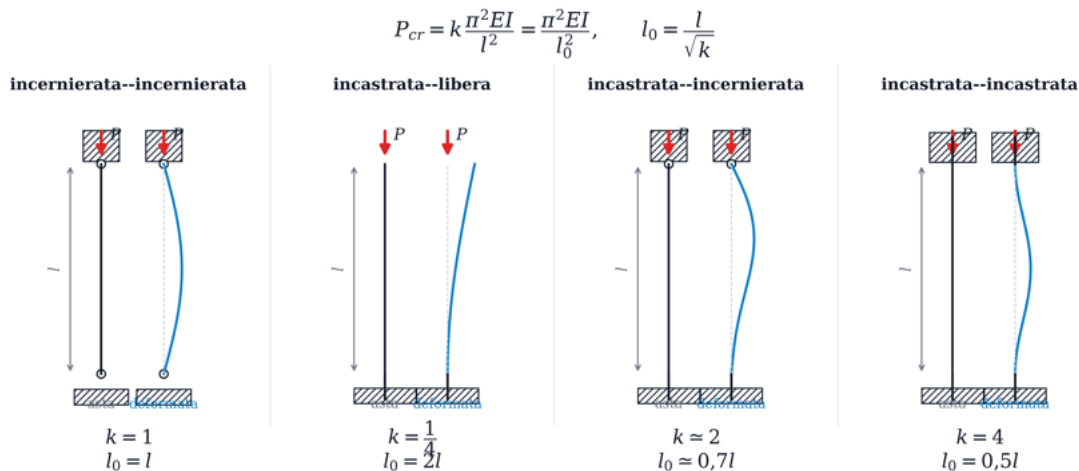


Figura 13.1: Il coefficiente  $k$  nella formula di Eulero per i vincoli fondamentali.

### 13.1.3 Il significato di “freccia infinita”

Il carico critico segna una biforcazione dell'equilibrio. Per  $P < P_{cr}$  l'equilibrio rettilineo è unico e stabile: una piccola imperfezione produce una piccola freccia. Quando  $P \rightarrow P_{cr}$  l'equilibrio rettilineo *perde unicità* — esistono configurazioni inflesse con la stessa energia — e una minima eccentricità basta a produrre una freccia grandissima, idealmente infinita nel modello elastico lineare. Nella realtà la divergenza è arrestata dalle non linearità geometriche e dalla plasticizzazione, ma la morale progettuale è netta: **nelle strutture snelle la stabilità va verificata prima della resistenza**.

#### Analogia pratica – La biforcazione in una molla di penna

Prendete una molletta a spirale, o il fusto sottile di una penna a scatto, e premete assialmente aumentando la forza. Fino a un certo punto non accade nulla di visibile: l'asta resta dritta. Poi, di colpo, sbanda da un lato — e da *quale* lato è imprevedibile, dipende dalla minuscola imperfezione iniziale. Quell'improvviso passaggio dalla configurazione dritta a quella inflessa è la biforcazione: il carico ha raggiunto  $P_{cr}$ , e l'equilibrio rettilineo ha ceduto il passo a quello inflesso.

### 13.1.4 Tensione critica, snellezza e iperbole di Eulero

Dividendo il carico critico per l'area si ottiene la **tensione critica**. Introducendo il **raggio d'inerzia**  $\rho = \sqrt{I/A}$  e la **snellezza**

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho}, \quad (13.8)$$

la tensione critica assume la forma compatta dell'**iperbole di Eulero**:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (13.9)$$

La snellezza è il vero parametro di governo: un solo numero adimensionale che riassume lunghezza, vincoli e forma della sezione. Aste “snelle” (grande  $\lambda$ ) hanno tensione critica bassa e cedono per instabilità; aste “tozze” (piccola  $\lambda$ ) hanno tensione critica altissima — che però la (13.9) sovrastima, come vedremo subito.

### 13.1.5 Snellezza limite e campo di validità

La formula di Eulero nasce dalla legge di Hooke, quindi vale solo finché la tensione critica resta *elastica*, cioè  $\sigma_{cr} \leq \sigma_p$  (tensione al limite di proporzionalità). Imponendo l'uguaglianza si definisce la **snellezza limite**:

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}. \quad (13.10)$$

Dunque:

- se  $\lambda \geq \lambda_0$ : instabilità **elastica**, vale Eulero;
- se  $\lambda < \lambda_0$ : instabilità in campo **inelastico**, e Eulero non basta più — serve un raccordo.

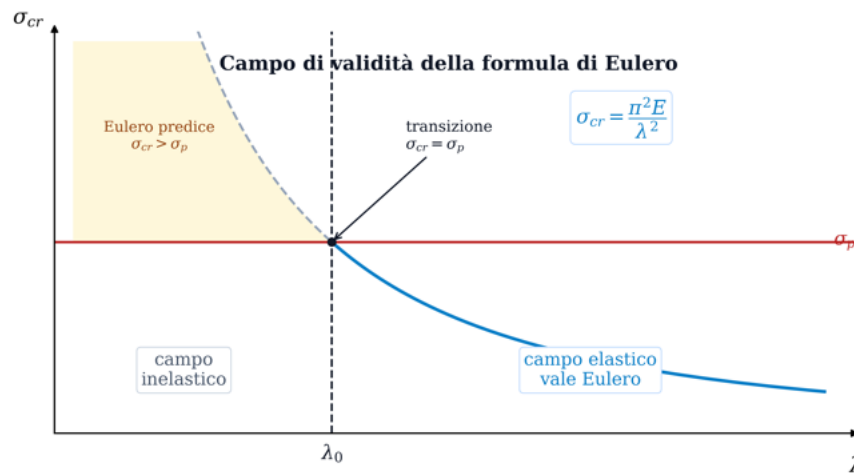


Figura 13.2: Il campo di validità di Eulero: oltre  $\lambda_0$  l'iperbole, sotto  $\lambda_0$  serve un modello inelastico.

### 13.1.6 Le curve di Johnson per le aste tozze

Per  $\lambda < \lambda_0$  la crisi non è più puramente elastica: si osserva sperimentalmente che per snellezze piccolissime l'asta cede per snervamento ( $\sigma_{cr} \approx \sigma_p$ ), per snellezze grandi vale Eulero, e in mezzo c'è un campo elasto-plastico. Serve una legge di **raccordo** fra il plateau  $\sigma_p$  e l'iperbole. Johnson propose una **parabola**:

$$\sigma_{cr} = \sigma_p (1 - a \lambda^2), \quad (13.11)$$

con il coefficiente  $a$  determinato imponendo il *raccordo dolce* con l'iperbole nel punto di transizione. La condizione naturale è che la parabola incontri l'iperbole proprio a  $\lambda_0$ , dove  $\sigma_p = \pi^2 E / \lambda_0^2$ ; sostituendo si ottiene  $a = 1 / \lambda_0^2 = \sigma_p / (\pi^2 E)$ , da cui la **formula parabolica di Johnson**:

$$\sigma_{cr} = \sigma_p \left( 1 - \frac{\sigma_p}{\pi^2 E} \lambda^2 \right). \quad (13.12)$$

Per  $\lambda \rightarrow 0$  la parabola tende a  $\sigma_p$  (crisi per snervamento); avvicinandosi a  $\lambda_0$  si raccorda con continuità all'iperbole di Eulero.

#### ► Approfondimento: Perché acciai e leghe leggere usano curve diverse

La bontà del raccordo parabolico dipende dal materiale, e si lega al rapporto fra rottura e proporzionalità. Per gli **acciai**  $\sigma_R \approx 2 \sigma_p$ , e la parabola di Johnson rappresenta bene il campo intermedio. Per le **leghe di alluminio**  $\sigma_R \approx 3 \sigma_p$ , e l'andamento sperimentale nel tratto inelastico si avvicina a una legge quasi *lineare* in  $\lambda$ : si usano allora curve di raccordo dedicate (rette di Johnson, o curve tabulate per la specifica lega). Ecco perché i manuali di costruzioni aeronautiche riportano famiglie di curve d'instabilità distinte per acciai e per leghe leggere: non è pignoleria, è la fisica del tratto elasto-plastico che cambia col materiale.

### 13.1.7 Esercizio guida: l'asta di controvento

#### Esempio 13.1 — Dimensionamento a instabilità di un'asta di controvento

Un'asta di controventatura d'ala, in Avional 2024-T4 ( $E = 73.100 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_p = 324 \text{ N/mm}^2$ ), lunga  $l = 1,80 \text{ m}$ , è compressa da  $P = 9.800 \text{ N}$  (il peso di una tonnellata). Il collegamento al longherone avviene con due forcelle (cerniere a entrambi gli estremi). Dimensionare la sezione ellittica cava con spessore uniforme  $t = 2 \text{ mm}$  e rapporto fra i semiassi  $a/b = 1,6$ ; coefficiente di sicurezza  $K = 1,5$ .

#### Soluzione

**Impostazione.** È un problema di *dimensionamento*: geometria incognita, carico noto. L'asta di controvento è un elemento snello, quindi ci si aspetta crisi per instabilità elastica; procediamo con Eulero e *verificheremo a posteriori* che  $\lambda \geq \lambda_0$ . Le forcelle sono cerniere:  $l_0 = l = 1.800 \text{ mm}$ .

**Momento d'inerzia richiesto.** Il carico critico di progetto è  $P_{cr} = K P = 1,5 \cdot 9800 = 14.700 \text{ N}$ . Dalla formula di Eulero:

$$I_{\min} = \frac{P_{cr} l_0^2}{\pi^2 E} = \frac{14700 \cdot 1800^2}{\pi^2 \cdot 73100} \approx 6,60 \times 10^4 \text{ mm}^4. \quad (13.13)$$

È il minimo momento d'inerzia baricentrico che la sezione deve possedere — *minimo* perché l'asta sbanda nel piano di minor rigidità.

**Geometria della sezione ellittica cava.** Per l'ellisse cava di semiassi esterni  $a, b$  e interni  $c = a - t, d = b - t$ :

$$I_{yy} = 0,7854 (b^3 a - d^3 c) \quad (13.14)$$

è il momento d'inerzia minore (poiché  $a > b$ ). Con  $a = 1,6b, c = 1,6b - 2, d = b - 2$  e imponendo  $I_{yy} = I_{\min}$  si ottiene un'equazione in  $b$  da risolvere per tentativi:

| Tentativo | $b$ [mm] | $I_{yy}$ [mm <sup>4</sup> ] | Esito          |
|-----------|----------|-----------------------------|----------------|
| 1         | 20,00    | 63.649                      | troppo piccolo |
| 2         | 20,15    | 65.158                      | ancora basso   |
| 3         | 21,00    | 74.162                      | abbondante     |

Tabella 13.1: Ricerca per tentativi del semiasse  $b$ .

Il valore esatto sarebbe  $b \approx 20,2$  mm; per semplicità costruttiva e margine si arrotonda a  $b = 21$  mm, da cui  $a = 1,6 \cdot 21 \approx 34$  mm,  $c = 32$  mm,  $d = 19$  mm.

**Verifica del momento d'inerzia.** Con le quote arrotondate:

$$I_{yy} = 0,7854 (21^3 \cdot 34 - 19^3 \cdot 32) = 74.916 \text{ mm}^4 > I_{\min} = 66.015 \text{ mm}^4. \quad (13.15)$$

**Verifica di validità di Eulero.** Snellezza limite dell'Avional:

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \sqrt{\frac{73100}{324}} \approx 47,2. \quad (13.16)$$

Area della sezione  $A = \pi(ab - cd) = \pi(714 - 608) \approx 333 \text{ mm}^2$ , raggio d'inerzia  $\rho = \sqrt{I_{yy}/A} = \sqrt{74916/333} \approx 15,0$  mm, quindi

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho} = \frac{1800}{15,0} \approx 120 \gg \lambda_0 = 47,2. \quad (13.17)$$

Siamo largamente nel campo euleriano: la scelta iniziale era legittima.

**Verifica finale del carico.** Il carico critico effettivo della sezione dimensionata:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{yy}}{l_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 73100 \cdot 74916}{1800^2} \approx 16.682 \text{ N}, \quad (13.18)$$

da cui  $P_{cr}/K = 16682/1,5 \approx 11.121 \text{ N} > P = 9.800 \text{ N}$ :

[struttura verificata.]

**Risultato – La sezione dimensionata**

$a = 34 \text{ mm}$ ,  $b = 21 \text{ mm}$ ,  $c = 32 \text{ mm}$ ,  $d = 19 \text{ mm}$ ,  $t = 2 \text{ mm}$ ;  $I_{yy} \approx 74.916 \text{ mm}^4$ ,  $\lambda \approx 120$ ,  $P_{cr} \approx 16.682 \text{ N}$ . L'arrotondamento al millimetro superiore introduce un piccolo margine oltre il minimo strettamente necessario. Si noti la logica dell'intero svolgimento: si dimensiona con Eulero *assumendo* il campo elastico, e lo si *conferma* con  $\lambda \gg \lambda_0$ . Se la verifica di snellezza fosse fallita ( $\lambda < \lambda_0$ ), avremmo dovuto rifare il dimensionamento con la parabola di Johnson — ed è la ragione per cui la teoria delle sezioni precedenti non è un ornamento, ma lo strumento che dice *quale* formula ha diritto di essere usata.

## 13.2 Il dimensionamento completo del longherone

Nel Capitolo 12 abbiamo dimensionato il longherone alla radice di una semiala rettangolare con carichi già noti. Qui affrontiamo il caso completo e più realistico: un'ala **trapezia**, per cui vanno prima ricostruite la geometria della sezione e le forze, e poi dimensionati solette, anima e rivestimento. È lo schema con cui si affrontano molti temi d'esame.

### Esempio 13.2 — Dimensionamento di una sezione alare monolongherone

Dimensionare solette e anima del longherone e il rivestimento del bordo d'attacco, nella sezione distante 4 m dalla mezzeria, per un'ala monolongherone con: peso totale  $W = 44.145 \text{ N}$ ; superficie  $S = 25 \text{ m}^2$ ; allungamento  $AR = 7,5$ ; fattore di carico  $n = 2,5$ ; rapporto di rastremazione  $r = 0,5$ ; peso dell'intera ala  $W_A = 5.003,1 \text{ N}$ ; velocità massima  $V_{\max} = 600 \text{ km/h}$ ; profilo NACA 64<sub>1</sub>-212 (spessore massimo 12%).

#### Soluzione

**Fase B — Geometria dell'ala.** Da  $AR = b^2/S$ :

$$b = \sqrt{AR \cdot S} = \sqrt{7,5 \cdot 25} = 13,69 \text{ m}, \quad \bar{c} = \frac{b}{AR} = 1,83 \text{ m}. \quad (13.19)$$

Dal rapporto di rastremazione  $r = c_t/c_r = 0,5$  e dalla corda media  $\bar{c} = (c_r + c_t)/2$ :

$$c_r = 2,44 \text{ m}, \quad c_t = 1,22 \text{ m}. \quad (13.20)$$

La corda nella sezione a 4 m dalla mezzeria, per variazione lineare lungo l'apertura, vale  $c = 1,72 \text{ m}$ .

**Fase C — Forze sulla parte d'ala esterna.** La portanza totale è  $L = nW = 2,5 \cdot 44.145 = 110.362,5 \text{ N}$ . La superficie della porzione d'ala esterna alla sezione (trapezio di basi  $c$  e  $c_t$ , altezza  $b/2 - 4 = 2,85 \text{ m}$ ) è

$$S_a = \frac{(c + c_t)}{2} \left( \frac{b}{2} - 4 \right) = \frac{1,72 + 1,22}{2} \cdot 2,85 = 4,19 \text{ m}^2. \quad (13.21)$$

Ripartendo portanza e peso proporzionalmente alla superficie:

$$L_a = L \frac{S_a}{S} = 18.475 \text{ N}, \quad W_a = W_A \frac{S_a}{S} = 838 \text{ N}. \quad (13.22)$$

Il calcolo è condotto **a robustezza**: il peso della porzione va moltiplicato per  $n$ , mentre il coefficiente di sicurezza entra dopo, nelle tensioni ammissibili. La forza netta sulla parte esterna:

$$F_a = L_a - n W_a = 18475 - 2,5 \cdot 838 = 16.385 \text{ N.} \quad (13.23)$$

**Fase D — Taglio e momento nella sezione.** La forza netta si applica nel baricentro del trapezio esterno, a distanza  $y_G$  dalla sezione; per la geometria assegnata  $y_G = 1,342 \text{ m}$ . La sezione si comporta come un incastro, quindi

$$T = F_a = 16.385 \text{ N}, \quad M_f = F_a y_G = 16385 \cdot 1,342 = 21.988 \text{ N m.} \quad (13.24)$$

#### Perché il baricentro

La forza risultante di un carico distribuito proporzionale alla superficie si applica nel baricentro della superficie stessa. Poiché qui *sia* la portanza *sia* il peso si assumono distribuiti proporzionalmente alla superficie, entrambe le risultanti — e quindi la loro differenza  $F_a$  — passano per il baricentro del trapezio esterno. Da qui il braccio  $y_G$  del momento flettente.

**Fase E.1 — Le solette (flessione).** Nel modello del semiguscio (Capitolo 8) le solette portano la flessione come coppia di forze. Il profilo, spesso il 12% della corda locale (1.730 mm), dà un'altezza  $b = 0,12 \cdot 1730 = 208 \text{ mm}$ . Poste le solette a 7,5 mm dal rivestimento e alte  $a = 8 \text{ mm}$ , la distanza fra i loro baricentri è

$$b_1 = b - 2 \left( \frac{a}{2} + 7,5 \right) = 208 - 23 = 185 \text{ mm.} \quad (13.25)$$

La forza in ciascuna soletta (trazione sotto, compressione sopra):

$$F_{sol} = \frac{M_f}{b_1} = \frac{21,988 \times 10^6}{185} = 118.854 \text{ N.} \quad (13.26)$$

Con solette in Ergal 7075-T6 ( $\sigma_s = 500 \text{ N/mm}^2$ ,  $K = 1,5$ ,  $\sigma_{am} = 333 \text{ N/mm}^2$ ):

$$A_{sol} = \frac{F_{sol}}{\sigma_{am}} = \frac{118854}{333} = 357 \text{ mm}^2 \rightarrow c_{sol} = \frac{A_{sol}}{a} = \frac{357}{8} \approx 45 \text{ mm.} \quad (13.27)$$

Solette da  $8 \times 45 \text{ mm}$ .

**Fase E.2 — L'anima (taglio).** Stesso materiale delle solette (longherone monolega). Tensione tangenziale ammissibile (Von Mises):  $\tau_{am} = \sigma_{am} / \sqrt{3} = 192,3 \text{ N/mm}^2$ . L'anima è un rettangolo, quindi  $\tau_{\max} = \frac{3}{2} T/A$ :

$$A = \frac{3}{2} \frac{T}{\tau_{am}} = 1,5 \cdot \frac{16385}{192,3} = 128 \text{ mm}^2. \quad (13.28)$$

Con altezza dell'anima  $b_2 = b_1 - a = 177 \text{ mm}$ , lo spessore di resistenza sarebbe

$$s = \frac{A}{b_2} = \frac{128}{177} = 0,72 \text{ mm.} \quad (13.29)$$

Un valore piccolissimo: come sempre nelle anime, comandano il **minimo tecnologico e l'instabilità a taglio** del pannello, non la resistenza. Si adotta una lamiera da 1,5 mm.

**Fase F — Il rivestimento del bordo d'attacco (torsione).** Il momento torcente nasce dal momento aerodinamico del profilo, massimo alla velocità massima ( $V_{\max} = 166,7 \text{ m/s}$ ). Con  $C_m = -0,03$  (dal profilo) e corda baricentrica  $c_{ma} = 1,49 \text{ m}$ :

$$M_t = C_m \frac{1}{2} \rho S_a V_{\max}^2 c_{ma} = 0,03 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 4,19 \cdot 166,7^2 \cdot 1,49 \approx 3.170 \text{ N m.} \quad (13.30)$$

Assunto che il momento torcente sia retto dalla cella chiusa del bordo d'attacco (area racchiusa  $A_\Omega = 58.525 \text{ mm}^2$ ), la prima formula di Bredt dà il flusso:

$$q = \frac{M_t}{2 A_\Omega} = \frac{3,170 \times 10^6}{2 \cdot 58525} = 27,1 \text{ N/mm.} \quad (13.31)$$

Con rivestimento in Avional ( $R_{p0,2} = 108 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_{am} = 72 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_{am} = 41,6 \text{ N/mm}^2$ ):

$$s = \frac{q}{\tau_{am}} = \frac{27,1}{41,6} = 0,65 \text{ mm.} \quad (13.32)$$

Anche qui la resistenza chiede pochissimo: si adotta un lamierino da 1 mm, imposto dal minimo tecnologico.

### Risultato — Il quadro del dimensionamento

Solette  $8 \times 45 \text{ mm}$  in Ergal 7075-T6; anima da 1,5 mm (stesso materiale); rivestimento del naso da 1 mm in Avional. La lezione ricorrente: **le solette sono dettate dalla resistenza a flessione, anima e rivestimento dai minimi tecnologici e dall'instabilità dei pannelli**. Il momento flettente ha bisogno di aree concentrate importanti ( $357 \text{ mm}^2$  per soletta); taglio e torsione, distribuiti su pannelli estesi, richiedono spessori così piccoli che è la fabbricabilità a fissare il minimo. È il motivo per cui, in un'ala reale, il peso strutturale è dominato dalle solette del longherone.

### ► Approfondimento: Un dettaglio costruttivo: perché le solette stanno staccate dal rivestimento

Le solette non vengono sagomate secondo il profilo dell'intradosso e dell'estradosso: sarebbe costoso (fresatura o piegatura complessa) e inutile. Si realizzano a sezione rettangolare piana, staccate dal rivestimento, e il collegamento con la pelle è affidato a *lamierini di raccordo* opportunamente sagomati, che garantiscono la continuità del flusso di taglio fra rivestimento e longherone preservando la semplicità costruttiva. Lungo l'apertura, poi, le solette si *rastremano* (area decrescente dalla radice all'estremità), seguendo l'andamento decrescente del momento flettente: materiale dove serve, nella quantità che serve.

### Dove siamo arrivati, dove andiamo

Questi due approfondimenti completano la cassetta degli attrezzi. Il carico di punta, dimostrato dalla linea elastica ed esteso con Johnson, dà la teoria rigorosa dietro ogni asta compressa — controventi, aste di comando, gambe di carrello. Il dimensionamento del longherone su un'ala trapezia mostra la catena completa, geometria compresa, come si presenta ai temi d'esame. Con questi strumenti, la monografia ha coperto l'intero percorso: dalla trave alle tensioni, dai materiali

al semiguscio, dall'involuppo di volo al dimensionamento di ogni elemento portante di un'ala.



## Appendice A

# Un longherone a C: che cosa cambia rispetto al doppio T

### Bussola concettuale

**Studiamo questo perché.** tutti i dimensionamenti svolti finora hanno usato la sezione a doppio T, che è *simmetrica* rispetto a entrambi gli assi. Ma il longherone a C — diffusissimo, perché più semplice da fabbricare e da collegare al rivestimento — è simmetrico rispetto a un solo asse. Questa singola differenza geometrica ha una conseguenza che il doppio T nascondeva del tutto: il **centro di taglio esce dalla sezione**, e con esso compare una torsione parassita che va governata. È la lezione che questa appendice mette in pratica sui numeri.

**Da dove veniamo.** dal centro di taglio e dall'asse neutro (Capitolo 6), dalla formula di Bredt (Capitolo 5) e dal dimensionamento del longherone a doppio T (Capitoli 12 e 13).

**Al termine saprai.** dimensionare un longherone a C a flessione e taglio; calcolarne il centro di taglio; quantificare il momento torcente parassita che nasce se il carico non vi passa; e spiegare, numeri alla mano, perché la scelta fra C e doppio T non è una questione di resistenza ma di torsione.

## A.1 Il punto di partenza: stessa ala, sezione diversa

Per rendere il confronto pulito, dimensioniamo un longherone a C alla radice della *stessa* semiala del Capitolo 12 (Esercitazione D), con le stesse sollecitazioni di robustezza:

$$T = 26.127 \text{ N}, \quad M_f = 43,78 \times 10^6 \text{ N mm}, \quad (\text{A.1})$$

lo stesso materiale (alluminio 2024,  $\sigma_{am} = 200 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_{am} = 115,5 \text{ N/mm}^2$ ) e lo stesso ingombro verticale imposto dal profilo,  $t_{\max} = 192 \text{ mm}$ .

### Definizione – La geometria della sezione a C

La sezione a C (o a  $[]$ ) si compone di:

- un'**anima** verticale, di spessore  $t_w$  e altezza  $h_w$ , che — come nel doppio T — porta il taglio;
- due **ali** (o *flange*) orizzontali, di larghezza  $b_f$  e spessore  $t_f$ , entrambe sullo *stesso lato* dell'anima, che portano la flessione come coppia di forze.

La differenza con il doppio T è tutta qui: nel doppio T le solette si estendono *simmetricamente* da entrambi i lati dell'anima; nella C stanno tutte da una parte. La sezione conserva la simmetria rispetto all'asse orizzontale  $z$  (asse neutro della flessione), ma la perde rispetto all'asse verticale  $y$ .

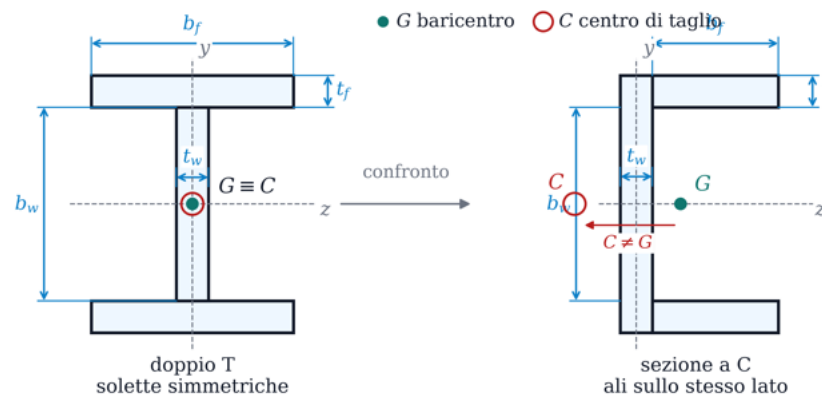


Figura A.1: Le due sezioni a confronto: identiche per la flessione, diverse per il centro di taglio.

## A.2 Fasi E.1 ed E.2: flessione e taglio

### Esempio A.1 — Dimensionamento a flessione e taglio della sezione a C

#### Soluzione

**Scelta della geometria.** Adottiamo, per confronto diretto, le stesse quote del longherone a doppio T finale del Capitolo 12: anima  $t_w = 3$  mm,  $h_w = 172$  mm; ali  $b_f = 165$  mm,  $t_f = 10$  mm (altezza complessiva  $h_w + 2t_f = 192$  mm =  $t_{\max}$ , come impone il profilo).

**Momento d'inerzia.** La sezione è simmetrica rispetto all'asse neutro  $z$ , che passa quindi a metà altezza. Con il teorema del trasporto (Capitolo 6), la distanza dei baricentri delle ali dall'asse neutro è  $d_f = h_w/2 +$

$$t_f/2 = 91 \text{ mm, e}$$

$$J_z = \underbrace{\frac{t_w b_w^3}{12}}_{\text{anima}} + 2 \underbrace{\left( \frac{b_f t_f^3}{12} + b_f t_f d_f^2 \right)}_{\text{due ali}} \quad (\text{A.2})$$

$$= 1,27 \times 10^6 + 2,74 \times 10^7 = 2,86 \times 10^7 \text{ mm}^4. \quad (\text{A.3})$$

### Risultato – Primo fatto sorprendente: $J_z$ è identico al doppio T

Il momento d'inerzia rispetto all'asse neutro è *esattamente* lo stesso del doppio T con le medesime quote ( $J_z = 2,86 \times 10^7 \text{ mm}^4$ ). E non è un caso: il momento d'inerzia dipende soltanto da *come il materiale è distribuito in verticale*, cioè dalla sua distanza dall'asse neutro orizzontale — non da come è disposto in orizzontale. Spostare le ali tutte da un lato (C) invece che a cavallo dell'anima (doppio T) non cambia di un millimetro la loro distanza dall'asse neutro. Perciò la **flessione non distingue le due sezioni**.

**Verifica a flessione.** Con  $y_{\max} = h_w/2 + t_f = 96 \text{ mm}$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_f}{J_z} y_{\max} = \frac{43,78 \times 10^6}{2,86 \times 10^7} \cdot 96 = 146,8 \text{ N/mm}^2 < 200 \text{ N/mm}^2. \quad (\text{A.4})$$

**Verifica a taglio.** Il taglio è assorbito dall'anima, trattata come rettangolo (Jourawsky):

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{T}{t_w h_w} = \frac{3}{2} \cdot \frac{26127}{3 \cdot 172} = 76,0 \text{ N/mm}^2 < 115,5 \text{ N/mm}^2. \quad (\text{A.5})$$

**Verifica combinata (Von Mises).**

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3 \tau_{\max}^2} = \sqrt{146,8^2 + 3 \cdot 76,0^2} = 197,1 \text{ N/mm}^2 < 200 \text{ N/mm}^2. \quad (\text{A.6})$$

Tutte e tre le verifiche coincidono, cifra per cifra, con quelle del doppio T. **Fin qui, C e doppio T sono strutturalmente indistinguibili.** Ma è proprio ora che la C mostra la sua natura.

## A.3 Fase G: il centro di taglio, ciò che il doppio T nascondeva

Nel doppio T, avendo due assi di simmetria, il centro di taglio coincide con il baricentro (Capitolo 6): il carico verticale della portanza, passando per il baricentro, non genera torsione. Nella C, che ha un solo asse di simmetria, **il centro di taglio non coincide con il baricentro** — e per giunta cade *fuori* dalla sezione, dal lato opposto alle ali.

### Teoria – Centro di taglio di una sezione a C

Per una sezione a C in parete sottile, con  $b$  e  $h$  misurati sulle linee medie ( $b = b_f - t_w/2$ ,  $h = h_w + t_f$ ), la distanza  $e$  del centro di taglio  $C$  dalla linea media dell'anima, dal lato opposto alle ali, vale

$$e = \frac{b^2 b^2 t_f}{4 J_z} \quad (\text{A.7})$$

(equivalentemente, con la nota forma approssimata per ali sottili,  $e \approx 3 b^2 t_f / (h_w t_w + 6 b t_f)$ ). Il centro di taglio è il punto per cui deve passare la retta d'azione del carico trasversale affinché la sezione *non* si torca.

**Calcolo.** Con  $b = 165 - 1,5 = 163,5$  mm,  $h = 172 + 10 = 182$  mm e  $J_z = 2,86 \times 10^7$  mm<sup>4</sup>:

$$e = \frac{163,5^2 \cdot 182^2 \cdot 10}{4 \cdot 2,86 \times 10^7} \approx 77 \text{ mm.} \quad (\text{A.8})$$

Il centro di taglio si trova dunque a circa 77 mm dall'anima, sul lato *opposto* alle ali: un punto che sta **nel vuoto**, fuori dal materiale della sezione.

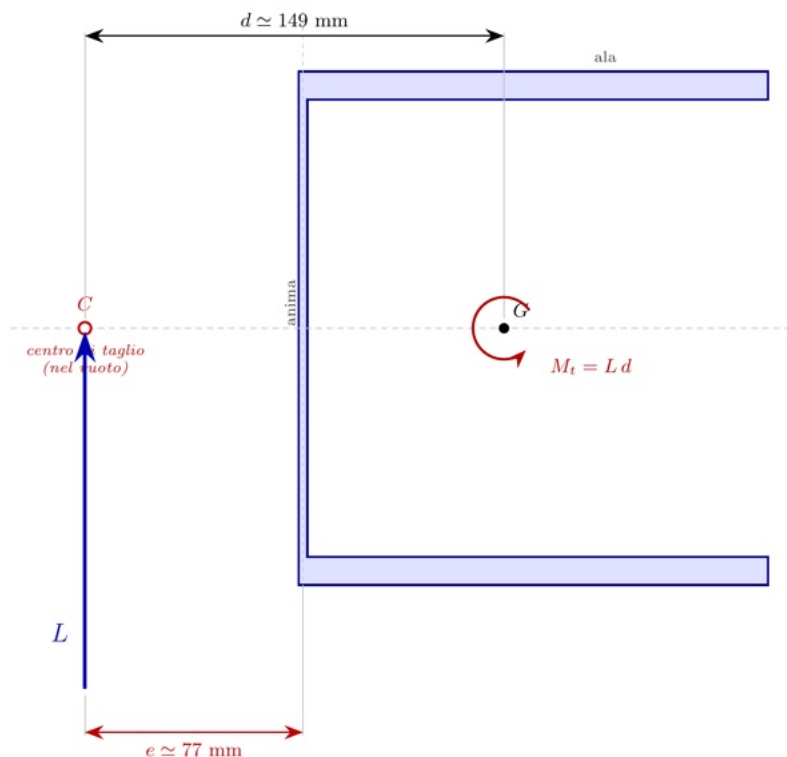


Figura A.2: Il centro di taglio della C cade fuori dalla sezione: se la portanza passa per il baricentro, nasce una torsione di trasporto.

### Analogia pratica – Perché proprio nel vuoto? L'esperimento del righello a C

Prendete un profilato a C (una guida per cartongesso, un binario di tenda) e tenetelo per un'estremità orientando l'apertura di lato. Premete verso il basso *sull'anima*: sentirete il profilato non solo piegarsi, ma anche **ruotare**, torcendosi verso l'apertura. Per farlo piegare *senza* torcere dovrete applicare la spinta in un punto spostato verso l'esterno, dalla parte della schiena — cioè nel vuoto, dove non potete appoggiare il dito. Quel punto introvabile è il centro di taglio. La C, a differenza del doppio T, non vi lascia caricare “dritto” senza un artificio.

## A.4 La conseguenza: la torsione parassita

Nella pratica il carico aerodinamico non passa affatto per il centro di taglio della C: passa, all'incirca, per il baricentro della sezione (o dove lo colloca l'aerodinamica). Il baricentro della nostra C dista dall'anima

$$x_G = \frac{2 b_f t_f \cdot (b_f/2)}{2 b_f t_f + t_w h_w} = \frac{2 \cdot 165 \cdot 10 \cdot 82,5}{3816} \approx 71 \text{ mm}, \quad (\text{A.9})$$

dalla parte delle ali — cioè dal lato opposto al centro di taglio. La distanza fra il punto di applicazione del carico (G) e il centro di taglio (C) è quindi

$$d = e + x_G \approx 77 + 71 = 148 \text{ mm}. \quad (\text{A.10})$$

Il taglio T, agendo a distanza d dal centro di taglio, produce un **momento torcente di trasporto**:

$$M_{t,\text{par}} = T \cdot d = 26127 \cdot 0,148 \approx 3.870 \text{ N m}. \quad (\text{A.11})$$

### Attenzione – L'ordine di grandezza che cambia tutto

Fermiamoci su questo numero. La torsione parassita della C vale circa 3.870 N m: è dello *stesso ordine di grandezza* del momento torcente aerodinamico che dimensionava il rivestimento nell'esercizio dell'ala trapezia ( $M_t \approx 3.170 \text{ N m}$ , Capitolo 13). In altre parole: scegliere una C al posto di un doppio T, e caricarla ingenuamente sul baricentro, **raddoppia quasi il momento torcente che la cella d'ala deve sopportare**. Non è una correzione di second'ordine: è un carico nuovo, grande quanto quello aerodinamico, che il doppio T semplicemente non produceva. Ecco il vero prezzo dell'asimmetria.

### A.4.1 Come si governa il problema

Il progettista ha, in sostanza, tre strade:

1. **Far passare il carico per il centro di taglio.** Se la struttura della centina convoglia la reazione aerodinamica esattamente nel centro di taglio del longerone, la torsione parassita si annulla per costruzione. È elegante ma vincola la disposizione interna, perché quel punto sta nel vuoto.
2. **Accettare la torsione e dimensionare la cella a Bredt.** Si lascia che nasca  $M_{t,\text{par}}$  e si verifica il rivestimento del cassone con la formula di Bredt (Capitolo 5), esattamente come per il momento aerodinamico. È la via più comune, purché si *sommi* questa torsione a quella aerodinamica.

3. **Chiudere la sezione.** Affiancando alla C un secondo elemento (un altro longherone, o il rivestimento strutturale) si forma un *cassone chiuso*: e una sezione chiusa ha rigidezza torsionale incomparabilmente maggiore (il fattore  $A^2$  di Bredt, Capitolo 5), oltre a un centro di taglio che rientra all'interno. È la ragione strutturale per cui le ali moderne sono *cassoni*, non profili aperti.

► **Approfondimento: Sezioni aperte e sezioni chiuse: il vero discrimine**

La C appartiene alla famiglia delle sezioni *aperte*; il doppio T pure, ma la sua doppia simmetria gli risparmia il problema del centro di taglio. Ciò che accomuna tutte le sezioni aperte è la **pes-sima rigidezza torsionale**: una sezione aperta reagisce alla torsione con un flusso di taglio che sale e scende lungo lo spessore sottile (torsione “alla De Saint Venant” delle sezioni sottili aperte), enormemente meno efficiente del flusso circolante costante di una sezione chiusa. A parità di materiale, il rapporto fra le rigidezze torsionali di una sezione chiusa e di una aperta di pari perimetro può valere centinaia o migliaia. È il motivo profondo per cui, nel Capitolo 5, la torsione l'abbiamo affidata alla *cella chiusa* del bordo d'attacco e non ai profili aperti dell'orditura: gli elementi aperti (correnti, longheroni a C o a I) portano benissimo gli sforzi normali e il taglio, ma la torsione va data a una scatola chiusa.

## A.5 Il bilancio del confronto

| Aspetto                       | Doppio T                                                              | C                                          |
|-------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| Assi di simmetria             | due                                                                   | uno (orizzontale)                          |
| Momento d'inerzia $J_z$       | <i>identico a parità di quote</i> ( $2,86 \times 10^7 \text{ mm}^4$ ) |                                            |
| Verifica a flessione          | $\sigma = 146,8 \text{ N/mm}^2$                                       | $\sigma = 146,8 \text{ N/mm}^2$ (identica) |
| Verifica a taglio             | $\tau = 76,0 \text{ N/mm}^2$                                          | $\tau = 76,0 \text{ N/mm}^2$ (identica)    |
| Centro di taglio              | coincide col baricentro                                               | esterno, a $\sim 77 \text{ mm}$ dall'anima |
| Torsione se $L$ passa per $G$ | nessuna                                                               | $\sim 3.870 \text{ N m}$ (parassita)       |
| Fabbricazione e collegamento  | più complessi (due lati)                                              | più semplici (un lato)                     |

Tabella A.1: Doppio T contro C: la resistenza a flessione e taglio è identica; la differenza vera è il centro di taglio e la torsione che ne consegue.

### La morale dell'appendice

Il longherone a C insegna una cosa che il doppio T, con la sua comoda doppia simmetria, teneva nascosta: **la resistenza a flessione e a taglio non è tutta la storia**. Due sezioni possono avere identici  $J_z$ , identiche  $\sigma$  e  $\tau$ , superare le stesse verifiche cifra per cifra — e comportarsi in modo profondamente diverso di fronte al taglio, perché una si lascia caricare “dritto” e l'altra no. La C è più semplice da costruire, ma regala una torsione parassita grande quanto quella aerodinamica, che va riconosciuta e gestita: convogliando il carico nel centro di taglio, dimensionando la cella a Bredt, o — la via che l'aeronautica moderna ha scelto — chiudendo la sezione in un cassone. Il centro di

taglio, che nel Capitolo 6 era una definizione, qui è diventato un numero con un peso in newton per metro: ed è così che un concetto astratto entra nel progetto.



## Appendice B

### L'Esame di Stato 2014/15 passo passo

#### Bussola concettuale

**Studiamo questo perché.** lo schema di dimensionamento del longherone (Fasi A–F) va visto *in azione* su un tema d'esame reale: la prima parte dell'Esame di Stato 2014/15. Lo svolgiamo per intero due volte — prima con un longherone a doppio T, poi con uno a C — così da vedere, sullo stesso caso, che cosa cambia davvero passando da una sezione simmetrica a una asimmetrica.

**Da dove veniamo.** da tutta la monografia, e in particolare dal dimensionamento del longherone (Capitoli 12 e 13) e dall'Appendice A sul longherone a C.

**Al termine saprai.** condurre un tema d'esame completo secondo lo schema Fasi A–F, dalla geometria dell'ala al rivestimento; ricavare il fattore di carico da una condizione di volo assegnata (la virata); e riconoscere, sul medesimo velivolo, l'effetto strutturale del centro di taglio quando il longherone è a C.

#### B.1 La traccia

##### Esame di Stato 2014/15 — Prima parte

Un velivolo affronta una **virata con angolo di rollio**  $\varphi = 30^\circ$  a velocità di crociera. Determinare le componenti di sollecitazione sul longherone in un punto a  $1/6$  dell'apertura alare dalla mezzeria ed eseguire un dimensionamento di massima, assumendo opportune ipotesi sui dati mancanti. Dati:  $W = 17.000 \text{ N}$ ,  $S = 17 \text{ m}^2$ , rapporto di rastremazione  $\lambda = 0,4$ , apertura  $b = 10,90 \text{ m}$ ,  $C_{D0} = 0,03$ .

##### Ipotesi adottate

Ala trapezia monolongherone; profilo NACA 64<sub>1</sub>-212 (spessore relativo massimo 12%,  $C_m = -0,05$  all'assetto di volo); categoria normale CS-23 ( $n_{prog} = 2,5$  per la stima del peso alare); materiali: solette e anima in Ergal 7075 ( $R_s = 147 \text{ N/mm}^2$ ), rivestimento in Avional 22 ( $R_s = 108 \text{ N/mm}^2$ ); coefficiente di sicurezza  $FS = 1,5$ ; fattore di Oswald  $e = 0,85$ . Calcolo **a robustezza**:  $n$  moltiplica i

carichi,  $FS$  riduce le tensioni ammissibili.

## B.2 Soluzione con longerone a doppio T

### Fase B — Geometria dell'ala

Allungamento e corda media:

$$AR = \frac{b^2}{S} = \frac{10,90^2}{17} = 6,99, \quad \bar{c} = \frac{b}{AR} = 1,559 \text{ m.} \quad (\text{B.1})$$

Corde di radice ed estremità (da  $c_t/c_r = \lambda$  e  $(c_t + c_r)/2 = \bar{c}$ ):

$$c_r = \frac{2\bar{c}}{1+\lambda} = 2,228 \text{ m}, \quad c_t = \lambda c_r = 0,891 \text{ m.} \quad (\text{B.2})$$

La corda varia linearmente,  $c(y) = c_r - (c_r - c_t) \frac{y}{b/2} = -0,245 y + 2,228$ ; nella sezione di analisi ( $y = b/6 = 1,817 \text{ m}$ ):

$$c = c(b/6) = 1,782,4 \text{ m.} \quad (\text{B.3})$$

La porzione d'ala esterna alla sezione è un trapezio di basi  $c$  e  $c_t$  e altezza  $b/2 - b/6 = b/3 = 3,633 \text{ m}$ :

$$S_a = \frac{c + c_t}{2} \cdot \frac{b}{3} = \frac{1,7824 + 0,891}{2} \cdot 3,633 = 4,857 \text{ m}^2. \quad (\text{B.4})$$

### Fase C — Forze sulla porzione esterna

Il fattore di carico si ricava dalla condizione di volo. In virata corretta a rollio  $\varphi$ , la componente verticale della portanza equilibra il peso:

$$L \cos \varphi = W \implies n = \frac{L}{W} = \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos 30^\circ} = 1,155. \quad (\text{B.5})$$

#### Analogia pratica – Perché in virata si “pesa” di più

La (B.5) è la ragione fisica del “peso” che si sente in una virata stretta. Per curvare, l'ala deve inclinarsi: ma allora la sua portanza non è più tutta verticale, e solo la componente  $L \cos \varphi$  sostiene il peso. Per non perdere quota il pilota aumenta la portanza totale fino a  $L = W / \cos \varphi$ : ecco  $n = 1,155$  a  $30^\circ$  (e  $n = 2$  a  $60^\circ$ , dove si “pesa” il doppio). La componente orizzontale  $L \sin \varphi$  è, nel frattempo, la forza centripeta che curva la traiettoria.

Portanza totale e sulla porzione esterna (ripartita in proporzione alla superficie):

$$L = nW = 1,155 \cdot 17000 = 19.630 \text{ N}, \quad L_a = L \frac{S_a}{S} = 5.607 \text{ N.} \quad (\text{B.6})$$

Il peso strutturale dell'ala si stima con la formula predittiva di Gabrielli (sistema tecnico,  $Q = W/g = 1.733 \text{ kg}_f$ ,  $n_{prog} = 2,5$ , e il rapporto  $\gamma/R_m \approx 1/15000$  per le leghe leggere bonificate):

$$Q_{ala} = 1,94 AR n_{prog} Q b \frac{1}{15000} + 6S = 145 \text{ kg}_f \implies W_{ala} = 1.419 \text{ N.} \quad (\text{B.7})$$

Peso della porzione esterna (in proporzione alla superficie):  $W_a = W_{ala} S_a / S = 406 \text{ N}$ . La forza netta sulla porzione, **a robustezza** (il peso inerziale va moltiplicato per  $n$ ):

$$F_a = L_a - n W_a = 5607 - 1,155 \cdot 406 = 5.140 \text{ N.} \quad (\text{B.8})$$

### Attenzione – Due $n$ diversi nello stesso problema

Attenzione a non confondere i due fattori di carico. Nella Gabrielli si usa  $n_{prog} = 2,5$ , il fattore di carico *di progetto* per cui l'ala è dimensionata: è una proprietà della struttura e non cambia con la manovra (il peso dell'ala è massa  $\times g$ ). Nella forza  $F_a$  si usa invece  $n = 1,155$ , il fattore di carico *della manovra in esame* (la virata), che scala i carichi effettivi. Sono grandezze diverse con ruoli diversi: scambiarle è l'errore più comune in questo tipo di tema.

## Fase D — Baricentro e sollecitazioni

Il baricentro del trapezio esterno, misurato dalla sezione verso l'estremità:

$$\gamma_G = \frac{b/3}{3} \cdot \frac{c + 2c_t}{c + c_t} = \frac{b}{9} \cdot \frac{1,7824 + 2 \cdot 0,891}{1,7824 + 0,891} = 1,615 \text{ m.} \quad (\text{B.9})$$

L'ala si comporta come una mensola incastrata nella sezione, quindi

$$T = F_a = 5.140 \text{ N}, \quad M_f = T \gamma_G = 5140 \cdot 1,615 = 8.300 \text{ N m.} \quad (\text{B.10})$$

## Fase E.1 — Solette (flessione)

Spessore del profilo alla sezione:  $b = 0,12 \text{ c} = 0,12 \cdot 1782,4 = 213,9 \text{ mm}$ . Poste le solette a  $d = 7,5 \text{ mm}$  dal rivestimento e alte  $a = 8 \text{ mm}$ , la distanza fra i baricentri delle due solette è

$$h_1 = b - 2d - a = 213,9 - 15 - 8 = 190,9 \text{ mm.} \quad (\text{B.11})$$

Nel modello del semiguscio (Capitolo 8) le solette portano la flessione come coppia di forze  $F = M_f / h_1$ :

$$F = \frac{M_f}{h_1} = \frac{8300 \cdot 10^3}{190,9} = 43.478 \text{ N.} \quad (\text{B.12})$$

Con Ergal 7075 ( $\sigma_{am} = R_s / FS = 147 / 1,5 = 98 \text{ N/mm}^2$ ):

$$A_{sol} = \frac{F}{\sigma_{am}} = \frac{43478}{98} = 444 \text{ mm}^2, \quad c_{sol} = \frac{A_{sol}}{a} = \frac{444}{8} \approx 56 \text{ mm.} \quad (\text{B.13})$$

Solette rettangolari  $8 \times 56 \text{ mm}$ .

## Fase E.2 — Anima (taglio)

Con  $\tau_{am} = \sigma_{am} / \sqrt{3} = 56,58 \text{ N/mm}^2$  e la sezione rettangolare dell'anima ( $\tau_{max} = \frac{3}{2} T / A$ ):

$$A = \frac{3}{2} \frac{T}{\tau_{am}} = 1,5 \cdot \frac{5140}{56,58} = 136 \text{ mm}^2. \quad (\text{B.14})$$

Altezza dell'anima  $h_2 = h_1 - a = 182,9 \text{ mm}$ , quindi

$$s = \frac{A}{h_2} = \frac{136}{182,9} = 0,74 \text{ mm} \rightarrow s = 2 \text{ mm} \quad (\text{B.15})$$

(minimo tecnologico e instabilità a taglio, non resistenza).

## Fase F — Rivestimento (torsione)

Il momento torcente sulla sezione nasce dalle forze aerodinamiche esterne rispetto al centro di taglio. La corda media aerodinamica della porzione esterna ( $\lambda_{loc} = c_t/c = 0,5$ ):

$$c_{MAC} = \frac{2}{3} c \frac{1 + \lambda_{loc} + \lambda_{loc}^2}{1 + \lambda_{loc}} = \frac{2}{3} \cdot 1,7824 \cdot \frac{1,75}{1,5} = 1,386 \text{ m.} \quad (\text{B.16})$$

Il momento è massimo alla velocità di crociera, calcolata all'assetto di efficienza massima ( $C_D = 2C_{D0}$ , quindi  $C_L = \sqrt{C_{D0} \pi A R e} = 0,75$ ):

$$V_c = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{C_L}} = 46,7 \text{ m/s.} \quad (\text{B.17})$$

Con  $C_m = -0,05$ :

$$M_t = C_m \frac{1}{2} \rho V_c^2 S_a c_{MAC} \approx 450 \text{ N m.} \quad (\text{B.18})$$

L'area racchiusa dalla cella del bordo d'attacco (naso fino al longerone) si stima  $A_\Omega \approx 0,06 \text{ m}^2$ ; con Bredt,  $q = |M_t|/(2A_\Omega) = 3,75 \text{ N/mm}$ . Con Avional 22 ( $\sigma_{am} = 108/1,5 = 72 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_{am} = 41,6 \text{ N/mm}^2$ ):

$$s = \frac{q}{\tau_{am}} = \frac{3,75}{41,6} = 0,09 \text{ mm} \rightarrow s = 1 \text{ mm} \quad (\text{B.19})$$

(minimo tecnologico).

### Risultato – Quadro del dimensionamento a doppio T

Solette  $8 \times 56 \text{ mm}$  in Ergal 7075; anima da  $2 \text{ mm}$ ; rivestimento del naso da  $1 \text{ mm}$  in Avional. Come sempre, le solette sono dettate dalla resistenza a flessione ( $A = 444 \text{ mm}^2$ ), anima e rivestimento dai minimi tecnologici. Sollecitazioni alla sezione:  $T = 5.140 \text{ N}$ ,  $M_f = 8.300 \text{ N m}$ ,  $M_t \approx 450 \text{ N m}$ .

## B.3 Lo stesso esame con longerone a C

Ripetiamo ora il dimensionamento con un longerone a C, sullo stesso velivolo e con le stesse sollecitazioni: le Fasi A–D sono identiche (geometria, forze, taglio e momento non dipendono dalla forma della sezione), quindi ripartiamo dalla Fase E con  $T = 5.140 \text{ N}$ ,  $M_f = 8.300 \text{ N m}$ ,  $M_t^{aero} \approx 450 \text{ N m}$ .

### Fase E.1 — Solette (flessione): nessuna differenza

Adottiamo per la C le stesse quote del doppio T: ali (le “solette”)  $8 \times 56 \text{ mm}$ , distanza fra i baricentri  $b_1 = 190,9 \text{ mm}$ . Il metodo della coppia di forze è *identico*: le due ali portano la coppia  $F = M_f/b_1$ , indipendentemente dal fatto che siano affacciate (doppio T) o allineate dallo stesso lato (C). Quindi

$$F = \frac{M_f}{b_1} = 43.478 \text{ N}, \quad A_{sol} = \frac{F}{\sigma_{am}} = 444 \text{ mm}^2 \rightarrow 8 \times 56 \text{ mm.} \quad (\text{B.20})$$

Verifica con Navier a titolo di controllo: con  $J_z = 9,33 \times 10^6 \text{ mm}^4$  (per questa C) e  $y_{\max} = 99,5 \text{ mm}$ ,  $\sigma_{\max} = M_f y_{\max}/J_z = 88,5 \text{ N/mm}^2 < 98 \text{ N/mm}^2$ . □

## Fase E.2 — Anima (taglio): nessuna differenza

Il taglio è sempre assorbito dall'anima, con lo stesso conto del doppio T:  $A = 1,5 T / \tau_{am} = 136 \text{ mm}^2$ ,  $b_2 = 182,9 \text{ mm}$ ,  $s = 0,74 \text{ mm} \rightarrow 2 \text{ mm}$ .

### Risultato – Primo verdetto: flessione e taglio non cambiano

Fin qui la C e il doppio T danno risultati identici, cifra per cifra. Ed è corretto che sia così: come dimostrato nell'Appendice A, il momento d'inerzia rispetto all'asse neutro — e quindi la resistenza a flessione e a taglio — dipende solo da come il materiale è distribuito *in verticale*, non da come è disposto in orizzontale. Spostare le ali tutte da un lato non cambia la loro distanza dall'asse neutro. Se il tema chiedesse solo solette e anima, C e doppio T sarebbero equivalenti.

## Fase G — Il centro di taglio (nuova, per la C)

Qui la C impone un passo che il doppio T non richiedeva. Avendo un solo asse di simmetria, il suo centro di taglio non coincide con il baricentro e cade *fuori* dalla sezione. Con  $b = b_f - t_w/2 = 55 \text{ mm}$ ,  $h = h_w + t_f = 198,9 \text{ mm}$ ,  $t_f = 8 \text{ mm}$  e  $J_z = 9,33 \times 10^6 \text{ mm}^4$  (Appendice A):

$$e = \frac{b^2 b^2 t_f}{4 J_z} = \frac{55^2 \cdot 198,9^2 \cdot 8}{4 \cdot 9,33 \times 10^6} \approx 24 \text{ mm}, \quad (\text{B.21})$$

distanza del centro di taglio dall'anima, sul lato opposto alle ali. Il baricentro sta invece a  $x_G \approx 20 \text{ mm}$  dall'anima, dal lato delle ali: la distanza fra il punto di applicazione del carico (G) e il centro di taglio (C) è  $d = e + x_G \approx 44 \text{ mm}$ .

## Fase F — Rivestimento (torsione), con la parassita

Il taglio  $T$ , non passando per il centro di taglio, genera un **momento torcente parassita**

$$M_t^{par} = T \cdot d = 5140 \cdot 0,044 \approx 224 \text{ N m}. \quad (\text{B.22})$$

Questo si *somma* al momento aerodinamico. Nel caso più gravoso (i due momenti concordi):

$$M_t^{tot} = M_t^{aero} + M_t^{par} \approx 450 + 224 = 674 \text{ N m}, \quad (\text{B.23})$$

da cui  $q = M_t^{tot} / (2A_\Omega) = 5,62 \text{ N/mm}$  e  $s = q / \tau_{am} = 0,135 \text{ mm} \rightarrow 1 \text{ mm}$  (ancora minimo tecnologico, su questa piccola ala).

### Attenzione – Il vero prezzo della C, misurato su un tema d'esame

Ecco la differenza concreta fra le due soluzioni. Il longherone a C ha richiesto *le stesse* solette e la stessa anima del doppio T, ma ha prodotto una torsione parassita di  $224 \text{ N m}$  — pari alla **metà** del momento aerodinamico. Sul rivestimento, il flusso di taglio passa da  $3,75$  a  $5,62 \text{ N/mm}$ : un aumento del 50%. Su questa ala, leggera e poco caricata, entrambi i valori restano sotto il minimo tecnologico di  $1 \text{ mm}$ , e la differenza non si vede nel numero finale. Ma su un'ala più grande e più caricata, dove il rivestimento è dimensionato dalla torsione e non dal minimo tecnologico, quel

+50% diventerebbe spessore in più, cioè peso in più. È la ragione strutturale per cui, a parità di flessione, la C “costa” più del doppio T — e per cui, quando la si sceglie (perché più semplice da costruire), la torsione parassita va sempre messa in conto.

### Come annullare la parassita

Il progettista può eliminare del tutto  $M_t^{par}$  facendo passare la reazione della centina esattamente per il centro di taglio del longherone a C — cioè applicando il carico 24 mm oltre l'anima, dal lato opposto alle ali. In quel caso il taglio non produce torsione, e il rivestimento torna a essere dimensionato dal solo momento aerodinamico ( $q = 3,75 \text{ N/mm}$ ), esattamente come nel doppio T. È elegante, ma vincola la geometria interna della centina; l'alternativa — accettare la parassita e dimensionare la cella a Bredt — è quella che abbiamo appena svolto.

## B.4 Il confronto finale

| Grandezza                   | Doppio T                      | C                                               |
|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------------------------|
| Sollecitazioni ( $T, M_f$ ) | identiche: 5.140 N, 8.300 N m |                                                 |
| Solette                     | $8 \times 56 \text{ mm}$      | $8 \times 56 \text{ mm}$ (identiche)            |
| Anima                       | 2 mm                          | 2 mm (identica)                                 |
| Centro di taglio            | sul baricentro                | esterno, $\sim 24 \text{ mm}$ dall'anima        |
| Torsione parassita          | nessuna                       | $\sim 224 \text{ N m}$ (metà dell'aerodinamica) |
| Momento torcente totale     | 450 N m                       | fino a 674 N m (+50%)                           |
| Rivestimento                | 1 mm (min. tecn.)             | 1 mm (min. tecn.)                               |

Tabella B.1: Esame di Stato 2014/15: doppio T contro C. Flessione e taglio identici; la C aggiunge una torsione parassita pari alla metà di quella aerodinamica.

### La lezione del tema d'esame

Lo stesso velivolo, la stessa traccia, due longheroni: e la differenza non sta dove lo studente se l'aspetterebbe. Solette e anima — il cuore del dimensionamento — vengono identiche, perché la flessione e il taglio non distinguono una sezione simmetrica da una asimmetrica a parità di distribuzione verticale del materiale. La C si tradisce altrove: nel centro di taglio spostato, che trasforma il taglio in una torsione parassita grande quanto metà di quella aerodinamica. È l'esempio perfetto del perché, in un tema d'esame, non basta “far tornare i numeri” di solette e anima: la scelta della sezione va difesa anche sul piano della torsione, dichiarando dove passa il carico e come si governa la parassita. Un candidato che, di fronte a un longherone a C, calcola il centro di taglio e ne discute l'effetto mostra di aver capito la struttura, non solo di saper applicare le formule.



## Appendice C

# Lo schema operativo: dimensionare un monolongherone in sei fasi

### Bussola concettuale

**Studiamo questo perché.** gli Appendici precedenti hanno mostrato il metodo *applicato* a casi concreti; questa appendice ne raccoglie l'**ossatura procedurale** in forma di prontuario. È lo schema — *metodo della forza concentrata, calcolo a robustezza, ala monolongherone* — da tenere sotto mano durante un compito o un tema d'esame: sei fasi, ciascuna con i suoi dati d'ingresso e la sua formula chiave, dalla geometria dell'ala allo spessore del rivestimento.

**Da dove veniamo.** da tutta la monografia: la flessione e il taglio (Capitolo 6), la torsione con Bredt (Capitolo 5), il modello del semiguscio (Capitolo 8), l'involuppo di volo (Capitolo 11) e gli esercizi svolti (Capitolo 12, Appendici A e B).

**Come si usa.** si segue in ordine, fase per fase. Ogni fase produce i dati che alimentano la successiva; alla fine, la tabella riassuntiva riassume tutto in una pagina. Gli esempi numerici che incarnano questo schema sono nell'Appendice B (Esame di Stato 2014/15) e nel Capitolo 13 (ala trapezia).

## C.1 Fase A — Dati e ipotesi

### Fase A — che cosa serve prima di cominciare

#### Dati necessari:

- peso del velivolo  $W$  [N], superficie alare  $S$  [m<sup>2</sup>], apertura  $b$  [m];
- rapporto di rastremazione  $\lambda = c_t/c_r$ ;
- fattore di carico  $n$  (dalla condizione di volo o dall'involuppo);
- spessore relativo del profilo  $(t/c)$  [%];
- coefficiente di momento del profilo  $C_m$ ;

- materiali scelti ( $R_s$  oppure  $R_{p0,2}$ ) e coefficiente di sicurezza  $FS$ .

### Attenzione – Il principio che governa tutto: calcolo a robustezza

Adottiamo il **calcolo a robustezza**: il fattore di carico  $n$  *moltiplica i carichi* (portanza e peso inerziale della manovra), mentre il coefficiente di sicurezza  $FS$  *riduce le tensioni ammissibili* ( $\sigma_{am} = R_s/FS$ ). È perfettamente equivalente al *calcolo a rottura*, in cui si moltiplicano i carichi per  $FS$  (carichi ultimi) e si usa la resistenza piena del materiale: i due percorsi portano allo stesso dimensionamento, ma vanno tenuti distinti e mai mescolati. La regola pratica: se il testo fornisce  $R_s$  (snervamento) si lavora a robustezza; se fornisce  $R_{p0,2}$  o  $\sigma_R$  si può ragionare a rottura.

## C.2 Fase B — Geometria dell'ala

### Fase B — dalla pianta alle corde

#### 1. Allungamento e corda media:

$$AR = \frac{b^2}{S}, \quad \bar{c} = \frac{S}{b} = \frac{b}{AR}. \quad (C.1)$$

#### 2. Corde di radice ed estremità (dal sistema $c_t/c_r = \lambda$ e $(c_t + c_r)/2 = \bar{c}$ ):

$$c_r = \frac{2\bar{c}}{1+\lambda}, \quad c_t = \lambda c_r. \quad (C.2)$$

#### 3. Corda alla sezione di analisi (posta a distanza $y$ dalla mezzeria; la corda varia linearmente):

$$c(y) = c_r - (c_r - c_t) \frac{y}{b/2}. \quad (C.3)$$

#### 4. Superficie della porzione esterna (trapezio di basi $c$ e $c_t$ , altezza $b/2 - y$ ):

$$S_a = \frac{c + c_t}{2} \left( \frac{b}{2} - y \right). \quad (C.4)$$

### Analogia pratica – Perché “la porzione esterna”

Il longerone alla sezione  $y$  deve reggere tutto ciò che sta *oltre*, verso l'estremità: è il principio della mensola (Capitolo 6). Immaginate di afferrare l'ala in quella sezione e di “segarla” idealmente: la parte che resta in mano — il trapezio esterno di superficie  $S_a$  — è quella che genera i carichi che la sezione deve incassare. Per questo la prima cosa da calcolare, dopo la geometria, è proprio  $S_a$ .

## C.3 Fase C — Determinazione delle forze

### Fase C — portanza, peso, forza netta

**5. Portanza sulla porzione esterna** (proporzionale alla superficie;  $L = nW$ ,  $L_{semi} = L/2$ ,  $S_{semi} = S/2$ ):

$$L_a = L_{semi} \frac{S_a}{S_{semi}} = L \frac{S_a}{S}. \quad (C.5)$$

**6. Peso strutturale dell'ala** (formula predittiva di Gabrielli, in sistema tecnico con  $Q = W/g$  [kg<sub>f</sub>], e  $\gamma/R_m \approx 1/15000$  per le leghe leggere bonificate):

$$Q_{ala} = 1,94 AR n_{prog} Q b \frac{1}{15000} + 6S \text{ [kg}_f\text{]}, \quad W_{ala} = Q_{ala} g. \quad (C.6)$$

Peso della porzione esterna:  $W_a = W_{ala} S_a/S$ . **7. Forza netta** sulla porzione (a robustezza,  $n$  moltiplica il peso inerziale):

$$F_a = L_a - n W_a. \quad (C.7)$$

### Attenzione — I due fattori di carico: $n$ e $n_{prog}$

Nella formula di Gabrielli compare  $n_{prog}$ , il fattore di carico *di progetto strutturale* — il massimo  $n$  per cui l'ala è dimensionata (tipicamente 2,5 per la categoria normale, 3,8 o 6 per acrobatica). È una proprietà della struttura: il peso dell'ala è massa  $\times g$  e non cambia con la manovra. Nella forza  $F_a$  compare invece  $n$ , il fattore di carico *della manovra in esame*. Sono grandezze diverse: se il testo non fornisce  $n_{prog}$ , si può assumere  $n = 1$  nella Gabrielli per stimare il peso “a vuoto” dell'ala. Confonderle è l'errore più frequente in questo tipo di calcolo.

## C.4 Fase D — Baricentro e sollecitazioni

### Fase D — dove agisce la forza, e quanto vale il momento

**8. Baricentro della porzione esterna** (punto di applicazione di  $F_a$ , essendo portanza e peso  $\propto$  superficie). Per un trapezio di basi  $a$  (maggiore, alla sezione) e  $b$  (minore, all'estremità) e altezza  $b$ :

$$\gamma_G = \frac{b}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}, \quad (C.8)$$

misurato dalla sezione di analisi verso l'estremità. **9. Taglio e momento flettente** (l'ala è una mensola incastrata alla sezione):

$$T = F_a, \quad M_f = T \gamma_G. \quad (C.9)$$

► **Approfondimento: Da dove viene la formula del baricentro del trapezio**

La formula  $y_G = \frac{b}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$  si ricava scomponendo il trapezio in un rettangolo (base minore  $b$ , che porta il baricentro a  $b/2$ ) e un triangolo (che porta il baricentro a  $b/3$  dalla base maggiore). Pesando le due distanze con le rispettive aree e semplificando si ottiene l'espressione compatta. Il controllo di coerenza è immediato: se  $a = b$  (rettangolo,  $\lambda = 1$ ) la formula dà  $y_G = b/2$ , il centro geometrico; se  $b \rightarrow 0$  (triangolo,  $\lambda = 0$ ) dà  $y_G = b/3$ , il baricentro del triangolo. Due casi limite noti, ritrovati esattamente: la formula è affidabile.

## C.5 Fase E — Dimensionamento del longherone

### Fase E — solette e anima

**10. Altezza del longherone e distanza fra le solette.** Spessore del profilo alla sezione:  $b = c(t/c)$ . Poste le solette alte  $a$  e distanti  $d$  dal profilo esterno, la distanza fra i loro *baricentri* è

$$b_1 = b - 2 \left( d + \frac{a}{2} \right) = b - 2d - a. \quad (\text{C.10})$$

Tipicamente  $a = 6 \div 8$  mm,  $d = 7 \div 7,5$  mm.

**11. Solette (flessione).** Nel semiguscio ideale le solette portano il momento come coppia di forze; con  $\sigma_{am} = R_s/FS$ :

$$F = \frac{M_f}{b_1}, \quad A = \frac{F}{\sigma_{am}}, \quad c_{sol} = \frac{A}{a}. \quad (\text{C.11})$$

Arrotondare  $c_{sol}$  al mm superiore; solette rettangolari  $a \times c_{sol}$ .

**12. Anima (taglio).** Per la sezione rettangolare  $\tau_{max} = \frac{3}{2} T/A$ ; con  $\tau_{am} = \sigma_{am}/\sqrt{3}$  e altezza dell'anima  $b_2 = b_1 - a$ :

$$A = \frac{3}{2} \frac{T}{\tau_{am}}, \quad s = \frac{A}{b_2}. \quad (\text{C.12})$$

Arrotondare  $s$  allo spessore commerciale superiore (minimo 2 mm).

### Analoga pratica — Perché quasi sempre l'anima “esce” sottilissima

Nei conti reali la Fase E.2 restituisce quasi sempre uno spessore d'anima di qualche decimo di millimetro — e poi si adotta comunque 2 mm. Non è uno spreco: quel valore è dettato dai **minimi tecnologici** (una lamiera troppo sottile è ingovernabile: si deforma, non tiene i rivetti) e dall'**instabilità a taglio** del pannello, che imbozzerebbe ben prima di raggiungere  $\tau_{am}$ . La resistenza pura, qui, non è quasi mai il vincolo: è un promemoria che il dimensionamento non è solo “far tornare le tensioni”.

## C.6 Fase F — Torsione e rivestimento

### Fase F — il momento torcente e lo spessore del naso

**13. Momento torcente alla sezione** (generato dalle forze aerodinamiche della porzione esterna, con  $c_{ma}$  = corda media aerodinamica della porzione,  $\lambda_{loc} = c_t/c$ ):

$$M_t = C_m \frac{1}{2} \rho V^2 S_a c_{ma}, \quad c_{ma} = \frac{2}{3} c \frac{1 + \lambda_{loc} + \lambda_{loc}^2}{1 + \lambda_{loc}}. \quad (C.13)$$

**14. Area resistente a torsione** (cella del bordo d'attacco, stimata come media fra il triangolo inscritto e il rettangolo circoscritto):

$$A_\Delta = \frac{1}{2} x h, \quad A_{\text{rect}} = x h \implies A = \frac{A_\Delta + A_{\text{rect}}}{2} = \frac{3}{4} x h. \quad (C.14)$$

con  $x$  = posizione del longherone (frazione della corda),  $h$  = spessore del profilo. Per Bredt:  $q = |M_t|/(2A)$ . **15. Spessore del rivestimento** (la lamiera regge il flusso  $q$ ; con  $\sigma_{am} = R_{p0,2}/FS$ ,  $\tau_{am} = \sigma_{am}/\sqrt{3}$ ):

$$s = \frac{q}{\tau_{am}} = \frac{|M_t|}{2A \tau_{am}}. \quad (C.15)$$

Arrotondare  $s$  allo spessore commerciale superiore (minimo 1 mm).

#### ► Approfondimento: La stima $A \simeq \frac{3}{4}xb$ : perché la media

La cella del bordo d'attacco non è né un triangolo né un rettangolo: è una forma intermedia, curva, chiusa fra il naso arrotondato del profilo e l'anima del longherone. Approssimarla con il *triangolo inscritto* ( $A_\Delta = \frac{1}{2}xb$ ) la sottostima; con il *rettangolo circoscritto* ( $A_{\text{rect}} = xb$ ) la sovrastima. La media aritmetica,  $A = \frac{3}{4}xb$ , è una stima ragionevole di primo dimensionamento — e, poiché  $q = M_t/(2A)$ , sbagliare  $A$  di un fattore fra  $\frac{1}{2}$  e 1 si ripercuote direttamente sul flusso: nei casi dubbi conviene raffinare  $A$  con il calcolo dell'area reale (per punti o con software). Nella pratica d'esame la  $\frac{3}{4}xb$  è accettata come stima dichiarata.

## C.7 Lo schema in una pagina

| Fase | Cosa si calcola             | Formula chiave                                                        |
|------|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| B    | Geometria dell'ala          | $AR = b^2/S$ ; $c_r, c_i$ ; $c(y)$ ; $S_a = \frac{c+c_i}{2}(b/2 - y)$ |
| C    | Forze sulla porzione        | $L_a = L S_a/S$ ; $W_a = W_{ala} S_a/S$ ; $F_a = L_a - n W_a$         |
| D    | Baricentro e sollecitazioni | $y_G = \frac{b}{3} \frac{a+2b}{a+b}$ ; $T = F_a$ ; $M_f = T y_G$      |
| E.1  | Solette (flessione)         | $F = M_f/h_1$ ; $A = F/\sigma_{am}$ ; $c_{sol} = A/a$                 |
| E.2  | Anima (taglio)              | $A = \frac{3}{2} T/\tau_{am}$ ; $s = A/h_2$                           |
| F    | Rivestimento (torsione)     | $q =  M_t /(2A)$ ; $s = q/\tau_{am}$                                  |

Tabella C.1: Il metodo della forza concentrata in sei fasi: prontuario da tenere sotto mano. Gli esempi svolti sono nell'Appendice B e nel Capitolo 13.

### Risultato – Il modello del semiguscio ideale, che rende tutto disaccoppiato

Tutto lo schema poggia su un'unica idea, quella del semiguscio ideale (Capitolo 8): i **pannelli di rivestimento** resistono solo a taglio (flussi di taglio, Fase F); le **solette** (i correnti) resistono solo a sforzo normale, trazione e compressione (Fase E.1); l'**anima** del longherone resiste al taglio verticale (Fase E.2). È questa divisione dei compiti che permette di *disaccoppiare* le sollecitazioni e dimensionare ogni elemento separatamente — flessione alle solette, taglio all'anima, torsione al rivestimento — trasformando un problema di elasticità tridimensionale in sei formule in fila. Senza questo modello, lo schema in sei fasi semplicemente non esisterebbe.

### Come usare questo prontuario

Le sei fasi non sono una ricetta da applicare a occhi chiusi: sono l'ossatura logica su cui appoggiare il ragionamento. Ogni fase dichiara le proprie ipotesi (il profilo, i materiali, il modello di semiguscio) e consegna alla successiva un dato verificato. Quando affronterete un tema d'esame, tenete questa tabella accanto e percorretela in ordine, ma senza mai spegnere il senso fisico: chiedetevi, a ogni passo, *che cosa* state calcolando e *perché* — se il longherone è a C, per esempio, la Fase F va integrata con il centro di taglio (Appendice A). Lo schema fa i conti; il progettista fa le scelte.



## Appendice D

### Il tema 2019: il carrello passo passo

#### Bussola concettuale

**Studiamo questo perché.** il tema ministeriale del 2019 è il complemento perfetto delle appendici precedenti: dove il 2014/15 metteva al centro il longherone, il 2019 mette al centro il **carrello** — una struttura reticolare isostatica da risolvere con le equazioni cardinali e le aste a due forze (Capitolo 2) e da dimensionare con Eulero (Capitoli 4 e 13). In più, la prima parte chiede una *prestazione*: la corsa di decollo. Tre filoni del corso, un solo tema.

**Da dove veniamo.** dalle equazioni cardinali e dalle bielle (Sezione 2.2), dal carico di punta con snellezza limite (Capitolo 13) e dall'inviluppo di volo (Capitolo 11).

**Al termine saprai.** impostare e integrare l'equazione del moto della corsa di decollo; risolvere una struttura isostatica di aste con la scelta intelligente del polo; interpretare i segni delle soluzioni (compressione/trazione); e dimensionare un'asta compressa con Eulero e una tesa con il minimo costruttivo.

#### D.1 La traccia

##### Esame di Stato 2019 — Prima parte

Un aeromobile decolla da una pista di cemento a 1.000 m sul livello del mare. **(a)** Determinare lo spazio di decollo, con: carico alare  $W/S = 34,5 \text{ kg}_f/\text{m}^2$ ,  $AR = 6,98$ ,  $S = 13 \text{ m}^2$ ,  $C_{D0} = 0,030$ ,  $C_{L,\max}^{flap} = 1,9$ , incremento di resistenza dei flap in decollo  $\Delta C_{D0} = 0,035$ , trazione massima  $T = 1 \text{ kN}$ . **(b)** Il ruotino anteriore è lo schema in figura: montante verticale  $BG$ , aste  $AD$  e  $CE$ , cerniere in tutti i punti tranne  $B$ , dove un appoggio scorrevole verticale reagisce solo in orizzontale. Con un carico  $F = 13,2 \text{ kN}$  inclinato di  $22^\circ$  applicato in  $G$ , determinare le forze nelle aste e la reazione in  $B$ . **(c)** Dimensionare le aste  $AD$  e  $CE$ , scegliendo il materiale e dichiarando le ipotesi.

**Dati geometrici e ipotesi adottate**

Quote (in mm):  $BG = 1130$ ,  $EG = 550$ ,  $DE = 230$  (quindi  $DG = 780$ ),  $AB = BC = 340$ . Componente orizzontale di  $F$  diretta verso  $A$  (sinistra). Materiale delle aste: lega Al 2024-T4 ( $E = 73.100 \text{ N/mm}^2$ ,  $R_{p0,2} = 324 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_R = 469 \text{ N/mm}^2$ ); sezioni circolari cave con rapporto  $k = d_i/D_e = 0,70$ ; estremità incernierate ( $l_0 = L$ ); coefficiente di sicurezza  $FS = 1,5$ .

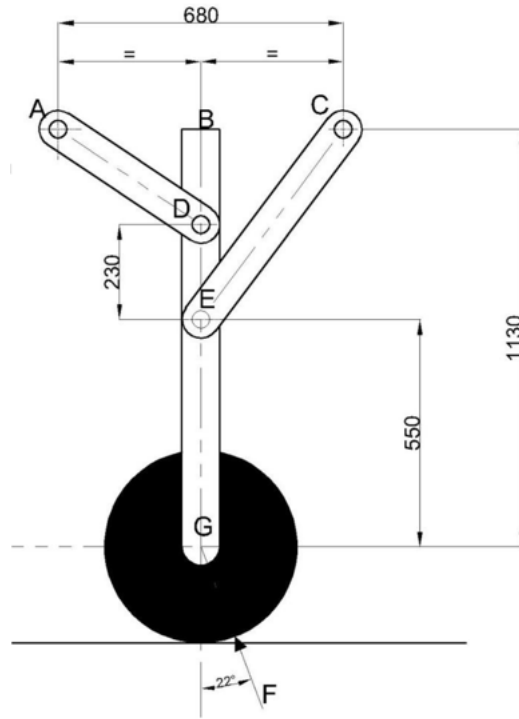


Figura D.1: Il ruotino anteriore del tema 2019: una struttura reticolare isostatica.

## D.2 Parte (a) — La corsa di decollo

**L'equazione del moto.** In rullaggio, sull'aeromobile agiscono la trazione  $T$ , la resistenza aerodinamica  $D$ , e l'attrito volvente  $R_A = f(W - L)$ , proporzionale — tramite il coefficiente  $f$  — al peso *non ancora* sostenuto dalla portanza. La seconda legge della dinamica lungo la pista dà

$$m \frac{dV}{dt} = T - D - f(W - L), \quad (\text{D.1})$$

con  $D$  ed  $L$  funzioni di  $V^2$ : l'accelerazione decresce al crescere della velocità, e l'integrazione va fatta per via numerica.

**I dati in quota.** A  $z = 1 \text{ km}$ , con la formula ipsometrica approssimata  $\rho_z = \rho_0 (20 - z)/(20 + z) = 1,108 \text{ kg/m}^3$ . Il peso è  $W = 34,5 \cdot 9,81 \cdot 13 = 4.400 \text{ N}$  ( $m = 448,5 \text{ kg}$ ). Le velocità (Capitolo 11):

$$V_s^{dec} = \sqrt{\frac{2W}{\rho_z S C_{L,max}^{flap}}} = 17,9 \text{ m/s}, \quad V_d = 1,2 V_s^{dec} = 21,5 \text{ m/s}. \quad (\text{D.2})$$

**L'assetto ottimo di rullaggio.** Durante il rullaggio il pilota può scegliere l'assetto, cioè il  $C_L$ : portanza alta riduce l'attrito ma aumenta la resistenza indotta. Minimizzando  $D + f(W - L)$  rispetto a  $C_L$  (derivata nulla) si trova l'assetto ottimo

$$C_L^{rull} = \frac{f \pi e'}{2} = \frac{0,03 \cdot \pi \cdot 6,28}{2} = 0,30, \quad (D.3)$$

con  $f = 0,03$  (cemento) ed  $e' = 0,9 AR = 6,28$ . La polare in decollo include i flap:  $C_D = (0,030 + 0,035) + C_L^2 / (\pi e') = 0,0794$ .

**L'integrazione.** Dividendo l'intervallo  $0 \rightarrow V_d$  in cinque passi uguali e sommando i  $\Delta s = \bar{V} \Delta V / \bar{a}$  (con  $\bar{a}$  dalla (D.1) alla velocità media del passo) si ottiene

$$\boxed{s_{dec} \simeq 136 \text{ m}} \quad (t \simeq 12 \text{ s}). \quad (D.4)$$

La nostra integrazione numerica fine conferma: 136,1 m — il metodo tabellare a cinque passi è, ancora una volta, pienamente adeguato.

## D.3 Parte (b) — La statica del ruotino, passo passo

### Passo 1 — Lo schema strutturale

Il sistema ha tre elementi: il **montante**  $BG$  (trave rigida verticale, che porta la ruota); l'**asta**  $AD$  e l'**asta**  $CE$ . Le due aste sono incernierate alle sole estremità e scariche lungo il fusto: sono **aste a due forze** (Sezione 2.2), quindi ciascuna trasmette una forza *diretta lungo il proprio asse*, di intensità incognita. In  $B$  l'appoggio scorrevole verticale lascia libero lo scorrimento lungo l'asse del montante e reagisce con la sola componente orizzontale  $R_{Bx}$ .

Il conto delle incognite conferma l'isostaticità:  $F_{AD}, F_{CE}, R_{Bx}$  — tre incognite, tre equazioni cardinali sul corpo libero del montante. Il problema è chiuso.

### Passo 2 — La geometria delle aste: lunghezze e coseni

Dalle quote si leggono le proiezioni orizzontale e verticale di ciascuna asta, e con Pitagora (2.2):

| Asta | Proiezioni [mm] | Lunghezza [mm]                 | Angolo       | Coseni (H; V) |
|------|-----------------|--------------------------------|--------------|---------------|
| $AD$ | 340; 350        | $\sqrt{340^2 + 350^2} = 488,0$ | $45,8^\circ$ | 0,697; 0,717  |
| $CE$ | 340; 580        | $\sqrt{340^2 + 580^2} = 672,3$ | $59,6^\circ$ | 0,506; 0,863  |

Tabella D.1: Geometria delle due bielle: le proiezioni verticali sono  $BG - DG = 1130 - 780 = 350$  mm per  $AD$  e  $BG - EG = 580$  mm per  $CE$ .

Se l'asta  $AD$  trasmette la forza assiale  $F_{AD}$ , le sue componenti sul montante in  $D$  valgono  $0,697 F_{AD}$  (orizzontale) e  $0,717 F_{AD}$  (verticale): i coseni direttori sostituiscono per intero il formalismo trigonometrico.

### Passo 3 — La decomposizione del carico

Il carico  $F = 13,2 \text{ kN}$ , inclinato di  $22^\circ$  rispetto alla verticale con componente orizzontale verso sinistra:

$$F_H = F \sin 22^\circ = 4,94 \text{ kN} \text{ (verso sinistra)}, \quad F_V = F \cos 22^\circ = 12,24 \text{ kN} \text{ (verso l'alto)}. \quad (\text{D.5})$$

Fisicamente: è la reazione del terreno sul ruotino in una condizione di frenata o di impatto disassato — prevalentemente verticale, con una componente orizzontale che “spinge indietro” la gamba.

### Passo 4 — La convenzione di segno

Assumiamo **positive le forze assiali di compressione**:  $F_{AD} > 0$  e  $F_{CE} > 0$  significano che l'asta *spinge* il montante nel punto d'attacco; un risultato negativo racconterà una trazione. Fissare la convenzione *prima* di scrivere le equazioni — e poi non toccarla più — è metà del rigore di questi problemi.

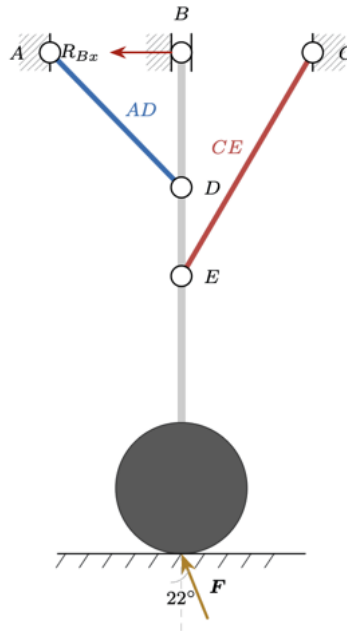


Figura D.2: Il corpo libero del montante: tutte le forze note e incognite che vi agiscono.

### Passo 5 — Le equazioni cardinali, con il polo giusto

#### Risultato – L'osservazione che dimezza il problema

Tutti i punti di applicazione —  $G, D, E, B$  — giacciono *sull'asse verticale del montante*. Scegliendo  $B$  come polo dei momenti, ogni componente **verticale** ha la retta d'azione che passa per quell'asse: braccio nullo, momento nullo. Nell'equazione  $\sum M_B = 0$  sopravvivono le sole componenti **orizzontali**, con braccio pari alla distanza verticale da  $B$ . È l'applicazione da manuale della “scelta furba del polo” (Sezione 2.2): un'equazione che sembrava affollata si riduce a due sole incognite.

*Momenti rispetto a B* (antiorari positivi; bracci = distanze verticali da B: 1.130 mm per G, 1130 – 780 = 350 mm per D, 1130 – 550 = 580 mm per E):

$$-4,94 \cdot 1130 + 0,697 \cdot 350 F_{AD} - 0,506 \cdot 580 F_{CE} = 0 \implies -5588 + 243,9 F_{AD} - 293,5 F_{CE} = 0. \quad (\text{I})$$

*Traslazione verticale* (le componenti verticali delle due aste in compressione spingono entrambe il montante verso il basso;  $F_V$  verso l'alto):

$$-0,717 F_{AD} - 0,863 F_{CE} + 12,24 = 0. \quad (\text{II})$$

*Traslazione orizzontale* (servirà solo per  $R_{Bx}$ , a valle):

$$R_{Bx} + 0,697 F_{AD} - 0,506 F_{CE} - 4,94 = 0. \quad (\text{III})$$

## Passo 6 — La soluzione del sistema

Dalla (II):  $F_{AD} = (12,24 - 0,863 F_{CE}) / 0,717 = 17,07 - 1,204 F_{CE}$ . Sostituendo nella (I):

$$-5588 + 243,9 (17,07 - 1,204 F_{CE}) - 293,5 F_{CE} = 0 \implies F_{CE} = \frac{-1424}{587,1} = -2,43 \text{ kN}, \quad (\text{D.6})$$

e a ritroso:

$$F_{AD} = 17,07 - 1,204 \cdot (-2,43) = 19,99 \text{ kN}, \quad (\text{D.7})$$

$$R_{Bx} = 4,94 - 0,697 \cdot 19,99 + 0,506 \cdot (-2,43) = -10,21 \text{ kN}. \quad (\text{D.8})$$

La lettura dei segni, con la convenzione del Passo 4:

| Elemento   | Forza    | Stato               | Effetto sul montante           |
|------------|----------|---------------------|--------------------------------|
| Asta AD    | 19,99 kN | <b>compressione</b> | spinge verso destra            |
| Asta CE    | 2,43 kN  | <b>trazione</b>     | tira verso destra              |
| Reazione B | 10,21 kN | orizzontale         | la guida spinge verso sinistra |

## Passo 7 — La verifica

Sostituendo i tre risultati nelle tre equazioni:  $\Sigma F_H \approx 0$ ,  $\Sigma F_V \approx 0$ ,  $\Sigma M_B \approx 0$  (residui dell'ordine dei millesimi, dovuti agli arrotondamenti). *[equilibrio verificato]*

### Analogia pratica — Perché i ruoli delle aste sembrano invertiti

A prima vista sorprende che l'asta più corta e più inclinata (AD) porti 20 kN — una volta e mezza il carico applicato! — mentre CE se la cavi con 2,4 kN. La fisica è nei momenti: la componente orizzontale di  $F$ , verso sinistra con braccio 1.130 mm, tende a far ruotare il montante in senso orario attorno a B. L'unica che può opporsi con un momento antiorario è AD, che però lavora con un braccio di soli 350 mm: per pareggiare un momento grande con un braccio piccolo serve una forza grande. È la leva di Archimede letta al contrario — e la ragione per cui, nei carrelli reali, le aste di controvento vicine al vincolo sono sempre le più robuste.

## D.4 Parte (c) — Il dimensionamento delle aste

Le tensioni ammissibili, con  $FS = 1,5$ :

$$\sigma_{am}^c = \frac{R_{p0,2}}{FS} = \frac{324}{1,5} = 216 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{compressione}), \quad (\text{D.9})$$

$$\sigma_{am}^t = \frac{\sigma_R}{FS} = \frac{469}{1,5} = 312,7 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{trazione}), \quad (\text{D.10})$$

e la snellezza limite del 2024-T4 (Capitolo 13):

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{R_{p0,2}}} = \pi \sqrt{\frac{73100}{324}} = 47,2. \quad (\text{D.11})$$

Per la sezione circolare cava con  $k = d_i/D_e$  le proprietà si scrivono in forma compatta:

$$A = \frac{\pi D_e^2}{4} (1 - k^2), \quad I = \frac{\pi D_e^4}{64} (1 - k^4), \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{D_e}{4} \sqrt{1 + k^2}; \quad (\text{D.12})$$

con  $k = 0,70$ :  $1 - k^2 = 0,51$ ,  $1 - k^4 = 0,760$ ,  $\sqrt{1 + k^2} = 1,221$ .

### Passo 8a — L'asta AD: compressa, quindi Eulero

**La stima da resistenza smaschera la snellezza.** Se la crisi fosse di materiale, basterebbe  $A_{\min} = 19990/216 = 92,5 \text{ mm}^2$ , cioè  $D_e = 15,2 \text{ mm}$ . Ma con quel diametro il raggio giratore vale  $i = 4,64 \text{ mm}$  e la snellezza

$$\lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{488}{4,64} = 105 \gg \lambda_0 = 47,2 : \quad (\text{D.13})$$

l'asta è ampiamente nel campo euleriano — collasserebbe per instabilità molto prima di snervare. **Il dimensionamento va rifatto da Eulero**, e questa piccola falsa partenza è essa stessa un contenuto: la stima di resistenza serve proprio a scoprire, tramite  $\lambda$ , quale fisica comanda.

**Il dimensionamento da carico critico.** Imponendo  $P_{cr} \geq FS \cdot F_{AD} = 1,5 \cdot 19990 = 29.985 \text{ N}$ :

$$I_{\min} = \frac{P_{cr} l_0^2}{\pi^2 E} = \frac{29985 \cdot 488^2}{\pi^2 \cdot 73100} = 9.894 \text{ mm}^4 \implies D_e \geq \left( \frac{64 I_{\min}}{\pi (1 - k^4)} \right)^{1/4} = 22,7 \text{ mm}, \quad (\text{D.14})$$

che si arrotonda al tubo commerciale  $D_e = 24 \text{ mm}$ ,  $d_i = 17 \text{ mm}$  ( $t = 3,5 \text{ mm}$ ).

### La verifica completa del tubo adottato.

$$A = 225,4 \text{ mm}^2, \quad I = 12.186 \text{ mm}^4, \quad i = 7,35 \text{ mm}, \quad \lambda = \frac{488}{7,35} = 66,4 > \lambda_0 \quad (\text{D.15})$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 73100 \cdot 12186}{488^2} = 36,9 \text{ kN} \implies FS_{\text{eff}} = \frac{36925}{19990} = 1,85 \geq 1,5 \quad (\text{D.16})$$

$$\sigma = \frac{19990}{225,4} = 88,7 \text{ N/mm}^2 \ll 216 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{D.17})$$

Tre verifiche in fila: Eulero è ancora legittimo ( $\lambda > \lambda_0$ ), il margine sul carico critico supera il richiesto, e la tensione diretta è lontanissima dall'ammissibile — conferma che a comandare è la forma, non il materiale.

### Passo 8b — L'asta CE: tesa, quindi solo resistenza

A trazione l'instabilità non esiste (Capitolo 4): comanda la sola resistenza, e si usa  $\sigma_R$  perché per l'elemento teso la crisi significativa è la rottura:

$$A_{\min} = \frac{F_{CE}}{\sigma_{am}^t} = \frac{2430}{312,7} = 7,8 \text{ mm}^2. \quad (\text{D.18})$$

Un'area così piccola non è costruibile né collegabile: si adotta il **minimo costruttivo** per tubi strutturali,  $D_e = 12 \text{ mm}$ ,  $d_i = 10 \text{ mm}$  ( $t = 1 \text{ mm}$ ,  $A = 34,6 \text{ mm}^2$ ), con verifica

$$\sigma = \frac{2430}{34,6} = 70,4 \text{ N/mm}^2 \ll 312,7 \text{ N/mm}^2 \quad (FS_{\text{eff}} = 4,4). \quad (\text{D.19})$$

#### Risultato — Il quadro del dimensionamento

Asta AD: tubo  $24 \times 17$  ( $t = 3,5$ ) in Al 2024-T4, dimensionata da **Eulero** ( $\lambda = 66,4$ ,  $FS_{\text{eff}} = 1,85$ ). Asta CE: tubo  $12 \times 10$  ( $t = 1$ ), dimensionata dal **minimo costruttivo** (la resistenza chiederebbe  $7,8 \text{ mm}^2$ ). Le due aste raccontano, insieme, l'intera gerarchia dei criteri di questo corso: *compressione* → *prima la snellezza, poi tutto il resto*; *trazione* → *resistenza, ma con il buon senso della fabbricabilità*. E si noti la sproporzione dei tubi —  $24 \times 17$  contro  $12 \times 10$  — che rende visibile, nel metallo, l'asimmetria delle forze trovata al Passo 6.

#### La lezione del tema 2019

Questo tema è un riassunto del corso travestito da esercizio. La corsa di decollo usa la dinamica e l'assetto ottimo di rullaggio; il ruotino usa le equazioni cardinali con la scelta furba del polo e il riconoscimento delle bielle — e insegna a *leggere i segni*, perché l'asta assunta compressa che risulta negativa sta semplicemente tirando; il dimensionamento chiude con la gerarchia dei criteri: la stima di resistenza che smaschera la snellezza, Eulero che comanda sull'asta compressa, il minimo costruttivo che comanda su quella tesa. Chi arriva in fondo a questa appendice avendo capito *perché* AD porta 20 kN con un carico di 13,2 — la leva corta che chiede forza grande — ha capito la statica delle strutture più di quanto insegnino dieci formule a memoria.



## Appendice E

### Uno sguardo d'insieme

#### Bussola concettuale

**Studiamo questo perché.** alla fine di un percorso conviene salire di quota e guardare il terreno percorso dall'alto: i singoli capitoli hanno affrontato una sollecitazione per volta, ma la struttura reale — un'ala, una fusoliera, un carrello — le sente tutte insieme. Questo capitolo non aggiunge formule: raccoglie i *fili conduttori* che, senza clamore, hanno attraversato ogni pagina, e li consegna come chiave di lettura unitaria.

**Da dove veniamo.** da tutto il volume: la trave e le sue caratteristiche, le tensioni e lo schema di verifica, le quattro sollecitazioni elementari, i materiali, le strutture a semiguscio, l'inviluppo di volo e le esercitazioni.

**Dove andiamo.** verso le appendici, dove questi principi si vedono *all'opera* nei temi d'esame svolti passo passo; e, oltre il libro, verso lo studio delle strutture aeronautiche vere e proprie.

**Al termine saprai.** riconoscere in un problema nuovo i tre principi ricorrenti delle costruzioni aeronautiche, e usarli come mappa per orientarti anche là dove la formula esatta non la ricordi.

#### E.1 Tre principi, un'unica disciplina

Se dovessimo comprimere l'intero volume in tre frasi da portare con sé all'esame — e nella professione — sarebbero queste. Non sono regole mnemoniche: sono il modo in cui un progettista *guarda* una struttura.

##### E.1.1 Primo principio: dal globale al locale

Ogni verifica strutturale è un ponte a senso unico, percorso sempre nella stessa direzione. Si parte dalle **grandezze globali** di sezione — le caratteristiche della sollecitazione  $N$ ,  $T$ ,  $M_t$ ,  $M_f$ , che l'equilibrio ricava dai carichi esterni — e si arriva alle **grandezze locali** — le tensioni  $\sigma$  e  $\tau$ , che decidono se il materiale, punto per punto, regge o cede. Le quattro formule cardine del corso non sono altro che le quattro campate di

questo ponte:

$$N \xrightarrow{\sigma=N/S} \sigma, \quad M_f \xrightarrow{\text{Navier}} \sigma, \quad T \xrightarrow{\text{Jourawsky}} \tau, \quad M_t \xrightarrow{\text{Bredt}} \tau. \quad (\text{E.1})$$

La rottura è un fatto locale; l'equilibrio è un fatto globale. Tutta la scienza delle costruzioni vive nel passaggio, disciplinato e ripetibile, fra i due.

### E.1.2 Secondo principio: il materiale lontano dall'asse

È il filo rosso che lega instabilità, torsione e flessione, e che spiega da solo perché un aeroplano ha l'aspetto che ha. In tutte e tre le sollecitazioni che coinvolgono un momento, ciò che conta non è *quanto* materiale c'è, ma *dove* è collocato rispetto all'asse:

- nella **flessione** e nell'**instabilità**, il momento d'inerzia  $J = \int y^2 dA$  pesa la distanza al *quadrato*: allontanare il materiale dall'asse neutro gonfia  $J$  senza aggiungere un grammo;
- nella **torsione** delle sezioni chiuse, la rigidezza cresce con il *quadrato dell'area racchiusa*  $A^2$ : gonfiare la cella conviene moltissimo.

Da qui discende, in linea diretta, tutta la morfologia delle strutture aeronautiche: il longherone a doppio T che concentra le solette in alto e in basso, il tubo che sostituisce il tondino pieno nelle aste compresse, il cassone alare cavo, la fusoliera a guscio. Non sono scelte estetiche: sono il secondo principio fatto struttura.

#### Analogia pratica – Lo stesso materiale, tre forme, tre destini

Prendete tre volte la *stessa* quantità di alluminio. Distribuitela in un tondino pieno: è mediocre a flessione, mediocre a instabilità, discreto a torsione. Laminatela in un tubo dello stesso peso: diventa eccellente in tutte e tre. Ora tagliate il tubo lungo una generatrice — non avete tolto un grammo — e a torsione crolla di quasi due ordini di grandezza. Il materiale è identico in tutti e tre i casi; a cambiare è solo *dove* lo avete messo e *come* lo avete chiuso. È l'intero corso in un gesto.

### E.1.3 Terzo principio: resistenza e rigidezza, due padroni

Una struttura può fallire in due modi indipendenti, e li abbiamo incontrati entrambi più volte, spesso nella stessa pagina. Può fallire per **resistenza** — una tensione supera l'ammissibile, il materiale snerva o si rompe — oppure per **rigidezza** — si deforma troppo pur restando integra. Non sono la stessa richiesta, e non è detto che comandi la prima:

- il tubo di Bredt che *non snerva* con 1,3 mm ma per *non ruotare troppo* ne chiede 2,4 mm;
- il cassone alare in cui la rotazione d'estremità satura molto prima della tensione;
- l'asta snella che, ben lontana dallo snervamento, *sbanda* per instabilità — il caso limite in cui a cedere non è la resistenza ma la *forma* dell'equilibrio.

### Teoria – Perché in aeronautica la rigidità pesa doppio

In molte strutture civili basta non rompersi. In aeronautica no: la forma è funzione. Un'ala troppo cedevole a torsione cambia incidenza sotto carico, riduce l'efficacia degli alettoni e, al limite, incontra fenomeni aeroelastici — divergenza, rovesciamento dei comandi, flutter — in cui la deformazione elastica e le forze aerodinamiche si alimentano a vicenda fino al collasso. La struttura giusta non è quella che semplicemente non si rompe: è quella che **mantiene la forma che l'aerodinamica le chiede**. Ecco perché, nel dimensionamento aeronautico, la verifica di rigidità non è un di più: spesso è lei a dettare le dimensioni.

## E.2 La mappa del corso

I tre principi non vivono ciascuno in un capitolo: li ritroverete *intrecciati* in ogni problema. La tabella li dispone come una griglia di lettura — una bussola da tenere accanto durante lo studio e, soprattutto, durante un tema d'esame.

| Sollecitazione | Ponte globale → locale                    | Il principio all'opera                 |
|----------------|-------------------------------------------|----------------------------------------|
| Sforzo normale | $\sigma = N/S$                            | tutto il materiale lavora uguale       |
| Flessione      | Navier: $\sigma = M_f y/J$                | materiale lontano dall'asse ( $J$ )    |
| Taglio         | Jourawsky: $\tau = T S^*/(J b)$           | l'anima porta il taglio                |
| Torsione       | Bredt: $\tau = M_t/(2A s)$                | area racchiusa, cella chiusa ( $A^2$ ) |
| Compressione   | Eulero: $\sigma_{cr} = \pi^2 E/\lambda^2$ | cede la forma, non il materiale        |

### Analogia pratica – Come leggere un problema che non avete mai visto

Davanti a un tema nuovo, non cercate subito la formula: cercate i tre principi. *Primo*: quali carichi esterni, quali reazioni, quali caratteristiche in gioco — è il ponte globale → locale, e vi dice *quali* tensioni calcolare. *Secondo*: dov'è il materiale rispetto all'asse — vi dice *quale* sezione conviene e dove la sollecitazione morde di più. *Terzo*: il vincolo è di resistenza o di rigidità — vi dice *quale verifica* comanderà il dimensionamento. Tre domande, in quest'ordine: è la mappa con cui un ingegnere non si perde mai, nemmeno in terreno sconosciuto.

### L'ultima parola

Abbiamo cominciato tagliando idealmente una trave per leggerne le forze interne; chiudiamo con un aeroplano intero davanti agli occhi, capace di riconoscere in ogni suo elemento — longherone, corrente, rivestimento, gamba di carrello — lo stesso pugno di principi al lavoro. Le formule si possono dimenticare e ritrovare su un manuale; i tre principi, no: sono il modo di *pensare* le strutture, e restano quando i numeri sfumano. Un aeroplano, in fondo, non è che materia disposta con intelligenza contro tre avversari — la rottura, la deformazione e l'instabilità. Progettarlo significa vincere, con il minimo peso, tutte e tre le partite contemporaneamente. [buon volo]