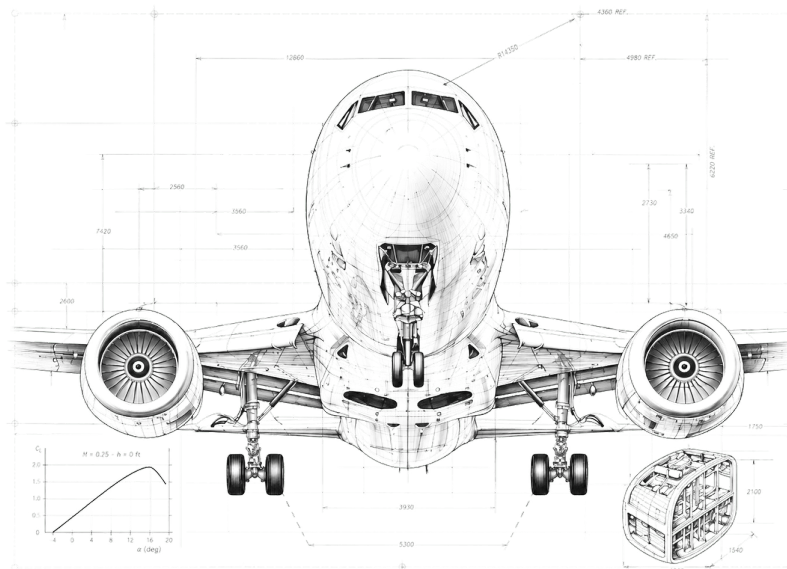


Esercizi di Aerodinamica

Forze aerodinamiche su lastre e paracadute

*Portanza, resistenza, forza risultante,
efficienza e centro di pressione*



Monografia autoconsistente: la teoria essenziale è raccolta in apertura, seguita dallo svolgimento integrale e ragionato di tutti gli esercizi. Le grandezze sono espresse nel Sistema Internazionale e la nomenclatura è quella internazionale (L , D , W). In appendice sono riportati, riletti in notazione moderna, i diagrammi e le tabelle necessari alla soluzione.

B. Raucci

Istituto Tecnico – Indirizzo Trasporti e Logistica

Indice

Come usare questa monografia	3
I Teoria essenziale	4
1.1 La forza aerodinamica e la sua scomposizione	4
1.2 La forza aerodinamica risultante	5
1.3 L'efficienza aerodinamica	6
1.4 Il centro di pressione	7
1.5 Allungamento, freccia e polari delle lastre	9
1.6 Il paracadute: equilibrio alla velocità di regime	10
1.7 Variazione della velocità di regime con la quota	12
1.8 Decelerazione all'apertura del paracadute	12
1.9 Numero di Reynolds e resistenza dei corpi tozzi	13
2 Esercizi svolti	15
2.1 Paracadute: velocità di discesa e coefficiente di resistenza	15
2.2 Rientro di una capsula spaziale	16
2.3 Lastra piana: forza aerodinamica risultante	17
2.4 Lastra piana: le cinque grandezze	18
2.5 Lastra curva: forze, efficienza e centro di pressione	19
3 Esercizi proposti, svolti	20
3.1 Paracadute: superficie della calotta	20
3.2 Capsula spaziale: diametro, decelerazione, legge $V(z)$	20
3.3 Lastra piana: forza aerodinamica	22
3.4 Lastra piana: portanza, resistenza, forza	22
3.5 Lastra piana: cinque grandezze	23
3.6 Lastra piana: dimensioni dal centro di pressione	23
3.7 Lastra curva con freccia $f = 1/13,5$	24
3.8 Lastra curva: velocità incognita	24
4 Sintesi e collegamenti	25
4.1 La catena delle grandezze	25
4.2 Dall'aerodinamica alla struttura	25
A Tabelle e diagrammi	26
A.1 Atmosfera tipo: rapporto di densità	26
A.2 Polari delle lastre ($AR = 6$)	26
A.3 Coefficiente di forza delle lastre piane: $C_F/C_{F,90^\circ}$	27
A.4 Escursione del centro di pressione: lastre piane	29
A.5 Escursione del centro di pressione: lastre curve ($AR = 6$)	29
A.6 Resistenza dei corpi tozzi: numero di Reynolds	29
A.7 Attrito della lastra piana a incidenza nulla	30
A.8 Resistenza dei fusi aerodinamici	31
A.9 Resistenza di ali lisce: effetto dello spessore	31

A.10 Viscosità dei fluidi (SI)	32
--	----

Come usare questa monografia

Questa raccolta è pensata per essere letta *dall'inizio*. La prima parte, *Teoria essenziale*, introduce con ordine tutti gli strumenti concettuali richiesti: la scomposizione della forza aerodinamica in portanza e resistenza, la forza risultante, l'efficienza, il centro di pressione, il ruolo dell'allungamento e le polari delle lastre, infine l'equilibrio del paracadute e la variazione della velocità con la quota. Ogni concetto è presentato in tre tempi: *significato fisico*, *formulazione matematica* e *lettura tecnica* del risultato.

La seconda e la terza parte contengono gli esercizi, svolti tutti passo passo. Non ci si limita a sostituire numeri in una formula: prima di ogni calcolo si esplicita *quale principio fisico* governa il problema e *perché* quella strada porta alla soluzione. È questo il modo in cui un progettista affronta un problema di aeronautica, ed è l'abitudine che la monografia intende costruire.

Lungo il testo si incontrano riquadri di diverso colore, ciascuno con un ruolo preciso: le *definizioni* e le *formule chiave* raccolgono ciò che va memorizzato; le *osservazioni* e le *note* chiariscono un dettaglio o un dubbio ricorrente; gli *approfondimenti* — la novità di questa edizione — si soffermano sul “perché” fisico, con dimostrazioni ed esempi che collegano la matematica al significato concreto; gli *esempi* mostrano un numero in azione. Chi ha fretta può seguire il filo principale saltando gli approfondimenti; chi vuole capire fino in fondo li troverà, si spera, la parte più utile.

Sistema di unità di misura

I testi classici di aerotecnica impiegano il *sistema tecnico*, in cui le forze si misurano in chilogrammi-peso (kg_f) e la densità dell'aria al livello del mare vale $\rho_0 = 0,125 \text{ kg}_f \text{ s}^2/\text{m}^4$. In questa monografia si adotta il **Sistema Internazionale**: le forze in newton (N), le masse in chilogrammi (kg) e

$$\rho_0 = 1,225 \text{ kg}/\text{m}^3, \quad 1 \text{ kg}_f = g \cdot 1 \text{ kg} = 9,81 \text{ N}.$$

La conversione è immediata: il valore tecnico 0,125 moltiplicato per $g = 9,81 \text{ m}/\text{s}^2$ restituisce $1,226 \text{ kg}/\text{m}^3$, cioè la densità dell'atmosfera tipo al livello del mare. I risultati numerici coincidono quindi con quelli dei testi classici a meno degli arrotondamenti; dove utile, il valore in kg_f è riportato tra parentesi per il confronto.

Teoria essenziale

1.1 La forza aerodinamica e la sua scomposizione

Quando un corpo si muove in un fluido (o, in modo del tutto equivalente, quando una corrente investe un corpo fermo), la distribuzione di pressione e degli sforzi tangenziali sulla sua superficie dà luogo a una forza complessiva, la *forza aerodinamica risultante* F .

Portanza e resistenza

Fissata la direzione della velocità asintotica V_0 (velocità della corrente indisturbata, lontano dal corpo), la forza aerodinamica F si scompone in due componenti:

- la **portanza** L , ortogonale a V_0 ;
- la **resistenza** D , parallela e concorde con V_0 .

Il *significato fisico* è immediato: la resistenza è ciò che il corpo “oppone” all’avanzamento e che il propulsore deve vincere; la portanza è la componente utile che, in un velivolo, sostiene il peso.

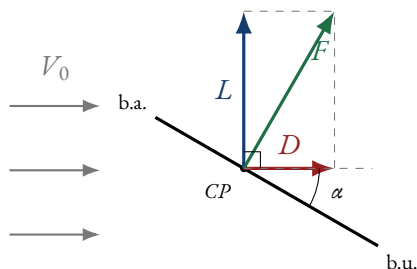


Figura 1.1. Diagramma di corpo libero della lastra: la corrente indisturbata V_0 investe la lastra con incidenza α (b.a. = bordo d’attacco, b.u. = bordo d’uscita). La forza aerodinamica risultante F , applicata nel centro di pressione CP , si scompone nella portanza L (ortogonale a V_0) e nella resistenza D (parallela e concorde con V_0).

Assi vento e assi corpo: rispetto a che cosa si misurano L e D ?

Un dubbio frequente riguarda il *riferimento* rispetto al quale si scompone la forza. La scelta non è arbitraria: portanza e resistenza si definiscono rispetto alla direzione della corrente indisturbata V_0 , non rispetto alla lastra. Si parla per questo di *assi vento*: un asse allineato con V_0 (lungo cui giace D) e uno a esso ortogonale (lungo cui giace L). Se invece proiettassimo la stessa forza F sugli assi solidali al corpo (la corda e la sua normale, *assi corpo*), otterremmo due componenti diverse — la forza normale e la forza assiale — legate a L e D da una rotazione dell’angolo d’incidenza α .

Perché si privilegiano gli assi vento? Perché è rispetto al moto che le due componenti hanno un significato *energetico* diretto e distinto: la resistenza è la componente che si oppone all’avanzamento e che il propulsore deve continuamente vincere spendendo potenza; la portanza, ortogonale al moto, non compie lavoro sulla traiettoria orizzontale e ha il ruolo di sostenere il peso. Tenere separati questi due effetti — ciò che “costa” e ciò che “sostiene” — è esattamente ciò che rende la scomposizione utile al progettista.

La *formulazione matematica* nasce dall'analisi dimensionale. Le forze aerodinamiche sono proporzionali alla pressione dinamica della corrente,

$$q = \frac{1}{2}\rho V_0^2,$$

alla superficie di riferimento S e a un coefficiente adimensionale che racchiude la forma del corpo e l'assetto:

Portanza e resistenza

$$L = \frac{1}{2}\rho S V_0^2 C_L, \quad D = \frac{1}{2}\rho S V_0^2 C_D.$$

C_L e C_D sono i *coefficienti di portanza e di resistenza*; ρ è la densità del fluido, S la superficie di riferimento (per un'ala o una lastra, la superficie in pianta), V_0 la velocità della corrente indisturbata.

Da dove viene $\frac{1}{2}\rho V^2$ e perché le forze crescono col quadrato della velocità

Il fattore $q = \frac{1}{2}\rho V^2$ non è una convenzione arbitraria: è l'*energia cinetica per unità di volume* della corrente. Una particella di fluido di massa m e velocità V possiede energia cinetica $\frac{1}{2}mV^2$; riferendola al volume ($\rho = m/\text{vol}$) si ottiene $\frac{1}{2}\rho V^2$, che ha le dimensioni di una pressione ($\text{kg/m}^3 \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = \text{Pa}$). Per un fluido *incomprimibile* il teorema di Bernoulli lega proprio la pressione dinamica alla variazione di pressione statica lungo una linea di corrente: è la "riserva" di pressione che il rallentamento della corrente sul corpo trasforma in spinta sulle superfici.

Ne discende una conseguenza pratica di enorme importanza strutturale: poiché L e D contengono V^2 , **raddoppiare la velocità quadruplica le forze aerodinamiche**. Una raffica che porti la velocità da V a $1,3 V$ non aumenta il carico del 30% ma di circa il 69% (essendo $1,3^2 \simeq 1,69$). È la ragione per cui le velocità limite di un velivolo — e i carichi di progetto della struttura — si definiscono con margini ampi: un piccolo errore sulla velocità si amplifica al quadrato sul carico.

Osservazione

I coefficienti C_L e C_D non sono costanti del corpo: dipendono dall'assetto (angolo d'incidenza α), dalla forma e, attraverso il numero di Reynolds, dallo stato del fluido. Per questo, nella pratica, si leggono da *diagrammi sperimentali* (le polari e le curve $C_D = C_D(\text{Re})$), riprodotti in appendice.

Notazione: minuscole e maiuscole

Si usano le lettere *minuscole* (c_l , c_d) per i coefficienti di un profilo bidimensionale (ala di allungamento infinito) e le *maiuscole* (C_L , C_D) per un corpo finito tridimensionale. Le lastre di questa monografia hanno allungamento finito ($AR = 6$): si adotta perciò la notazione maiuscola.

1.2 La forza aerodinamica risultante

Poiché L e D sono ortogonali, la forza risultante F è l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha per cateti L e D :

Modulo della forza aerodinamica

$$F^2 = L^2 + D^2 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{2}\rho S V_0^2 C_F, \quad C_F = \sqrt{C_L^2 + C_D^2}.$$

Osservazione

La relazione $C_F = \sqrt{C_L^2 + C_D^2}$ si ottiene dividendo $F^2 = L^2 + D^2$ per $(\frac{1}{2}\rho S V_0^2)^2$: i tre coefficienti formano lo stesso triangolo rettangolo delle tre forze. Ciò consente di calcolare F conoscendo solo i coefficienti, senza ripetere il calcolo di qS .

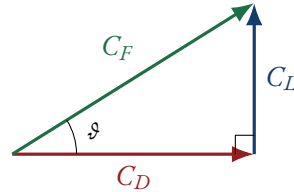


Figura 1.2. Il triangolo rettangolo dei coefficienti: portati in coda l'uno all'altro C_D e C_L , l'ipotenusa è $C_F = \sqrt{C_L^2 + C_D^2}$. La pendenza φ della risultante misura l'efficienza, $\tan \varphi = C_L/C_D = E$.

Perché si lavora con i coefficienti e non direttamente con le forze

I coefficienti C_L , C_D , C_F hanno un pregio che va oltre la comodità di calcolo: sono *adimensionali* e, per corpi geometricamente simili, *non dipendono dalla taglia né dalla velocità* (entro i limiti fissati dai numeri di Reynolds e di Mach). Questo è il principio su cui si fonda la prova in galleria del vento: si misura il coefficiente su un modello in scala e lo si trasferisce al vero, perché è lo stesso numero.

In altre parole, la forza dipende da tante grandezze (ρ , V , S , forma, assetto), ma tutta l'informazione sulla *forma e sull'assetto* è condensata in un unico numero puro; le altre grandezze compaiono solo nel fattore dimensionale $\frac{1}{2}\rho S V^2$. Separare i due contributi — il “quanto” fisico ($\frac{1}{2}\rho S V^2$) dal “come” geometrico (C_L , C_D) — è ciò che permette di leggere da un unico diagramma, la polare, il comportamento di una lastra a qualunque velocità e dimensione.

1.3 L'efficienza aerodinamica**Efficienza**

Si dice *efficienza aerodinamica* il rapporto tra portanza e resistenza:

$$E = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D}.$$

L'uguaglianza $E = C_L/C_D$ discende dal fatto che L e D condividono lo stesso fattore $\frac{1}{2}\rho S V_0^2$, che si semplifica. L'efficienza è un numero puro: esprime quanti chilogrammi (o newton) di portanza si ottengono per ogni unità di resistenza. È il parametro che, in un aliante, fissa la distanza percorribile per ogni metro di quota persa.

L'efficienza è il rapporto di planata

Il legame fra efficienza e planata è diretto e vale la pena dimostrarlo. Un velivolo che plana senza motore a velocità costante lungo una traiettoria inclinata di un angolo γ sull'orizzonte è in equilibrio sotto tre forze: peso W , portanza L e resistenza D . Proiettando l'equilibrio lungo la traiettoria e perpendicolarmente a essa si ottiene

$$D = W \sin \gamma, \quad L = W \cos \gamma,$$

e dividendo membro a membro

$$\tan \gamma = \frac{D}{L} = \frac{1}{E}.$$

L'angolo di planata è quindi tanto più piccolo — la planata tanto più distesa — quanto più grande è l'efficienza. Per angoli piccoli $\tan \gamma \simeq \gamma$, e la distanza orizzontale percorsa perdendo una quota h vale

$$L_{\text{oriz}} = \frac{h}{\tan \gamma} = E \cdot h.$$

L'efficienza è il rapporto di planata: quanti metri in avanti per ogni metro perso in verticale.

Quanto vola un aliante

A titolo puramente illustrativo, si consideri un aliante con efficienza $E = 40$ (valore rappresentativo per un buon aliante da prestazione) che si trovi a $h = 1000$ m di quota, in aria calma e senza correnti ascensionali. La distanza percorribile in planata è

$$L_{\text{oriz}} = E \cdot h = 40 \cdot 1000 = 40\,000 \text{ m} = 40 \text{ km},$$

con un angolo di discesa $\gamma = \arctan(1/40) \simeq 1,4^\circ$. Lo stesso ragionamento, applicato a una lastra piana con $E \simeq 2,6$ (come negli esercizi che seguono), darebbe appena 2,6 km per ogni chilometro di quota: la differenza abissale fra una lastra e un'ala efficiente sta tutta in questo numero.

1.4 Il centro di pressione

Centro di pressione

Il *centro di pressione* (CP) è il punto della corda rispetto al quale il momento della forza aerodinamica è nullo: è cioè il punto di applicazione della risultante F . La sua posizione si misura come ascissa x_{CP} a partire dal bordo d'attacco.

Nella pratica si legge dai diagrammi il rapporto adimensionale x_{CP}/c (con c corda), che dipende dall'incidenza α , dall'allungamento e dalla curvatura della lastra; l'ascissa dimensionale è poi

$$x_{CP} = \frac{x_{CP}}{c} \cdot c.$$

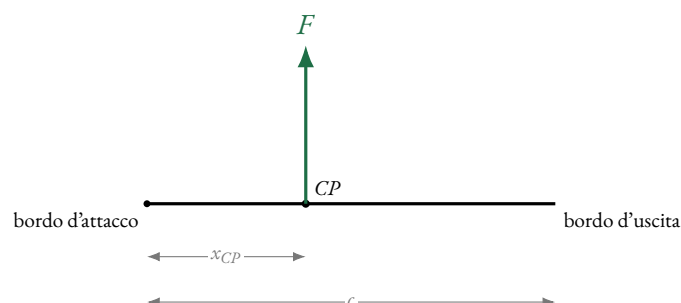


Figura 1.3. Il centro di pressione CP è il punto della corda in cui si applica la risultante F : rispetto ad esso il momento aerodinamico è nullo. La sua posizione si misura come ascissa x_{CP} dal bordo d'attacco, in frazione della corda c .

Osservazione

Al crescere dell'incidenza il centro di pressione di una lastra migra verso il centro della corda ($x_{CP}/c \rightarrow 0,5$ per $\alpha \rightarrow 90^\circ$): è un'informazione essenziale per il progetto strutturale, perché individua dove la risultante aerodinamica “preme” e quindi come si distribuiscono gli sforzi.

Centro di pressione e centro aerodinamico: due punti da non confondere

Il centro di pressione è il punto in cui la risultante è *effettivamente* applicata, e come si è visto *si sposta* al variare dell'incidenza: a piccoli angoli è molto arretrato, e avanza verso il centro della corda al crescere di α . Questo spostamento rende il *CP* un punto scomodo per scrivere le equazioni di equilibrio, perché la sua posizione cambia da una condizione di volo all'altra.

Per questo, accanto al *CP*, l'aerodinamica introduce il *centro aerodinamico*: il punto — prossimo al quarto anteriore della corda per i profili sottili — rispetto al quale il *momento* della forza aerodinamica resta praticamente costante al variare dell'incidenza. I due punti descrivono la stessa fisica in modo equivalente: o si immagina la risultante applicata nel *CP* mobile con momento nullo, oppure la si applica nel centro aerodinamico fisso, aggiungendo un momento (quasi) costante. La seconda descrizione è quella che si usa nello studio della stabilità e nel dimensionamento strutturale, proprio perché fa riferimento a un punto fermo.

Perché al progettista di strutture interessa dove “preme” la risultante

La posizione del centro di pressione non è un dettaglio accademico: determina il *momento torcente* che sollecita il longherone e il rivestimento dell'ala. Se la risultante è applicata a distanza e dall'asse elastico della struttura (l'asse attorno a cui la sezione tende a ruotare), essa produce un momento di torsione $M_t \simeq F \cdot e$. Poiché il *CP* si sposta con l'incidenza, questo braccio — e con esso la torsione — *cambia* da una manovra all'altra: una struttura ben progettata deve reggere il caso più gravoso.

Il momento cambia perché il CP si sposta

Si riprendano i valori dell'Esercizio 4: una lastra piana con corda $c = 12,5$ cm, portanza $L \simeq 6,71$ N e centro di pressione a $x_{CP} = 4,88$ cm dal bordo d'attacco ($x_{CP}/c = 0,39$ a $\alpha = 20^\circ$). Immaginiamo un longherone posto al 30% della corda, cioè a $x_s = 0,30 \cdot 12,5 = 3,75$ cm. Il braccio della risultante rispetto al longherone è $e = x_{CP} - x_s = 4,88 - 3,75 = 1,13$ cm, e il momento torcente (usando la sola portanza come componente dominante) vale

$$M_t \simeq L \cdot e = 6,71 \cdot 0,0113 \simeq 0,076 \text{ N m.}$$

Se l'incidenza salisse a 30° , il rapporto diventerebbe $x_{CP}/c = 0,41$, il *CP* avanzerebbe a 5,13 cm e il braccio crescerebbe a 1,38 cm: a parità di forza, la torsione aumenterebbe di oltre il 20% per il solo spostamento del punto di applicazione. È esattamente questo il legame fra aerodinamica e struttura che rende il diagramma dell'escursione del *CP* (Appendice A.4) uno strumento di progetto e non una semplice curiosità.

1.5 Allungamento, freccia e polari delle lastre

Allungamento e freccia relativa

Per una lastra rettangolare di apertura b e corda c si definisce *allungamento*

$$AR = \frac{b}{c}$$

(rapporto tra apertura e corda). Per una lastra *curva* si introduce inoltre la *freccia relativa*

$$f = \frac{f_{\text{ass}}}{c},$$

rapporto tra la freccia assoluta f_{ass} (massimo scostamento della lastra dalla corda) e la corda. Una lastra piana ha $f = 0$.

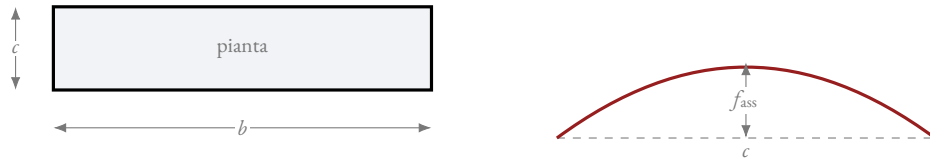


Figura 1.4. Geometria delle lastre. A sinistra, la pianta rettangolare di apertura b e corda c : l'allungamento è $AR = b/c$. A destra, il profilo di una lastra curva: la freccia assoluta f_{ass} è il massimo scostamento dalla corda c , e la freccia relativa è $f = f_{\text{ass}}/c$.

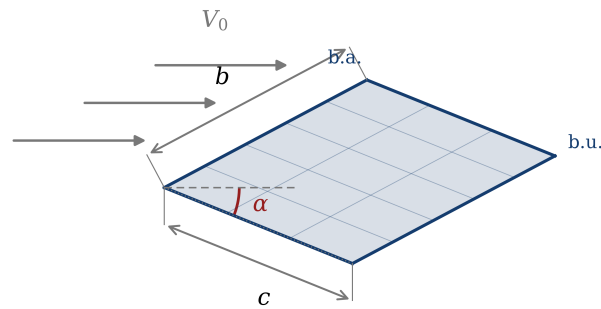


Figura 1.5. Vista prospettica della lastra finita investita dalla corrente V_0 : si riconoscono l'apertura b , la corda c e l'incidenza α misurata fra la corda e la direzione della corrente.

I coefficienti C_L , C_D di una lastra, al variare dell'incidenza, si rappresentano sul piano (C_D, C_L) mediante una curva detta *polare* (Appendice A.2). A ogni allungamento e a ogni freccia relativa corrisponde una polare diversa: fissato $AR = 6$, la famiglia di polari per $f = 0, 1/27, 1/13,5, 1/7$ consente di ricavare, per l'incidenza data, la coppia (C_L, C_D) da cui discendono tutte le altre grandezze.

Come si legge una polare

Sulla polare, ogni punto della curva corrisponde a un'incidenza α (indicata a margine). Lette in ascissa C_D e in ordinata C_L per l' α assegnata, si ottengono immediatamente: la forza risultante ($C_F = \sqrt{C_L^2 + C_D^2}$), l'efficienza ($E = C_L/C_D$, pendenza della congiungente il punto con l'origine) e, tramite il diagramma dell'escursione, il centro di pressione.

Che cosa fa fisicamente l'allungamento: la resistenza indotta

L'allungamento non è un semplice rapporto geometrico: governa una parte importante della resistenza, quella *indotta*. Su un'ala o una lastra di apertura finita, la sovrappressione della faccia inferiore e la depressione di quella superiore comunicano alle estremità, dove il fluido "scavalca" il bordo generando due vortici d'estremità. Questi vortici deviano la corrente verso il basso (*downwash*) e inclinano all'indietro la forza risultante: compare così una componente di resistenza che non esisterebbe su un'ala di apertura infinita.

L'entità di questa resistenza indotta diminuisce al crescere dell'allungamento: un'ala lunga e stretta (grande AR) confina i vortici a una frazione minore dell'apertura e "spreca" meno energia nella scia. È il motivo per cui gli alianti da prestazione — che vivono di efficienza — hanno ali sottilissime e lunghe, mentre un caccia, che privilegia la manovrabilità, ha ali tozze. Le lastre di questa monografia hanno tutte $AR = 6$: un valore moderato, scelto perché le polari sperimentali disponibili si riferiscono a quell'allungamento.

Leggere la polare con gli occhi della geometria

La polare non è solo una tabella di coppie (C_D , C_L): la sua *forma* racconta molto, se si sa guardarla. Poiché l'efficienza è $E = C_L/C_D$, cioè la pendenza della retta che unisce un punto della curva con l'origine, il punto di **massima efficienza** è quello in cui tale retta è *tangente* alla polare: lì il rapporto C_L/C_D è il più grande possibile. Analogamente, il punto più a sinistra della curva è quello di **minima resistenza**, e il punto più in alto quello di **massima portanza** (in prossimità dello stallo, oltre il quale C_L non cresce più). Imparare a individuare questi tre punti su una polare significa saper riconoscere a colpo d'occhio le condizioni di volo notevoli di un profilo, senza fare alcun conto.

1.6 Il paracadute: equilibrio alla velocità di regime

Un corpo che cade nell'atmosfera accelera finché la resistenza aerodinamica non ne bilancia il peso. Raggiunto l'equilibrio, la velocità resta costante: è la *velocità di regime* (o di discesa).

Equilibrio del paracadute

Alla velocità di regime la resistenza eguaglia il peso:

$$W = D = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_D,$$

da cui si ricava, secondo i casi, la velocità di regime, la superficie S o il coefficiente C_D :

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_D}}, \quad S = \frac{2W}{\rho V^2 C_D}, \quad C_D = \frac{2W}{\rho S V^2}.$$

Per un paracadute a calotta assimilata a una semisfera, la superficie della calotta ($A = 2\pi r^2$) e la superficie in pianta ($S = \pi r^2$) sono legate da

$$A = 2S,$$

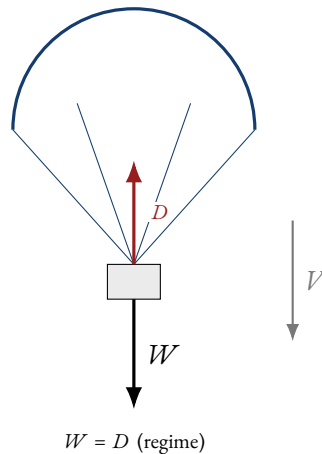


Figura 1.6. Corpo libero del sistema paracadute-carico alla velocità di regime: la resistenza aerodinamica D (diretta verso l'alto) bilancia il peso W ; la velocità di discesa V resta costante.

relazione utile quando il dato di partenza è l'area della calotta e serve la superficie in pianta (che è la superficie di riferimento della resistenza).

Confronto con la caduta libera

La velocità che il corpo raggiungerebbe in *caduta libera* da una quota h , senza resistenza, vale $V_{\text{lib}} = \sqrt{2gh}$. La velocità di regime con il paracadute aperto è, per costruzione, *minore* di V_{lib} : è proprio questo l'effetto frenante del paracadute.

La velocità di regime è una velocità “limite”: come vi si arriva

Vale la pena capire *perché* la velocità di discesa tende a un valore costante. Scrivendo la seconda legge della dinamica per il corpo che cade con il paracadute aperto, con $m = W/g$ e prendendo positivo il verso della discesa,

$$m \frac{dV}{dt} = W - \frac{1}{2} \rho S C_D V^2.$$

Finché V è piccola, la resistenza è trascurabile e il corpo accelera quasi come in caduta libera; ma la resistenza cresce col *quadrato* della velocità, e prima o poi eguaglia il peso. Quando ciò accade, $dV/dt = 0$ e la velocità non cambia più: è la *velocità di regime*

$$V_{\text{reg}} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_D}},$$

esattamente la soluzione dell'equilibrio $W = D$. Si dimostra che la soluzione dell'equazione è $V(t) = V_{\text{reg}} \tanh(t/\tau)$, con un tempo caratteristico τ : la velocità cresce rapidamente e poi si appiattisce sul valore limite, che viene raggiunto in modo *asintotico*. Ecco perché si parla di velocità limite, e perché — a rigore — non viene mai superata.

Perché negli esercizi si pone $V \simeq V_{\text{lib}}$

Alcuni esercizi (come il primo) forniscono l'altezza h di caduta “libera” equivalente invece della velocità di regime. Assumere $V \simeq V_{\text{lib}} = \sqrt{2gh}$ significa prendere il *limite superiore* della velocità di discesa: la velocità vera, con il paracadute già aperto, è leggermente inferiore. È un'approssimazione cautelativa e trasparente, che dà un coefficiente di resistenza (o una superficie) di prima stima; il piccolo scarto rispetto

al valore tabellare è proprio la misura di questa scelta.

1.7 Variazione della velocità di regime con la quota

La condizione di equilibrio $W = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_D$ mostra che, a parità di peso e di paracadute, la velocità di regime dipende dalla densità locale. Introdotto il *rapporto di densità*

$$\delta = \frac{\rho}{\rho_0},$$

(ρ_0 densità al livello del mare) e detta V_0 la velocità di regime al livello del mare, si ha

Legge $V = V(z)$

$$V(z) = \frac{V_0}{\sqrt{\delta(z)}} = V_0 \frac{1}{\sqrt{\delta}}.$$

I valori di $1/\sqrt{\delta}$ in funzione della quota si leggono dalle tabelle dell'atmosfera tipo (Appendice A.1). Poiché δ diminuisce con la quota, la velocità di regime *cresce* salendo: in aria più rarefatta serve una velocità maggiore per generare la stessa resistenza frenante.

Perché l'aria si dirada salendo, e che cos'è la velocità equivalente

La densità dell'aria diminuisce con la quota perché ogni strato deve reggere il peso di tutta l'aria sovrastante: salendo, il peso della colonna sopra di noi cala, la pressione scende e con essa la densità. È lo stesso principio della statica dei fluidi, applicato a un fluido comprimibile e alto decine di chilometri. Il rapporto $\delta = \rho/\rho_0$ misura appunto quanto l'aria si è diradata rispetto al livello del mare.

Da qui nasce un concetto molto usato in aeronautica, la *velocità equivalente*. Poiché ciò che conta per le forze aerodinamiche è la pressione dinamica $q = \frac{1}{2}\rho V^2$, due voli a quote diverse ma con lo stesso q sono aerodinamicamente identici: stesse forze, stesso comportamento. La velocità equivalente è la velocità che, al livello del mare, darebbe la stessa pressione dinamica del volo reale in quota; vale $V_{eq} = V\sqrt{\delta}$. La relazione $V(z) = V_0/\sqrt{\delta}$ vista per il paracadute è la stessa idea letta al contrario: per mantenere la stessa pressione dinamica frenante (e quindi lo stesso equilibrio con il peso), man mano che l'aria si dirada la velocità *vera* deve crescere. È il motivo per cui gli aerei di linea, in alta quota, volano a velocità vere elevatissime pur “sentendo” una pressione dinamica moderata.

1.8 Decelerazione all'apertura del paracadute

All'istante dell'apertura, la velocità è ancora quella precedente (elevata) mentre la superficie resistente diventa improvvisamente grande: la resistenza supera di molto il peso e il corpo subisce una forte decelerazione. Dalla seconda legge della dinamica, con $m = W/g$,

$$m a = D - W \quad \Rightarrow \quad a = \frac{D - W}{m} = \frac{D - W}{W/g} = g \left(\frac{D}{W} - 1 \right).$$

Decelerazione massima

$$a_{\max} = g \left(\frac{D}{W} - 1 \right), \quad D = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_D \text{ calcolata all'apertura.}$$

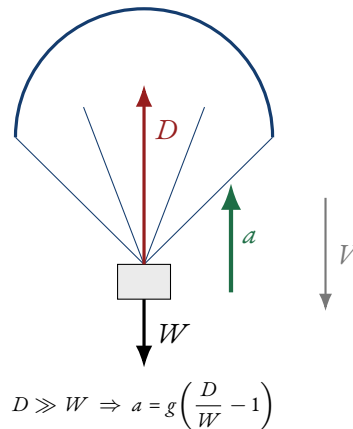


Figura 1.7. All'apertura del paracadute la resistenza D supera di molto il peso W : la risultante è diretta verso l'alto e produce una forte decelerazione a , opposta al moto di discesa (la velocità V diminuisce rapidamente).

La decelerazione è massima nell'istante dell'apertura, quando V è massima; espressa in “ g ”, misura quante volte l'accelerazione di gravità agisce sul carico.

Il “colpo d'apertura” e perché si aprono i paracadute a stadi

L'apertura è l'istante più critico dell'intera discesa. Prima dell'apertura la velocità è massima; nell'istante in cui la calotta si dispiega, la superficie resistente diventa di colpo grande e la resistenza, che va come V^2 , esplode a valori enormi. Il picco di decelerazione — il *colpo d'apertura* — può raggiungere svariate decine di g , come mostrano gli esercizi. Su un paracadutista quel carico si scarica sull'imbracatura e sul corpo; su una capsula, sugli attacchi strutturali delle funi.

Da qui due accorgimenti di progetto. Primo: si apre il paracadute a stadi. Un piccolo paracadute *pilota* riduce dapprima la velocità, e solo quando questa è già calata si dispiega il principale: così il picco di V^2 — e quindi di decelerazione — viene abbattuto. Secondo: molte calotte sono progettate per aprirsi in modo graduale (*reefing*), dispiegandosi solo parzialmente all'inizio per poi allargarsi. L'obiettivo è sempre lo stesso: distribuire nel tempo la frenata, contenendo il picco di carico entro i limiti che l'uomo e la struttura possono sopportare. Il calcolo della decelerazione massima non è dunque un esercizio astratto: è ciò che dimensiona gli attacchi e decide se un rientro è sopportabile.

1.9 Numero di Reynolds e resistenza dei corpi tozzi

Il coefficiente di resistenza di sfere, cilindri e lastre non è costante: dipende dal *numero di Reynolds*

$$\text{Re} = \frac{\rho V \ell}{\mu} = \frac{V \ell}{\nu},$$

dove ℓ è una lunghezza caratteristica, μ la viscosità dinamica e $\nu = \mu/\rho$ la viscosità cinematica. A Re molto bassi vale la legge di Stokes per la sfera, $C_D = 24/\text{Re}$; ad alti Re si osserva la *crisi di resistenza* (brusco calo di C_D) legata alla transizione dello strato limite. Le curve $C_D = C_D(\text{Re})$ per sfera, cilindro e lastra piana sono riportate in Appendice A.6.

Che cosa “pesa” nel numero di Reynolds

Il numero di Reynolds è il rapporto fra due effetti che si contendono il moto del fluido: le *forze d'inerzia*, che tendono a far proseguire il fluido per la sua strada, e le *forze viscose*, che tendono a frenarlo per attrito interno. Scrivendolo come $\text{Re} = \rho V \ell / \mu$ si legge proprio questo: al numeratore la “spinta” inerziale (ρV), al denominatore la “resistenza” viscosa (μ/ℓ). Quando Re è piccolo dominano gli effetti viscosi e il moto

è ordinato (*laminare*); quando è grande dominano gli effetti d'inerzia e il moto tende a diventare disordinato (*turbolento*). Ecco perché lo stesso corpo, se troppo piccolo o troppo lento, “sente” il fluido come denso e viscoso, e se grande e veloce lo sente come sottile e inerziale: il comportamento non dipende dalla taglia o dalla velocità prese da sole, ma dalla loro combinazione in Re .

Lo strato limite, la separazione e la “crisi di resistenza”

Su ogni corpo immerso in una corrente si forma, a contatto con la parete, un sottile velo di fluido rallentato dall'attrito: lo *strato limite*. È lì che si gioca la resistenza dei corpi tozzi. Se lo strato limite si *stacca* dalla superficie prima di averla percorsa tutta (*separazione*), dietro il corpo si forma una larga scia turbolenta a bassa pressione che “risucchia” il corpo all'indietro: è la resistenza di forma, dominante per sfere e cilindri.

Il fatto sorprendente è che uno strato limite *turbolento*, pur avendo più attrito, aderisce meglio alla parete e ritarda la separazione, restringendo la scia. Ecco perché, intorno a $Re \approx 3 \times 10^5$, quando lo strato limite transisce spontaneamente alla turbolenza, il coefficiente di resistenza di una sfera *crolla* invece di crescere: è la *crisi di resistenza*. Lo stesso principio spiega le fossette (*dimples*) di una pallina da golf: rendono lo strato limite turbolento in anticipo, riducendo la scia e permettendo alla pallina di volare molto più lontano di una liscia. Un esempio perfetto di come, in aerodinamica, “più disordine” possa significare “meno resistenza”.

Esercizi svolti

In questo capitolo gli esercizi sono sviluppati per esteso. Per ciascuno si segue sempre lo stesso schema mentale: si *individua il principio fisico* (equilibrio, definizione di un coefficiente, scomposizione della forza), si *scrive la relazione* corrispondente e infine si *sostituiscono i dati* in unità coerenti del Sistema Internazionale.

Una strategia generale per i problemi di aerodinamica

Quasi tutti gli esercizi di questa raccolta si risolvono con lo stesso metodo, che conviene fissare come abitudine.

1. **Che cosa governa il problema?** Si riconosce il principio: un *equilibrio* (paracadute in discesa, planata), la *definizione* di un coefficiente o dell'efficienza, la *scomposizione* della forza, o la seconda legge della dinamica (apertura).
 2. **Quali coefficienti servono?** Si calcolano l'allungamento $AR = b/c$ e la freccia relativa f , e si *leggono* sulla polare i valori C_L , C_D per l'incidenza data.
 3. **Unità coerenti.** Si portano tutti i dati nel Sistema Internazionale: velocità in m/s (dividendo per 3,6 le km/h), forze in newton, superfici in m^2 .
 4. **Un solo fattore comune.** Conviene calcolare una volta per tutte $qS = \frac{1}{2}\rho SV^2$: poi $L = qS C_L$, $D = qS C_D$, $F = qS C_F$ si ottengono con una semplice moltiplicazione.
 5. **Il risultato ha senso?** Si controlla l'ordine di grandezza e la coerenza (ad esempio $E = C_L/C_D$ deve risultare lo stesso rapporto delle forze). Un numero fuori scala è quasi sempre un'unità sbagliata.
- Questi cinque passi sono la "spina dorsale" comune: cambia il dato incognito, ma non il metodo.

2.1 Paracadute: velocità di discesa e coefficiente di resistenza

Esercizio 1

Calcolare la velocità di discesa e il coefficiente di resistenza di un paracadute, sapendo che il peso complessivo (uomo + paracadute) è $W = 140 \text{ kgf}$. La calotta si assimila a una semisfera di superficie $A = 45 \text{ m}^2$; il paracadute scende a una velocità minore di quella di caduta libera da $h = 4 \text{ m}$. Coefficiente di resistenza tabellare $C_D \simeq 1,32$.

Impostazione fisica. Alla velocità di regime il paracadute è in equilibrio: la resistenza aerodinamica bilancia il peso, $W = D = \frac{1}{2}\rho SV^2 C_D$. La velocità di regime è *minore* di quella di caduta libera $V_{\text{lib}} = \sqrt{2gh}$: assumiamo cautelativamente $V \simeq V_{\text{lib}}$ come limite superiore e verifichiamo il coefficiente di resistenza che ne consegue.

Passo 1 — Conversione del peso in SI.

$$W = 140 \text{ kgf} = 140 \cdot 9,81 = 1373,4 \text{ N}.$$

Passo 2 — Velocità di caduta libera.

$$V_{\text{lib}} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 4} = \sqrt{78,48} = 8,86 \text{ m/s}.$$

La velocità di discesa a regime sarà dunque poco inferiore a **8,86 m/s**.

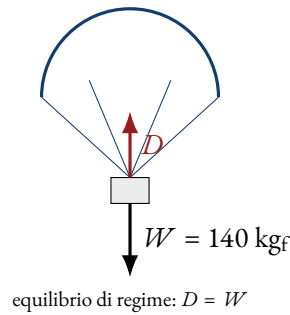


Figura 2.1. Corpo libero dell'Esercizio 1 (cfr. Fig. 1.6).

Passo 3 — Dalla calotta alla superficie in pianta. La calotta è una semisfera, $A = 2\pi r^2$; se ne ricava il raggio

$$r = \sqrt{\frac{A}{2\pi}} = \sqrt{\frac{45}{2\pi}} = \sqrt{7,162} = 2,676 \text{ m.}$$

La superficie di riferimento della resistenza è la superficie in pianta (il disco proiettato):

$$S = \pi r^2 = \pi \cdot 7,162 = 22,50 \text{ m}^2 \quad (= A/2).$$

Passo 4 — Coefficiente di resistenza dall'equilibrio. Dall'equazione $W = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_D$:

$$C_D = \frac{2W}{\rho S V^2} = \frac{2 \cdot 1373,4}{1,225 \cdot 22,50 \cdot 8,86^2} = \frac{2746,8}{2162,9} = 1,27.$$

Lettura del risultato. Il coefficiente calcolato dall'equilibrio, $C_D \simeq 1,27$, è in ottimo accordo con il valore tabellare 1,32 per una calotta semisferica: la piccola differenza deriva dall'aver posto $V = V_{\text{lib}}$ (un limite superiore) invece della velocità di regime effettiva, leggermente più bassa.

2.2 Rientro di una capsula spaziale

Esercizio 2

Una capsula di peso $W = 1000 \text{ kgf}$, rientrando nell'atmosfera, apre il paracadute a 5000 m e raggiunge al suolo una velocità d'impatto $V = 25 \text{ km/h}$. Con $C_D = 1,33$, calcolare: (1) la superficie in pianta del paracadute; (2) la superficie della calotta sferica; (3) la legge $V = f(z)$ della velocità di caduta con la quota; (4) la decelerazione massima, sapendo che a 6000 m si apre un piccolo paracadute ($S = 12 \text{ m}^2$, $C_D = 1,33$) quando la velocità è $V = 750 \text{ km/h}$.

Impostazione fisica. Punti (1) e (2): equilibrio al suolo, $W = \frac{1}{2}\rho_0 S V^2 C_D$. Punto (3): la stessa condizione di equilibrio a quote diverse fornisce $V = V_0/\sqrt{\delta}$. Punto (4): all'apertura la resistenza supera il peso e $a = g(D/W - 1)$.

Passo 1 — Dati in SI.

$$W = 1000 \cdot 9,81 = 9810 \text{ N}, \quad V = 25 \text{ km/h} = \frac{25}{3,6} = 6,944 \text{ m/s.}$$

Passo 2 — Superficie in pianta (equilibrio al suolo).

$$S = \frac{2W}{\rho_0 V^2 C_D} = \frac{2 \cdot 9810}{1,225 \cdot 6,944^2 \cdot 1,33} = \frac{19620}{78,57} = 249,7 \text{ m}^2.$$

Passo 3 — Superficie della calotta. Essendo $A = 2\pi r^2$ e $S = \pi r^2$, si ha $A = 2S$:

$$A = 2 \cdot 249,7 = \mathbf{499,4 \text{ m}^2}.$$

Passo 4 — Legge $V = f(z)$. La velocità di regime al livello del mare è $V_0 = 6,944 \text{ m/s}$ ($= 25 \text{ km/h}$). A quota z , essendo $\rho = \rho_0 \delta$, l'equilibrio dà

$$V(z) = \frac{V_0}{\sqrt{\delta(z)}} = V_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta}},$$

con $1/\sqrt{\delta}$ letto dall'atmosfera tipo (Appendice A.1). La Tabella 2.1 riporta $V(z)$ in m/s (in aria più rarefatta, salendo, la velocità di regime cresce).

Tabella 2.1. Velocità di regime della capsula in funzione della quota, $V(z) = V_0/\sqrt{\delta}$ con $V_0 = 6,944 \text{ m/s}$.

$z \text{ [m]}$	$V \text{ [m/s]}$	$z \text{ [m]}$	$V \text{ [m/s]}$
0	6,94	3000	8,06
500	7,11	3500	8,25
1000	7,29	4000	8,49
1500	7,47	4500	8,70
2000	7,66	5000	8,96
2500	7,86		

Passo 5 — Decelerazione massima all'apertura ($z = 6000 \text{ m}$). Alla quota di 6000 m la densità vale $\rho_{6000} = 0,660 \text{ kg/m}^3$ (atmosfera tipo). La velocità all'apertura è

$$V = 750 \text{ km/h} = 208,3 \text{ m/s}.$$

La resistenza del piccolo paracadute:

$$D = \frac{1}{2} \rho_{6000} S V^2 C_D = \frac{1}{2} \cdot 0,660 \cdot 12 \cdot 208,3^2 \cdot 1,33 = 2,29 \times 10^5 \text{ N}.$$

Poiché $D \gg W$, la decelerazione è

$$a_{\max} = g \left(\frac{D}{W} - 1 \right) = 9,81 \left(\frac{2,29 \times 10^5}{9810} - 1 \right) = 9,81 \cdot 22,3 = 218,8 \text{ m/s}^2 \simeq \mathbf{22,3 g}.$$

Lettura del risultato. Il carico subisce una decelerazione di circa 22 volte l'accelerazione di gravità: è il picco che dimensiona la resistenza strutturale degli attacchi del paracadute e giustifica l'adozione di un piccolo paracadute pilota che riduce gradualmente la velocità prima dell'apertura del principale.

2.3 Lastra piana: forza aerodinamica risultante

Esercizio 3

Una lastra piana rettangolare di lati $b = 96 \text{ cm}$ e $c = 16 \text{ cm}$ è investita da una corrente d'aria di velocità $V = 42 \text{ km/h}$, densità $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$, a incidenza $\alpha = 20^\circ$. Determinare la forza aerodinamica F .

Impostazione fisica. La lastra è piana, quindi freccia relativa $f = 0$; il suo allungamento è $AR = b/c$. Dalla polare per $f = 0$, $AR = 6$ e $\alpha = 20^\circ$ si leggono C_L e C_D ; la forza risultante segue da $C_F = \sqrt{C_L^2 + C_D^2}$.

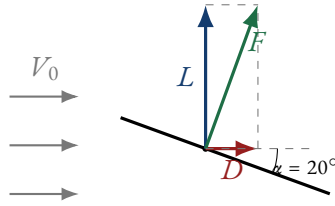


Figura 2.2. Corpo libero dell'Esercizio 3 (cfr. Fig. 1.1): lastra piana a $\alpha = 20^\circ$.

Passo 1 — Allungamento e coefficienti.

$$AR = \frac{b}{c} = \frac{96}{16} = 6.$$

Dalla polare (Appendice A.2), per $f = 0$, $AR = 6$, $\alpha = 20^\circ$:

$$C_L = 0,78, \quad C_D = 0,30.$$

Passo 2 — Coefficiente di forza risultante.

$$C_F = \sqrt{C_L^2 + C_D^2} = \sqrt{0,78^2 + 0,30^2} = \sqrt{0,698} = 0,836.$$

Passo 3 — Superficie e velocità in SI.

$$S = bc = 0,96 \cdot 0,16 = 0,1536 \text{ m}^2, \quad V = \frac{42}{3,6} = 11,67 \text{ m/s}.$$

Passo 4 — Forza aerodinamica.

$$F = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_F = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 0,1536 \cdot 11,67^2 \cdot 0,836 = \mathbf{10,7 \text{ N}} \quad (\simeq 1,09 \text{ kgf}).$$

2.4 Lastra piana: le cinque grandezze

Esercizio 4

Una lastra piana di lati $b = 75 \text{ cm}$ e $c = 12,5 \text{ cm}$ è investita a $\alpha = 20^\circ$ da un vento di $V = 45 \text{ km/h}$; densità $\rho = 1,168 \text{ kg/m}^3$ (corrispondente a 0,11903 in unità tecniche). Calcolare portanza, resistenza, forza aerodinamica, efficienza e centro di pressione.

Impostazione fisica. Si tratta di applicare, nell'ordine, le definizioni: L e D dai coefficienti letti sulla polare; F dalla risultante; $E = C_L/C_D$; il centro di pressione dal diagramma dell'escursione.

Passo 1 — Allungamento, coefficienti, superficie.

$$AR = \frac{75}{12,5} = 6, \quad S = 0,75 \cdot 0,125 = 0,09375 \text{ m}^2, \quad V = \frac{45}{3,6} = 12,5 \text{ m/s}.$$

Dalla polare ($f = 0$, $AR = 6$, $\alpha = 20^\circ$): $C_L = 0,785$, $C_D = 0,305$.

Passo 2 — Pressione dinamica per la superficie. Conviene calcolare una volta per tutte il fattore comune $qS = \frac{1}{2} \rho S V^2$:

$$qS = \frac{1}{2} \cdot 1,168 \cdot 0,09375 \cdot 12,5^2 = 8,55 \text{ N}.$$

Passo 3 — Portanza, resistenza e forza.

$$L = qS \cdot C_L = 8,55 \cdot 0,785 = \mathbf{6,71 \text{ N}}, \quad D = qS \cdot C_D = 8,55 \cdot 0,305 = \mathbf{2,61 \text{ N}}.$$

$$C_F = \sqrt{0,785^2 + 0,305^2} = 0,842, \quad F = qS \cdot C_F = 8,55 \cdot 0,842 = \mathbf{7,20 \text{ N}}.$$

Passo 4 — Efficienza.

$$E = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} = \frac{0,785}{0,305} = \mathbf{2,57}.$$

Passo 5 — Centro di pressione. Dal diagramma dell'escursione per lastra piana ($AR = 6$, $\alpha = 20^\circ$, Appendice A.4) si legge $x_{CP}/c = 0,39$; essendo $c = 12,5 \text{ cm}$,

$$x_{CP} = 0,39 \cdot 12,5 = \mathbf{4,88 \text{ cm}}$$

dal bordo d'attacco.

2.5 Lastra curva: forze, efficienza e centro di pressione**Esercizio 5**

Una lastra curva di allungamento $AR = 6$, apertura $b = 96 \text{ cm}$ e freccia relativa $f = 1/7$ è investita da una corrente $V = 40 \text{ km/h}$, $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$, incidenza $\alpha = 25^\circ$. Calcolare portanza, resistenza, efficienza e centro di pressione.

Impostazione fisica. La curvatura ($f = 1/7$) sposta la lettura su un'altra polare. Nota la corda dall'allungamento, si procede come per la lastra piana; qui è comodo ricavare D dall'efficienza, $D = L/E$.

Passo 1 — Corda e superficie.

$$c = \frac{b}{AR} = \frac{96}{6} = 16 \text{ cm}, \quad S = b c = 0,96 \cdot 0,16 = 0,1536 \text{ m}^2.$$

Passo 2 — Coefficienti dalla polare. Dalla polare per lastra curva ($f = 1/7$, $AR = 6$, $\alpha = 25^\circ$):

$$C_L = 1,36, \quad C_D = 0,52.$$

Passo 3 — Portanza.

$$V = \frac{40}{3,6} = 11,11 \text{ m/s}, \quad L = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 0,1536 \cdot 11,11^2 \cdot 1,36 = \mathbf{15,8 \text{ N}}.$$

Passo 4 — Efficienza e resistenza.

$$E = \frac{C_L}{C_D} = \frac{1,36}{0,52} = \mathbf{2,62}, \quad D = \frac{L}{E} = \frac{15,8}{2,62} = \mathbf{6,04 \text{ N}}.$$

Passo 5 — Centro di pressione. Dal diagramma dell'escursione per lastra curva ($f = 1/7$, $AR = 6$, $\alpha = 25^\circ$, Appendice A.5) si legge $x_{CP}/c = 0,46$, da cui

$$x_{CP} = 0,46 \cdot 16 = \mathbf{7,36 \text{ cm}}.$$

Esercizi proposti, svolti

Gli esercizi che seguono sono i “proposti” del capitolo classico, qui risolti integralmente. Valgono le stesse convenzioni della parte precedente. I coefficienti C_L , C_D e i rapporti x_{CP}/c sono *letture* dei diagrammi d’appendice: piccole differenze di lettura sono fisiologiche e non alterano la sostanza del risultato.

3.1 Paracadute: superficie della calotta

Esercizio 6

Calcolare la superficie della calotta semisferica di un paracadute con peso complessivo $W = 130 \text{ kgf}$, $C_D = 1,3$, $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$, velocità di discesa inferiore a quella di caduta libera da $h = 5 \text{ m}$.

Ragionamento. Velocità di regime $\simeq$ velocità di caduta libera; equilibrio $W = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_D$ per la superficie in pianta; poi $A = 2S$.

$$W = 130 \cdot 9,81 = 1275,3 \text{ N}, \quad V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 5} = 9,90 \text{ m/s}.$$

$$S = \frac{2W}{\rho V^2 C_D} = \frac{2 \cdot 1275,3}{1,225 \cdot 9,90^2 \cdot 1,3} = 16,33 \text{ m}^2, \quad A = 2S = 32,7 \text{ m}^2.$$

3.2 Capsula spaziale: diametro, decelerazione, legge $V(z)$

Esercizio 7

Una capsula ($W = 1600 \text{ kgf}$, $C_D = 1,32$) apre un piccolo paracadute (calotta $A = 40 \text{ m}^2$) a $z = 6500 \text{ m}$ e il paracadute principale a $z = 4000 \text{ m}$. La velocità prima dell’apertura del piccolo paracadute è $V = 800 \text{ km/h}$; la velocità d’impatto al suolo è $V = 36 \text{ km/h}$. Calcolare: (1) il diametro del paracadute principale; (2) la decelerazione massima; (3) la legge $V = f(z)$ da 4000 m al suolo.

Passo 1 — Diametro del principale (equilibrio al suolo). Con $V = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$:

$$S = \frac{2W}{\rho_0 V^2 C_D} = \frac{2 \cdot 1600 \cdot 9,81}{1,225 \cdot 10^2 \cdot 1,32} = 194,1 \text{ m}^2 \text{ (in pianta)}.$$

La pianta è un disco, $S = \pi D^2/4$, quindi

$$D = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 194,1}{\pi}} = 15,7 \text{ m}.$$

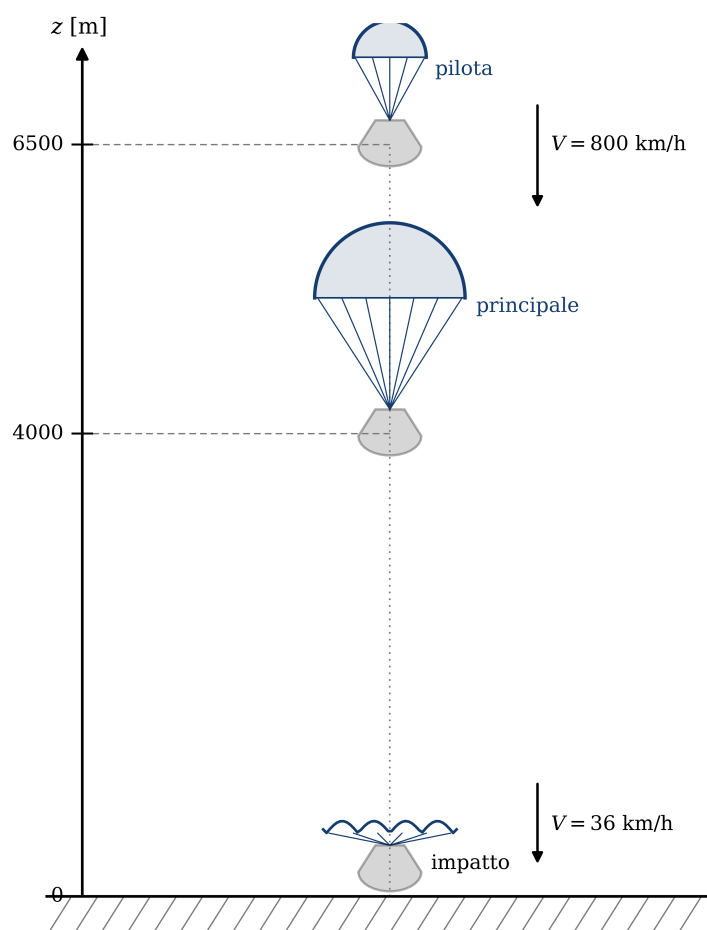


Figura 3.1. Sequenza di rientro: apertura del piccolo paracadute pilota a $z = 6500$ m e del paracadute principale a $z = 4000$ m, fino all'impatto al suolo.

Passo 2 — Decelerazione massima (apertura a 6500 m). La calotta del piccolo paracadute è $A = 40 \text{ m}^2$, cui corrisponde una superficie in pianta $S = A/2 = 20 \text{ m}^2$. Alla quota di 6500 m, $\rho_{6500} = 0,624 \text{ kg/m}^3$; $V = 800 \text{ km/h} = 222,2 \text{ m/s}$:

$$D = \frac{1}{2} \rho_{6500} S V^2 C_D = \frac{1}{2} \cdot 0,624 \cdot 20 \cdot 222,2^2 \cdot 1,32 = 4,07 \times 10^5 \text{ N},$$

$$W = 1600 \cdot 9,81 = 15696 \text{ N}, \quad a_{\max} = g \left(\frac{D}{W} - 1 \right) = 9,81(25,9 - 1) = \mathbf{24,9 \text{ g}}$$

Passo 3 — Legge $V = f(z)$ del principale. Velocità di regime al suolo $V_0 = 10 \text{ m/s}$; $V(z) = V_0/\sqrt{\delta}$ (Tabella 3.1).

Tabella 3.1. Velocità di regime del paracadute principale, $V(z) = V_0/\sqrt{\delta}$ con $V_0 = 10 \text{ m/s}$.

$z \text{ [m]}$	$V \text{ [m/s]}$	$z \text{ [m]}$	$V \text{ [m/s]}$
0	10,00	2400	11,26
400	10,19	2800	11,49
800	10,39	3200	11,73
1200	10,60	3600	11,98
1600	10,81	4000	12,23
2000	11,03		

3.3 Lastra piana: forza aerodinamica

Esercizio 8

Lastra piana $b = 120 \text{ cm}$, $c = 20 \text{ cm}$, $V = 38 \text{ km/h}$, $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$, $\alpha = 10^\circ$. Calcolare la forza aerodinamica F .

Ragionamento. È un caso diretto: nota la geometria si ricavano allungamento e superficie, si leggono C_L e C_D sulla polare per $f = 0$ e si compone la risultante con $C_F = \sqrt{C_L^2 + C_D^2}$; la forza segue da $F = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_F$.

$$AR = \frac{120}{20} = 6, \quad S = 1,20 \cdot 0,20 = 0,24 \text{ m}^2, \quad V = \frac{38}{3,6} = 10,56 \text{ m/s}.$$

Dalla polare ($f = 0$, $AR = 6$, $\alpha = 10^\circ$): $C_L = 0,70$, $C_D = 0,125$, quindi $C_F = \sqrt{0,70^2 + 0,125^2} = 0,711$.

$$F = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_F = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 0,24 \cdot 10,56^2 \cdot 0,711 = \mathbf{11,6 \text{ N}} \quad (\simeq 1,19 \text{ kgf}).$$

3.4 Lastra piana: portanza, resistenza, forza

Esercizio 9

Lastra piana $c = 17 \text{ cm}$, $b = 102 \text{ cm}$, $\alpha = 15^\circ$, $V = 40 \text{ km/h}$, $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$. Calcolare portanza, resistenza e forza aerodinamica.

Ragionamento. Conviene calcolare subito il fattore comune $qS = \frac{1}{2}\rho S V^2$: da esso portanza, resistenza e risultante si ottengono moltiplicando per i rispettivi coefficienti, senza ripetere il conto della pressione dinamica.

$$AR = \frac{102}{17} = 6, \quad S = 1,02 \cdot 0,17 = 0,1734 \text{ m}^2, \quad V = \frac{40}{3,6} = 11,11 \text{ m/s}.$$

Fattore comune $qS = \frac{1}{2}\rho S V^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 0,1734 \cdot 11,11^2 = 13,11 \text{ N}$. Dalla polare ($f = 0$, $AR = 6$, $\alpha = 15^\circ$): $C_L = 0,795$, $C_D = 0,205$, $C_F = \sqrt{0,795^2 + 0,205^2} = 0,821$.

$$L = qS C_L = 13,11 \cdot 0,795 = \mathbf{10,4 \text{ N}}, \quad D = qS C_D = 13,11 \cdot 0,205 = \mathbf{2,69 \text{ N}},$$

$$F = qS C_F = 13,11 \cdot 0,821 = \mathbf{10,8 \text{ N}}.$$

3.5 Lastra piana: cinque grandezze

Esercizio 10

Lastra piana $b = 84 \text{ cm}$, $AR = 6$, $\alpha = 30^\circ$, $V = 50 \text{ km/h}$, $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$. Calcolare portanza, resistenza, efficienza, forza aerodinamica e centro di pressione.

Ragionamento. Qui è assegnato l'allungamento anziché la corda: da AR e b si ricava $c = b/AR$, e da questa la superficie. Poi si procede come di consueto — fattore comune qS , coefficienti dalla polare, efficienza come loro rapporto — e si chiude con il centro di pressione letto sul diagramma dell'escursione.

$$c = \frac{b}{AR} = \frac{84}{6} = 14 \text{ cm}, \quad S = 0,84 \cdot 0,14 = 0,1176 \text{ m}^2, \quad V = \frac{50}{3,6} = 13,89 \text{ m/s}.$$

$qS = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 0,1176 \cdot 13,89^2 = 13,90 \text{ N}$. Dalla polare ($f = 0$, $AR = 6$, $\alpha = 30^\circ$): $C_L = 0,80$, $C_D = 0,475$.

$$L = 13,90 \cdot 0,80 = \mathbf{11,1 \text{ N}}, \quad D = 13,90 \cdot 0,475 = \mathbf{6,60 \text{ N}}, \quad E = \frac{0,80}{0,475} = \mathbf{1,68}.$$

$$C_F = \sqrt{0,80^2 + 0,475^2} = 0,930, \quad F = 13,90 \cdot 0,930 = \mathbf{12,9 \text{ N}}.$$

Centro di pressione ($AR = 6$, $\alpha = 30^\circ$): $x_{CP}/c = 0,41$, dunque $x_{CP} = 0,41 \cdot 14 = \mathbf{5,74 \text{ cm}}$.

3.6 Lastra piana: dimensioni dal centro di pressione

Esercizio 11

Di una lastra piana ($AR = 6$) si sa che il centro di pressione è a $x_{CP} = 7,8 \text{ cm}$ dal bordo d'attacco, a $\alpha = 20^\circ$, con $V = 45 \text{ km/h}$ e $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$. Calcolare portanza, resistenza, efficienza e forza aerodinamica.

Ragionamento. La posizione del CP fornisce indirettamente la corda: dal diagramma, a $\alpha = 20^\circ$ per lastra piana $AR = 6$, $x_{CP}/c = 0,39$, quindi $c = x_{CP}/0,39$.

$$c = \frac{7,8}{0,39} = 20 \text{ cm}, \quad b = AR \cdot c = 6 \cdot 20 = 120 \text{ cm}, \quad S = 1,2 \cdot 0,20 = 0,24 \text{ m}^2.$$

$V = 12,5 \text{ m/s}$; $qS = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 0,24 \cdot 12,5^2 = 22,97 \text{ N}$. Coefficienti ($\alpha = 20^\circ$): $C_L = 0,785$, $C_D = 0,305$.

$$L = 22,97 \cdot 0,785 = \mathbf{18,0 \text{ N}}, \quad D = 22,97 \cdot 0,305 = \mathbf{7,01 \text{ N}}, \quad E = \frac{0,785}{0,305} = \mathbf{2,57},$$

$$C_F = 0,842, \quad F = 22,97 \cdot 0,842 = \mathbf{19,3 \text{ N}}.$$

3.7 Lastra curva con freccia $f = 1/13,5$

Esercizio 12

Lastra curva con freccia relativa $f = 1/13,5$, superficie $S = 1734 \text{ cm}^2$, corda $c = 17 \text{ cm}$, $V = 42 \text{ km/h}$, $\alpha = 20^\circ$, $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$. Calcolare portanza, efficienza, resistenza e centro di pressione.

Ragionamento. La lastra è curva ($f = 1/13,5$): la lettura si sposta sulla polare corrispondente. La superficie è data direttamente, quindi si passa subito al fattore comune qS ; è comodo ricavare la resistenza dall'efficienza, $D = L/E$, anziché rileggere C_D .

$$S = 1734 \text{ cm}^2 = 0,1734 \text{ m}^2, \quad V = \frac{42}{3,6} = 11,67 \text{ m/s},$$

$$qS = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 0,1734 \cdot 11,67^2 = 14,46 \text{ N}.$$

Dalla polare ($f = 1/13,5$, $AR = 6$, $\alpha = 20^\circ$): $C_L = 1,09$, $C_D = 0,39$.

$$L = 14,46 \cdot 1,09 = \mathbf{15,8 \text{ N}}, \quad E = \frac{1,09}{0,39} = \mathbf{2,80}, \quad D = \frac{L}{E} = \frac{15,8}{2,80} = \mathbf{5,65 \text{ N}}.$$

Centro di pressione ($f = 1/13,5$, $AR = 6$, $\alpha = 20^\circ$): $x_{CP}/c = 0,43$, quindi $x_{CP} = 0,43 \cdot 17 = \mathbf{7,31 \text{ cm}}$.

3.8 Lastra curva: velocità incognita

Esercizio 13

Con quale velocità deve essere investita una lastra curva ($b = 84 \text{ cm}$, $c = 14 \text{ cm}$, freccia assoluta $f_{\text{ass}} = 2 \text{ cm}$, $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$) posta a $\alpha = 10^\circ$, affinché la portanza sia $L = 1,45 \text{ kg}_f$?

Ragionamento. Si invertono la freccia relativa e l'allungamento per caratterizzare la polare; letto C_L , si ricava V dalla definizione di portanza.

$$f = \frac{f_{\text{ass}}}{c} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}, \quad AR = \frac{b}{c} = \frac{84}{14} = 6, \quad S = 0,84 \cdot 0,14 = 0,1176 \text{ m}^2.$$

Dalla polare ($f = 1/7$, $AR = 6$, $\alpha = 10^\circ$): $C_L = 1,375$. Con $L = 1,45 \text{ kg}_f = 14,23 \text{ N}$,

$$V = \sqrt{\frac{2L}{\rho S C_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 14,23}{1,225 \cdot 0,1176 \cdot 1,375}} = 11,98 \text{ m/s} = \mathbf{43,1 \text{ km/h}}.$$

Sintesi e collegamenti

Arrivati in fondo agli esercizi, conviene ricomporre il quadro. Tutta la materia trattata ruota attorno a poche idee, saldamente collegate fra loro: vale la pena vederle una accanto all'altra, perché è nei loro legami — più che nelle singole formule — che sta la comprensione.

4.1 La catena delle grandezze

Il filo conduttore è uno solo: dalla *forma e dall'assetto* di un corpo si risale, passo dopo passo, alle *forze* che lo sollecitano. La catena si legge così. La forma e l'incidenza fissano, sulla polare, i due coefficienti C_L e C_D . Da questi discende tutto il resto: la forza risultante attraverso $C_F = \sqrt{C_L^2 + C_D^2}$, l'efficienza attraverso $E = C_L/C_D$, e le forze vere moltiplicando per il fattore dimensionale $\frac{1}{2}\rho SV^2$. Il centro di pressione, letto su un secondo diagramma, dice *dove* quella risultante è applicata, chiudendo il ponte verso il calcolo strutturale.

Le relazioni da tenere sempre presenti

$$L = \frac{1}{2}\rho SV^2 C_L, \quad D = \frac{1}{2}\rho SV^2 C_D, \quad F = \frac{1}{2}\rho SV^2 C_F,$$

$$C_F = \sqrt{C_L^2 + C_D^2}, \quad E = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D}, \quad x_{CP} = \frac{x_{CP}}{c} c.$$

Per il paracadute, l'equilibrio $W = \frac{1}{2}\rho SV^2 C_D$; con la quota, $V(z) = V_0/\sqrt{\delta}$; all'apertura, $a_{\max} = g(D/W - 1)$.

4.2 Dall'aerodinamica alla struttura

Per chi studia le costruzioni aeronautiche, il punto d'arrivo di ogni calcolo aerodinamico è sempre lo stesso: *quali carichi arrivano alla struttura, e dove*. Le due grandezze che fanno da cerniera fra le due discipline sono la forza risultante F e il centro di pressione x_{CP} . La prima dà l'intensità del carico; la seconda, il suo punto di applicazione, da cui dipendono il momento flettente e — attraverso il braccio rispetto all'asse elastico — il momento torcente sulla sezione.

Due fatti visti negli approfondimenti meritano di essere ricordati insieme. Le forze crescono col *quadrato* della velocità: è la velocità, più di ogni altro parametro, a dettare i carichi di progetto. E il centro di pressione *si sposta* con l'incidenza: il caso di carico più gravoso non è necessariamente quello di massima portanza, ma quello in cui la combinazione di intensità e posizione della risultante massimizza le sollecitazioni. Tenere insieme questi due fatti — quanto preme e dove preme — è ciò che trasforma un risultato aerodinamico in un dato di progetto strutturale.

Osservazione

Non è un caso che gli stessi diagrammi usati per calcolare le forze (le polari) e la posizione della risultante (l'escursione del centro di pressione) siano gli strumenti di partenza del dimensionamento. L'aerodinamica fornisce il carico; la scienza delle costruzioni ne studia gli effetti sulla struttura. Gli esercizi di questa monografia stanno esattamente sul confine fra le due, ed è lì che conviene imparare a ragionare.

Tabelle e diagrammi

I diagrammi che seguono sono *ricostruzioni* dei grafici classici, ridisegnati in notazione internazionale: C_L (portanza), C_D (resistenza), C_F (forza risultante), AR (allungamento), Re (numero di Reynolds), f (freccia relativa). Le curve impiegate negli esercizi (polare $AR = 6$ ed escursioni del centro di pressione) passano per i valori numerici effettivamente letti nello svolgimento; le rimanenti famiglie di curve riproducono l'*andamento* dei diagrammi classici con valori rappresentativi, e sono contrassegnate come tali nella didascalia. Per letture quantitative fini si faccia riferimento ai grafici originali del corso.

A.1 Atmosfera tipo: rapporto di densità

La legge $V(z) = V_0/\sqrt{\delta}$ richiede il fattore $1/\sqrt{\delta}$ in funzione della quota. La Tabella A.1 riporta il rapporto di densità $\delta = \rho/\rho_0$ e il fattore $1/\sqrt{\delta}$ dell'atmosfera tipo internazionale (ISA), $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$.

Tabella A.1. Atmosfera tipo: rapporto di densità e fattore $1/\sqrt{\delta}$.

z [m]	δ	$1/\sqrt{\delta}$	z [m]	δ	$1/\sqrt{\delta}$
0	1,000	1,000	3500	0,711	1,186
500	0,953	1,024	4000	0,669	1,223
1000	0,907	1,050	4500	0,629	1,261
1500	0,864	1,076	5000	0,601	1,290
2000	0,822	1,103	5500	0,562	1,334
2500	0,781	1,132	6000	0,538	1,363
3000	0,742	1,161	6500	0,509	1,402

Uso della tabella

A parità di peso e di paracadute, la velocità di regime al livello del mare V_0 si moltiplica per $1/\sqrt{\delta}$ per ottenere la velocità di regime alla quota z . Poiché δ decresce con la quota, la velocità di regime cresce salendo: è la ragione per cui una capsula, in alta quota, scende più rapidamente che in prossimità del suolo.

A.2 Polari delle lastre ($AR = 6$)

La polare rappresenta, sul piano (C_D , C_L), i coefficienti di una lastra al variare dell'incidenza α . Ogni curva corrisponde a una freccia relativa f ; i marcatori indicano alcune incidenze notevoli.

Come leggere la polare

Fissata la freccia relativa (piana: $f = 0$), si individua sulla curva il punto corrispondente all'incidenza α : le sue coordinate sono C_D (ascissa) e C_L (ordinata). Da queste si ottengono $C_F = \sqrt{C_L^2 + C_D^2}$ (forza risultante) ed $E = C_L/C_D$ (efficienza, pari alla pendenza della retta che congiunge il punto con l'origine). La curvatura (f crescente) innalza C_L : una lastra curva "porta" più di una piana a parità di incidenza, ma

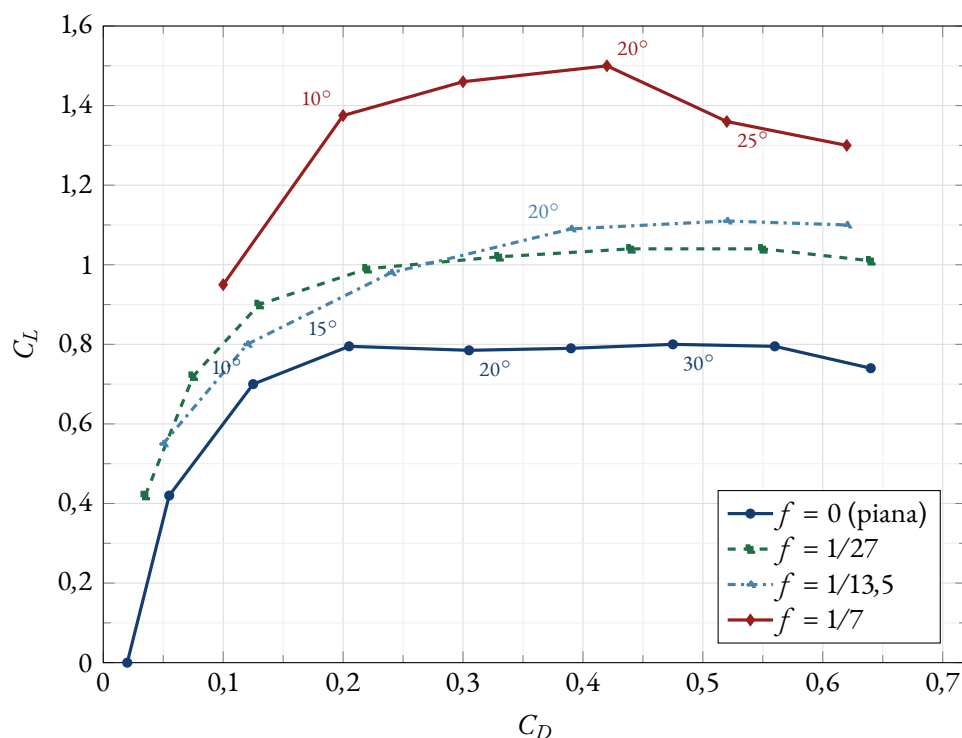


Figura A.1. Polari di lastre di uguale allungamento ($AR = 6$) per diverse frecce relative f . In ascissa il coefficiente di resistenza C_D , in ordinata quello di portanza C_L ; i numeri accanto ai punti sono le incidenze α . Le curve passano per i valori impiegati negli esercizi.

con maggiore resistenza.

A.3 Coefficiente di forza delle lastre piane: $C_F/C_{F,90^\circ}$

Per una lastra piana investita a incidenza α , il coefficiente di forza C_F si può riferire al suo valore a incidenza retta, $C_{F,90^\circ}$ (lastra normale alla corrente). Il rapporto $C_F/C_{F,90^\circ}$, adimensionale e compreso di norma fra 0 e circa 1, mostra come la forza si sviluppa al crescere dell'incidenza per lastre di diverso allungamento.

Lettura tecnica

Le lastre *allungate* (grande AR) sviluppano la forza molto rapidamente alle piccole incidenze: già a $10^\circ - 15^\circ$ superano metà del valore di riferimento, per poi crescere lentamente. Le lastre *tozze* ($AR \leq 1$) hanno crescita quasi lineare e possono presentare un leggero massimo oltre l'unità intorno a $50^\circ - 60^\circ$, prima di assestarsi sul valore a incidenza retta. È un altro modo di vedere l'effetto dell'allungamento: a parità di superficie, la lastra allungata “lavora” meglio alle incidenze di volo, quella tozza solo in prossimità dell'incidenza retta.

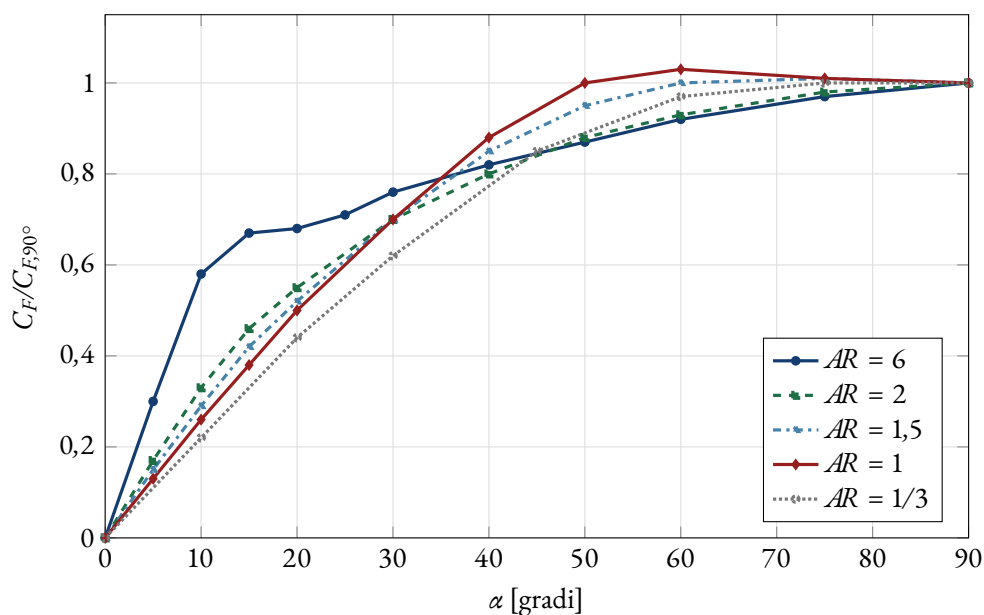


Figura A.2. Variazione del coefficiente di forza aerodinamica, riferito al valore a 90° , per lastre piane di diverso allungamento. La curva $AR = 6$ è ancorata ai valori di C_F della polare (con $C_{F,90^\circ} \simeq 1,23$); le altre curve riproducono l'andamento classico con valori rappresentativi.

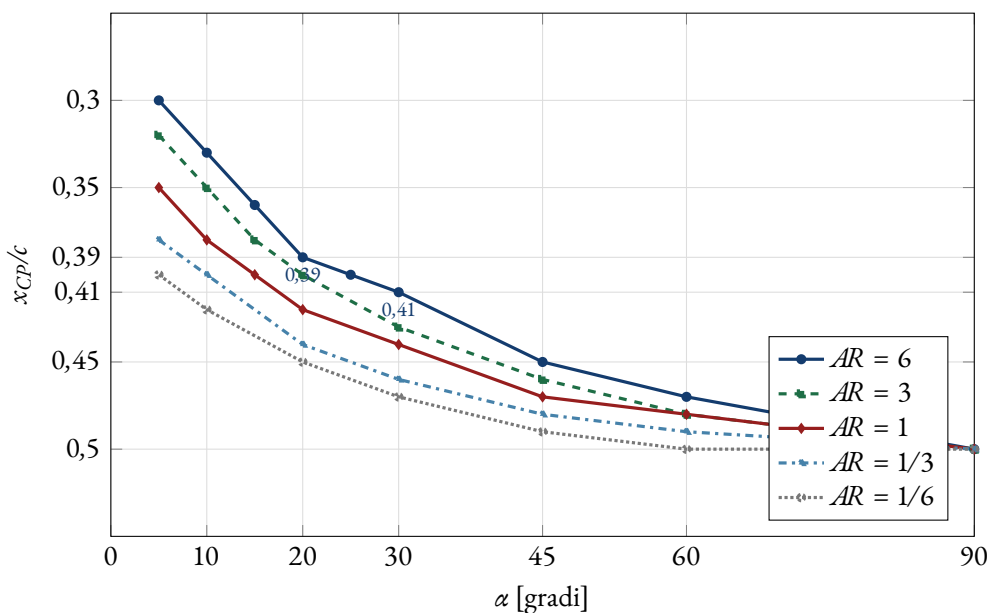


Figura A.3. Escursione del centro di pressione di lastre piane di diverso allungamento, al variare dell'incidenza. L'asse verticale è rovesciato (verso l'alto = CP più avanzato). La curva $AR = 6$ passa per i valori usati negli esercizi; le altre riproducono l'andamento classico con valori rappresentativi.

A.4 Escursione del centro di pressione: lastre piane

Significato tecnico

Per ogni allungamento, al crescere dell'incidenza il centro di pressione arretra verso il centro della corda ($x_{CP}/c \rightarrow 0,5$ per $\alpha \rightarrow 90^\circ$). A parità di incidenza, le lastre più *tozze* hanno il CP più arretrato: l'effetto tridimensionale delle estremità ridistribuisce il carico verso il centro. Per la lastra $AR = 6$ si leggono $x_{CP}/c = 0,39$ a 20° e $0,41$ a 30° : sono i valori usati negli Esercizi 4, 10 e 11. La posizione del CP individua dove la risultante aerodinamica è applicata e come si scaricano gli sforzi sulla struttura.

A.5 Escursione del centro di pressione: lastre curve ($AR = 6$)

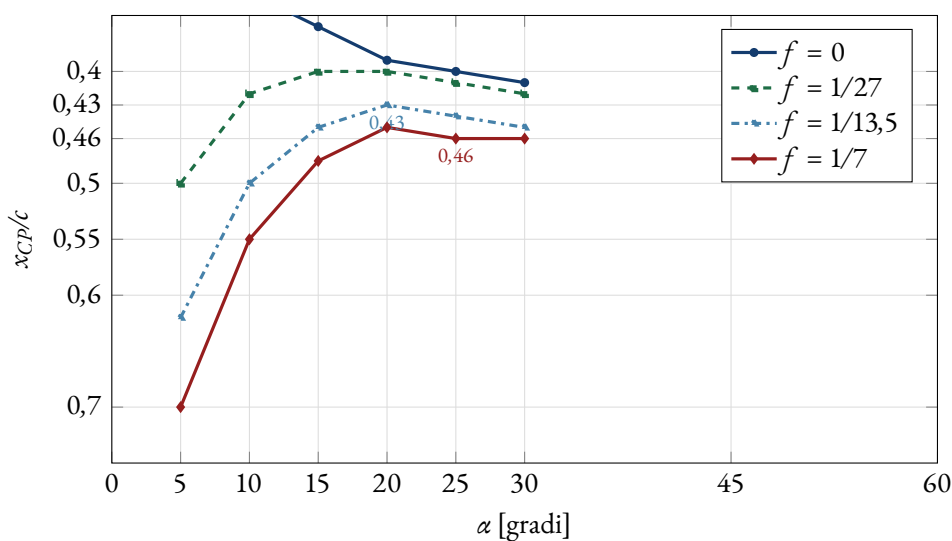


Figura A.4. Escursione del centro di pressione per lastre curve di uguale allungamento ($AR = 6$), al variare dell'incidenza e della freccia relativa. I valori marcati sono quelli letti negli esercizi.

Lastre curve e CP

Per le lastre curve, a piccole incidenze il centro di pressione è molto arretrato (grande x_{CP}/c) e, al crescere di α , avanza rapidamente stabilizzandosi attorno a $0,43$ – $0,46$. I valori $0,43$ ($f = 1/13,5$, 20°) e $0,46$ ($f = 1/7$, 25°) sono impiegati negli Esercizi 5 e 12.

A.6 Resistenza dei corpi tozzi: numero di Reynolds

La “crisi di resistenza”

A Re molto bassi la resistenza è dominata dalla viscosità e segue la legge di Stokes $C_D = 24/Re$. In un ampio intervallo intermedio C_D è quasi costante (sfera $\approx 0,4$ – $0,5$; cilindro ≈ 1). Intorno a $Re \approx 3 \times 10^5$ lo strato limite diventa turbolento, aderisce più a lungo e la scia si restringe: C_D crolla bruscamente (crisi di resistenza). È il fenomeno che, ad esempio, spiega perché una pallina rugosa possa avere meno resistenza di una liscia.

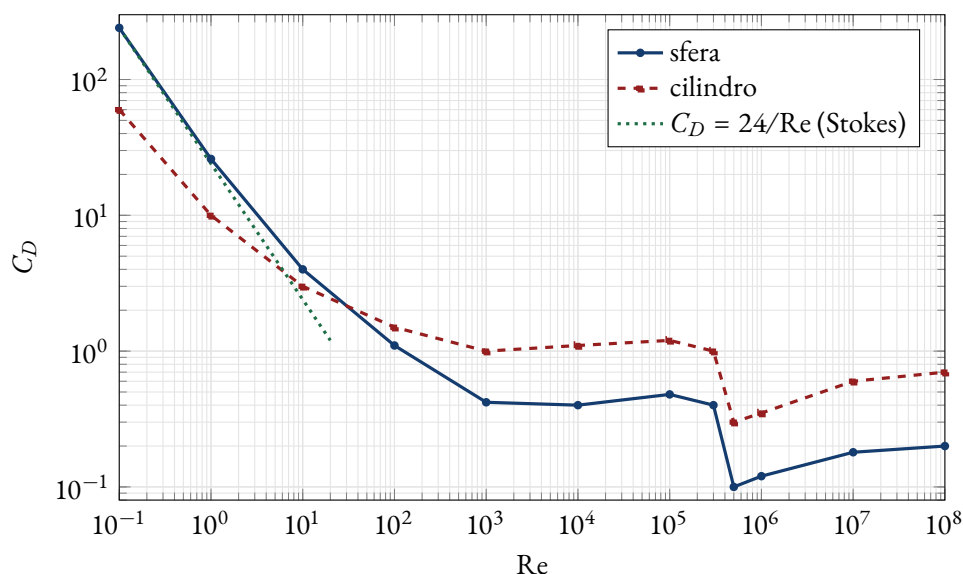


Figura A.5. Coefficiente di resistenza di sfera e cilindro in funzione del numero di Reynolds. La retta $C_D = 24/Re$ è la legge di Stokes (regime viscoso, $Re \ll 1$).

A.7 Attrito della lastra piana a incidenza nulla

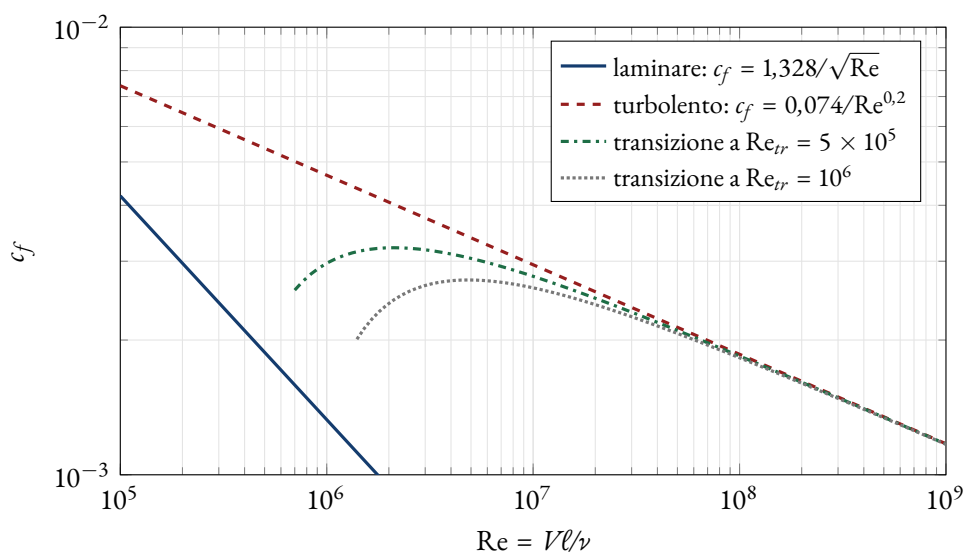


Figura A.6. Coefficiente di resistenza d'attrito di una lastra piana a incidenza nulla, riferito alla superficie bagnata, in funzione del numero di Reynolds. Le curve intermedie descrivono il caso reale con transizione a un'ascissa finita x_{tr} (formula di Prandtl-Schlichting).

Attrito laminare, turbolento e transizione

Su una lastra piana a incidenza nulla la resistenza è di solo attrito. In regime interamente laminare vale la soluzione di Blasius, $c_f = 1,328/\sqrt{Re}$; in regime interamente turbolento, $c_f \approx 0,074/Re^{0.2}$. Nel caso reale lo strato limite è laminare fino all'ascissa di transizione x_{tr} e turbolento a valle: la curva effettiva parte da quella turbolenta e se ne discosta del termine A/Re , tanto più grande quanto più tardi avviene la transizione ($A = 1700$ per $Re_{tr} = 5 \times 10^5$, $A = 3300$ per $Re_{tr} = 10^6$). Quanto più avanti transisce lo

strato limite (maggiore x_{tr}/ℓ), tanto minore è l'attrito complessivo.

A.8 Resistenza dei fusi aerodinamici

Per i corpi affusolati (fusoliere, gondole, serbatoi esterni) il coefficiente di resistenza, riferito alla *sezione frontale*, dipende dal numero di Reynolds e dal rapporto di finezza d/l (diametro massimo su lunghezza).

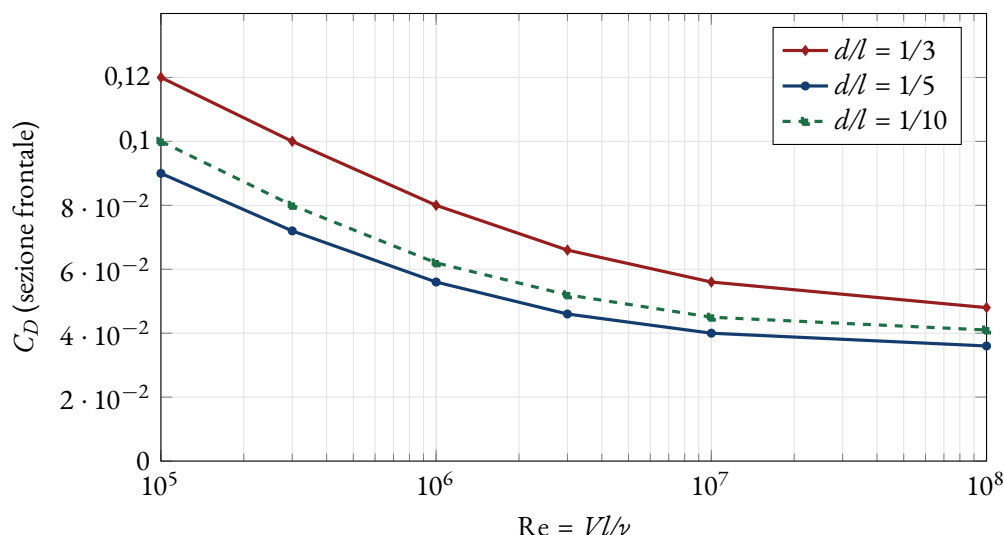


Figura A.7. Coefficiente di resistenza di fusi aerodinamici in funzione del numero di Reynolds, per diversi rapporti di finezza d/l (andamento classico, valori rappresentativi).

La finezza ottima

La resistenza di un fuso ha due componenti in competizione: quella di *forma* (scia), che diminuisce affusolando il corpo, e quella di *attrito*, che cresce con la superficie bagnata, cioè con la lunghezza. Ne risulta una finezza ottima intorno a $d/l \approx 1/4-1/6$: un fuso più tozzo paga in scia, uno più allungato paga in attrito. È il compromesso che si ritrova nelle fusoliere e nelle gondole motore reali.

A.9 Resistenza di ali lisce: effetto dello spessore

A parità di condizioni, il coefficiente di resistenza di profilo di un'ala liscia cresce con lo spessore relativo t/c ; a parità di spessore, conta anche la forma del bordo d'uscita.

Perché lo spessore "costa"

Un profilo più spesso accelera di più la corrente sul dorso e produce un recupero di pressione più ripido verso il bordo d'uscita: lo strato limite si ispessisce e la resistenza di forma cresce. Il bordo d'uscita a *cuspid* (le due superfici si raccordano con tangente comune) accompagna la corrente fino all'ultimo e dà la resistenza minore; la fuga *convessa* favorisce un piccolo distacco e dà la maggiore. Sono differenze di pochi millesimi di C_D , ma su un'ala intera, per tutta la vita operativa, si traducono in consumi sensibilmente diversi.

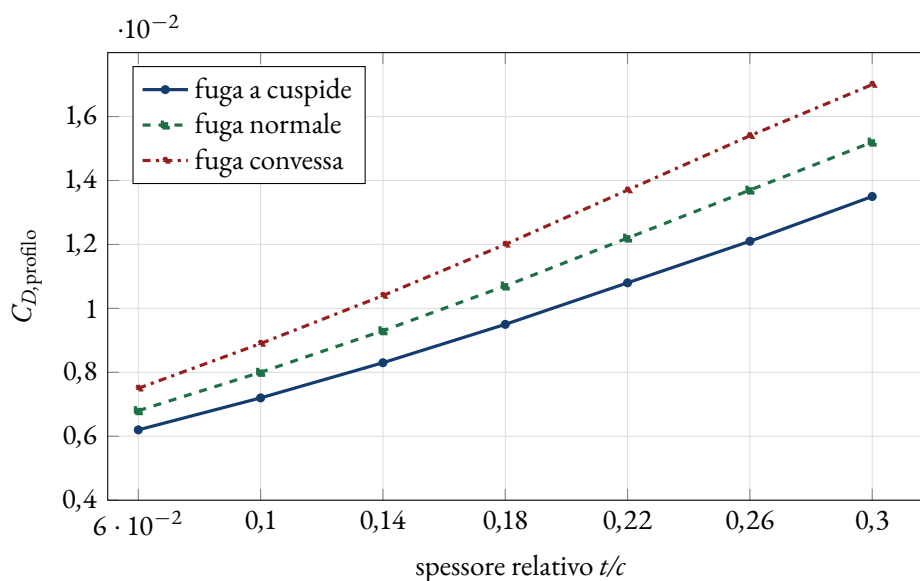


Figura A.8. Coefficiente di resistenza di profilo di ali lisce in funzione dello spessore relativo, per tre forme del bordo d'uscita (andamento classico, valori rappresentativi).

A.10 Viscosità dei fluidi (SI)

La Tabella A.2 riporta, in unità SI, la viscosità dinamica μ [Pa s] e cinematica ν [m²/s] di aria, acqua, olio minerale e mercurio a pressione atmosferica, necessarie al calcolo del numero di Reynolds ($\nu = \mu/\rho$).

Tabella A.2. Viscosità dinamica e cinematica a pressione atmosferica (760 mmHg). Valori dell'olio minerale rappresentativi (le proprietà degli oli variano fortemente con il tipo).

Fluido	t [°C]	$\mu \times 10^6$ [Pa s]	$\nu \times 10^6$ [m ² /s]
Aria	-15	16,3	11,9
Aria	0	17,09	13,2
Aria	15	17,82	14,5
Aria	30	18,56	15,9
Aria	50	19,51	17,9
Aria	100	21,75	23,0
Aria	200	25,7	35,9
Acqua	0	1793,8	1,79
Acqua	15	1145,0	1,15
Acqua	50	549,0	0,56
Acqua	100	284,0	0,30
Olio minerale	15	~ 100 000	~ 110
Olio minerale	50	~ 20 000	~ 22
Mercurio	0	1685	0,124
Mercurio	15	1554	0,115
Mercurio	50	1407	0,104

Uso della tabella

La viscosità dinamica dei *gas* cresce con la temperatura, quella dei *liquidi* diminuisce: due comportamenti opposti, entrambi visibili in tabella. Si noti anche il mercurio: viscosità dinamica quasi cento volte

quella dell'aria, ma viscosità cinematica *minore* di quella dell'acqua, per effetto della densità elevatissima. Per il numero di Reynolds si usa sempre la viscosità cinematica $\nu = \mu/\rho$: nota la velocità V e la lunghezza caratteristica ℓ , $Re = V\ell/\nu$ individua sui diagrammi il coefficiente di resistenza appropriato.