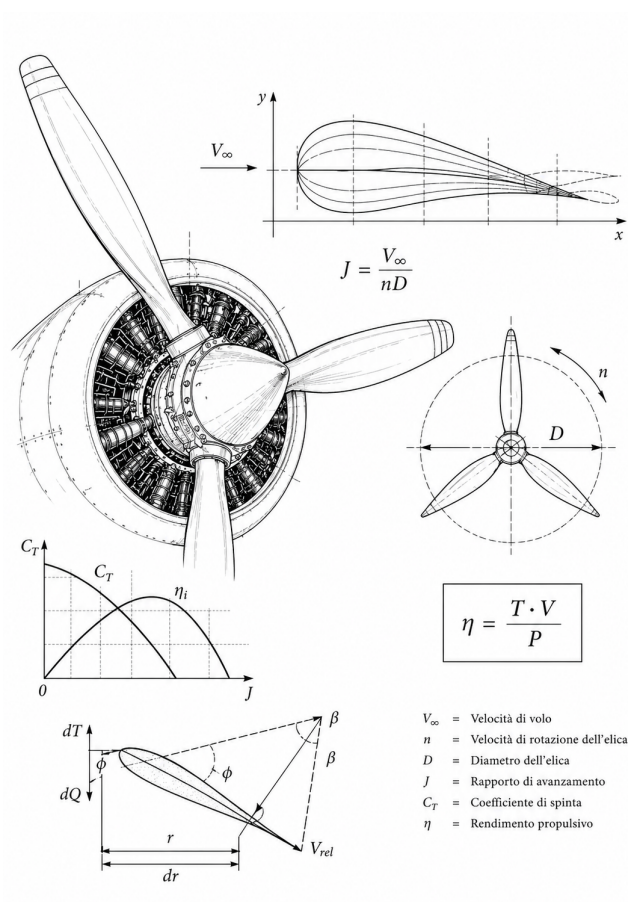


## COSTRUZIONI AERONAUTICHE

### Le eliche

Raccolta di esercizi svolti e richiami teorici



Le note raccolte in questo fascicolo nascono con l'obiettivo di offrire agli studenti uno strumento di supporto per lo studio e la risoluzione degli esercizi relativi alle eliche.

I testi degli esercizi sono tratti dal volume di *Giulia Caffaro-Rore, Esercizi di aerotecnica, vol. 2, Edizioni MILLE, Torino.*

Le soluzioni sono state sviluppate passo dopo passo, con l'intento di rendere chiaro non solo il risultato finale, ma soprattutto il procedimento seguito: la scelta delle formule, l'interpretazione dei dati, l'uso delle tabelle e il significato fisico delle grandezze coinvolte.

Il fascicolo vuole quindi essere una guida operativa e ragionata, pensata per accompagnare lo studente nell'acquisizione di un metodo di lavoro ordinato, consapevole e coerente con i principi dell'aerotecnica.

## Richiami teorici per gli esercizi: gruppo motopropulsore, prestazioni e coefficienti adimensionali

Questo opuscolo raccoglie esercizi in cui l'elica è trattata sia come **convertitore di potenza** (motore → spinta) sia come **organo aerodinamico** descritto tramite coefficienti adimensionali (curve sperimentali). I richiami seguenti fissano notazioni e relazioni usate ripetutamente.

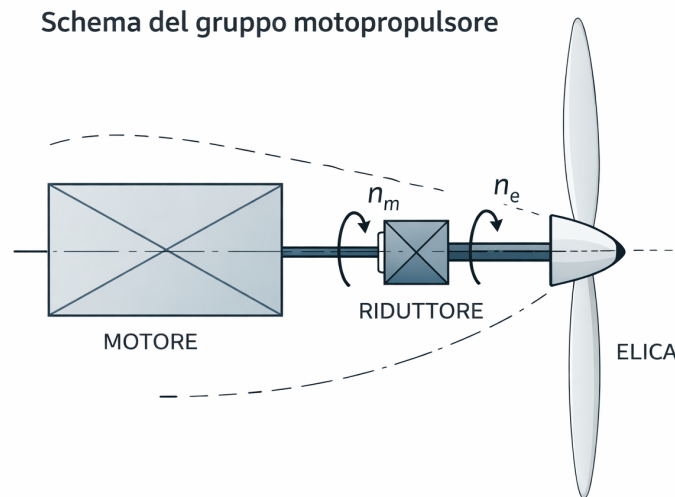


Figura 1: Catena di conversione: motore → riduttore → elica.

### 1) Potenze e rendimenti nella catena propulsiva

Indichiamo con:

- **Potenza meccanica all'albero motore** (uscita motore):

$$\Pi_m.$$

- **Potenza meccanica all'albero dell'elica** (uscita riduttore, ingresso elica):

$$\Pi_e.$$

- **Potenza propulsiva disponibile** (trasferita al velivolo dall'elica):

$$\Pi_d = T V$$

dove  $T$  è la trazione e  $V$  la velocità di volo.

Il **riduttore** è introdotto perché il motore eroga potenza a regimi elevati, mentre l'elica lavora efficientemente a regimi più contenuti (inoltre si limita la velocità di punta). Si definisce:

$$\tau_r = \frac{n_e}{n_m} = \frac{\omega_e}{\omega_m}, \quad 0 < \tau_r < 1 \quad (\text{riduzione}),$$

con

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}.$$

Il rendimento del riduttore è:

$$\boxed{\eta_r = \frac{\Pi_e}{\Pi_m}}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Pi_e = \eta_r \Pi_m}.$$

Il rendimento dell'elica è:

$$\boxed{\eta_e = \frac{\Pi_d}{\Pi_e}}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Pi_d = \eta_e \Pi_e}.$$

Combinando:

$$\boxed{\Pi_d = \eta_e \eta_r \Pi_m} \quad (1)$$

Questa relazione è centrale negli esercizi in cui si risale dalla potenza richiesta dal volo alla potenza motore.

## 2) Potenza necessaria e condizioni di equilibrio del velivolo

Per il velivolo si definiscono:

- **potenza per vincere la resistenza aerodinamica**

$$\Pi_D = D V;$$

- **potenza di salita** (incremento di energia potenziale)

$$\Pi_W = W w = W V \sin \beta;$$

- **potenza necessaria al volo**

$$\boxed{\Pi_n = \Pi_D + \Pi_W = D V + W w}.$$

In **volo rettilineo orizzontale uniforme** (VROU) vale  $T = D$  e  $w = 0$ , quindi:

$$\boxed{\Pi_d = \Pi_n = D V}$$

(uguaglianza numerica tipica di molti esercizi, ma con significato fisico diverso).

## 3) Coppie, velocità angolare e coppia di reazione

La potenza meccanica è legata alla coppia  $\mathcal{C}$  tramite:

$$\Pi = \mathcal{C} \omega.$$

Da cui:

$$\mathcal{C}_m = \frac{\Pi_m}{\omega_m}, \quad \mathcal{C}_e = \frac{\Pi_e}{\omega_e}.$$

Poiché  $\Pi_e = \eta_r \Pi_m$  e  $\omega_e = \tau_r \omega_m$  segue la catena delle coppie:

$$\boxed{\mathcal{C}_e = \frac{\eta_r}{\tau_r} \mathcal{C}_m} \quad (2)$$

La **coppia di reazione** applicata alla cellula è (in modulo) uguale alla coppia assorbita dall'elica:

$$\boxed{|\mathcal{C}_r| = \mathcal{C}_e}$$

con verso opposto alla rotazione (azione–reazione). Questo tema ricorre negli esercizi sulla compensazione con i comandi e/o con asimmetrie aerodinamiche.

#### 4) Elica come “macchina adimensionale”: $\gamma, J, \tau, \chi$ .

Quando sono disponibili misure o curve sperimentali di un’elica/modello, conviene lavorare con grandezze adimensionali.

Negli esercizi di queste note il **rapporto di funzionamento** è spesso scritto come:

$$\gamma = \frac{V}{\omega R}$$

(dove  $R$  è il raggio dell’elica e  $\omega$  la velocità angolare).

Nella letteratura si usa anche l’**advance ratio**:

$$J = \frac{V}{nD}$$

(dove  $n$  è in giri/s e  $D = 2R$ ). Le due definizioni sono equivalenti e legate da:

$$J = \pi \gamma$$

poiché  $\omega = 2\pi n$  e  $D = 2R$ .

I coefficienti adimensionali (convenzione usata negli esercizi) sono:

$$\tau = \frac{T}{\rho n^2 D^4}, \quad \chi = \frac{\mathcal{C}}{\rho n^2 D^5}.$$

Una volta noto  $\gamma$  (oppure  $J$ ), dalle curve/tabella del modello si leggono (o si interpolano)  $\tau$  e  $\chi$  e si ricavano trazione e coppia dell’elica reale tramite:

$$T = \tau \rho n^2 D^4, \quad \mathcal{C} = \chi \rho n^2 D^5.$$

**Formule di Renard di prima specie (approssimazione polinomiale).** Nel campo di funzionamento usuale, le curve sperimentali possono essere approssimate (prima specie) con polinomi di secondo grado in funzione del rapporto di funzionamento:

$$\tau(\gamma) = a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2, \quad \chi(\gamma) = b_0 + b_1\gamma + b_2\gamma^2.$$

In modo del tutto equivalente, usando  $J$ :

$$\tau(J) = \alpha_0 + \alpha_1 J + \alpha_2 J^2, \quad \chi(J) = \beta_0 + \beta_1 J + \beta_2 J^2,$$

con coefficienti numerici ricavati per interpolazione/regressione dai punti sperimentali.

La potenza assorbita dall’elica è:

$$\Pi_e = \mathcal{C} \omega.$$

Combinando con le definizioni precedenti si ottiene anche una forma utile (solo come controllo dimensionale):

$$\Pi_e \propto \rho n^3 D^5.$$

**Tabella riassuntiva (notazioni e significato).**

| Simbolo  | Definizione                  | Significato fisico                                   |
|----------|------------------------------|------------------------------------------------------|
| $\Pi_m$  | potenza all'albero motore    | potenza meccanica erogata dal motore                 |
| $\Pi_e$  | $\Pi_e = \eta_r \Pi_m$       | potenza meccanica all'albero dell'elica              |
| $\Pi_d$  | $\Pi_d = T V = \eta_e \Pi_e$ | potenza propulsiva disponibile (fornita al velivolo) |
| $\Pi_n$  | $\Pi_n = D V + W w$          | potenza necessaria al volo                           |
| $\tau_r$ | $n_e/n_m$                    | rapporto di riduzione (regimi/velocità angolari)     |
| $\eta_r$ | $\Pi_e/\Pi_m$                | rendimento riduttore                                 |
| $\eta_e$ | $\Pi_d/\Pi_e$                | rendimento elica                                     |
| $\gamma$ | $V/(\omega R)$               | rapporto di funzionamento (convenzione di corso)     |
| $J$      | $V/(nD) = \pi\gamma$         | advance ratio (punto di funzionamento)               |
| $\tau$   | $T/(\rho n^2 D^4)$           | coefficiente di trazione (adimensionale)             |
| $\chi$   | $C/(\rho n^2 D^5)$           | coefficiente di coppia (adimensionale)               |

## Esercizio 1

Un aeroplano avente massa  $M = 2'700$  kg e superficie alare  $S = 32$  m<sup>2</sup> vola su un percorso orizzontale a un assetto di  $6^\circ$ , cui corrispondono  $C_L = 0,62$  e  $C_D = 0,046$ ; il volo si compie alla quota di  $7'000$  m.

Calcolare la **velocità**, la **forza di trazione** dell'elica, la **potenza sviluppata dal motore**, assumendo per l'elica un rendimento  $\eta_e = 0,86$ .

Si calcoli inoltre la **coppia di reazione** che si manifesta sulla cellula, sapendo che l'albero motore compie 2300 giri/min e che l'elica viene comandata attraverso un riduttore a ingranaggi cilindrici con rapporto due terzi con  $\eta_r = 0,90$ .

## Risoluzione

Il volo si svolge a quota  $z = 7000$  dove (dalle tabelle dell'aria tipo):

$$\rho_{7000} = 0,5895 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Risulta:

$$W = Mg = 2700 \cdot 9.81 = 26'487 \text{ N}.$$

In volo orizzontale la portanza è uguale al peso del velivolo:

$$W = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L$$

da cui:

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} = \sqrt{\frac{2 \times 26487}{0,5895 \times 32 \times 0,62}} = 67,30 \text{ m/s} = 242,28 \text{ km/h}$$

In volo orizzontale la trazione è uguale alla resistenza, per cui:

$$T = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D = \frac{1}{2} 0,5895 \times 67,30^2 \times 32 \times 0,046 = 1965,14 \text{ N}$$

Dalla definizione di potenza necessaria (e disponibile), risulta:

$$\Pi_n = TV = 1965,14 \times 67,30 = 132,25 \text{ kW}$$

La **potenza del motore** differisce dalla potenza necessaria per il rendimento dell'elica e del riduttore; essendo (dati del problema):

$$\eta_e = 0,86 \quad ; \quad \eta_r = 0,90$$

si ottiene la potenza del motore:

$$\Pi_m = \frac{\Pi_n}{\eta_e \eta_r} = \frac{132,25}{0,86 \times 0,90} = 170,87 \text{ kW}$$

La **coppia di reazione** non è altro che la coppia dell'elica; indicando con  $\mathcal{C}$  tale coppia, risulta:

$$\mathcal{C} \cdot \omega \cdot \eta_e = \Pi_d \quad ; \quad \mathcal{C} = \frac{\Pi_d}{\omega \cdot \eta_e}$$

Impiegando le opportune unità di misura:

$$\Pi_d = 132,25 \text{ kW}$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \times 2300}{60} = 240,86 \text{ rad/s}$$

$$\omega_e = \frac{2}{3}\omega_m = 240,86 \times \frac{2}{3} = 160,57 \text{ rad/s}$$

$$\eta_e = 0,86$$

e sostituendo questi valori numerici nell'espressione della coppia si ottiene:

$$C = \frac{\Pi_d}{\omega \cdot \eta_e} = \frac{132'250}{160,57 \times 0,86} = 957,70 \text{ N m}$$

## Esercizio 2

Un aereo avente le caratteristiche sottoindicate vola alla quota di  $5700m$  all'assetto  $C_L = 0.6$  in volo rettilineo orizzontale uniforme. Determinare:

1. la trazione dell'elica;
2. la potenza necessaria;
3. la potenza del motore;
4. la coppia di trazione;

Caratteristiche del velivolo:

- peso totale:  $W = 81'400N$ ;
- carico alare:  $W/S = 2'255N/m^2$ ;
- coefficiente di resistenza minimo:  $C_{D0} = 0.022$ ;
- allungamento alare:  $AR = 7.1$ ;
- rendimento del riduttore:  $\eta_r = 0.9$ ;
- rendimento dell'elica:  $\eta_e = 0.85$ ;
- numero di giri del motore:  $n_m = 2200 \text{ giri/min}$ ;
- rapporto di riduzione:  $\tau_r = 3/4$ .

## Risoluzione

In volo rettilineo orizzontale uniforme:

$$\begin{cases} T = D \\ W = L \end{cases} \quad (3)$$

Per calcolare la resistenza ricaviamo il coefficiente di resistenza corrispondente al coefficiente di portanza assegnato per mezzo della **polare di Prandtl**, per la quale supporremo, come al solito,  $e = 0.9$ :

$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR e} = 0.022 + \frac{.6^2}{\pi \times 7.1 \times .9} = 0.04$$

Dalla seconda delle 3 è:

$$C_L S \frac{1}{2} \rho V^2 = W \rightarrow V = \sqrt{\frac{2 W}{\rho S C_L}} = \sqrt{\frac{2}{0.682} \times 2255 \times \frac{1}{0.6}} = 104.98 \text{ m/s}$$



Risulta:

$$S = \frac{W}{2255} = 36.1m^2$$

Dunque:

$$T = D = C_D S \frac{1}{2} \rho V^2 = 0.04 \times 36.1 \times \frac{1}{2} \times 0.682 \times 104.98^2 = 5427N$$

La potenza necessaria al volo rettilineo orizzontale è:

$$\Pi_n = D \times V = 5427 \times 104.98 \approx 570kW$$

In volo rettilineo orizzontale uniforme è

$$\Pi_n = \Pi_d$$

i.e. la potenza necessaria è uguale a quella disponibile.

Risulta:

$$\Pi_m \times \eta_e \times \eta_r = \Pi_d$$

ovvero:

$$\Pi_m = \frac{\Pi_d}{\eta_r \times \eta_e} = \frac{\Pi_n}{\eta_e \times \eta_r} = \frac{570Kw}{0.85 \times 0.9} = 745Kw$$

La coppia di reazione è uguale e contraria alla coppia dell'elica:

$$C_r = C_e = \frac{\Pi_e}{\omega_e}$$

Ricaviamo la potenza dell'elica tenendo presente che:

$$\Pi_e = \Pi_m \eta_r = 745 Kw \times 0.9 = 670 Kw \equiv 670'000 N \frac{m}{s}$$

Ricaviamo il numero di giri dell'elica tenendo conto del **rapporto di riduzione**:

$$n_e = n_m \times \tau_r = 2200 \text{ giri/min} \times \frac{3}{4} = 1650 \text{ giri/min}$$

ovvero:

$$\omega_e = \frac{2 \times \pi \times n_e}{60} = 172.78 \text{ rad/s}$$

La coppia di reazione è:

$$C_r = C_e = \frac{\Pi_e}{\omega_e} = \frac{670000}{172.78} = 3878 Nm.$$

### Esercizio 3

Calcolare quale potenza deve fornire a quota zero il motore di una motoelica avente le caratteristiche sotto indicate affinché sia possibile effettuare un volo rettilineo uniforme alla quota  $z=4400m$ , alla velocità  $V = 420 \text{ km/h}$  con un angolo di rampa di  $6^\circ$ .

Caratteristiche del velivolo:

- Peso totale:  $W = 51000N$ ;
- carico alare:  $W/S = 2450N/m^2$ ;
- coefficiente di resistenza minimo:  $C_{D_0} = 0.021$ ;
- allungamento:  $AR = 8.9$ ;
- rendimento:  $\eta = 0.85$ .

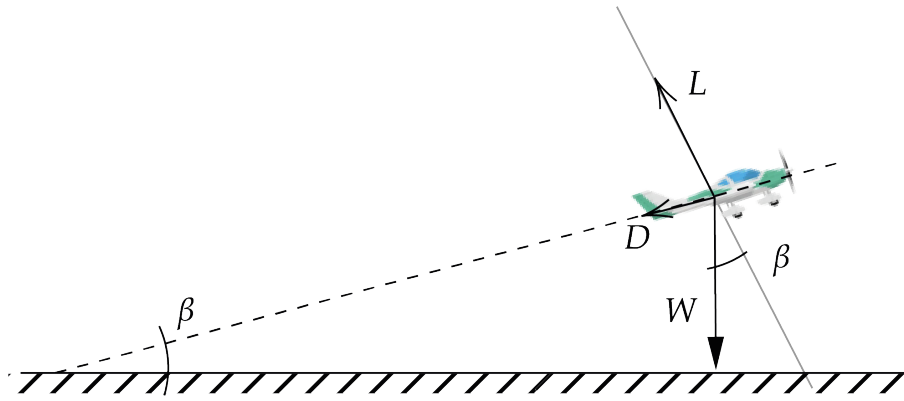


Figura 2: Aereo su rampa in volo rettilineo uniforme.

### Risoluzione

Nel volo rettilineo uniforme in salita, considerando un sistema di riferimento solidale con la traiettoria, l'equilibrio delle forze nella direzione normale alla traiettoria fornisce:

$$L = W \cos \beta.$$

Poiché la portanza vale:

$$L = C_L \frac{1}{2} \rho V^2 S,$$

si ottiene:

$$C_L = \frac{2W \cos \beta}{\rho V^2 S}. \quad (4)$$

Alla quota  $z = 4400\text{m}$  si assume una densità dell'aria:

$$\rho = 0.7852 \text{ kg/m}^3.$$

La superficie alare vale:

$$S = \frac{W}{W/S} = \frac{51\,000}{2450} = 20.82 \text{ m}^2.$$

La velocità di volo è:

$$V = 420 \text{ km/h} = 116.67 \text{ m/s}.$$

Sostituendo nella (4) si ottiene:

$$C_L = \frac{2 \cdot 51\,000 \cdot \cos 6^\circ}{0.7852 \cdot 116.67^2 \cdot 20.82} \simeq 0.456.$$

### Coefficiente di resistenza e resistenza aerodinamica

Il coefficiente di resistenza aerodinamica, valutato mediante la polare di Prandtl, risulta:

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi A Re} = 0.021 + \frac{0.456^2}{\pi \cdot 8.9 \cdot 0.9} \simeq 0.029.$$

La resistenza aerodinamica vale quindi:

$$D = C_D \frac{1}{2} \rho V^2 S = 0.029 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.7852 \cdot 116.67^2 \cdot 20.82 \simeq 3227 \text{ N}.$$

La potenza necessaria a vincere la sola resistenza aerodinamica è:

$$\Pi_D = D V = 3227 \cdot 116.67 \simeq 3.77 \times 10^5 \text{ W}.$$

$$\Pi_D \simeq 377 \text{ kW}.$$

L'equilibrio delle forze lungo la traiettoria fornisce:

$$T = D + W \sin \beta.$$

La potenza utile fornita dall'elica (e richiesta dal volo) è quindi:

$$\Pi_{\text{req}} = T V = (D + W \sin \beta) V.$$

Introducendo la velocità verticale di salita:

$$w = \dot{h} = V \sin \beta,$$

si ottiene la forma compatta:

$$\Pi_{\text{req}} = D V + W w.$$

Nel caso in esame:

$$w = 116.67 \cdot \sin 6^\circ = 12.20 \text{ m/s}.$$

Pertanto:

$$\Pi_{\text{req}} = 3.77 \times 10^5 + 51\,000 \cdot 12.20 \simeq 9.99 \times 10^5 \text{ W}.$$

$$\Pi_{\text{req}} \simeq 999 \text{ kW}.$$

### Potenza richiesta al motore

La potenza richiesta al volo coincide con la potenza utile fornita dall'elica. Tenendo conto del rendimento propulsivo complessivo  $\eta$ , la potenza richiesta all'albero motore risulta:

$$\Pi_m = \frac{\Pi_{\text{req}}}{\eta} = \frac{999}{0.85} \simeq 1.18 \times 10^3 \text{ kW}.$$

$$\Pi_m \simeq 1.18 \text{ MW}.$$

Scriveremo, ancora:

$$\Pi_z = \Pi_0 \frac{\rho_z}{\rho_0}$$

ovvero:

$$\Pi_0 = \Pi_z \frac{\rho_0}{\rho_z} = \frac{\Pi_z}{\delta} = \frac{1.18}{0.6409} = 1.8411 \text{ MW}$$

### Nota di approfondimento: variazione della potenza disponibile con la quota (motoelica)

Nell'ultimo passaggio dell'esercizio si "riporta" al livello del mare la potenza che il gruppo motopropulsore deve garantire alla quota di volo. Per una motoelica con *motore alternativo normalmente aspirato* (cioè senza sovralimentazione), si adotta un modello di primo ordine molto usato nelle prestazioni: la potenza massima erogabile dal motore diminuisce con la quota principalmente perché diminuisce la pressione (e quindi la densità) dell'aria aspirata.

L'idea fisica è funzionale e immediata. La potenza sviluppata da un motore alternativo dipende, in termini qualitativi ma robusti, da: (i) *cilindrata* (volume d'aria aspirabile per ciclo), (ii) *numero di giri* (numero di cicli nell'unità di tempo) e (iii) *condizioni esterne di aspirazione*, in particolare la pressione ambiente (e, di conseguenza, la densità). A parità di configurazione del

velivolo e di regime operativo, cilindrata e numero di giri possono essere assunti circa costanti; ciò che cambia sensibilmente con la quota è invece la massa d'aria che il motore riesce a introdurre nei cilindri per unità di tempo. Poiché la massa d'aria aspirata è proporzionale alla densità esterna, in prima approssimazione la potenza massima disponibile risulta proporzionale alla densità dell'aria.

Introduciamo dunque il rapporto di densità

$$\delta = \frac{\rho_z}{\rho_0},$$

dove  $\rho_0$  è la densità al livello del mare (atmosfera standard) e  $\rho_z$  è la densità alla quota  $z$ . L'ipotesi semplificata per il motore normalmente aspirato si scrive allora come:

$$\Pi_z = \Pi_0 \delta \quad \implies \quad \Pi_0 = \Pi_z \frac{1}{\delta} = \Pi_z \frac{\rho_0}{\rho_z}.$$

Il significato è chiaro: a quota  $z$  il motore può fornire solo una frazione  $\delta$  della potenza che potrebbe fornire al livello del mare; viceversa, per garantire una certa potenza richiesta in quota  $\Pi_z$ , occorre una potenza "equivalente" al livello del mare maggiore di un fattore  $1/\delta$ .

Nel problema, la potenza *utile* richiesta dal volo rettilineo uniforme in salita è ricavata dall'equilibrio lungo la traiettoria:

$$T = D + W \sin \beta, \quad \Pi_{\text{req}} = T V = (D + W \sin \beta) V = D V + W w, \quad w = V \sin \beta.$$

Questa è la potenza che deve essere resa disponibile per vincere sia la resistenza aerodinamica sia la "quota" di potenza necessaria a sostenere il rateo di salita. Tenendo conto del rendimento propulsivo complessivo  $\eta$  (conversione da potenza all'albero a potenza utile), la potenza richiesta all'albero motore risulta:

$$\Pi_m = \frac{\Pi_{\text{req}}}{\eta}.$$

Una volta calcolata  $\Pi_m$  alla quota di volo, per rispondere alla domanda "quale potenza deve fornire a quota zero il motore?", si applica la scalatura con la densità:

$$\Pi_0 = \Pi_m \frac{\rho_0}{\rho_z} = \frac{\Pi_m}{\delta}.$$

Nel caso numerico dell'esercizio, essendo  $\delta < 1$  (densità in quota minore di quella al livello del mare), la potenza equivalente richiesta a quota zero risulta necessariamente maggiore della potenza richiesta in quota. Si noti infine che la relazione  $\Pi \propto \rho$  è un'*approssimazione* adeguata per motori alternativi non sovralimentati; in presenza di turbocompressore/compressore la potenza può rimanere quasi costante fino a una quota di ristabilimento e la dipendenza dalla densità va descritta con curve di potenza disponibili più realistiche.

## Esercizio 4

Un velivolo motoelica vola in *volo rettilineo uniforme* lungo una traiettoria di salita alla velocità

$$V = 490 \text{ km/h}$$

alla quota

$$z = 5\,200 \text{ m}.$$

Il motore opera al regime di

$$n = 2\,500 \text{ giri/min}$$

ed eroga una coppia

$$C_m = 7\,650 \text{ N m}.$$

Assumendo noto il rendimento complessivo della propulsione, determinare la **componente verticale della velocità** del velivolo, indicata con  $w$ .

## Dati del velivolo

- Peso totale:

$$W = 108\,000 \text{ N}$$

- Carico alare:

$$\frac{W}{S} = 2\,300 \text{ N/m}^2$$

- Allungamento alare:

$$AR = 6.3$$

- Coefficiente di resistenza minimo:

$$C_{D_0} = 0.021$$

- Rendimento dell'elica:

$$\eta = 0.85$$

## Risoluzione

La velocità angolare dell'elica è:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow \omega = 2\pi n$$

ovvero:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2500}{60} = 261.7 \text{ rad/s}$$

La potenza fornita dal motore è:

$$\Pi_{\text{mot}} = \omega \cdot \mathcal{C}_m = 261.7 \cdot 7\,650 = 2\,001\,750 \text{ W}$$

La potenza disponibile è quindi:

$$\Pi_d = \Pi_m \cdot \eta = 2\,001\,750 \cdot 0.85 = 1\,701\,487.5 \text{ W}$$

Facendo riferimento alla figura 2 scriviamo:

$$\begin{cases} L = W \cos \beta \\ T = D + W \sin \beta \end{cases} \quad (5)$$

Quindi - dalla seconda delle 5:

$$TV = DV + WV \sin \beta$$

ovvero:

$$\Pi_d = D \cdot V + W \cdot w \rightarrow \boxed{\frac{\Pi_d - DV}{W} = w}$$

Per calcolare la resistenza aerodinamica, faremo riferimento alla polare di Prandtl:

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi AR e}. \quad (6)$$

Dalla prima delle 5 è:

$$C_L = \frac{2W}{\rho S V^2} \cos \beta$$

Occorre, qui, porre, **in prima approssimazione**,  $\cos \beta = 1$  in quando **non conosciamo** il valore di  $\beta$ . Risulta:

$$C_L = \frac{2}{0.7204} \cdot 2\,300 \cdot \frac{1}{136.11^2} \cdot 1 = 0.3446$$

ovvero, dalla 6:

$$C_D = 0.021 + \frac{0.3446^2}{\pi \cdot 63 \cdot 0.9} = 0.028$$

Dunque:

$$D = C_D S \frac{1}{2} \rho V^2 = 0.028 \cdot 46,96 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.7204 \cdot 136^2 = 8\,536.8 N$$

Risulta:

$$\Pi_{n,o} = D \cdot V = 8536.8 \cdot 136.11 = 1\,161\,945,7 W$$

ovvero:

$$w = \frac{\Pi_d - \Pi_{n,o}}{W} = \frac{1\,701\,487,5 - 1\,161\,945,7}{108\,000} = 4,996 \text{ m/s}$$

Ovviamente:

$$w = V \sin \beta \rightarrow \sin \beta = \frac{w}{V} = \frac{4.996}{136.11} = 0.0367 \rightarrow \beta = 2.103^\circ$$

Quindi:

$$\cos \beta = 0.999$$

Questo sarà il valore di **seconda approssimazione**.

Di nuovo:

$$C_L = \frac{2}{0.7204} \cdot 2300 \cdot \frac{1}{136.11^2} \cdot 0.999 = 0.3443$$

ovvero:

$$C_D = 0.021 + \frac{0.3443^2}{\pi \cdot 6.3 \cdot 0.9} = 0.0276 \rightarrow D = C_D S \frac{1}{2} \rho V^2 = 8\,414,85 N$$

Ancora:

$$\Pi_{n,o} = DV = 8\,414,85 \cdot 136.11 = 1\,145\,344.65 W.$$

e dunque:

$$w = \frac{\Pi_d - \Pi_{n,o}}{W} = \frac{1\,701\,487,5 - 1\,145\,344,65}{108\,000} = 5.149 \text{ m/s}$$

## Esercizio 5

Un motoelica avente le caratteristiche sottoindicate vola alla quota  $z = 3\,600 \text{ m}$  in volo rettilineo uniforme con velocità sulla traiettoria  $V = 510 \text{ km/h}$ . Sapendo che la componente ascensionale della velocità è  $w = 8.5 \text{ m/s}$  determinare quale potenza deve fornire il motore a quota zero.

**Caratteristiche dell'aereo:**

- $W = 55\,920 \text{ N}$ ;
- $S = 25.9 \text{ m}^2$ ;
- $C_{D,0} = 0.021$ ;
- $AR = 7.9$ ;
- $\eta = 0.87$ .

## Risoluzione

Iniziamo con l'osservare che a 3600 m la densità dell'aria è  $\rho = 0.8543 \text{ kg/m}^3$ . Per il velivolo in esame, il **carico alare** è:

$$\frac{W}{S} = 2159.1 \text{ N/m}^2$$

mentre, la velocità sulla traiettoria, in  $\text{m/s}$ , vale:

$$V = 510 \text{ km/h} \equiv 141.7 \text{ m/s}$$

Scriviamo le equazioni che regolano la salita del velivolo (si veda la figura 2):

$$\begin{cases} L = W \cos \beta \\ T = D + W \sin \beta \end{cases} \quad (7)$$

Dalla seconda delle 7 risulta:

$$TV = DV + WV \sin \beta \iff \Pi_d = \Pi_{n,o} + WV \sin \beta$$

ovvero:

$$\Pi_d = \Pi_{n,o} + Ww$$

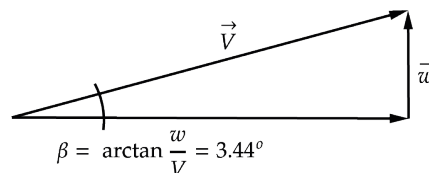


Figura 3: Calcolo dell'angolo  $\beta$  di rampa.

Facendo riferimento alla figura 3 è:

$$\beta = \arcsin \frac{w}{V} = \frac{8.5}{141.7} = 3.44^\circ$$

Per calcolare la **potenza necessaria** al volo orizzontale è necessario valutare la resistenza:

$$D = C_D S \frac{1}{2} \rho V^2. \quad (8)$$

Si ha, per la polare di Prandtl:

$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi A Re} \quad (9)$$

Per il calcolo del  $C_L$  facciamo ricorso alla prima della 7:

$$C_L S \frac{1}{2} \rho V^2 = W \cos \beta \rightarrow C_L = \frac{2 W}{\rho S} \frac{1}{V^2} = \frac{2}{0.8543} \cdot 2159.1 \cdot \frac{1}{141.7^2} \cdot 0.998 = 0.25$$

Dalla 9 è, allora:

$$C_D = 0.021 + \frac{0.25^2}{\pi \cdot 7.9 \cdot 0.9} = 0.024$$

Quindi, dalla 8:

$$D = 0.024 \cdot 25.9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.8543 \cdot 141.7^2 = 5331.27 \text{ N}$$

e quindi:

$$\Pi_{n,o} = 5331.27 \cdot 141.7 = 755442 \text{ W}$$

Allora:

$$\Pi_d = 755\,442 + 55920 \cdot 8.5 = 1\,236\,762 \text{ W}$$

Risulta:

$$\eta \Pi_m = \Pi_d \rightarrow \Pi_m = \frac{1}{\eta} \Pi_d = 1\,414\,669 \text{ W}$$

Questa calcolata è la **potenza erogata dal motore alla quota**  $z = 3600 \text{ m}$ . Risulta:

$$\frac{\Pi_{m,z}}{\Pi_{m,0}} = \delta_z \rightarrow \Pi_{m,0} = \frac{\Pi_{m,z}}{\delta_z} = \frac{1\,414\,669}{0.6973} = 2\,028\,781 \text{ W}$$

## Esercizio 6

Tracciare i diagrammi del **coefficiente di trazione** ( $\tau$ ) e del **coefficiente di coppia** ( $\chi$ ) in funzione del **rapporto di funzionamento** ( $\lambda$ ) per un modello di elica avente diametro  $D_M = 0.80 \text{ m}$  di cui sono stati rilevati i valori della trazione e della coppia in funzione della velocità in un'esperienza in laboratorio. Durante tutta l'esperienza il modello dell'elica ruotava con un numero di giri  $n_M = 25 \text{ giri/sec}$  e le caratteristiche dell'aria erano quelle dell'aria tipo a quota zero.

Tabella 1: Caratteristiche aerodinamiche dell'elica in funzione della velocità di corrente libera

| V (m/s) | 0    | 10   | 20   | 30   | 35   | 40   | 45   |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|
| T (N)   | 100  | 96,1 | 83,4 | 77,5 | 57,9 | 35,3 | 14,7 |
| C (N·m) | 28,4 | 26,5 | 23,5 | 21,6 | 17,6 | 11,8 | 6,9  |

Calcolare la trazione e la coppia per un'elica geometricamente simile al modello avente diametro  $D = 2.8 \text{ m}$ ,  $V = 530 \text{ km/h}$ ,  $n = 2\,100 \text{ giri/min}$ , alla quota  $z = 3\,700 \text{ m}$

## Risoluzione

La velocità angolare del modello d'elica durante l'esperienza era:

$$\omega_M = 2\pi \cdot n_M = 2\pi \cdot 25 = 157.08 \text{ rad/s};$$

il raggio del modello è:

$$R_M = \frac{D_M}{2} = \frac{0.80}{2} = 0.4 \text{ m}.$$

Dalle **formule di Renard** calcoliamo i coefficienti di trazione ( $\tau$ ) e di coppia ( $\chi$ ):

$$T_M = \tau \rho \omega^2 R_M^4 \rightarrow \tau = \frac{T_M}{\rho \omega^2 R_M^4} = \frac{T_M}{1.2257 \cdot 157.08^2 \cdot 0.40^4} = \frac{T_M}{774.22}$$

$$C_M = \chi \rho \omega^2 R_M^5 \rightarrow \chi = \frac{C_M}{\rho \omega^2 R_M^5} = \frac{C_M}{1.2257 \cdot 157.08^2 \cdot 0.40^5} = \frac{C_M}{309.69}$$

Il rapporto di funzionamento è:

$$\gamma = \frac{V}{\omega \cdot R} = \frac{V}{157.08 \cdot 0.4} = \frac{V}{62.832}$$

Per calcolare la trazione e la coppia dell'elica geometricamente simile al modello, calcoliamo:

$$R = \frac{D}{2} = \frac{2.8}{2} = 1.4 \text{ m};$$



Tabella 2: Caratteristiche aerodinamiche dell'elica e coefficienti adimensionali

| V (m/s)     | 0      | 10     | 20     | 30     | 35     | 40     | 45     |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $T_M$ (N)   | 100    | 96,1   | 83,4   | 77,5   | 57,9   | 35,3   | 14,7   |
| $C_M$ (N·m) | 28,4   | 26,5   | 23,5   | 21,6   | 17,6   | 11,8   | 6,9    |
| $\gamma$    | 0      | 0,1592 | 0,3183 | 0,4775 | 0,5570 | 0,6366 | 0,7152 |
| $\tau$      | 0,1292 | 0,1241 | 0,1089 | 0,1001 | 0,0747 | 0,0456 | 0,0190 |
| $\chi$      | 0,0918 | 0,0855 | 0,0760 | 0,0697 | 0,0570 | 0,0380 | 0,0222 |

trasformiamo la velocità di avanzamento in m/s:

$$V = 530 \text{ km/h} \equiv 147.22 \text{ m/s};$$

trasformiamo la velocità di rotazione in radianti al secondo:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2100}{60} = 219.91 \text{ rad/s}$$

Il rapporto di funzionamento è:

$$\gamma = \frac{V}{\omega \cdot R} = \frac{147.22}{219.91 \cdot 1.4} = 0.4782$$

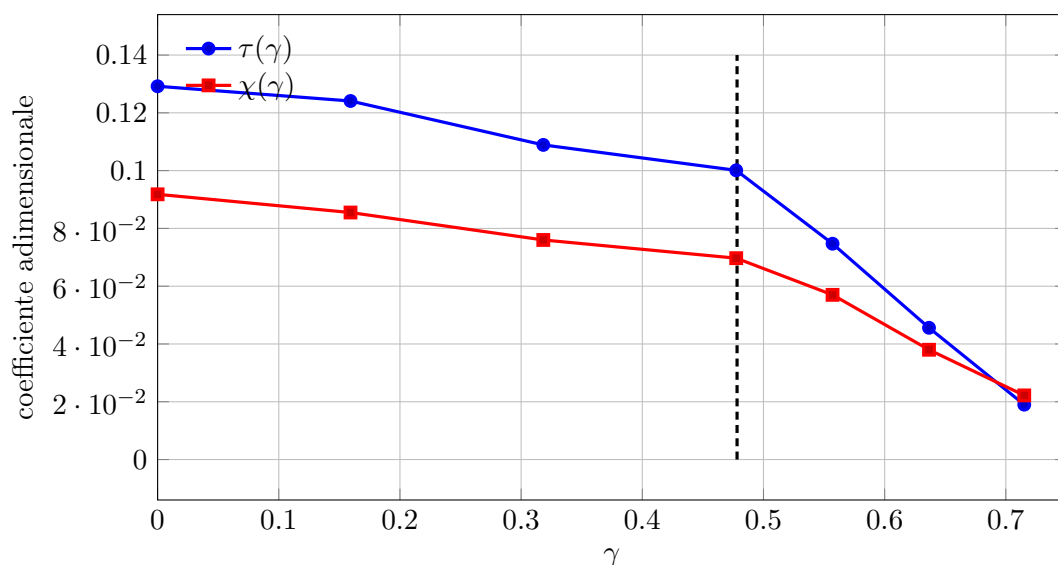


Figura 4: Diagramma dei coefficienti  $\tau$  e  $\chi$  in funzione di  $\gamma$  (punti sperimentali) utile per la scelta e l'interpolazione.

Sui diagrammi tracciati per il modello (figura 4) leggiamo i valori di  $\tau$  e di  $\chi$  corrispondenti a  $\gamma = 0.4782$ .

Per una maggiore precisione possiamo calcolare tali valori con un'interpolazione lineare:

$$\begin{array}{lll} \gamma_1 = 0,4775 & \tau_1 = 0,1001 & \chi_1 = 0,0697 \\ \gamma = 0,4782 & \tau & \chi \\ \gamma_2 = 0,5570 & \tau_2 = 0,0747 & \chi_2 = 0,0570 \end{array}$$

$$\tau = \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}$$

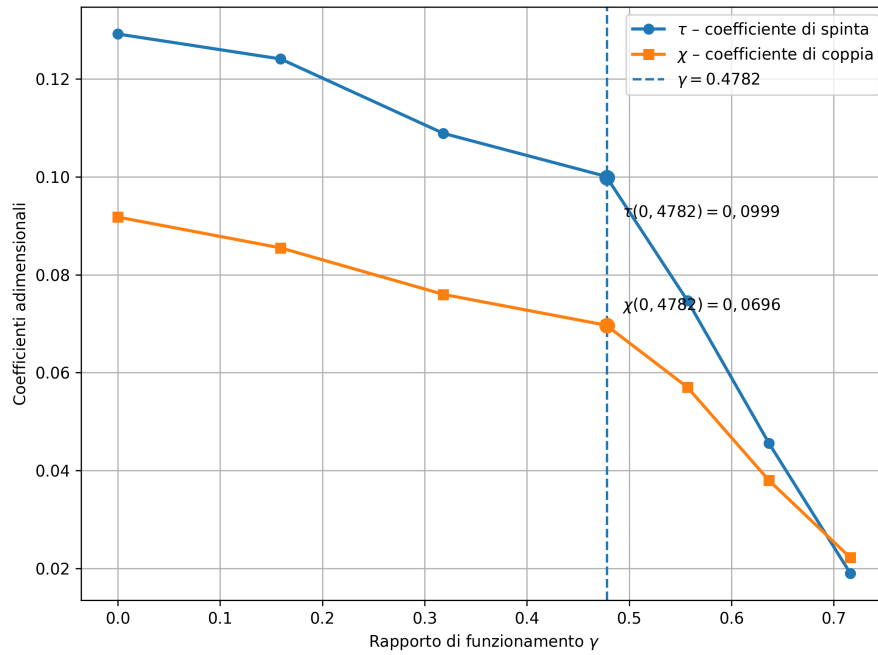


Figura 5: Diagrammi dei coefficienti  $\tau$  e  $\chi$  per  $\gamma = 0.4782$ .

$$\tau = 0,1001 + (0,0747 - 0,1001) \frac{0,4782 - 0,4775}{0,5570 - 0,4775} = 0,0999;$$

Invece per il coefficiente di coppia:

$$\chi = \chi_1 + (\chi_2 - \chi_1) \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}$$

$$\chi = 0,0697 + (0,0570 - 0,0697) \frac{0,4782 - 0,4775}{0,5570 - 0,4775} = 0,0696$$

In figura 5 sono evidenziati i valori calcolati.

Per  $z = 3700$  m è  $\rho_z = 0.8457 \text{ kg/m}^3$ . Calcoliamo la trazione e la coppia:

$$T = \tau \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot R^4 = 0.0999 \cdot 0.8457 \cdot (219.91)^2 \cdot (1.4)^4 = 15\,694 \text{ N.}$$

$$\mathcal{C} = \chi \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot R^5 = 0.0696 \cdot 0.8457 \cdot (219.91)^2 \cdot (1.4)^5 = 15\,308 \text{ N m}$$

## Esercizio 7

Tracciare la curva delle potenze disponibili alla quota  $z = 3300$  m per una motoelica, sapendo che il motore funziona a 2000 giri/min, il diametro dell'elica è  $D_e = 2.9$  m e il rapporto di riduzione è 3/4.

È assegnata per punti la curva di  $\tau$  in funzione di  $\gamma$ :

Tabella 3: Valori assegnati di  $\tau$  in funzione di  $\gamma$  (Tabella 3).

|          |        |        |        |        |        |        |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\gamma$ | 0,121  | 0,161  | 0,200  | 0,240  | 0,280  | 0,319  |
| $\tau$   | 0,0242 | 0,0278 | 0,0283 | 0,0251 | 0,0186 | 0,0109 |

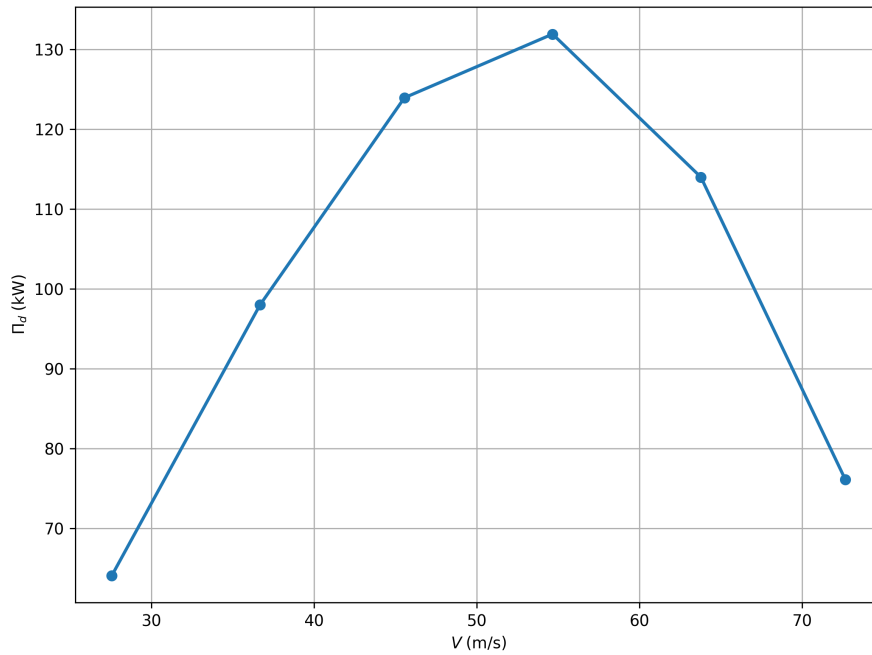


Figura 6: Potenza disponibile in funzione della velocità.

## Risoluzione

La potenza disponibile si può calcolare come prodotto della trazione per la velocità:

$$\Pi_d = T \cdot V.$$

Per ricavare dal rapporto di funzionamento i valori della velocità, determiniamo il numero di giri dell'elica:

$$n_e = n_m \cdot \tau_r = 2000 \cdot \frac{3}{4} = 1500 \text{ giri/min}$$

e la trasformiamo in radianti al secondo:

$$\omega_e = \frac{2\pi n_e}{60} = \frac{2\pi \cdot 1500}{60} = 157.08 \text{ rad/s.}$$

Il raggio dell'elica è:

$$R_e = \frac{D_e}{2} = \frac{2.9}{2} = 1.45 \text{ m}$$

ricaviamo quindi:

$$V = \omega_e \cdot R_e \cdot \gamma = 157.08 \cdot 1.45 \cdot \gamma = 227.77 \cdot \gamma.$$

A quota  $z = 3300$  è  $\rho = 0.8814 \text{ kg/m}^3$ . Risulta - formula di Renard:

$$T = \tau \cdot \rho \cdot \omega_e^2 \cdot R_e^4 = 0.8814 \cdot (157.08)^2 \cdot (1.45)^4 \cdot \tau = 96136.17 \cdot \tau$$

Possiamo quindi calcolare in tabella le potenze disponibili<sup>1</sup> e le riportiamo sul diagramma 6:

$$\Pi_d = \frac{T \cdot V}{1000} = \frac{(96136.17 \cdot \tau) \cdot (227.77 \cdot \gamma)}{1000} = 21897 \cdot \tau \cdot \gamma$$

<sup>1</sup>dividiamo per 1000 per ottenerle in kW.

|              |        |        |        |        |        |        |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\gamma$     | 0,121  | 0,161  | 0,200  | 0,240  | 0,280  | 0,319  |
| $\tau$       | 0,0242 | 0,0278 | 0,0283 | 0,0251 | 0,0186 | 0,0109 |
| $V$ (m/sec)  | 27,56  | 36,67  | 45,55  | 54,66  | 63,78  | 72,66  |
| $\Pi_d$ (kW) | 64,12  | 98,00  | 123,94 | 131,91 | 114,00 | 76,14  |

## Esercizio 8

Per un aereo avente le caratteristiche sottoindicate, determinare la differenza di apertura dei due semipiani alari necessari per compensare la coppia di reazione nell'ipotesi che l'ala sia a pianta rettangolare e che il volo si svolga alla quota di  $3\,900\text{ m}$  all'incidenza  $\alpha = 3^\circ 12'$ .

Caratteristiche dell'aereo:

- peso totale:  $W = 52\,000\text{ N}$ ;
- superficie alare:  $S = 18.92\text{ m}^2$ ;
- allungamento:  $AR = 8.7$ ;
- coefficiente di resistenza minimo:  $C_{D_0} = 0.021$ ;
- coefficiente angolare di portanza per allungamento infinito:  $C_{\ell_\alpha} = 5.4\text{ rad}^{-1}$ ;
- rendimento dell'elica:  $\eta_e = 0.85$ ;
- numero di giri dell'elica:  $n_e = 1\,800$  giri/min.

## Risoluzione

Il coefficiente di portanza per l'allungamento assegnato (ala finita) vale:

$$C_{L_\alpha} = \frac{C_{\ell_\alpha}}{1 + \frac{C_{\ell_\alpha}}{\pi \cdot AR}} = \frac{5.4}{1 + \frac{5.4}{\pi \cdot 8.7 \cdot 0.9}} = 4.43\text{ rad}^{-1}.$$

Per calcolare il coefficiente di portanza relativo all'incidenza di volo, iniziamo a trasformare in radianti l'incidenza assegnata:

$$\alpha = 3^\circ 12' = 3 + \frac{12}{60} = 3.2^\circ \equiv \frac{3.2 \cdot 2\pi}{360} = 0.0558\text{ rad}.$$

Risulta:

$$C_L = C_{L_\alpha} \alpha = 4.43 \cdot 0.0558 = 0.25.$$

Per un velivolo in VORU è:

$$\begin{cases} T = D \\ L = W \end{cases} \quad (10)$$

Calcoliamo la velocità dalla seconda delle 10: A  $z = 3\,900\text{ m}$ , la densità è  $\rho = 0.8278\text{ kg/m}^3$ :

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{C_L}} = \sqrt{\frac{2}{0.8278} \frac{52\,000}{18.92} \frac{1}{0.25}} = 163\text{ m/s}$$

Con la formula di Prandtl calcoliamo il coefficiente di resistenza:

$$C_D = C_{D,0} + \frac{C_L^2}{\pi \cdot AR \cdot e} = 0.021 + \frac{0.25^2}{\pi \cdot 8.7 \cdot 0.9} = 0.023$$

Abbiamo:

$$T = D = C_D S \frac{1}{2} \rho V^2 = 0.023 \cdot 18.92 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.8278 \cdot 163^2 = 4785.41 \text{ N}$$

Risulta:

$$\Pi_d = \Pi_n = T \cdot V = 4785.41 \cdot 163 = 779\,021.83 \text{ W} \simeq 779 \text{ kW}$$

Tenendo conto del rendimento dell'elica, calcoliamo la potenza dell'elica:

$$\Pi_d = \Pi_e \cdot \eta_e \Leftrightarrow \Pi_e = \frac{\Pi_d}{\eta_e} = \frac{780}{0.85} = 918 \text{ kW}$$

Se l'elica gira a  $n_e = 1\,800$  giri/min, la sua **velocità angolare** è:

$$\omega_e = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_e}{60} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1\,800}{60} = 188.4 \text{ rad/s.}$$

Calcoliamo la coppia di reazione (che è uguale e contraria alla coppia dell'elica):

$$C_r = |C_e| = \frac{\Pi_e}{\omega_e} = \frac{918\,000}{188.4} = 4\,873 \text{ Nm}$$

Per compensare la coppia di reazione imponiamo che il momento aerodinamico di rollio,  $\mathcal{M}_r$ , sia uguale e contrario a  $C_r$ .

L'apertura alare totale si ricava dall'allungamento:

$$b = \sqrt{AR S} = \sqrt{8.7 \cdot 18.92} = 12.83 \text{ m.}$$

La corda (ala rettangolare) è:

$$c = \frac{S}{b} = \frac{18.92}{12.83} = 1.47 \text{ m.}$$

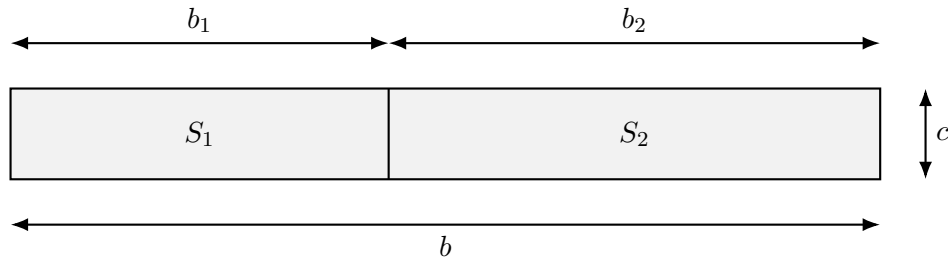


Figura 7: Schema dell'ala rettangolare: corda  $c$ , apertura alare  $b$  e semi-aperture  $b_1$ ,  $b_2$  (con  $S_i = c b_i$ ).

Indichiamo con  $b_1$  e  $b_2$  le aperture dei due semipiani (con  $b_1 + b_2 = b$ ). Poiché  $S_i = c b_i$  (l'area di ciascuno dei due semipiani) e assumendo lo stesso  $C_L$  su entrambi i semipiani, le portanze agenti su ciascun semipiano sono:

$$L_i = \frac{1}{2} \rho V^2 S_i C_L = \frac{1}{2} \rho V^2 c b_i C_L.$$

Il momento di rollio rispetto all'asse longitudinale (risultante applicata al baricentro di ciascun semipiano, a distanza  $b_i/2$ ) vale:

$$\mathcal{M}_r = L_1 \frac{b_1}{2} - L_2 \frac{b_2}{2} = \frac{\frac{1}{2} \rho V^2 c C_L}{2} (b_1^2 - b_2^2).$$

Poiché  $b_1^2 - b_2^2 = (b_1 - b_2)(b_1 + b_2) = b \cdot \Delta b$  con  $\Delta b = b_1 - b_2$ , imponendo  $M = C_r$  si ottiene:

$$\Delta b = \frac{2C_r}{\frac{1}{2}\rho V^2 c C_L b}.$$

Calcoliamo la pressione dinamica,  $q$ :

$$q = \frac{1}{2}\rho V^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.8278 \cdot 163^2 = 10\,990 \text{ N/m}^2.$$

Quindi la **differenza di apertura richiesta** è:

$$\Delta b = \frac{2 \cdot 4873}{10\,990 \cdot 1.47 \cdot 0.25 \cdot 12.83} = 0.19 \text{ m}.$$

## Esercizio 9

Un aereo avente le caratteristiche sottoelencate vola alla quota di  $4\,200 \text{ m}$ . Sapendo che l'elica gira a una velocità di  $1\,900 \text{ giri/min}$  con un rapporto di funzionamento  $\gamma = 0.35$ , calcolare:

1. la potenza dell'elica sapendo che per compensare la coppia di reazione una semiala è  $9 \text{ cm}$  più lunga dell'altra;
2. il rendimento dell'elica.

Caratteristica del velivolo:

- peso totale:  $W = 42\,200 \text{ N}$ ;
- superficie alare:  $S = 21 \text{ m}^2$ ;
- coefficiente di resistenza minimo:  $C_{D_0} = 0.022$ ;
- allungamento:  $AR = 6.3$ ;
- diametro dell'elica:  $D_e = 3 \text{ m}$ .

## Risoluzione

L'ipotesi da assumere è che il volo avvenga in condizioni di V.O.R.U.:

$$\begin{cases} T = D \\ L = W \end{cases} \quad (11)$$

## Calcolo della potenza dell'elica

La potenza dell'elica è:

$$\Pi_e = C_e \cdot \omega_e$$

Calcoliamo la velocità angolare:

$$\omega_e = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1\,900}{60} = 198,97 \text{ rad/sec}.$$

Conoscendo la differenza di lunghezza delle due semiali,  $\Delta d = 0.09 \text{ m}$ , possiamo ricavare la  $C_e$ .

Osserviamo (si faccia riferimento alla fig. 7):

$$b_1 + b_2 = b \quad b_2 = b_1 + \Delta d$$

ovvero, indicando con  $L_1$  e  $L_2$ , rispettivamente, le portanze generate dalle semiali di superficie  $S_1$  e  $S_2$ :

$$-L_1 \cdot \frac{b_1}{2} + L_2 \cdot \frac{b_2}{2} = C_e$$

Quindi:

$$-C_L S_1 \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{b_1}{2} c + -C_L S_2 \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{b_2}{2} c = C_e$$

Risulta:

$$\frac{1}{2} C_L c \rho V^2 (b_2^2 - b_1^2) = 2C_e \Leftrightarrow \frac{1}{2} C_L c \rho V^2 (b_2 - b_1) (b_2 + b_1) = 2C_e$$

e quindi, se  $S = c \cdot b$ :

$$\left( \frac{1}{2} C_L S \rho V^2 \right) \Delta d = 2C_e$$

Ovvero, in generale:

$$C_e = \frac{1}{2} L \cdot \Delta d$$

Per la 11 è:

$$C_e = \frac{1}{2} W \cdot \Delta d \Leftrightarrow C_e = \frac{1}{2} \cdot 42\,200 \cdot 0.09 = 1\,899 \, Nm$$

Finalmente:

$$\Pi_e = 1\,899 \cdot 198,97 = 377\,844.03W \approx 378 \, kW$$

### Calcolo del rendimento

Per calcolare il rendimento dell'elica, ricordiamo:

$$\Pi_d = \Pi_e \cdot \eta_e.$$

In V.O.R.U. è:

$$\Pi_d = \Pi_n = D \cdot V$$

Occorre valutare la **velocità di volo**. Sfrutteremo, in questo caso, il **rapporto di funzionamento** – che, di seguito, definiamo:

$$\gamma = \frac{V}{\omega_e \cdot R_e}$$

Si ha:

$$V = \gamma \cdot \omega_e \cdot R_e = 0.35 \cdot 198.97 \cdot \frac{3}{2} = 104.46 \, m/s$$

Occorre, adesso, valutare la resistenza. Iniziamo dal coefficiente  $C_D$ :

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi A Re}, \quad (12)$$

per valutare il quale, abbiamo bisogno di conoscere il  $C_L$ . Dalla seconda delle 11 è:

$$C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

A quota  $z = 4\,200 \, m$  è  $\rho = 0.8020 \, Kg/m^3$  e quindi:

$$C_L = \frac{2}{0.8020} \frac{42\,200}{21} \frac{1}{104.46^2} = 0.4592$$

e dunque, per la 12, è:

$$C_D = 0.022 + \frac{0.4592^2}{\pi \cdot 6. \cdot 0.9} = 0.034$$

ovvero:

$$D = C_D S \frac{1}{2} \rho V^2 = 0.033 \cdot 21 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.8020 \cdot 104.46^2 = 3\,124.23\,N$$

Dunque:

$$\Pi_d = T \cdot V = D \cdot V = 3\,124.23 \cdot 104.46 = 326\,357\,W$$

e quindi:

$$\eta_e = \frac{\Pi_d}{\Pi_e} = \frac{326\,357}{378\,000} = 0.86$$

## Esercizio 10

Un velivolo di massa  $M = 9\,400\,kg$  e superficie alare  $S = 28\,m^2$  esegue una **salita rettilinea uniforme** con traiettoria inclinata di un angolo  $\beta = 12^\circ$  rispetto all'orizzontale.

Sono noti i seguenti dati operativi:

- velocità di volo (TAS):  $V = 260\,km\,h^{-1}$ ;
- efficienza aerodinamica:  $E = L/D = 10$ ;
- quota di volo:  $z = 500\,m$  (atmosfera ISA).

**Si determini:**

1. la velocità ascensionale,  $w$ ;
2. la portanza  $L$  e il corrispondente coefficiente di portanza  $C_L$ ;
3. la resistenza aerodinamica  $D$  e il corrispondente coefficiente di resistenza  $C_D$ ;
4. la potenza necessaria al volo orizzontale rettilineo uniforme alla medesima incidenza  $\alpha$ ;
5. la potenza complessiva richiesta per il volo in salita;
6. la potenza erogata dai motori, ipotizzando un realistico rendimento del gruppo propulsore.

## Risoluzione

Subito:

$$W = M \cdot g = 9\,400 \cdot 9.81 = 92\,214\,N$$

e

$$V = 260\,Km/h \equiv 72.22\,m/s$$

Scriviamo le equazioni che caratterizzano il moto in salita:

$$\begin{cases} L = W \cos \beta \\ T = D + W \sin \beta \end{cases} \quad (13)$$

Ovviamente, per la velocità ascensionale, è anche:

$$w = V \sin \beta = 72.22 \cdot \sin 12^\circ = 15.01\,m/s$$

È:

$$L = W \cos \beta = 92\,214 \cdot \cos 12^\circ = 90\,199\,N$$

Quindi:

$$C_L S \frac{1}{2} \rho V^2 = L \rightarrow C_L = \frac{2L}{S \rho V^2} = \frac{2 \cdot 90\,199}{1.167 \cdot 28 \cdot 72.22^2} = 1.058$$



Si ha:

$$\frac{C_L}{C_D} = E \rightarrow C_D = \frac{C_L}{E} = \frac{1.058}{10} = 0.106.$$

Ancora:

$$\frac{L}{D} = E \rightarrow D = \frac{L}{E} = \frac{90\,199}{10} = 9\,020\,N$$

Dunque:

$$T = D + W \sin \beta = 9\,020 + 92\,214 \cdot \sin 12^\circ = 28\,192.4\,N$$

Ovvero:

$$\Pi_d = 2\,036\,055\,W$$

La potenza necessaria al volo orizzontale rettilineo uniforme alla stessa incidenza (*ovvero* alla stessa efficienza) è:

$$L = W = 92\,214\,N$$

e dunque:

$$D = \frac{L}{E} = \frac{92\,214}{10} = 9\,221.4\,N \rightarrow \Pi_{n,o} = D \cdot V$$

Da

$$C_L S \frac{1}{2} \rho V^2 = W \rightarrow V = \sqrt{\frac{2 W}{\rho S C_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 92\,214}{1.167 \cdot 28 \cdot 1.058}} = 73.04\,m/s$$

ovvero:

$$\Pi_{n,o} = 9\,221.4 \cdot 73.04 = 673\,524\,W$$

Risulta:

$$\Pi_m \cdot \eta = \Pi_d \rightarrow \Pi_m = \frac{\Pi_d}{\eta_m} = \frac{2\,036\,055}{0.87} = 2\,340\,293\,W$$

avendo ipotizzato realisticamente  $\eta = 0.87$ .

## Esercizio 11

Un'elica avente diametro  $D = 3.2\,m$  è comandata da un motore che ruota a 2 500 giri/min tramite un riduttore con rapporto di riduzione  $\tau_r = 3/4$  e rendimento  $\eta_r = 0.9$ . Calcolare con quale velocità ascensionale  $w$  potrebbe salire un aereo avente le caratteristiche sottoindicate, nell'ipotesi che voli alla velocità  $V = 520\,km/h$ , a quota  $z = 3\,600\,m$ . Determinare inoltre la potenza che il motore dovrebbe fornire in queste condizioni.

Caratteristiche del velivolo:

- peso totale:  $W = 47\,380\,N$ ;
- superficie alare:  $S = 21\,m^2$ ;
- coefficiente di resistenza minimo:  $C_{D0} = 0.022$ ;
- allungamento:  $AR = 5.7$ ;

Sono assegnati  $\tau$  e  $\chi$  in funzione di  $\gamma$ :

| $\gamma$ | 0     | 0,1   | 0,2   | 0,3   | 0,4   | 0,5   | 0,6   | 0,7   |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\tau$   | 0,072 | 0,071 | 0,068 | 0,061 | 0,059 | 0,043 | 0,021 | 0,002 |
| $\chi$   | 0,040 | 0,038 | 0,037 | 0,033 | 0,031 | 0,027 | 0,016 | 0,005 |

## Soluzione

Si consideri il velivolo in volo alla velocità assegnata

$$V = 520 \text{ km/h} = 144.44 \text{ m/s},$$

alla quota

$$z = 3600 \text{ m}.$$

Si richiedono:

- la velocità ascensionale  $w$ ;
- la potenza che il motore deve fornire in tali condizioni.

### 1. Dati

Per il velivolo:

$$W = 47380 \text{ N}, \quad S = 21 \text{ m}^2, \quad C_{D0} = 0.022, \quad AR = 5.7.$$

Per il gruppo motore-riduttore-elica:

$$D = 3.2 \text{ m}, \quad n_m = 2500 \text{ giri/min}, \quad \tau_r = \frac{3}{4}, \quad \eta_r = 0.9.$$

Il raggio dell'elica è:

$$r_e = \frac{D}{2} = 1.6 \text{ m}.$$

La velocità di rotazione dell'elica, tenuto conto del riduttore, vale:

$$n_e = \tau_r n_m = \frac{3}{4} \cdot 2500 = 1875 \text{ giri/min}.$$

La corrispondente velocità angolare è:

$$\omega = 2\pi \frac{n_e}{60} = 2\pi \frac{1875}{60} = 196.35 \text{ rad/s}.$$

### 2. Densità dell'aria alla quota assegnata

Assumendo atmosfera standard:

$$T = 288.15 - 0.0065 \cdot 3600 = 264.75 \text{ K},$$

$$\rho \simeq 0.854 \text{ kg/m}^3.$$

### 3. Rapporto di funzionamento dell'elica

Il rapporto di funzionamento vale:

$$\gamma = \frac{V}{r_e \omega} = \frac{144.44}{1.6 \cdot 196.35} = 0.460.$$

Per ricavare i coefficienti adimensionali, si possono usare i dati della tabella assegnata oppure il grafico in figura 8.

Per maggiore precisione, interpolando linearmente tra  $\gamma = 0.4$  e  $\gamma = 0.5$ , si ottiene:

$$\tau \simeq 0.0494, \quad \chi \simeq 0.0286.$$

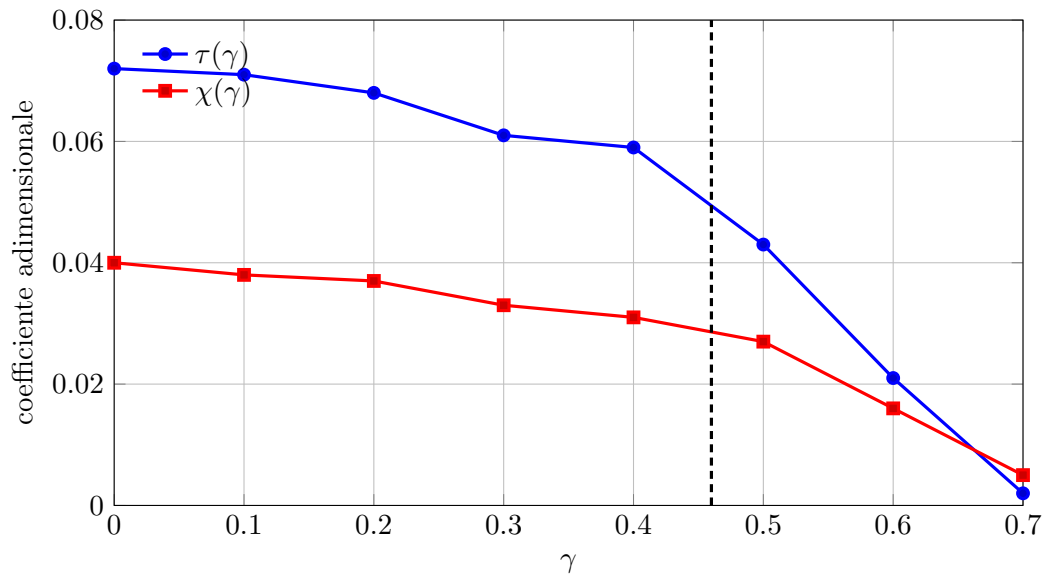


Figura 8: Diagramma dei coefficienti  $\tau$  e  $\chi$  in funzione di  $\gamma$  (dati tabellati), utile per scegliere/interpolare i valori.

#### 4. Trazione disponibile dell'elica

Dalla formula di R  nard di prima specie:

$$T_d = \tau \rho \omega^2 r_e^4.$$

Sostituendo i valori:

$$T_d = 0.0494 \cdot 0.854 \cdot (196.35)^2 \cdot (1.6)^4 \simeq 1.067 \times 10^4 \text{ N}.$$

Quindi:

$$T_d \simeq 10.67 \text{ kN}.$$

#### 5. Rendimento dell'elica

Il rendimento dell'elica vale:

$$\eta_e = \frac{\tau}{\chi} \gamma = \frac{0.0494}{0.0286} \cdot 0.460 \simeq 0.794.$$

Pertanto:

$$\eta_e \simeq 0.79.$$

#### 6. Calcolo della resistenza aerodinamica del velivolo

Nel calcolo approssimato si assume:

$$L \approx W.$$

La pressione dinamica alla quota assegnata   :

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.854 \cdot (144.44)^2 \simeq 8911.8 \text{ Pa}.$$

Pertanto:

$$qS = 8911.8 \cdot 21 \simeq 187148 \text{ N}.$$

Il coefficiente di portanza è:

$$C_L = \frac{W}{qS} = \frac{47380}{187148} \simeq 0.2532.$$

In assenza di ulteriori dati, si assume fattore di efficienza indotta  $e = 1$ , per cui:

$$k = \frac{1}{\pi AR} = \frac{1}{\pi \cdot 5.7} \simeq 0.05584.$$

Il coefficiente di resistenza totale diviene:

$$C_D = C_{D0} + kC_L^2 = 0.022 + 0.05584(0.2532)^2 \simeq 0.02558.$$

La resistenza aerodinamica vale quindi:

$$D = qS C_D = 187148 \cdot 0.02558 \simeq 4787 \text{ N}.$$

Dunque:

$$\boxed{D \simeq 4.79 \text{ kN}}.$$

## 7. Velocità ascensionale

Per la salita rettilinea uniforme:

$$T_d - D = W \sin \theta.$$

La velocità ascensionale è:

$$w = V \sin \theta = V \frac{T_d - D}{W}.$$

Sostituendo i valori:

$$w = 144.44 \cdot \frac{10670 - 4787}{47380} \simeq 17.94 \text{ m/s}.$$

Quindi:

$$\boxed{w \simeq 17.9 \text{ m/s}}.$$

In metri al minuto:

$$w \simeq 17.94 \cdot 60 \simeq 1076 \text{ m/min}.$$

Pertanto:

$$\boxed{w \simeq 1080 \text{ m/min}}.$$

## 8. Potenza utile all'elica

La potenza utile sviluppata dall'elica è:

$$\Pi_e = T_d V.$$

Quindi:

$$\Pi_e = 10670 \cdot 144.44 \simeq 1.541 \times 10^6 \text{ W}.$$

Pertanto:

$$\boxed{\Pi_e \simeq 1.54 \text{ MW}}.$$

## 9. Potenza richiesta al motore

Essendo:

$$\Pi_e = \Pi_{\text{mot}} \eta_r \eta_e,$$

si ricava:

$$\Pi_{\text{mot}} = \frac{\Pi_e}{\eta_r \eta_e} = \frac{1.541 \times 10^6}{0.9 \cdot 0.794} \simeq 2.16 \times 10^6 \text{ W}.$$

Dunque:

$$\boxed{\Pi_{\text{mot}} \simeq 2.16 \text{ MW}}.$$

In cavalli vapore:

$$\Pi_{\text{mot}} = \frac{2.16 \times 10^6}{735.5} \simeq 2930 \text{ CV}.$$

Pertanto:

$$\boxed{\Pi_{\text{mot}} \simeq 2930 \text{ CV}}.$$

**Nota.** In modo più rigoroso, nel moto di salita rettilinea uniforme, valgono le relazioni

$$L = W \cos \theta, \quad T_d - D = W \sin \theta.$$

Ne segue che il coefficiente di portanza è in realtà

$$C_L = \frac{W \cos \theta}{\frac{1}{2} \rho V^2 S},$$

per cui anche la resistenza  $D$  dipende debolmente da  $\theta$ . Il problema può dunque essere risolto iterativamente.

Assumendo inizialmente

$$\theta^{(0)} = 0,$$

si ottiene:

$$C_L^{(0)} = \frac{W}{qS} \simeq 0.2532, \quad C_D^{(0)} \simeq 0.02558, \quad D^{(0)} \simeq 4787 \text{ N}.$$

Da cui:

$$\sin \theta^{(1)} = \frac{T_d - D^{(0)}}{W} = \frac{10670 - 4787}{47380} \simeq 0.1242,$$

$$\theta^{(1)} \simeq 7.13^\circ.$$

Aggiornando:

$$C_L^{(1)} = \frac{W \cos \theta^{(1)}}{qS} \simeq 0.2513,$$

$$C_D^{(1)} \simeq 0.02553, \quad D^{(1)} \simeq 4777 \text{ N},$$

si ottiene:

$$\sin \theta^{(2)} = \frac{10670 - 4777}{47380} \simeq 0.1244,$$

$$\theta^{(2)} \simeq 7.15^\circ.$$

L'iterazione converge quindi al valore:

$$\theta \simeq 7.15^\circ,$$

da cui:

$$w = V \sin \theta \simeq 17.96 \text{ m/s}.$$

Si osserva pertanto che il risultato iterato è praticamente coincidente con quello ottenuto mediante l'approssimazione  $L = W$ , poiché

$$\cos 7.15^\circ \simeq 0.992.$$

L'errore introdotto dall'approssimazione risulta quindi trascurabile.

## Esercizio 12

Un velivolo avente peso totale  $W = 58\,000\text{ N}$ , carico alare  $W/S = 2\,260\text{ N/m}^2$  vola in orizzontale alla quota  $z = 3\,000\text{ m}$  con un'incidenza  $\alpha = 4^\circ$ . L'ala è a pianta rettangolare e ha allungamento  $AR = 6.8$ . Il motore funziona a  $2\,200\text{ giri/min}$  e comanda l'elica tramite un riduttore avente rapporto di trasmissione  $\tau_r = 4/5$ . Il rendimento dell'elica è  $\eta_e = 0.82$ . È assegnata la polare:

| $\alpha [^\circ]$ | 0     | 2     | 4     | 6     | 8     | 10    | 12    | 14    | 16    | 18    |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $C_L$             | 0     | 0,18  | 0,40  | 0,62  | 0,84  | 1,03  | 1,19  | 1,33  | 1,40  | 1,35  |
| $C_D$             | 0,022 | 0,023 | 0,031 | 0,044 | 0,051 | 0,078 | 0,101 | 0,127 | 0,159 | 0,195 |

La polare assegnata può essere rappresentata come in figura 9.

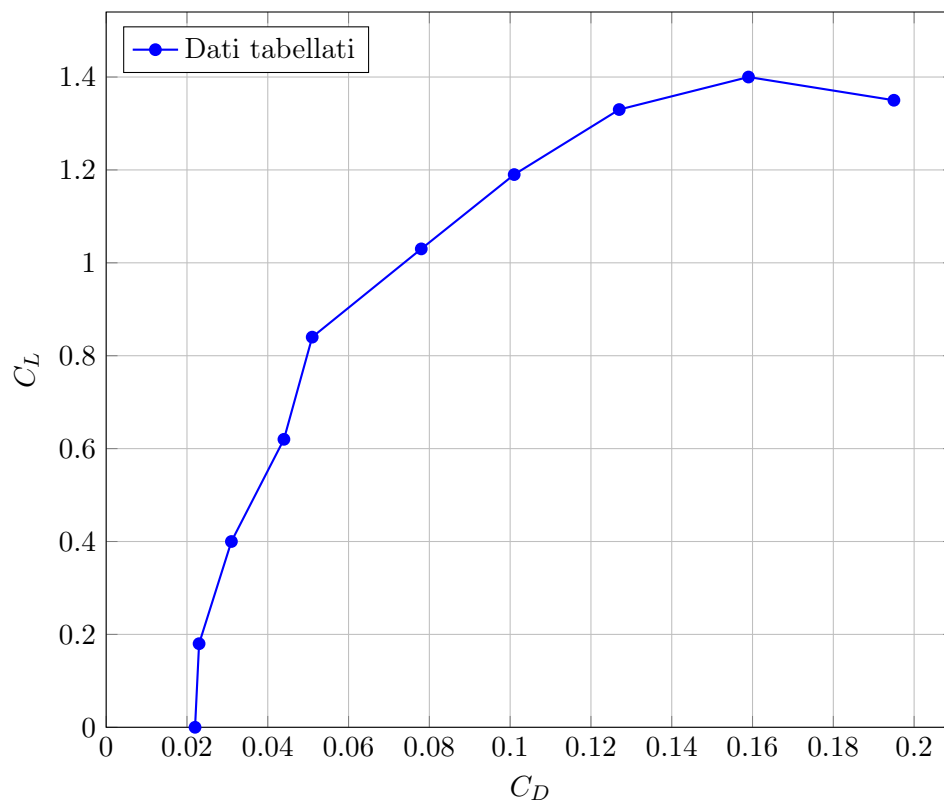


Figura 9: Curva  $C_L = C_L(C_D)$  ricavata dai dati assegnati.

**Si determini:**

1. le diverse incidenze  $\alpha_s$  e  $\alpha_d$  che si dovrebbero dare ai due semipiani per compensare la coppia di reazione lasciando inalterata la portanza;
2. le resistenze  $D_s$  e  $D_d$  dei due semipiani e il momento imbarante che si genera;
3. la traslazione laterale dell'asse dell'elica necessaria per compensare il momento imbarante.

## Svolgimento

L'idea della soluzione è la seguente. Si studia dapprima il volo simmetrico del velivolo per ricavare velocità, resistenza e potenza disponibile. Da questa si determina la coppia di reazione dell'elica. Successivamente si impone che tale coppia sia equilibrata da una differenza di portanza tra i due semipiani, mantenendo però inalterata la portanza totale. Note le portanze dei due semipiani,

si ricavano i rispettivi coefficienti di portanza, poi le incidenze mediante interpolazione lineare dei dati tabellati. Infine, sempre mediante interpolazione lineare, si determinano i coefficienti di resistenza, le resistenze dei due semipiani e quindi il momento imbardante da compensare mediante disassamento laterale dell'asse dell'elica.

## 1. Geometria dell'ala

Dal carico alare si ricava la superficie alare:

$$S = \frac{W}{W/S} = \frac{58\,000}{2\,260} = 25.664 \text{ m}^2.$$

Dall'allungamento:

$$AR = \frac{b^2}{S},$$

si ricava l'apertura alare:

$$b = \sqrt{AR S} = \sqrt{6.8 \cdot 25.664} = 13.21 \text{ m}.$$

L'area del singolo semipiano vale dunque:

$$S_h = \frac{S}{2} = 12.832 \text{ m}^2.$$

## 2. Condizioni di volo simmetrico

Dalla tabella, all'incidenza assegnata  $\alpha = 4^\circ$ , si leggono:

$$C_L = 0.40, \quad C_D = 0.031.$$

Nel volo orizzontale uniforme vale:

$$L = W = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L.$$

Assumendo alla quota di 3'000 m la densità standard

$$\rho \simeq 0.909 \text{ kg/m}^3,$$

si ottiene:

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 58\,000}{0.909 \cdot 25.664 \cdot 0.40}} = 111.49 \text{ m/s}.$$

La resistenza totale del velivolo è:

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D.$$

Poiché

$$\frac{1}{2} \rho V^2 S = \frac{W}{C_L},$$

segue:

$$D = W \frac{C_D}{C_L} = 58\,000 \cdot \frac{0.031}{0.40} = 4\,495 \text{ N}.$$

Nel volo orizzontale uniforme si ha anche:

$$T = D = 4\,495 \text{ N}.$$

La potenza disponibile all'aeroplano coincide, in questo caso, con la potenza necessaria al volo:

$$\Pi_{\text{disp}} = \Pi_{\text{nec}} = T V = 4\,495 \cdot 111.49 = 5.0117 \times 10^5 \text{ W}.$$

### 3. Coppia di reazione dell'elica

La potenza trasmessa all'elica dall'albero motore è:

$$\Pi_e = \frac{\Pi_{\text{disp}}}{\eta_e} = \frac{5.0117 \times 10^5}{0.82} = 6.1119 \times 10^5 \text{ W.}$$

Il numero di giri dell'elica è:

$$n_e = \tau_r n_m = \frac{4}{5} \cdot 2200 = 1760 \text{ giri/min.}$$

La corrispondente velocità angolare è:

$$\omega_e = 2\pi \frac{n_e}{60} = 2\pi \frac{1760}{60} = 184.31 \text{ rad/s.}$$

La coppia di reazione dell'elica vale quindi:

$$M_{\text{reaz}} = \frac{\Pi_e}{\omega_e} = \frac{6.1119 \times 10^5}{184.31} = 3316 \text{ N m.}$$

### 4. Portanze dei due semipiani

Indichiamo con  $L_s$  e  $L_d$  le portanze sulla semiala sinistra e destra.

Per lasciare inalterata la portanza totale deve risultare:

$$L_s + L_d = W.$$

Per compensare la coppia di reazione dell'elica si impone che il momento di rollio generato dalla differenza di portanza uguali  $M_{\text{reaz}}$ . Assumendo che la risultante aerodinamica di ciascun semipiano sia applicata a distanza  $b/4$  dal piano di simmetria, si ha:

$$(L_d - L_s) \frac{b}{4} = M_{\text{reaz}}.$$

Da qui:

$$L_d - L_s = \frac{4M_{\text{reaz}}}{b} = \frac{4 \cdot 3316}{13.21} = 1004 \text{ N.}$$

Si ottiene dunque il sistema:

$$\begin{cases} L_s + L_d = 58000 \\ L_d - L_s = 1004 \end{cases}$$

la cui soluzione è:

$$L_d = \frac{58000 + 1004}{2} = 29502 \text{ N,}$$

$$L_s = \frac{58000 - 1004}{2} = 28498 \text{ N.}$$

### 5. Coefficienti di portanza dei due semipiani

Per ciascun semipiano vale:

$$L_h = \frac{1}{2} \rho V^2 S_h C_{L,h}.$$

Poiché:

$$\frac{1}{2} \rho V^2 S_h = \frac{1}{2} \left( \frac{W}{C_L} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{58000}{0.40} \right) = 72500 \text{ N,}$$

si ricavano:

$$C_{L,d} = \frac{L_d}{72500} = \frac{29502}{72500} = 0.4069,$$

$$C_{L,s} = \frac{L_s}{72500} = \frac{28498}{72500} = 0.3931.$$



## 6. Determinazione di $\alpha_s$ e $\alpha_d$ mediante interpolazione lineare

**Semiala sinistra.** Il valore

$$C_{L,s} = 0.3931$$

è compreso tra:

$$C_L(2^\circ) = 0.18, \quad C_L(4^\circ) = 0.40.$$

Si interpola linearmente:

$$\alpha_s = 2^\circ + \frac{C_{L,s} - 0.18}{0.40 - 0.18}(4^\circ - 2^\circ).$$

Sostituendo:

$$\alpha_s = 2^\circ + \frac{0.3931 - 0.18}{0.22} \cdot 2^\circ = 3.937^\circ.$$

**Semiala destra.** Il valore

$$C_{L,d} = 0.4069$$

è compreso tra:

$$C_L(4^\circ) = 0.40, \quad C_L(6^\circ) = 0.62.$$

Quindi:

$$\alpha_d = 4^\circ + \frac{C_{L,d} - 0.40}{0.62 - 0.40}(6^\circ - 4^\circ).$$

Sostituendo:

$$\alpha_d = 4^\circ + \frac{0.4069 - 0.40}{0.22} \cdot 2^\circ = 4.063^\circ.$$

Si ottiene dunque:

$$\boxed{\alpha_s \approx 3.937^\circ}, \quad \boxed{\alpha_d \approx 4.063^\circ}.$$

## 7. Determinazione di $C_{D,s}$ e $C_{D,d}$ mediante interpolazione lineare

**Semiala sinistra.** Poiché

$$\alpha_s = 3.937^\circ$$

è compreso tra  $2^\circ$  e  $4^\circ$ , si interpola tra:

$$C_D(2^\circ) = 0.023, \quad C_D(4^\circ) = 0.031.$$

Allora:

$$C_{D,s} = 0.023 + \frac{\alpha_s - 2^\circ}{4^\circ - 2^\circ}(0.031 - 0.023).$$

Sostituendo:

$$C_{D,s} = 0.023 + \frac{3.937 - 2}{2} \cdot 0.008 = 0.03075.$$

**Semiala destra.** Poiché

$$\alpha_d = 4.063^\circ$$

è compreso tra  $4^\circ$  e  $6^\circ$ , si interpola tra:

$$C_D(4^\circ) = 0.031, \quad C_D(6^\circ) = 0.044.$$

Quindi:

$$C_{D,d} = 0.031 + \frac{\alpha_d - 4^\circ}{6^\circ - 4^\circ}(0.044 - 0.031).$$

Sostituendo:

$$C_{D,d} = 0.031 + \frac{4.063 - 4}{2} \cdot 0.013 = 0.03141.$$

## 8. Resistenze dei due semipiani

Per il singolo semipiano:

$$D_h = \frac{1}{2} \rho V^2 S_h C_{D,h}.$$

Essendo

$$\frac{1}{2} \rho V^2 S_h = 72\,500 \text{ N},$$

si ottiene:

$$D_s = 72\,500 \cdot 0.03075 = 2\,229.24 \text{ N},$$

$$D_d = 72\,500 \cdot 0.03141 = 2\,277.17 \text{ N}.$$

Quindi:

$$D_s \approx 2\,229.24 \text{ N}, \quad D_d \approx 2\,277.17 \text{ N}.$$

### Osservazione

Si nota che la somma delle resistenze dei due semipiani,

$$D_s + D_d = 4'506.41 \text{ N},$$

risulta leggermente maggiore della resistenza iniziale del velivolo in configurazione simmetrica,

$$D = 4'495 \text{ N}.$$

La discrepanza, pari a circa lo 0.25%, è del tutto accettabile e deriva dalle approssimazioni introdotte nell'interpolazione lineare dei dati tabellati, nonché dagli arrotondamenti numerici. Dal punto di vista fisico, essa è anche coerente con il fatto che la compensazione della coppia di reazione mediante portanze asimmetriche comporta un lieve aumento della resistenza complessiva.

## 9. Momento imbardante generato

La differenza di resistenza tra i due semipiani genera un momento imbardante. Assumendo ancora come braccio la distanza  $b/4$ , si ha:

$$Y = (D_d - D_s) \frac{b}{4}.$$

Sostituendo:

$$Y = (2\,277.17 - 2\,229.24) \frac{13.21}{4} = 158.27 \text{ N m}.$$

## 10. Traslazione laterale dell'asse dell'elica

Per compensare il momento imbardante si impone:

$$T d = Y.$$

Da cui:

$$d = \frac{Y}{T} = \frac{158.27}{4\,495} = 0.0352 \text{ m}.$$

Ovvero:

$$d \simeq 3.52 \text{ cm}.$$

## Risultati finali

Le incidenze da assegnare ai due semipiani sono:

$$\boxed{\alpha_s \approx 3.937^\circ}, \quad \boxed{\alpha_d \approx 4.063^\circ}.$$

Le corrispondenti resistenze risultano:

$$\boxed{D_s \approx 2\,229.24 \text{ N}}, \quad \boxed{D_d \approx 2\,277.17 \text{ N}}.$$

Il momento imbarante generato vale:

$$\boxed{Y \approx 158.27 \text{ N m}}.$$

La traslazione laterale necessaria dell'asse dell'elica è:

$$\boxed{d \approx 0.0352 \text{ m} \approx 3.52 \text{ cm}}.$$

## Esercizio 13 – Coefficienti di trazione e di coppia di un'elica

In un'esperienza su un modello d'elica in galleria aerodinamica si sono letti i seguenti valori di trazione e di coppia in funzione della velocità a quota zero:

| $V \text{ [m/s]}$ | 0    | 10    | 20   | 30   | 35   | 40   | 45   |
|-------------------|------|-------|------|------|------|------|------|
| $T \text{ [N]}$   | 105  | 101   | 89.3 | 81.4 | 60.8 | 37.3 | 15.7 |
| $C \text{ [N m]}$ | 29.4 | 27.96 | 24.5 | 22.6 | 18.6 | 12.7 | 7.36 |

Sapendo che il modello d'elica ha diametro

$$D_M = 1 \text{ m}$$

e che la velocità di rotazione durante l'esperienza era costante e pari a

$$n_M = 22 \text{ giri/s},$$

tracciare i diagrammi dei coefficienti di trazione e di coppia in funzione del rapporto caratteristico di funzionamento.

Calcolare inoltre, a quota 300 m, la trazione e la coppia di un'elica geometricamente simile al modello considerato, sapendo che la sua velocità di rotazione è

$$n = 1800 \text{ giri/min},$$

il diametro è

$$D = 3 \text{ m}$$

e la velocità di avanzamento è

$$V = 460 \text{ km/h}.$$

## Soluzione

Per confrontare il comportamento di eliche geometricamente simili si introducono le grandezze adimensionali caratteristiche del funzionamento dell'elica.

Secondo le formule di Renard di prima specie, il rapporto caratteristico di funzionamento è

$$\gamma = \frac{V}{\omega R},$$

dove  $\omega$  è la velocità angolare dell'elica e  $R$  è il raggio dell'elica.

I coefficienti adimensionali di trazione e di coppia sono rispettivamente

$$\tau = \frac{T}{\rho \omega^2 R^4},$$

$$\chi = \frac{C}{\rho \omega^2 R^5}.$$

Per il modello si ha

$$D_M = 1 \text{ m}, \quad R_M = \frac{D_M}{2} = 0.5 \text{ m}, \quad n_M = 22 \text{ s}^{-1}.$$

La velocità angolare del modello vale

$$\omega_M = 2\pi n_M.$$

Pertanto

$$\omega_M = 2\pi \cdot 22 = 138.23 \text{ rad/s}.$$

Poiché i dati sperimentali sono stati ricavati a quota zero, si assume

$$\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3.$$

Per ciascun valore della velocità misurata in galleria si calcolano quindi:

$$\gamma = \frac{V_M}{\omega_M R_M},$$

$$\tau = \frac{T_M}{\rho_0 \omega_M^2 R_M^4},$$

$$\chi = \frac{C_M}{\rho_0 \omega_M^2 R_M^5}.$$

Sostituendo i valori del modello:

$$\gamma = \frac{V_M}{138.23 \cdot 0.5},$$

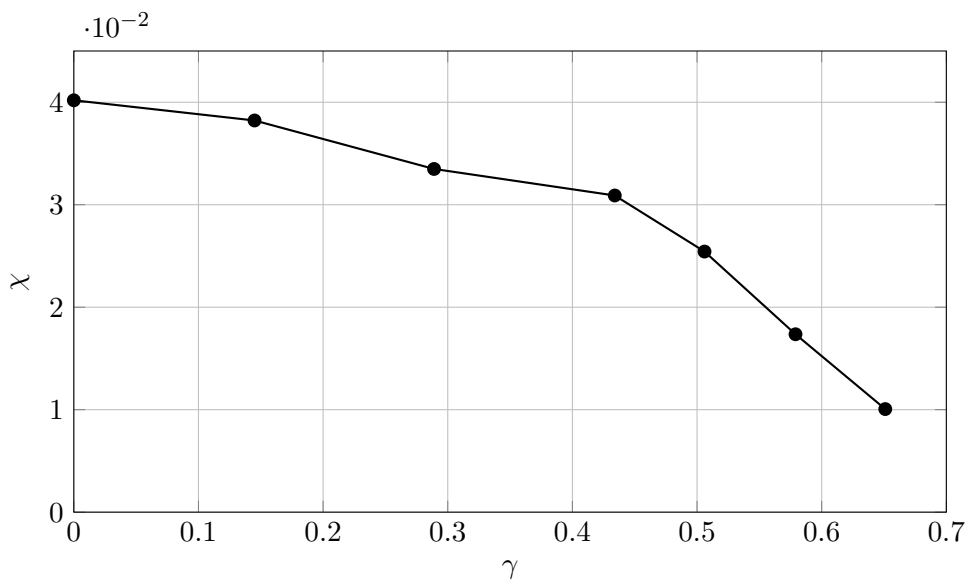
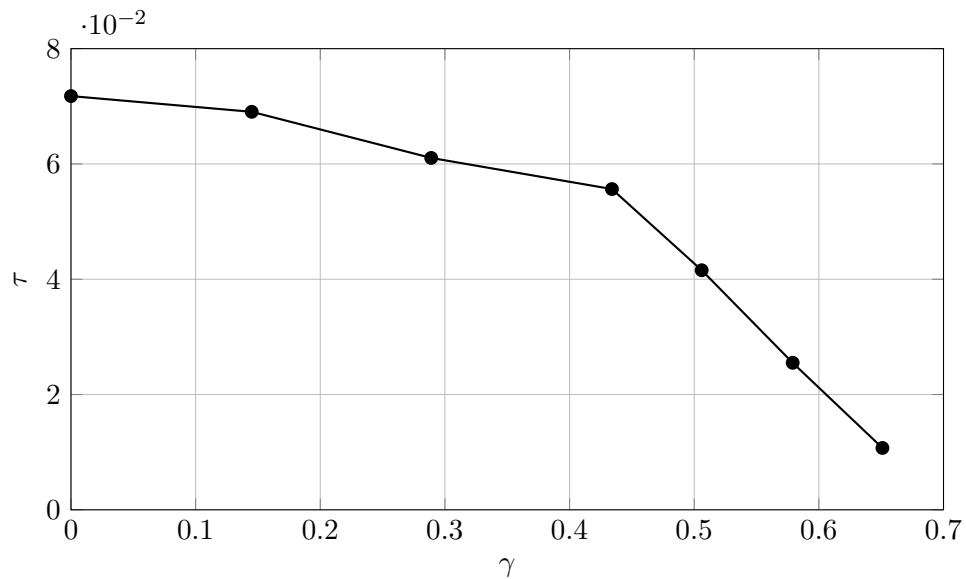
$$\tau = \frac{T_M}{1.225 \cdot 138.23^2 \cdot 0.5^4},$$

$$\chi = \frac{C_M}{1.225 \cdot 138.23^2 \cdot 0.5^5}.$$

Si ottiene la seguente tabella:

| $V_M$ [m/s] | $\gamma$ | $\tau$  | $\chi$  |
|-------------|----------|---------|---------|
| 0           | 0.000    | 0.07177 | 0.04019 |
| 10          | 0.145    | 0.06904 | 0.03822 |
| 20          | 0.289    | 0.06104 | 0.03349 |
| 30          | 0.434    | 0.05564 | 0.03090 |
| 35          | 0.506    | 0.04156 | 0.02543 |
| 40          | 0.579    | 0.02550 | 0.01736 |
| 45          | 0.651    | 0.01073 | 0.01006 |

I punti così ottenuti consentono di tracciare i diagrammi richiesti di  $\tau$  e  $\chi$  in funzione di  $\gamma$ .



### Calcolo per l'elica reale

L'elica reale è geometricamente simile al modello. Pertanto, a parità di rapporto caratteristico  $\gamma$ , essa avrà gli stessi coefficienti adimensionali  $\tau$  e  $\chi$  del modello.

Si convertono innanzitutto i dati dell'elica reale nelle unità fondamentali:

$$n = 1800 \text{ giri/min} = \frac{1800}{60} = 30 \text{ giri/s},$$

$$V = 460 \text{ km/h} = \frac{460}{3.6} = 127.78 \text{ m/s.}$$

Il raggio dell'elica reale è

$$R = \frac{D}{2} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ m.}$$

La velocità angolare dell'elica reale vale

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 30.$$

Pertanto

$$\omega = 188.50 \text{ rad/s.}$$

Il rapporto caratteristico dell'elica reale è quindi

$$\gamma = \frac{V}{\omega R} = \frac{127.78}{188.50 \cdot 1.5}.$$

Da cui

$$\gamma = 0.452.$$

Questo valore non coincide esattamente con uno dei valori tabulati per il modello. Occorre quindi interpolare i coefficienti  $\tau$  e  $\chi$  tra i due punti più vicini.

Dalla tabella si osserva che

$$\gamma = 0.452$$

è compreso tra

$$\gamma_1 = 0.434, \quad \gamma_2 = 0.506.$$

I corrispondenti valori dei coefficienti sono:

$$\tau_1 = 0.05564, \quad \tau_2 = 0.04156,$$

$$\chi_1 = 0.03090, \quad \chi_2 = 0.02543.$$

Applicando l'interpolazione lineare:

$$\tau(\gamma) = \tau_1 + \frac{\tau_2 - \tau_1}{\gamma_2 - \gamma_1} (\gamma - \gamma_1),$$

si ottiene

$$\tau(0.452) \simeq 0.05216.$$

Analogamente:

$$\chi(\gamma) = \chi_1 + \frac{\chi_2 - \chi_1}{\gamma_2 - \gamma_1} (\gamma - \gamma_1),$$

da cui

$$\chi(0.452) \simeq 0.02955.$$

**Densità dell'aria a quota 300 m**

Per una quota di 300 m, usando l'atmosfera standard, si può assumere

$$\rho_{300} \simeq 1.190 \text{ kg/m}^3.$$

La trazione dell'elica reale si ricava dalla definizione di coefficiente di trazione:

$$\tau = \frac{T}{\rho \omega^2 R^4}.$$

Pertanto:

$$T = \tau \rho \omega^2 R^4.$$

Sostituendo i valori numerici:

$$T = 0.05216 \cdot 1.190 \cdot 188.50^2 \cdot 1.5^4.$$

Poiché

$$1.5^4 = 5.0625,$$

si ha

$$T = 0.05216 \cdot 1.190 \cdot 188.50^2 \cdot 5.0625.$$

Da cui

$$T \simeq 11'166 \text{ N}.$$

Quindi

$$\boxed{T \simeq 11.17 \text{ kN}}.$$

La coppia si ricava invece dalla definizione di coefficiente di coppia:

$$\chi = \frac{C}{\rho \omega^2 R^5}.$$

Pertanto:

$$C = \chi \rho \omega^2 R^5.$$

Sostituendo:

$$C = 0.02955 \cdot 1.190 \cdot 188.50^2 \cdot 1.5^5.$$

Poiché

$$1.5^5 = 7.59375,$$

segue

$$C = 0.02955 \cdot 1.190 \cdot 188.50^2 \cdot 7.59375.$$

Da cui

$$C \simeq 9'487 \text{ N m}.$$

Quindi

$$\boxed{C \simeq 9.49 \text{ kN m}}.$$

### Osservazione

Rispetto alla forma più diffusa dei coefficienti scritti mediante  $n$  e  $D$ , le formule di Renard di prima specie impiegano la velocità angolare  $\omega$  e il raggio  $R$ . Infatti:

$$\omega = 2\pi n, \quad R = \frac{D}{2}.$$

Pertanto

$$\rho\omega^2 R^4 = \rho(2\pi n)^2 \left(\frac{D}{2}\right)^4 = \rho \frac{\pi^2}{4} n^2 D^4,$$

e

$$\rho\omega^2 R^5 = \rho(2\pi n)^2 \left(\frac{D}{2}\right)^5 = \rho \frac{\pi^2}{8} n^2 D^5.$$

Di conseguenza, i coefficienti  $\tau$  e  $\chi$  assumono valori numerici diversi rispetto ai coefficienti definiti mediante  $n$  e  $D$ , ma il calcolo finale della trazione e della coppia rimane coerente se si utilizzano le formule inverse:

$$T = \tau \rho\omega^2 R^4, \quad C = \chi \rho\omega^2 R^5.$$

### Esercizio 14 – Velocità ascensionale e potenza motore di un motoelica

Un motoelica avente le caratteristiche sottoindicate vola alla quota

$$z = 2'800 \text{ m}$$

alla velocità

$$V = 470 \text{ km/h.}$$

Determinare la componente verticale della velocità  $w$  e la potenza motore.

Le caratteristiche dell'aereo sono le seguenti:

$$Q = 44'150 \text{ N}; \quad \frac{Q}{S} = 1'766 \text{ N/m}^2; \quad C_{D0} = 0.021; \quad AR = 6.2;$$

$$\eta_r = 0.9; \quad D = 2.8 \text{ m}; \quad \tau_r = \frac{3}{4}; \quad n = 2'200 \text{ giri/min.}$$

Sono inoltre assegnati, per l'elica, i seguenti coefficienti adimensionali di Renard di prima specie:

| $\gamma$ | 0     | 0.1   | 0.2   | 0.3   | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\tau$   | 0.094 | 0.093 | 0.090 | 0.083 | 0.081 | 0.065 | 0.043 | 0.024 |
| $\chi$   | 0.052 | 0.050 | 0.049 | 0.045 | 0.043 | 0.039 | 0.028 | 0.017 |



## Soluzione

Si indicano con  $\tau$  e  $\chi$  i coefficienti di trazione e di coppia dell'elica, definiti mediante le formule di Renard di prima specie:

$$\tau = \frac{T}{\rho \omega^2 R^4},$$

$$\chi = \frac{C}{\rho \omega^2 R^5},$$

dove  $T$  è la trazione dell'elica,  $C$  è la coppia resistente sull'elica,  $\rho$  è la densità dell'aria alla quota di volo,  $\omega$  è la velocità angolare dell'elica e  $R$  è il raggio dell'elica.

Il rapporto caratteristico di funzionamento è

$$\gamma = \frac{V}{\omega R}.$$

## Dati preliminari

La superficie alare si ricava dal carico alare:

$$\frac{Q}{S} = 1'766 \text{ N/m}^2.$$

Pertanto:

$$S = \frac{Q}{Q/S}.$$

Sostituendo:

$$S = \frac{44150}{1766} = 25.0 \text{ m}^2.$$

La velocità di volo, espressa in unità del Sistema Internazionale, è

$$V = \frac{470}{3.6} = 130.56 \text{ m/s}.$$

Il diametro dell'elica è

$$D = 2.8 \text{ m},$$

per cui il raggio vale

$$R = \frac{D}{2} = \frac{2.8}{2} = 1.4 \text{ m}.$$

La velocità di rotazione assegnata è quella del motore. Poiché è presente un riduttore con rapporto

$$\tau_r = \frac{3}{4},$$

la velocità di rotazione dell'elica è

$$n_e = \tau_r n.$$

Quindi:

$$n_e = \frac{3}{4} \cdot 2200 = 1'650 \text{ giri/min}.$$

In giri al secondo:

$$n_e = \frac{1650}{60} = 27.5 \text{ s}^{-1}.$$

La corrispondente velocità angolare dell'elica è

$$\omega = 2\pi n_e.$$

Pertanto:

$$\omega = 2\pi \cdot 27.5 = 172.79 \text{ rad/s}.$$

### Densità dell'aria alla quota di 2'800 m

Alla quota

$$z = 2'800 \text{ m},$$

assumendo atmosfera standard, si può prendere

$$\rho_{2800} \simeq 0.928 \text{ kg/m}^3.$$

### Calcolo del rapporto caratteristico $\gamma$

Il rapporto caratteristico di funzionamento dell'elica vale

$$\gamma = \frac{V}{\omega R}.$$

Sostituendo:

$$\gamma = \frac{130.56}{172.79 \cdot 1.4}.$$

Da cui:

$$\gamma = 0.540.$$

Il valore ottenuto è compreso tra

$$\gamma_1 = 0.5, \quad \gamma_2 = 0.6.$$

Dalla tabella si leggono:

$$\tau_1 = 0.065, \quad \tau_2 = 0.043,$$

$$\chi_1 = 0.039, \quad \chi_2 = 0.028.$$

Si procede mediante interpolazione lineare.

Per il coefficiente di trazione:

$$\tau(\gamma) = \tau_1 + \frac{\tau_2 - \tau_1}{\gamma_2 - \gamma_1} (\gamma - \gamma_1).$$

Sostituendo:

$$\tau(0.540) = 0.065 + \frac{0.043 - 0.065}{0.6 - 0.5} (0.540 - 0.5).$$

Si ottiene:

$$\tau \simeq 0.0563.$$

Per il coefficiente di coppia:

$$\chi(\gamma) = \chi_1 + \frac{\chi_2 - \chi_1}{\gamma_2 - \gamma_1} (\gamma - \gamma_1).$$

Sostituendo:

$$\chi(0.540) = 0.039 + \frac{0.028 - 0.039}{0.6 - 0.5} (0.540 - 0.5).$$

Si ottiene:

$$\chi \simeq 0.0346.$$

### Calcolo della trazione dell'elica

Dalla definizione del coefficiente di trazione:

$$\tau = \frac{T}{\rho \omega^2 R^4},$$

si ricava

$$T = \tau \rho \omega^2 R^4.$$

Sostituendo:

$$T = 0.0563 \cdot 0.928 \cdot 172.79^2 \cdot 1.4^4.$$

Poiché

$$1.4^4 = 3.8416,$$

si ha:

$$T \simeq 5'989 \text{ N}.$$

Quindi:

$$\boxed{T \simeq 5.99 \text{ kN}}.$$

### Calcolo della resistenza aerodinamica del velivolo

Si assume, per piccoli angoli di rampa, che la portanza sia circa uguale al peso:

$$L \simeq Q.$$

Il coefficiente di portanza vale quindi

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} \simeq \frac{Q}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}.$$

Sostituendo:

$$C_L = \frac{44150}{\frac{1}{2} \cdot 0.928 \cdot 130.56^2 \cdot 25}.$$

Si ottiene:

$$C_L \simeq 0.223.$$

Si assume una polare parabolica del tipo

$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR}.$$

Pertanto:

$$C_D = 0.021 + \frac{0.223^2}{\pi \cdot 6.2}.$$

Da cui:

$$C_D \simeq 0.0236.$$

La resistenza aerodinamica vale

$$D_a = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D.$$

Sostituendo:

$$D_a = \frac{1}{2} \cdot 0.928 \cdot 130.56^2 \cdot 25 \cdot 0.0236.$$

Si ottiene:

$$D_a \simeq 4'658 \text{ N}.$$

### Calcolo della componente verticale della velocità

In salita stazionaria, con angolo di rampa piccolo, l'eccesso di trazione rispetto alla resistenza serve a fornire la componente del peso lungo la traiettoria.

L'equilibrio lungo la traiettoria è

$$T - D_a - Q \sin \theta = 0.$$

Poiché

$$w = V \sin \theta,$$

si ha

$$\sin \theta = \frac{w}{V}.$$

Sostituendo nell'equilibrio lungo la traiettoria:

$$T - D_a - Q \frac{w}{V} = 0.$$

Da cui:

$$w = \frac{(T - D_a)V}{Q}.$$

Sostituendo i valori numerici:

$$w = \frac{(5989 - 4658) \cdot 130.56}{44150}.$$

Si ottiene:

$$w \simeq 3.93 \text{ m/s.}$$

Quindi:

$$w \simeq 3.93 \text{ m/s.}$$

In metri al minuto:

$$w \simeq 3.93 \cdot 60 = 236 \text{ m/min.}$$

$$w \simeq 236 \text{ m/min.}$$

### Calcolo della coppia sull'elica

Dalla definizione del coefficiente di coppia:

$$\chi = \frac{C}{\rho \omega^2 R^5},$$

si ricava

$$C = \chi \rho \omega^2 R^5.$$

Sostituendo:

$$C = 0.0346 \cdot 0.928 \cdot 172.79^2 \cdot 1.4^5.$$

Poiché

$$1.4^5 = 5.3782,$$

si ottiene:

$$C \simeq 5'161 \text{ N m.}$$

$$C \simeq 5.16 \text{ kN m.}$$

### Calcolo della potenza motore

La potenza assorbita dall'elica è

$$\Pi_e = C\omega.$$

Sostituendo:

$$\Pi_e = 5161 \cdot 172.79.$$

Da cui:

$$\Pi_e \simeq 891'676 \text{ W.}$$

Quindi:

$$\Pi_e \simeq 891.7 \text{ kW.}$$

Tenendo conto del rendimento del riduttore,

$$\eta_r = 0.9,$$

la potenza motore deve essere

$$\Pi_m = \frac{\Pi_e}{\eta_r}.$$

Pertanto:

$$\Pi_m = \frac{891.7}{0.9} = 990.8 \text{ kW}.$$

Quindi:

$$\boxed{\Pi_m \simeq 991 \text{ kW}}.$$

Espressa in cavalli vapore:

$$\Pi_m = \frac{990800}{735.5} \simeq 1'347 \text{ CV}.$$

$$\boxed{\Pi_m \simeq 1'347 \text{ CV}}.$$

### Osservazione

Il risultato è stato ottenuto assumendo una salita a piccolo angolo, per cui

$$L \simeq Q.$$

L'approssimazione è accettabile perché la velocità ascensionale trovata è molto minore della velocità lungo la traiettoria:

$$\frac{w}{V} = \frac{3.93}{130.56} \simeq 0.030.$$

Pertanto l'angolo di rampa è piccolo e vale circa

$$\theta \simeq \arcsin(0.030) \simeq 1.7^\circ.$$

## Esercizio 15 – Velocità di volo, potenza necessaria e massima salita

Per un velivolo avente le caratteristiche sottoindicate, determinare a quota zero:

1. le velocità minima e massima di volo rettilineo orizzontale uniforme;
2. la potenza necessaria minima;
3. la velocità di massima salita  $V_{ms}$  e la velocità ascensionale massima  $w_{max}$ .

È assegnata la polare del velivolo:

|       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $C_L$ | 0     | 0.30  | 0.60  | 0.90  | 1.12  | 1.16  | 1.12  |
| $C_D$ | 0.038 | 0.044 | 0.064 | 0.100 | 0.176 | 0.230 | 0.280 |

È assegnata inoltre, per punti, la curva del coefficiente di trazione dell'elica in funzione del rapporto caratteristico di funzionamento:

$$\tau = f(\gamma)$$

|          |        |        |        |        |        |        |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\gamma$ | 0.119  | 0.159  | 0.198  | 0.238  | 0.278  | 0.317  |
| $\tau$   | 0.0238 | 0.0274 | 0.0279 | 0.0247 | 0.0182 | 0.0105 |

Le caratteristiche del velivolo sono:

$$Q = 22'070 \text{ N}, \quad S = 25.5 \text{ m}^2, \quad n_e = 1'570 \text{ giri/min}, \quad D_e = 3 \text{ m}.$$

### Soluzione

Il problema richiede di confrontare, al variare della velocità, la trazione disponibile fornita dall'elica con la resistenza aerodinamica del velivolo.

Il volo rettilineo orizzontale uniforme è possibile quando sono soddisfatte le due condizioni:

$$L = Q,$$

$$T = D_a.$$

La prima equazione consente di calcolare, per ogni velocità, il coefficiente di portanza richiesto; la seconda consente di individuare le velocità per le quali la trazione disponibile eguaglia la resistenza del velivolo.

### Dati preliminari

A quota zero si assume, per l'aria in atmosfera standard,

$$\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3.$$

La velocità di rotazione dell'elica è

$$n_e = 1'570 \text{ giri/min}.$$

In giri al secondo:

$$n_e = \frac{1570}{60} = 26.17 \text{ s}^{-1}.$$

La velocità angolare dell'elica vale:

$$\omega = 2\pi n_e.$$

Pertanto:

$$\omega = 2\pi \cdot 26.17 = 164.41 \text{ rad/s}.$$

Il raggio dell'elica è

$$R = \frac{D_e}{2} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ m}.$$

Il rapporto caratteristico di funzionamento dell'elica è definito da:

$$\gamma = \frac{V}{\omega R}.$$

Da cui:

$$V = \gamma \omega R.$$

Poiché

$$\omega R = 164.41 \cdot 1.5 = 246.62 \text{ m/s},$$

le velocità corrispondenti ai valori tabulati di  $\gamma$  sono:

| $\gamma$           | 0.119  | 0.159  | 0.198  | 0.238  | 0.278  | 0.317  |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $V \text{ [m/s]}$  | 29.35  | 39.21  | 48.83  | 58.69  | 68.56  | 78.18  |
| $V \text{ [km/h]}$ | 105.65 | 141.16 | 175.79 | 211.30 | 246.81 | 281.44 |

### Trazione disponibile dell'elica

Secondo le formule di Renard di prima specie, il coefficiente di trazione è

$$\tau = \frac{T}{\rho \omega^2 R^4}.$$

Pertanto la trazione disponibile vale:

$$T = \tau \rho \omega^2 R^4.$$

Calcoliamo il fattore comune:

$$\rho \omega^2 R^4 = 1.225 \cdot 164.41^2 \cdot 1.5^4.$$

Poiché

$$1.5^4 = 5.0625,$$

si ottiene

$$\rho \omega^2 R^4 \simeq 167'632 \text{ N}.$$

Quindi, per ciascun valore di  $\tau$ ,

$$T = \tau \cdot 167632.$$

Si ottiene:

| $\gamma$ | $V \text{ [m/s]}$ | $V \text{ [km/h]}$ | $T \text{ [N]}$ |
|----------|-------------------|--------------------|-----------------|
| 0.119    | 29.35             | 105.65             | 3989.6          |
| 0.159    | 39.21             | 141.16             | 4593.1          |
| 0.198    | 48.83             | 175.79             | 4676.9          |
| 0.238    | 58.69             | 211.30             | 4140.5          |
| 0.278    | 68.56             | 246.81             | 3050.9          |
| 0.317    | 78.18             | 281.44             | 1760.1          |



## Resistenza aerodinamica del velivolo

In volo orizzontale uniforme:

$$L = Q.$$

Ma

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 SC_L.$$

Pertanto, per ogni velocità,

$$C_L = \frac{Q}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}.$$

La resistenza aerodinamica vale invece:

$$D_a = \frac{1}{2}\rho V^2 SC_D.$$

Il valore di  $C_D$  viene ricavato dalla polare assegnata, interpolando linearmente in funzione di  $C_L$ .

## Velocità minima teorica di sostentamento

Il massimo coefficiente di portanza assegnato dalla polare è

$$C_{L,\max} = 1.16.$$

La velocità minima di sostentamento si ottiene da

$$Q = \frac{1}{2}\rho V_s^2 SC_{L,\max}.$$

Da cui:

$$V_s = \sqrt{\frac{2Q}{\rho SC_{L,\max}}}.$$

Sostituendo:

$$V_s = \sqrt{\frac{2 \cdot 22070}{1.225 \cdot 25.5 \cdot 1.16}}.$$

Si ottiene:

$$V_s = 34.90 \text{ m/s}.$$

In chilometri orari:

$$V_s = 34.90 \cdot 3.6 = 125.65 \text{ km/h}.$$

$$\boxed{V_s \simeq 125.65 \text{ km/h}}$$

Tuttavia, la velocità minima di volo rettilineo orizzontale uniforme deve soddisfare anche la condizione propulsiva

$$T = D_a.$$

La velocità minima effettiva sarà quindi il primo punto di intersezione tra la curva della trazione disponibile e quella della resistenza richiesta.

## Determinazione delle velocità di volo rettilineo orizzontale

Si costruisce, al variare di  $V$ , la funzione

$$F(V) = T(V) - D_a(V).$$

Il volo rettilineo orizzontale uniforme è possibile quando

$$F(V) = 0.$$

Interpolando linearmente i dati dell'elica e della polare, si trovano due intersezioni:

$$V_{\min} = 34.93 \text{ m/s},$$

$$V_{\max} = 67.43 \text{ m/s}.$$

In chilometri orari:

$$V_{\min} = 34.93 \cdot 3.6 = 125.76 \text{ km/h},$$

$$V_{\max} = 67.43 \cdot 3.6 = 242.75 \text{ km/h}.$$

Quindi:

$$V_{\min} \simeq 125.8 \text{ km/h}$$

$$V_{\max} \simeq 242.7 \text{ km/h}$$

Si osservi che  $V_{\min}$  è praticamente coincidente con la velocità di stallo calcolata in precedenza. Ciò significa che, nella zona delle basse velocità, il limite aerodinamico e il limite propulsivo sono quasi coincidenti.

## Potenza necessaria minima

La potenza necessaria al volo orizzontale è

$$\Pi_n = D_a V.$$

Per determinare la potenza necessaria minima si valuta la funzione

$$\Pi_n(V) = D_a(V)V$$

e si cerca il suo minimo.

Dalla scansione della polare assegnata, con interpolazione lineare dei valori di  $C_D$ , il minimo si ottiene per:

$$V \simeq 39.63 \text{ m/s}.$$

In chilometri orari:

$$V \simeq 39.63 \cdot 3.6 = 142.66 \text{ km/h}.$$

A tale velocità risulta:

$$C_L \simeq 0.900,$$

$$C_D \simeq 0.100.$$

La resistenza aerodinamica corrispondente è

$$D_a \simeq 2'452 \text{ N}.$$

Pertanto:

$$\Pi_{n,\min} = D_a V.$$

Sostituendo:

$$\Pi_{n,\min} = 2452 \cdot 39.63.$$

Da cui:

$$\Pi_{n,\min} \simeq 97'177 \text{ W}.$$

Quindi:

$$\Pi_{n,\min} \simeq 97.2 \text{ kW}$$

In cavalli vapore:

$$\Pi_{n,\min} = \frac{97177}{735.5} \simeq 132 \text{ CV}.$$

$$\Pi_{n,\min} \simeq 132 \text{ CV}$$

### Velocità di massima salita e velocità ascensionale massima

La potenza disponibile al volo è

$$\Pi_d = TV.$$

La potenza necessaria è

$$\Pi_n = D_a V.$$

La potenza eccedente è quindi

$$\Delta\Pi = \Pi_d - \Pi_n.$$

Essendo

$$\Delta\Pi = Qw,$$

si ottiene

$$w = \frac{\Delta\Pi}{Q} = \frac{(T - D_a)V}{Q}.$$

La velocità di massima salita è quella per cui la potenza eccedente è massima, cioè:

$$\Delta\Pi = (T - D_a)V$$

assume il valore massimo.

Valutando tale quantità per le velocità comprese tra  $V_{\min}$  e  $V_{\max}$ , il massimo si ottiene in corrispondenza di:

$$V_{ms} \simeq 48.83 \text{ m/s.}$$

In chilometri orari:

$$V_{ms} = 48.83 \cdot 3.6 = 175.79 \text{ km/h.}$$

A tale velocità:

$$\gamma \simeq 0.198,$$

$$T \simeq 4'677 \text{ N,}$$

$$D_a \simeq 2'365 \text{ N.}$$

La potenza eccedente massima è:

$$\Delta\Pi_{\max} = (T - D_a)V.$$

Sostituendo:

$$\Delta\Pi_{\max} = (4677 - 2365) \cdot 48.83.$$

Da cui:

$$\Delta\Pi_{\max} \simeq 112'886 \text{ W.}$$

Quindi:

$$\Delta\Pi_{\max} \simeq 112.9 \text{ kW.}$$

La corrispondente velocità ascensionale massima è:

$$w_{\max} = \frac{\Delta\Pi_{\max}}{Q}.$$

Sostituendo:

$$w_{\max} = \frac{112886}{22070}.$$

Da cui:

$$w_{\max} \simeq 5.11 \text{ m/s.}$$

In metri al minuto:

$$w_{\max} = 5.11 \cdot 60 = 307 \text{ m/min.}$$

Quindi:

$$V_{ms} \simeq 175.8 \text{ km/h}$$

$$w_{\max} \simeq 5.11 \text{ m/s}$$

ossia:

$$w_{\max} \simeq 307 \text{ m/min}$$

## Osservazione

La velocità minima di volo orizzontale risulta praticamente coincidente con la velocità di stallo:

$$V_{\min} \simeq V_s.$$

Ciò accade perché, nella zona delle basse velocità, il velivolo richiede un coefficiente di portanza prossimo al massimo disponibile dalla polare, mentre la trazione dell'elica è appena sufficiente a equilibrare la resistenza. Il limite inferiore di volo è quindi determinato simultaneamente dal vincolo aerodinamico e dal vincolo propulsivo.

La massima salita, invece, non si verifica né alla minima velocità né alla massima velocità, ma alla velocità per cui è massima la potenza eccedente:

$$\Delta\Pi = (T - D_a)V.$$

Per questo motivo la velocità di massima salita  $V_{ms}$  è prossima alla zona in cui la trazione disponibile è elevata e la resistenza aerodinamica è ancora relativamente contenuta.

## Esercizio 16 – Compensazione della coppia di reazione mediante differenza di apertura

Un motoelica vola alla quota

$$z = 4'300 \text{ m}$$

all'incidenza

$$\alpha = 4^\circ 6'$$

in volo rettilineo orizzontale uniforme. Determinare la differenza di apertura dei due semipiani necessaria per compensare la coppia di reazione.

Le caratteristiche dell'aereo sono:

$$Q = 76'520 \text{ N}; \quad \frac{Q}{S} = 2'747 \text{ N/m}^2; \quad AR = 7.9;$$

$$C_{D0} = 0.021; \quad C_{\ell_\alpha} = 5.5 \text{ rad}^{-1}; \quad \eta_e = 0.85; \quad n_e = 2'000 \text{ giri/min.}$$

## Soluzione

Il problema richiede di determinare la differenza di apertura dei due semipiani necessaria per generare un momento aerodinamico di rollio uguale e contrario alla coppia di reazione dell'elica.

La coppia di reazione dell'elica è uguale, in modulo, alla coppia motrice trasmessa all'elica. Essa può essere ricavata dalla potenza motrice e dalla velocità angolare dell'elica:

$$M_e = \frac{\Pi_m}{\omega_e}.$$

Occorre quindi determinare dapprima la velocità di volo, la resistenza aerodinamica, la potenza richiesta e infine la coppia di reazione.

## Superficie alare

Dal carico alare assegnato:

$$\frac{Q}{S} = 2'747 \text{ N/m}^2$$

si ricava

$$S = \frac{Q}{Q/S}.$$

Sostituendo:

$$S = \frac{76520}{2747}.$$

Da cui:

$$S \simeq 27.86 \text{ m}^2.$$

## Apertura alare

L'allungamento alare geometrico è definito da

$$AR = \frac{b^2}{S}.$$

Pertanto:

$$b = \sqrt{AR S}.$$

Sostituendo:

$$b = \sqrt{7.9 \cdot 27.86}.$$

Si ottiene:

$$b \simeq 14.83 \text{ m}.$$

La semiala, nella configurazione simmetrica iniziale, ha quindi apertura

$$\frac{b}{2} \simeq 7.42 \text{ m}.$$

## Coefficiente di portanza dell'ala finita

Il dato

$$C_{\ell\alpha} = 5.5 \text{ rad}^{-1}$$

rappresenta la pendenza della retta di portanza del profilo, cioè del profilo bidimensionale.

Per un'ala finita, la pendenza della curva di portanza è minore a causa della presenza del downwash e della resistenza indotta. Si utilizza quindi la relazione:

$$C_{L\alpha} = \frac{C_{\ell\alpha}}{1 + \frac{C_{\ell\alpha}}{\pi A Re}}.$$

Non essendo assegnato esplicitamente il fattore di Oswald, si assume

$$e \simeq 1.$$

Pertanto:

$$C_{L\alpha} = \frac{5.5}{1 + \frac{5.5}{\pi \cdot 7.9 \cdot 1}}.$$

Si ottiene:

$$C_{L\alpha} \simeq 4.50 \text{ rad}^{-1}.$$

L'incidenza assegnata è

$$\alpha = 4^{\circ}6'.$$

Convertendo in gradi decimali:

$$\alpha = 4 + \frac{6}{60} = 4.1^{\circ}.$$

In radianti:

$$\alpha = 4.1 \frac{\pi}{180} \simeq 0.07156 \text{ rad}.$$

Assumendo valida la legge lineare della portanza per l'ala finita:

$$C_L = C_{L\alpha} \alpha.$$

Sostituendo:

$$C_L = 4.50 \cdot 0.07156.$$

Da cui:

$$C_L \simeq 0.322.$$

### Densità dell'aria alla quota di 4'300 m

Alla quota

$$z = 4'300 \text{ m},$$

assumendo atmosfera standard, si può porre:

$$\rho_{4300} \simeq 0.794 \text{ kg/m}^3.$$

### Velocità di volo

In volo rettilineo orizzontale uniforme si ha:

$$L = Q.$$

Poiché

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L,$$

si ottiene:

$$Q = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L.$$

Da cui:

$$V = \sqrt{\frac{2Q}{\rho S C_L}}.$$

Sostituendo:

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot 76520}{0.794 \cdot 27.86 \cdot 0.322}}.$$

Si ottiene:

$$V \simeq 146.6 \text{ m/s}.$$

In chilometri orari:

$$V \simeq 146.6 \cdot 3.6 \simeq 527.6 \text{ km/h}.$$

## Resistenza aerodinamica

Si assume una polare parabolica del tipo

$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi A Re}.$$

Con  $e \simeq 1$ , si ha:

$$C_D = 0.021 + \frac{0.322^2}{\pi \cdot 7.9}.$$

Da cui:

$$C_D \simeq 0.02518.$$

La resistenza aerodinamica vale:

$$D_a = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D.$$

Sostituendo:

$$D_a = \frac{1}{2} \cdot 0.794 \cdot 146.6^2 \cdot 27.86 \cdot 0.02518.$$

Si ottiene:

$$D_a \simeq 5'981 \text{ N}.$$

Nel volo rettilineo orizzontale uniforme la trazione dell'elica deve uguagliare la resistenza:

$$T = D_a.$$

Pertanto:

$$T \simeq 5'981 \text{ N}.$$



## Potenza motrice

La potenza utile al volo è

$$\Pi_u = T V.$$

Sostituendo:

$$\Pi_u = 5981 \cdot 146.6.$$

Da cui:

$$\Pi_u \simeq 877 \text{ kW}.$$

Tenendo conto del rendimento dell'elica,

$$\eta_e = 0.85,$$

la potenza motrice vale:

$$\Pi_m = \frac{\Pi_u}{\eta_e}.$$

Quindi:

$$\Pi_m = \frac{877}{0.85}.$$

Si ottiene:

$$\Pi_m \simeq 1'031 \text{ kW}.$$

## Coppia di reazione dell'elica

La velocità di rotazione dell'elica è

$$n_e = 2'000 \text{ giri/min.}$$

In giri al secondo:

$$n_e = \frac{2000}{60} = 33.33 \text{ s}^{-1}.$$

La velocità angolare è:

$$\omega_e = 2\pi n_e.$$

Pertanto:

$$\omega_e = 2\pi \cdot 33.33 \simeq 209.44 \text{ rad/s}.$$

La coppia motrice, uguale in modulo alla coppia di reazione dell'elica, vale:

$$M_e = \frac{\Pi_m}{\omega_e}.$$

Sostituendo:

$$M_e = \frac{1031208}{209.44}.$$

Da cui:

$$M_e \simeq 4'924 \text{ N m}.$$

## Momento di rollio dovuto alla differenza di apertura

Indichiamo con  $b_d$  e  $b_s$  le aperture dei due semipiani, rispettivamente destro e sinistro, e con

$$\Delta b = b_d - b_s$$

la differenza di apertura da determinare.

Si suppone che la corda media e l'incidenza restino le stesse sui due lati. Pertanto il carico aerodinamico per unità di apertura è lo stesso sui due semipiani. La semiala più lunga sviluppa però una portanza maggiore e applicata a un braccio maggiore rispetto al piano di simmetria.

Indichiamo con  $q_L$  il carico portante per unità di apertura. Allora la portanza sulla semiala destra è

$$L_d = q_L b_d,$$

mentre quella sulla semiala sinistra è

$$L_s = q_L b_s.$$

Le due risultanti si possono considerare applicate, rispettivamente, nei baricentri dei due semipiani, cioè alle distanze

$$\frac{b_d}{2}, \quad \frac{b_s}{2}$$

dal piano di simmetria.

Il momento di rollio generato dalla differenza di apertura è quindi

$$M_a = L_d \frac{b_d}{2} - L_s \frac{b_s}{2}.$$

Sostituendo  $L_d = q_L b_d$  e  $L_s = q_L b_s$ , si ha

$$M_a = q_L b_d \frac{b_d}{2} - q_L b_s \frac{b_s}{2}.$$

Dunque:

$$M_a = \frac{q_L}{2} (b_d^2 - b_s^2).$$

Poiché

$$b_d^2 - b_s^2 = (b_d - b_s)(b_d + b_s),$$

si ottiene

$$M_a = \frac{q_L}{2} \Delta b (b_d + b_s).$$

Ma

$$b_d + b_s = b,$$

e la portanza totale vale, in volo orizzontale uniforme,

$$Q = L = q_L b.$$

Pertanto:

$$q_L = \frac{Q}{b}.$$

Sostituendo:

$$M_a = \frac{1}{2} \frac{Q}{b} \Delta b b.$$

Ne segue la relazione:

$$M_a = \frac{Q}{2} \Delta b.$$

Per compensare la coppia di reazione dell'elica occorre imporre

$$M_a = M_e.$$

Quindi:

$$\frac{Q}{2} \Delta b = M_e.$$

Da cui:

$$\Delta b = \frac{2M_e}{Q}.$$

### Calcolo numerico della differenza di apertura

Sostituendo i valori numerici:

$$\Delta b = \frac{2 \cdot 4924}{76520}.$$

Da cui:

$$\Delta b \simeq 0.129 \text{ m}.$$

Quindi:

$$\boxed{\Delta b \simeq 0.129 \text{ m}}$$

ossia:

$$\boxed{\Delta b \simeq 12.9 \text{ cm}}.$$

### Risultato finale

La differenza di apertura dei due semipiani necessaria per compensare la coppia di reazione dell'elica è:

$$\boxed{\Delta b \simeq 0.129 \text{ m}}$$

ovvero:

$$\boxed{\Delta b \simeq 12.9 \text{ cm}}$$

## Osservazione

La correzione introdotta consiste nel distinguere tra la pendenza della retta di portanza del profilo,

$$C_{\ell_\alpha},$$

e la pendenza della curva di portanza dell'ala finita,

$$C_{L_\alpha}.$$

La presenza dei vortici d'estremità e del downwash riduce la pendenza della curva di portanza dell'ala rispetto a quella del profilo. Per questo motivo si usa:

$$C_{L_\alpha} = \frac{C_{\ell_\alpha}}{1 + \frac{C_{\ell_\alpha}}{\pi A Re}}.$$

Nel caso in esame, passando da  $C_{\ell_\alpha} = 5.5 \text{ rad}^{-1}$  a

$$C_{L_\alpha} \simeq 4.50 \text{ rad}^{-1},$$

il coefficiente di portanza alla stessa incidenza diminuisce. Di conseguenza, per sostenere lo stesso peso alla quota assegnata, il velivolo deve volare a una velocità maggiore; cresce la potenza richiesta e quindi cresce anche la coppia di reazione da compensare.

## Esercizio 17 – Efficienza, potenza motore e salita

Un aereo avente

$$Q = 52'975 \text{ N}, \quad S = 30 \text{ m}^2,$$

vola in orizzontale alla quota

$$z = 3'500 \text{ m}.$$

È assegnata la seguente polare:

| $\alpha [^\circ]$ | 0.48   | 2.90   | 5.35   | 7.90   | 10.35  | 12.80  |
|-------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $C_L$             | 0.2030 | 0.4200 | 0.6372 | 0.8540 | 1.0730 | 1.2880 |
| $C_D$             | 0.0200 | 0.0258 | 0.0380 | 0.0526 | 0.0756 | 0.1144 |

Sapendo che

$$D_e = 3.10 \text{ m}, \quad n_e = 1'560 \text{ giri/min}, \quad \gamma = 0.318,$$

calcolare:

1. l'efficienza;
2. la potenza del motore sapendo che, per compensare la coppia di reazione, una semiala è 8 cm più lunga dell'altra;
3. la potenza del motore in cavalli qualora si volesse consentire all'aereo una componente verticale della velocità

$$w = 3 \text{ m/s}.$$

## Soluzione

Il rapporto caratteristico di funzionamento dell'elica è definito da

$$\gamma = \frac{V}{\omega R},$$

dove  $V$  è la velocità di avanzamento,  $\omega$  è la velocità angolare dell'elica e  $R$  è il raggio dell'elica. La velocità di rotazione dell'elica è

$$n_e = 1'560 \text{ giri/min.}$$

In giri al secondo:

$$n_e = \frac{1560}{60} = 26 \text{ s}^{-1}.$$

La velocità angolare dell'elica è

$$\omega = 2\pi n_e.$$

Pertanto:

$$\omega = 2\pi \cdot 26 = 163.36 \text{ rad/s.}$$

Il raggio dell'elica vale

$$R = \frac{D_e}{2} = \frac{3.10}{2} = 1.55 \text{ m.}$$

Dal rapporto caratteristico:

$$\gamma = \frac{V}{\omega R},$$

si ricava la velocità di volo:

$$V = \gamma \omega R.$$

Sostituendo:

$$V = 0.318 \cdot 163.36 \cdot 1.55.$$

Da cui:

$$V \simeq 80.52 \text{ m/s.}$$

In chilometri orari:

$$V \simeq 80.52 \cdot 3.6 = 289.9 \text{ km/h.}$$

## Densità dell'aria alla quota di 3'500 m

Alla quota

$$z = 3'500 \text{ m,}$$

assumendo atmosfera standard, si può porre:

$$\rho_{3500} \simeq 0.863 \text{ kg/m}^3.$$

## Coefficiente di portanza richiesto

In volo rettilineo orizzontale uniforme si ha

$$L = Q.$$

Poiché

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L,$$

segue

$$Q = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L.$$

Da cui:

$$C_L = \frac{Q}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}.$$

Sostituendo:

$$C_L = \frac{52975}{\frac{1}{2} \cdot 0.863 \cdot 80.52^2 \cdot 30}.$$

Si ottiene:

$$C_L \simeq 0.631.$$

## Lettura della polare

Il valore

$$C_L \simeq 0.631$$

è compreso tra i due valori tabulati

$$C_{L,1} = 0.4200, \quad C_{L,2} = 0.6372.$$

I corrispondenti valori del coefficiente di resistenza sono:

$$C_{D,1} = 0.0258, \quad C_{D,2} = 0.0380.$$

Interpolando linearmente:

$$C_D = C_{D,1} + \frac{C_{D,2} - C_{D,1}}{C_{L,2} - C_{L,1}} (C_L - C_{L,1}).$$

Sostituendo:

$$C_D = 0.0258 + \frac{0.0380 - 0.0258}{0.6372 - 0.4200} (0.631 - 0.4200).$$

Da cui:

$$C_D \simeq 0.0377.$$

Interpolando analogamente sulla riga delle incidenze si ottiene:

$$\alpha \simeq 5.28^\circ.$$

## Efficienza aerodinamica

L'efficienza aerodinamica del velivolo è

$$E = \frac{C_L}{C_D}.$$

Sostituendo:

$$E = \frac{0.631}{0.0377}.$$

Si ottiene:

$$E \simeq 16.8.$$

Quindi:

$$E \simeq 16.8$$

## Resistenza aerodinamica e potenza utile

La resistenza aerodinamica vale

$$D_a = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D.$$

Sostituendo:

$$D_a = \frac{1}{2} \cdot 0.863 \cdot 80.52^2 \cdot 30 \cdot 0.0377.$$

Da cui:

$$D_a \simeq 3'161 \text{ N}.$$

Nel volo rettilineo orizzontale uniforme la trazione deve uguagliare la resistenza:

$$T = D_a.$$

La potenza utile al volo è quindi:

$$\Pi_u = TV = D_a V.$$

Sostituendo:

$$\Pi_u = 3161 \cdot 80.52.$$

Da cui:

$$\Pi_u \simeq 254.5 \text{ kW}.$$

## Potenza motore dalla coppia di reazione

Per compensare la coppia di reazione, una semiala è più lunga dell'altra di

$$\Delta b = 8 \text{ cm} = 0.08 \text{ m}.$$

Se si indica con  $M_e$  la coppia di reazione dell'elica, il momento aerodinamico generato dalla differenza di apertura dei due semipiani può essere scritto, con l'approssimazione già utilizzata negli esercizi precedenti, come

$$M_a = \frac{Q}{2} \Delta b.$$

Imponendo la compensazione:

$$M_a = M_e.$$

Pertanto:

$$M_e = \frac{Q}{2} \Delta b.$$

Sostituendo:

$$M_e = \frac{52975}{2} \cdot 0.08.$$

Si ottiene:

$$M_e \simeq 2'119 \text{ N m}.$$

La potenza del motore, intesa come potenza meccanica all'albero dell'elica, è

$$\Pi_m = M_e \omega.$$

Sostituendo:

$$\Pi_m = 2119 \cdot 163.36.$$

Da cui:

$$\Pi_m \simeq 346.2 \text{ kW}.$$

Quindi:

$$\boxed{\Pi_m \simeq 346 \text{ kW}}$$

In cavalli vapore:

$$\Pi_m = \frac{346200}{735.5} \simeq 471 \text{ CV}.$$

$$\boxed{\Pi_m \simeq 471 \text{ CV}}$$

In assenza di ulteriori dati sulla trasmissione, tale potenza viene assunta coincidente con la potenza motrice richiesta.



## Rendimento propulsivo

Dal confronto tra la potenza utile al volo e la potenza motrice si può ricavare il rendimento propulsivo:

$$\eta_e = \frac{\Pi_u}{\Pi_m}.$$

Sostituendo:

$$\eta_e = \frac{254.5}{346.2}.$$

Da cui:

$$\eta_e \simeq 0.735.$$

Quindi:

$$\boxed{\eta_e \simeq 0.735}$$

## Potenza motore per una velocità ascensionale di 3 m/s

Se si vuole consentire all'aereo una componente verticale della velocità pari a

$$w = 3 \text{ m/s},$$

occorre fornire una potenza utile aggiuntiva pari a

$$\Delta\Pi_u = Qw.$$

Sostituendo:

$$\Delta\Pi_u = 52975 \cdot 3.$$

Da cui:

$$\Delta\Pi_u \simeq 158.9 \text{ kW}.$$

La potenza utile complessiva richiesta in salita è quindi:

$$\Pi_{u,\text{salita}} = \Pi_u + Qw.$$

Sostituendo:

$$\Pi_{u,\text{salita}} = 254.5 + 158.9.$$

Si ottiene:

$$\Pi_{u,\text{salita}} \simeq 413.4 \text{ kW}.$$

Assumendo invariato il rendimento propulsivo calcolato in precedenza,

$$\eta_e \simeq 0.735,$$

la potenza motrice richiesta è

$$\Pi_{m,\text{salita}} = \frac{\Pi_{u,\text{salita}}}{\eta_e}.$$

Sostituendo:

$$\Pi_{m, \text{salita}} = \frac{413.4}{0.735}.$$

Da cui:

$$\Pi_{m, \text{salita}} \simeq 562.5 \text{ kW}.$$

In cavalli vapore:

$$\Pi_{m, \text{salita}} = \frac{562500}{735.5}.$$

Si ottiene:

$$\Pi_{m, \text{salita}} \simeq 765 \text{ CV}.$$

Quindi:

$$\boxed{\Pi_{m, \text{salita}} \simeq 765 \text{ CV}}$$

### Osservazione

Nel problema compaiono due diverse efficienze: l'efficienza aerodinamica del velivolo,

$$E = \frac{C_L}{C_D},$$

e il rendimento propulsivo,

$$\eta_e = \frac{\Pi_u}{\Pi_m}.$$

La prima misura quanto il velivolo è aerodinamicamente efficiente, cioè quanta portanza produce rispetto alla resistenza. La seconda misura invece quanta parte della potenza meccanica fornita dal motore viene trasformata in potenza utile di trazione.

## Esercizio 18 – Compensazione della coppia di reazione e coppia imbardante

Un aereo avente le caratteristiche sottoindicate vola alla quota

$$z = 4'000 \text{ m}$$

con incidenza

$$\alpha = 4^\circ.$$

Determinare:

1. le incidenze dei due semipiani necessarie per compensare la coppia di reazione;
2. la coppia imbardante che ne deriva e la traslazione da dare all'asse dell'elica per compensare tale coppia imbardante.

Le caratteristiche dell'aereo sono:

$$Q = 31'400 \text{ N}; \quad S = 16 \text{ m}^2; \quad AR = 7;$$

$$\eta_e = 0.8; \quad n_e = 2'200 \text{ giri/min}; \quad \tau_r = \frac{4}{5}.$$

È assegnata la seguente polare:

| $\alpha [^\circ]$ | 2      | 4      | 6      | 8      | 10     | 12     | 14     |
|-------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $C_L$             | 0.1400 | 0.2800 | 0.4120 | 0.7500 | 0.9080 | 0.9400 | 1.0000 |
| $C_D$             | 0.0304 | 0.0364 | 0.0470 | 0.0620 | 0.0800 | 0.1052 | 0.1450 |

## Soluzione

Il problema riguarda la compensazione della coppia di reazione dell'elica mediante una piccola differenza di incidenza tra i due semipiani.

La coppia di reazione dell'elica tende a far ruotare l'aeroplano intorno all'asse longitudinale. Per compensarla, si può fare in modo che le due semiali lavorino a incidenze leggermente diverse, così da produrre due portanze diverse:

$$L_d \neq L_s.$$

La differenza di portanza genera un momento di rollio opposto alla coppia di reazione.

## Densità dell'aria alla quota di 4'000 m

Alla quota

$$z = 4'000 \text{ m},$$

assumendo atmosfera standard, si può porre

$$\rho_{4000} \simeq 0.819 \text{ kg/m}^3.$$

## Apertura alare

Dall'allungamento alare geometrico

$$AR = \frac{b^2}{S}$$

si ricava

$$b = \sqrt{AR S}.$$

Sostituendo:

$$b = \sqrt{7 \cdot 16}.$$

Quindi:

$$b \simeq 10.58 \text{ m}.$$

## Velocità di volo alla condizione iniziale

Alla condizione iniziale l'aereo vola con incidenza

$$\alpha = 4^\circ.$$

Dalla polare, per

$$\alpha = 4^\circ,$$

si legge:

$$C_L = 0.2800, \quad C_D = 0.0364.$$

In volo rettilineo orizzontale uniforme vale

$$L = Q.$$

Poiché

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L,$$

si ha

$$Q = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L.$$

Da cui:

$$V = \sqrt{\frac{2Q}{\rho S C_L}}.$$

Sostituendo:

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot 31400}{0.819 \cdot 16 \cdot 0.2800}}.$$

Si ottiene:

$$V \simeq 130.8 \text{ m/s}.$$

In chilometri orari:

$$V \simeq 130.8 \cdot 3.6 \simeq 471 \text{ km/h}.$$

## Resistenza aerodinamica

La resistenza aerodinamica del velivolo nella condizione iniziale vale

$$D_a = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D.$$

Sostituendo:

$$D_a = \frac{1}{2} \cdot 0.819 \cdot 130.8^2 \cdot 16 \cdot 0.0364.$$

Si ottiene:

$$D_a \simeq 4'082 \text{ N}.$$

Nel volo rettilineo orizzontale uniforme la trazione dell'elica uguaglia la resistenza:

$$T = D_a.$$

Pertanto:

$$T \simeq 4'082 \text{ N}.$$

### Potenza motrice e coppia di reazione

La potenza utile al volo è

$$\Pi_u = T V.$$

Sostituendo:

$$\Pi_u = 4082 \cdot 130.8.$$

Da cui:

$$\Pi_u \simeq 534 \text{ kW}.$$

Tenendo conto del rendimento dell'elica,

$$\eta_e = 0.8,$$

la potenza motrice vale

$$\Pi_m = \frac{\Pi_u}{\eta_e}.$$

Pertanto:

$$\Pi_m = \frac{534}{0.8} \simeq 667.5 \text{ kW}.$$

La velocità di rotazione del motore è

$$n_e = 2'200 \text{ giri/min}.$$

Essendo presente un riduttore con rapporto

$$\tau_r = \frac{4}{5},$$

la velocità di rotazione dell'elica è

$$n_p = \tau_r n_e.$$

Quindi:

$$n_p = \frac{4}{5} \cdot 2200 = 1'760 \text{ giri/min}.$$

In giri al secondo:

$$n_p = \frac{1760}{60} = 29.33 \text{ s}^{-1}.$$

La velocità angolare dell'elica è

$$\omega_p = 2\pi n_p.$$

Pertanto:

$$\omega_p = 2\pi \cdot 29.33 \simeq 184.3 \text{ rad/s.}$$

La coppia motrice, uguale in modulo alla coppia di reazione dell'elica, vale

$$M_e = \frac{\Pi_m}{\omega_p}.$$

Sostituendo:

$$M_e = \frac{667500}{184.3}.$$

Da cui:

$$M_e \simeq 3'622 \text{ N m.}$$

### Determinazione delle portanze dei due semipiani

Siano  $L_d$  e  $L_s$  le portanze delle due semiali, rispettivamente destra e sinistra.

Affinché il volo resti orizzontale, deve valere:

$$L_d + L_s = Q.$$

La differenza di portanza deve invece generare un momento di rollio uguale e contrario alla coppia di reazione dell'elica.

Assumendo, in prima approssimazione, che la risultante di ciascun semipiano sia applicata a distanza

$$\frac{b}{4}$$

dal piano di simmetria, il momento di rollio generato dalla differenza di portanza è

$$M_a = (L_d - L_s) \frac{b}{4}.$$

La condizione di compensazione è

$$M_a = M_e.$$

Pertanto:

$$(L_d - L_s) \frac{b}{4} = M_e.$$

Da cui:

$$L_d - L_s = \frac{4M_e}{b}.$$

Sostituendo:

$$L_d - L_s = \frac{4 \cdot 3622}{10.58}.$$

Si ottiene:

$$L_d - L_s \simeq 1'369 \text{ N.}$$

Il sistema da risolvere è quindi:

$$\begin{cases} L_d + L_s = 31400, \\ L_d - L_s = 1369. \end{cases}$$

Da cui:

$$L_d = \frac{31400 + 1369}{2} \simeq 16'384 \text{ N},$$

$$L_s = \frac{31400 - 1369}{2} \simeq 15'016 \text{ N}.$$

### Coefficienti di portanza dei due semipiani

La pressione dinamica può essere ricavata direttamente dalla condizione iniziale di volo orizzontale:

$$Q = qSC_L.$$

Alla condizione iniziale

$$\alpha = 4^\circ, \quad C_L = 0.2800.$$

Pertanto:

$$qS = \frac{Q}{C_L} = \frac{31400}{0.2800} = 112'143 \text{ N}.$$

Poiché ciascun semipiano ha superficie  $S/2$ , si ha:

$$q\frac{S}{2} = \frac{112143}{2} = 56'071 \text{ N}.$$

I coefficienti di portanza dei due semipiani risultano quindi:

$$C_{L,d} = \frac{L_d}{qS/2} = \frac{16384}{56071} \simeq 0.2922,$$

$$C_{L,s} = \frac{L_s}{qS/2} = \frac{15016}{56071} \simeq 0.2678.$$

### Incidenze dei due semipiani

Dalla polare assegnata si osserva che i due valori di  $C_L$  sono prossimi al valore corrispondente a

$$\alpha = 4^\circ, \quad C_L = 0.2800.$$

Per il semipiano più portante si interpola tra i punti:

$$\alpha_1 = 4^\circ, \quad C_{L,1} = 0.2800,$$

$$\alpha_2 = 6^\circ, \quad C_{L,2} = 0.4120.$$

Pertanto:

$$\alpha_d = 4^\circ + \frac{C_{L,d} - 0.2800}{0.4120 - 0.2800}(6^\circ - 4^\circ).$$

Sostituendo:

$$\alpha_d = 4^\circ + \frac{0.2922 - 0.2800}{0.1320} \cdot 2^\circ.$$

Si ottiene:

$$\alpha_d \simeq 4.18^\circ.$$

Convertendo in gradi e primi:

$$0.18^\circ \cdot 60 \simeq 10.8',$$

per cui si può assumere:

$$\alpha_d \simeq 4^\circ 10'.$$

Per il semipiano meno portante si interpola tra i punti:

$$\alpha_1 = 2^\circ, \quad C_{L,1} = 0.1400,$$

$$\alpha_2 = 4^\circ, \quad C_{L,2} = 0.2800.$$

Pertanto:

$$\alpha_s = 2^\circ + \frac{C_{L,s} - 0.1400}{0.2800 - 0.1400} (4^\circ - 2^\circ).$$

Sostituendo:

$$\alpha_s = 2^\circ + \frac{0.2678 - 0.1400}{0.1400} \cdot 2^\circ.$$

Si ottiene:

$$\alpha_s \simeq 3.83^\circ.$$

Convertendo in gradi e primi:

$$0.83^\circ \cdot 60 \simeq 49.8',$$

quindi:

$$\alpha_s \simeq 3^\circ 50'.$$

Pertanto:

$$\boxed{\alpha_d \simeq 4^\circ 10'}$$

$$\boxed{\alpha_s \simeq 3^\circ 50'}$$

La differenza di incidenza richiesta è circa:

$$\Delta\alpha \simeq 20'.$$



### Coppia imbardante dovuta alla diversa resistenza dei semipiani

Poiché i due semipiani lavorano a incidenze diverse, essi generano anche resistenze diverse.

Per determinare tali resistenze si rientra nella polare in corrispondenza delle incidenze appena trovate.

Per il semipiano destro:

$$\alpha_d \simeq 4^{\circ}10' = 4.1667^{\circ}.$$

Interpolando tra

$$\alpha = 4^{\circ}, \quad C_D = 0.0364,$$

e

$$\alpha = 6^{\circ}, \quad C_D = 0.0470,$$

si ha:

$$C_{D,d} = 0.0364 + \frac{4.1667 - 4}{6 - 4}(0.0470 - 0.0364).$$

Da cui:

$$C_{D,d} \simeq 0.0373.$$

Per il semipiano sinistro:

$$\alpha_s \simeq 3^{\circ}50' = 3.8333^{\circ}.$$

Interpolando tra

$$\alpha = 2^{\circ}, \quad C_D = 0.0304,$$

e

$$\alpha = 4^{\circ}, \quad C_D = 0.0364,$$

si ha:

$$C_{D,s} = 0.0304 + \frac{3.8333 - 2}{4 - 2}(0.0364 - 0.0304).$$

Da cui:

$$C_{D,s} \simeq 0.0359.$$

Le resistenze dei due semipiani valgono:

$$D_d = q \frac{S}{2} C_{D,d},$$

$$D_s = q \frac{S}{2} C_{D,s}.$$

Poiché

$$q \frac{S}{2} = 56'071 \text{ N},$$

si ottiene:

$$D_d = 56071 \cdot 0.0373 \simeq 2'092 \text{ N},$$

$$D_s = 56071 \cdot 0.0359 \simeq 2'014 \text{ N}.$$

La differenza di resistenza è quindi:

$$D_d - D_s \simeq 78.5 \text{ N}.$$

La coppia imbardante che ne deriva, assumendo il braccio medio pari a  $b/4$ , è:

$$N = (D_d - D_s) \frac{b}{4}.$$

Sostituendo:

$$N = 78.5 \cdot \frac{10.58}{4}.$$

Da cui:

$$N \simeq 207.6 \text{ N m}.$$

Pertanto:

$$\boxed{N \simeq 207.6 \text{ N m}}.$$

### Traslazione dell'asse dell'elica

Per compensare la coppia imbardante  $N$ , si può traslare lateralmente l'asse dell'elica di una distanza  $d$ , in modo che la trazione produca un momento opposto:

$$Td = N.$$

Nel volo rettilineo orizzontale uniforme la trazione uguaglia la resistenza totale:

$$T = D_d + D_s.$$

Sostituendo:

$$T = 2092 + 2014 \simeq 4'106 \text{ N}.$$

Pertanto:

$$d = \frac{N}{T}.$$

Sostituendo:

$$d = \frac{207.6}{4106}.$$

Da cui:

$$d \simeq 0.0505 \text{ m}.$$

Quindi:

$$\boxed{d \simeq 5.05 \text{ cm}}.$$

**Osservazione**

La compensazione della coppia di reazione mediante diversa incidenza dei semipiani produce inevitabilmente una piccola differenza di resistenza tra le due semiali. Questa differenza di resistenza genera una coppia imbardante.

Per annullarla, si trasla lateralmente l'asse dell'elica: la trazione non passa più per il piano di simmetria del velivolo e produce così un momento imbardante opposto a quello generato dalla differenza di resistenza.