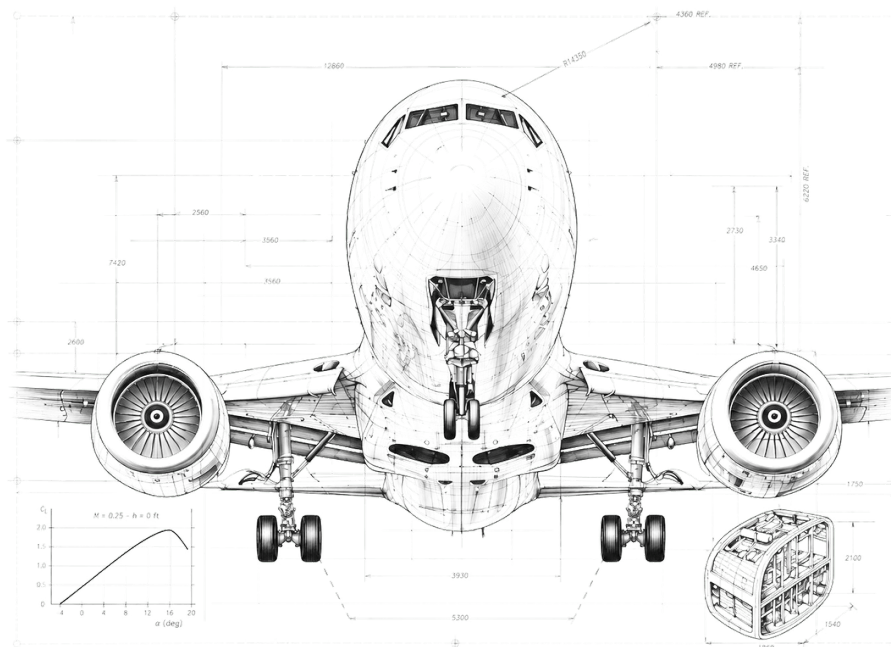

Flusso quasi-unidimensionale

Ugelli, diffusori e gallerie supersoniche

La scienza del condotto ad area variabile: come si accelera un gas oltre la velocità del suono
e come lo si rallenta perdendo il meno possibile



Serie Raucci — Monografie di Costruzioni Aeronautiche

Prof. Ing. Biagio Raucci

ITIS «E. Majorana»

Collana Fluidodinamica comprimibile — monografia conclusiva

Ogni valore numerico di questa monografia è stato verificato in modo indipendente con script Python prima della composizione.

Indice

Premessa	I
I Flusso quasi-unidimensionale: ugelli e diffusori	2
I.1 Che cosa significa «quasi-unidimensionale»	2
I.2 Richiami essenziali: la cassetta degli attrezzi	3
I.2.1 Grandezze totali e relazioni isentropiche	3
I.2.2 Urto normale	4
I.2.3 Urto obliquo ed espansione di Prandtl–Meyer	4
I.3 Le equazioni di governo	5
I.3.1 Il volume di controllo e la forma algebrica	5
I.3.2 Le forme differenziali	6
I.4 La relazione area–velocità	7
I.5 Ugelli: la relazione area–numero di Mach	9
I.5.1 La relazione area–Mach	9
I.5.2 Tre esercizi per prendere le misure	10
I.6 Il rapporto di pressioni: dal soffio subsonico allo strozzamento	14
I.6.1 Il regime interamente subsonico	14
I.6.2 Lo strozzamento (choking)	14
I.6.3 L’urto nel divergente e i regimi di getto	15
I.6.4 Come si localizza un urto nel divergente	18
I.6.5 Quattro esercizi, quattro regimi	18
I.7 Diffusori: rallentare senza sprecare	22
I.7.1 Un esperimento mentale in tre mosse	22
I.7.2 Perché il diffusore perfetto non esiste	23
I.7.3 La seconda gola	24
I.7.4 Il problema dell’avviamento	24
I.8 La riflessione delle onde da un contorno libero	25
I.9 Due pagine di storia: de Laval e Stodola	27
I.9.1 De Laval: l’intuizione	27
I.9.2 Stodola: la verifica	27
I.10 Sintesi e formulario	28
I.10.1 Le idee in dieci righe	28
I.10.2 La mappa dei regimi del convergente–divergente	28
I.10.3 Formulario essenziale	30
I.11 Esercizi di fine capitolo, tutti risolti	30
Problema 5.2 — Tubo di Pitot in camera di prova	31
Problema 5.3 — Sonda di pressione statica lungo l’ugello	31
Problema 5.4 — Condotto convergente–divergente interamente subsonico	32
Problema 5.5 — Divergente subsonico	32
Problema 5.6 — Derivazione della formula della portata strozzata	33
Problema 5.7 — Come scala la portata con le condizioni di serbatoio	33
Problema 5.8 — Che cosa sente il naso di un modello tozzo	33
Problema 5.9 — Lastra piana in incidenza in camera di prova	34
Problema 5.10 — Pitot all’uscita di un ugello: il quadro completo	34

Problema 5.11 — Localizzare l'urto nel divergente	35
Problema 5.12 — Seconda gola minima per l'avviamento	36
Problema 5.13 — Efficienza di un diffusore misurata sul campo	36
Problema 5.14 — Getto sottoespanso: la deflessione al bordo d'uscita	36
Problema 5.15 — Urto obliquo su un contorno libero	37
Problema 5.16 — Il Mach di uscita di un ugello a razzo	37
Problema 5.17 — Progetto completo di una galleria Mach 3	38
Problema 5.18 — Due gallerie ipersoniche, quasi la stessa velocità	38
Problema 5.19 — La velocità massima teorica	39
Problema 5.20 — Il limite della liquefazione: aria	39
Problema 5.21 — Il limite della liquefazione: elio	39
Problema 5.22 — Il rapporto d'area di una galleria a elio	40

Premessa

Con questa monografia si chiude il percorso della fluidodinamica comprimibile della nostra collana. Dopo aver imparato che cosa sono le onde d'urto normali e oblique e le onde di espansione, qui mettiamo tutto al lavoro dentro un oggetto concretissimo: il *condotto ad area variabile*. È l'oggetto che trovate nell'ugello di un motore a razzo, nella presa d'aria di un turbogetto, nel cuore di una galleria del vento supersonica. In altre parole: è il punto in cui la teoria smette di essere teoria e diventa hardware.

Il taglio è volutamente operativo. Ogni concetto viene motivato prima con la fisica e poi formalizzato; ogni formula chiave è seguita da almeno un esercizio svolto per intero, passo dopo passo; e in coda trovate *tutti* i ventidue problemi di fine capitolo del testo di riferimento risolti completamente, con i dati eventualmente convertiti nel Sistema Internazionale.

Come leggere i numeri di questa monografia

Tutti i valori numerici sono stati calcolati con script Python risolvendo le equazioni esatte, senza interpolare tabelle. Chi confronta i risultati con quelli ottenuti dalle tabelle dei flussi comprimibili (che riportano un numero finito di righe e impongono di prendere «la voce più vicina») troverà scarti dell'ordine del percento: è normale, e anzi è un ottimo esercizio capire da dove nascono. In sede d'esame entrambe le strade sono legittime, purché dichiarate.

Limiti di validità del modello — da dichiarare sempre

Tutto ciò che segue vale per un flusso *stazionario, adiabatico e non viscoso* di gas *caloricamente perfetto* (salvo dove diversamente indicato, $\gamma = 1,4$ e $R = 287 \text{ J}/(\text{kg K})$ per l'aria). L'ipotesi quasi-unidimensionale è un'*approssimazione* geometrica: le equazioni che scriveremo sono esatte, ma applicate a un modello semplificato della realtà. Dove il modello scricchiola — strati limite, urti obliqui interni, avviamento dei diffusori — lo diremo esplicitamente.

L'apparato delle figure

Le figure quantitative di questa monografia (curve area–Mach, distribuzioni lungo l'ugello, mappa dei regimi, portata strozzata) sono generate dallo script `scripts/figure.py` risolvendo le equazioni esatte del capitolo: non sono schizzi qualitativi, ma grafici calcolati. Alcune tavole — fotografie di getti, schemi storici — sono invece indicate da un riquadro segnaposto con il nome del file atteso: basta caricare in `immagini/` un PNG con quel nome perché la figura appaia al posto del riquadro, senza toccare il sorgente.

Flusso quasi-unidimensionale: ugelli e diffusori

1.1 Che cosa significa «quasi-unidimensionale»

Dove stiamo andando

Prima di scrivere equazioni dobbiamo capire il modello. In questa sezione definiamo il flusso quasi-unidimensionale, chiariamo in che cosa differisce dal flusso unidimensionale puro studiato per gli urti normali, e — soprattutto — capiamo perché un'approssimazione così drastica funzioni tanto bene da essere usata ogni giorno da chi progetta ugelli e gallerie.

Nello studio dell'urto normale abbiamo lavorato con condotti ad *area costante*: lì le proprietà del flusso cambiavano lungo x soltanto per la presenza dell'urto stesso (o, volendo, per attrito e scambio termico). Adesso rimuoviamo il vincolo geometrico: lasciamo che la sezione trasversale vari con la coordinata assiale,

$$A = A(x),$$

e chiediamo al flusso di adattarsi. Manteniamo però un'ipotesi forte: *su ogni sezione trasversale le proprietà sono uniformi*. In un flusso di questo tipo, stazionario, ogni grandezza dipende dalla sola x :

$$u = u(x), \quad p = p(x), \quad \rho = \rho(x), \quad T = T(x).$$

Flusso quasi-unidimensionale

Si dice *quasi-unidimensionale* un flusso in cui tutte le proprietà termofluidodinamiche sono funzioni di una sola coordinata spaziale x , mentre l'area della sezione trasversale del condotto è essa stessa una funzione $A(x)$ della medesima coordinata. La causa della variazione delle proprietà lungo x è la *variazione di area*, non un urto né l'attrito.

C'è un'apparente contraddizione che va guardata in faccia subito, da ingegneri: se le pareti del condotto divergono o convergono, il vettore velocità vicino a parete *non può* essere puramente assiale — il flusso reale è tridimensionale. Come possiamo allora pretendere che tutto dipenda dalla sola x ? La risposta è pragmatica: i valori $u(x)$, $p(x)$, $\rho(x)$ vanno intesi come *valori medi* sulla sezione. Se il condotto varia la propria area in modo graduale (pareti poco inclinate rispetto all'asse), la media sulla sezione rappresenta benissimo lo stato del flusso, e l'errore commesso è piccolo. Per un ugello di razzo o il circuito di una galleria supersonica, i risultati quasi-unidimensionali sono quasi sempre sufficienti per il dimensionamento; il calcolo tridimensionale esatto (metodo delle caratteristiche, CFD) serve poi per disegnare il *contorno* delle pareti.

Un paragone concreto

Pensate a un'autostrada che passa da tre corsie a due: il traffico è un fenomeno complicatissimo, eppure per stimare i tempi di percorrenza basta ragionare su «quante auto al minuto attraversano la sezione». Il modello quasi-unidimensionale fa esattamente questo con il gas: rinuncia ai dettagli trasversali per conservare l'essenziale, cioè i bilanci di massa, quantità di moto ed energia lungo l'asse.

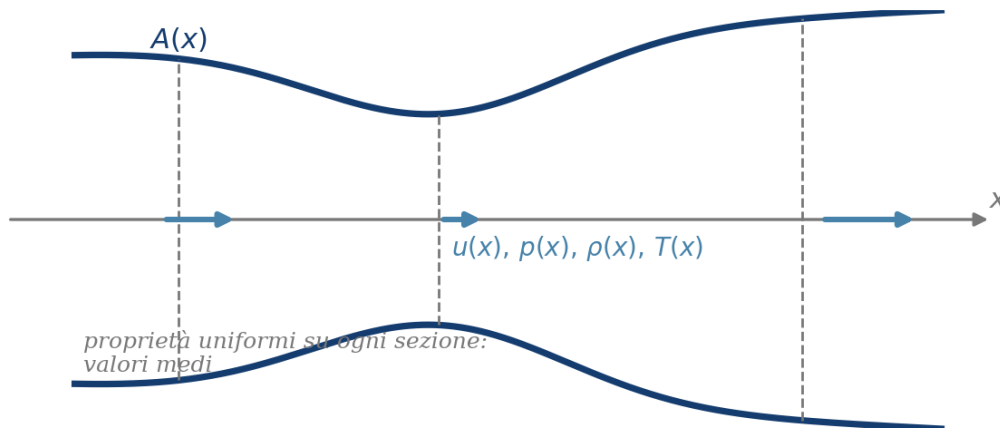


Figura 1.1. Il modello quasi-unidimensionale: l'area $A(x)$ varia con la coordinata assiale e tutte le proprietà del flusso, intese come valori medi sulla sezione, dipendono dalla sola x .

Dove incontreremo questo modello? Ovunque, in aeronautica e astronautica:

- nell'**ugello convergente–divergente** di un motore a razzo, che deve accelerare i gas combusti fino a velocità supersoniche per generare spinta;
- nell'**ugello** e nel **diffusore** di una galleria del vento supersonica: il primo accelera l'aria fino al Mach di prova, il secondo la rallenta cercando di sprecare meno pressione totale possibile;
- nelle **prese d'aria** dei motori a getto supersonici, che sono a tutti gli effetti diffusori;
- nei condotti interni di compressori e turbine, statore dopo rotore.

Il senso di tutto questo

Il flusso quasi-unidimensionale è il compromesso perfetto tra rigore e utilità: un modello geometricamente approssimato, dentro il quale però faremo valere *esattamente* i tre principi di conservazione. È il motivo per cui, a più di un secolo dalla sua nascita, resta lo strumento quotidiano di chi progetta condotti ad alta velocità.

1.2 Richiami essenziali: la cassetta degli attrezzi

Dove stiamo andando

Questa monografia deve reggersi da sola. Raccogliamo quindi qui, senza dimostrazioni (per quelle rimandiamo alle monografie precedenti della collana), tutte le relazioni che useremo: le isentropiche, l'urto normale, e — perché serviranno negli esercizi di coda — l'urto obliquo e l'espansione di Prandtl–Meyer. Chi le padroneggia già può saltare alla sezione successiva e tornare qui solo alla bisogna.

1.2.1 Grandezze totali e relazioni isentropiche

Per un gas caloricamente perfetto in moto adiabatico, le grandezze *totali* (o di ristagno) T_0, p_0, ρ_0 sono quelle che il gas raggiungerebbe se venisse rallentato fino a velocità nulla: adiabaticamente per la temperatura,

isentropicamente per pressione e densità. Valgono le relazioni, funzione del solo numero di Mach locale:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2, \quad (1.1)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (1.3)$$

In un flusso *adiabatico* T_0 è costante ovunque; in un flusso anche *isentropico* (adiabatico e senza attrito) sono costanti pure p_0 e ρ_0 . Attraverso un urto, invece, T_0 si conserva ma p_0 *cala*: la perdita di pressione totale è la firma dell'irreversibilità.

Le condizioni *critiche* (o soniche), indicate con l'asterisco, sono quelle in cui $M = 1$. Ponendo $M = 1$ nelle relazioni precedenti, per $\gamma = 1,4$:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1} = 0,833, \quad \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} = 0,528, \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = 0,634.$$

La velocità del suono locale è $a = \sqrt{\gamma R T}$ e quella critica è $a^* = \sqrt{\gamma R T^*}$, costante in tutto un flusso adiabatico.

1.2.2 Urto normale

Attraverso un urto normale con Mach a monte $M_1 > 1$:

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{2}}, \quad (1.4)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1), \quad (1.5)$$

$$\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = \left[\frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right]^{1/(\gamma-1)}. \quad (1.6)$$

Il flusso a valle è sempre subsonico ($M_2 < 1$), la pressione statica sale, la pressione totale scende. La (1.6) sarà la protagonista silenziosa di tutta la parte sui diffusori.

1.2.3 Urto obliquo ed espansione di Prandtl–Meyer

Per un urto obliquo di inclinazione β investito da M_1 , conta la sola componente normale $M_{n1} = M_1 \sin \beta$: le (1.4)–(1.6) si applicano a M_{n1} , e il Mach a valle si ricostruisce da $M_2 = M_{n2} / \sin(\beta - \theta)$, dove la deflessione θ del flusso è legata a β e M_1 dalla relazione θ – β – M :

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2}. \quad (1.7)$$

Un'espansione supersonica attorno a uno spigolo convesso è invece un ventaglio isentropico di Prandtl–Meyer: la deflessione disponibile è misurata dalla funzione

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1)} - \arctan \sqrt{M^2 - 1}, \quad (1.8)$$

con la regola operativa $\nu(M_2) = \nu(M_1) + \theta$ per una deflessione θ . Essendo il ventaglio isentropico, p_0 resta costante attraverso l'espansione: sarà la chiave per trattare i getti sovra- e sottoespansi.

Il senso di tutto questo

Quattro famiglie di formule — isentropiche, urto normale, urto obliquo, Prandtl–Meyer — e non una di più: tutto ciò che accade in un condotto ad area variabile, dalla galleria Mach 3 al motore dello Shuttle, si calcola combinandole. Il resto della monografia è l'arte di scegliere quale usare, dove e perché.

1.3 Le equazioni di governo

Dove stiamo andando

Applichiamo i tre principi di conservazione — massa, quantità di moto, energia — a un volume di controllo ad area variabile. Otterremo prima le forme algebriche tra due sezioni, poi le forme differenziali che ci serviranno per la relazione area–velocità. Un punto concettuale merita attenzione fin d'ora: il *modello* è approssimato, ma le *equazioni* che vi scriviamo dentro sono esatte.

1.3.1 Il volume di controllo e la forma algebrica

Consideriamo un tratto di condotto compreso fra la sezione 1, di area A_1 , e la sezione 2, di area A_2 , con la superficie laterale che coincide con un tubo di flusso: nessuna massa attraversa i fianchi. Il flusso è stazionario, adiabatico, senza forze di volume.

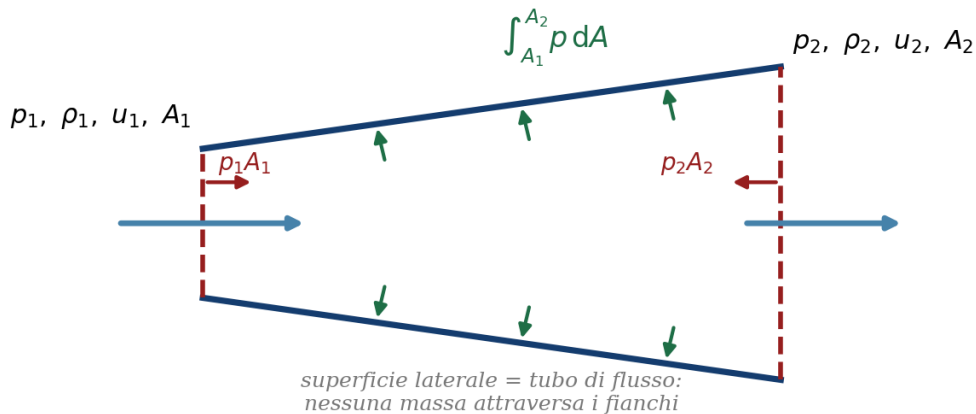


Figura 1.2. Il volume di controllo per i bilanci: forze di pressione sulle basi (p_1A_1, p_2A_2) e sui fianchi inclinati (termine $\int p dA$, che compare nel bilancio della quantità di moto (1.10)); la superficie laterale è un tubo di flusso.

Conservazione della massa. La portata che entra da 1 deve uscire da 2:

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \quad (1.9)$$

Sui fianchi il contributo è nullo perché la velocità è tangente alla superficie del tubo di flusso. La (1.9) definisce la portata in massa $\dot{m} = \rho u A$, costante lungo il condotto: è il filo rosso di tutto il capitolo.

Bilancio della quantità di moto. Le forze di pressione agiscono sulle due basi e sui fianchi, perché stavolta i fianchi non sono paralleli all'asse. Proiettando lungo x :

$$p_1 A_1 + \rho_1 u_1^2 A_1 + \int_{A_1}^{A_2} p dA = p_2 A_2 + \rho_2 u_2^2 A_2 \quad (1.10)$$

Il termine integrale è la spinta assiale che le pareti inclinate esercitano sul gas: fisicamente è lo stesso termine che, letto dall'altra parte, produce la *spinta* di un ugello di razzo sulle proprie pareti. Si noti che la (1.10) non è una pura equazione algebrica: l'integrale richiede di conoscere come p varia con A lungo i fianchi.

Conservazione dell'energia. Per flusso adiabatico e senza lavoro d'elica, il bilancio energetico tra le due sezioni, diviso per la portata (1.9) e riscritto con l'entalpia $h = e + p/\rho$, dà

$$\boxed{h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad h_0 = \text{cost.} \quad (1.11)$$

L'entalpia totale si conserva lungo il condotto: è lo stesso enunciato già incontrato per il flusso unidimensionale puro, e infatti vale in generale per ogni flusso stazionario adiabatico lungo una linea di corrente. Per gas caloricamente perfetto, $h = c_p T$ e quindi $T_0 = \text{cost.}$

Esatte, dentro un modello approssimato

Vale la pena ripeterlo: le (1.9), (1.10) e (1.11) applicano *senza compromessi* i principi fondamentali al modello quasi-unidimensionale. L'unica concessione alla realtà sta nel modello geometrico, non nella fisica. Se ponessimo $A_1 = A_2$ ritroveremmo esattamente le equazioni del condotto ad area costante: il quasi-unidimensionale contiene l'unidimensionale come caso particolare.

1.3.2 Le forme differenziali

Per studiare come il flusso evolve *punto per punto* conviene passare alle forme differenziali, applicando i bilanci a una fetta di condotto di spessore infinitesimo dx , tra le sezioni di proprietà (p, ρ, u, A) e $(p + dp, \rho + d\rho, u + du, A + dA)$.

Dalla (1.9), essendo $\rho u A$ costante:

$$\boxed{d(\rho u A) = 0} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0. \quad (1.12)$$

Dalla (1.10) applicata alla fetta infinitesima, sviluppando i prodotti e trascurando i termini del secondo ordine (prodotti di due differenziali), dopo aver sottratto la continuità moltiplicata per u resta un'equazione di rara eleganza:

$$\boxed{dp = -\rho u du} \quad (1.13)$$

È l'*equazione di Eulero*: dice che il gas accelera ($du > 0$) se e solo se la pressione cala ($dp < 0$). Nessun gas «decide» di correre più veloce: viene *spinto* da un gradiente di pressione favorevole. Teniamola a mente quando ci chiederemo perché un ugello appoggiato su un tavolo non produce alcun flusso.

Infine, differenziando la (1.11):

$$\boxed{dh + u du = 0.} \quad (1.14)$$

Adiabatico + non viscoso = isentropico

Nelle (1.12)–(1.14) non compaiono attrito, conduzione termica o diffusione: il flusso, oltre che adiabatico, è privo di meccanismi dissipativi, dunque *isentropico*. Questa è l'ipotesi che cadrà quando metteremo un urto dentro il condotto: a cavallo dell'urto l'entropia salta, e con lei cala p_0 . Tutto il resto del capitolo è la gestione oculata di questo fatto.

Il senso di tutto questo

Tre righe algebriche e tre righe differenziali: è tutto il bagaglio matematico necessario. La prossima sezione le combina in un'unica relazione — area contro velocità — che da sola spiega la forma di ogni ugello supersonico mai costruito.

1.4 La relazione area–velocità**Dove stiamo andando**

Combinando le tre forme differenziali otteniamo la relazione area–velocità: una sola riga che spiega perché un ugello supersonico deve prima stringersi e poi allargarsi, perché la gola è sonica, e perché i motori a razzo hanno quella inconfondibile campana. È la sezione concettualmente più importante della monografia.

Partiamo dalla continuità in forma logaritmica (1.12) e proponiamoci di eliminare il termine di densità. Dall'equazione di Eulero (1.13):

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -u \, du.$$

Poiché il flusso è isentropico, ogni variazione di pressione è accompagnata da una variazione isentropica di densità, e la derivata $dp/d\rho$ va valutata a entropia costante. Ma la derivata di p rispetto a ρ a entropia costante è, per definizione, il quadrato della velocità del suono:

$$\frac{dp}{d\rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = a^2.$$

Sostituendo:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{u \, du}{a^2} = -M^2 \frac{du}{u},$$

e riportando questo risultato nella continuità:

Relazione area–velocità

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u} \quad (1.15)$$

Il segno del legame fra variazione d'area e variazione di velocità è governato dal fattore $(M^2 - 1)$: cambia al passaggio per $M = 1$.

Leggiamola con calma, caso per caso (Figura 1.3); è qui che nasce tutta l'intuizione fisica.

1. $M \rightarrow 0$ (**limite incompressibile**). La (1.15) si riduce a $d(Au) = 0$, cioè $Au = \text{cost}$: è la continuità del flusso incompressibile che conosciamo dall'idraulica. Il tubo si stringe, l'acqua accelera — come quando chiudete parzialmente il getto di una canna da giardino con il pollice.
2. $0 \leq M < 1$ (**subsonico**). Il fattore $(M^2 - 1)$ è negativo: a un aumento di velocità ($du > 0$) corrisponde una *riduzione* d'area ($dA < 0$) e viceversa. Il comportamento è qualitativamente identico a quello incompressibile: *convergente accelera, divergente rallenta*.
3. $M > 1$ (**supersonico**). Il fattore diventa positivo e il comportamento si *capovolge*: per accelerare un flusso supersonico serve un condotto *divergente*; un convergente lo rallenta. La ragione fisica sta nella densità: in regime supersonico la densità crolla così in fretta al crescere della velocità ($d\rho/\rho = -M^2 du/u$, e $M^2 > 1$ amplifica) che, per far passare la stessa portata, l'area deve *crescere* nonostante la velocità aumenti.

4. $M = 1$ (**sonico**). La (1.15) impone $dA = 0$: la sezione sonica è un punto di stazionarietà dell'area. Delle due possibilità matematiche — minimo o massimo — solo il *minimo* è fisicamente realizzabile: avvicinandosi a un minimo, un flusso subsonico accelera (convergente) e può raggiungere $M = 1$; oltre il minimo, il divergente può portarlo in supersonico. In un massimo d'area accadrebbe l'opposto e $M = 1$ non verrebbe mai raggiunto.

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u}$$

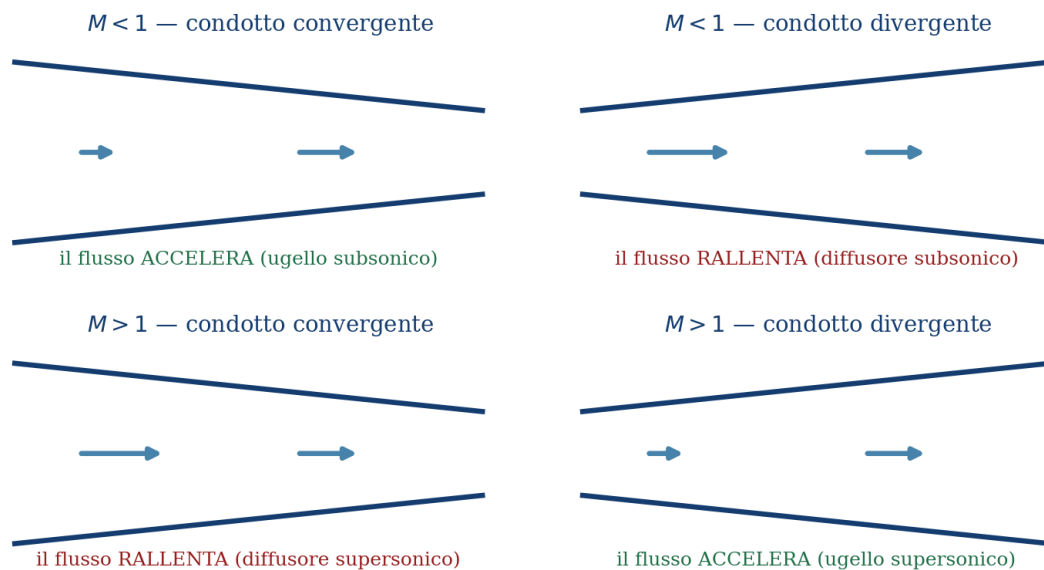


Figura 1.3. I quattro comportamenti previsti dalla relazione area–velocità (1.15): in regime subsonico il condotto si comporta come nell'idraulica (convergente accelera, divergente rallenta); in regime supersonico i ruoli si *capovolgono*.

Gola

La sezione di area minima di un condotto convergente–divergente si chiama *gola* (in inglese *throat*). Se il flusso che l'attraversa passa da subsonico a supersonico (o viceversa, in compressione), nella gola il numero di Mach vale esattamente 1.

Da qui la conclusione architettonica che vale per ogni macchina a gas veloce: *per espandere isentropicamente un gas da velocità subsonica a supersonica serve un condotto convergente–divergente*, con gola sonica nel mezzo. E, specularmente, per comprimere un flusso supersonico fino a velocità subsonica in modo isentropico serve di nuovo un convergente–divergente con gola sonica. Ecco spiegate in un colpo solo:

- la **campana** dei motori a razzo: la camera di combustione è il serbatoio ad alta pressione e bassa velocità, la gola porta i gas a $M = 1$, il grande divergente li espande a Mach elevatissimi per massimizzare la velocità di scarico e quindi la spinta;
- l'**architettura di una galleria supersonica**: serbatoio → ugello convergente–divergente (prima gola, $M = 1$) → camera di prova supersonica → diffusore convergente–divergente (seconda gola) → scarico subsonico. Sulla seconda gola torneremo a lungo: lì la storia si complica in modo istruttivo.

Che cosa dice — e che cosa non dice

La (1.15) è stata ricavata usando soltanto i principi di conservazione, senza specificare il tipo di gas: vale per gas perfetti, gas reali e gas chimicamente reagenti, purché il flusso sia isentropico. È però una relazione *differenziale*: dà i segni e le tendenze, non i numeri. Per quantificare — quanto deve valere A/A^* per raggiungere Mach 3? — ci serve integrarla o, meglio, aggirarla con la relazione area–Mach della prossima sezione.

Il senso di tutto questo

Un'unica equazione, tre regimi, un cambio di segno: la relazione area–velocità è la sintassi con cui sono scritte tutte le forme dei condotti supersonici. Quando vedrete la foto di un motore a razzo, riconoscerete nella sua sagoma il grafico della (1.15).

1.5 Ugelli: la relazione area–numero di Mach**Dove stiamo andando**

La relazione area–velocità ci ha dato la forma; ora vogliamo i numeri. Ricaviamo la relazione area–Mach, che lega il Mach locale al rapporto A/A^* fra l'area della sezione e l'area della gola sonica, e la mettiamo subito al lavoro su tre esercizi: un ugello convergente–divergente, il progetto di una galleria Mach 2,5 e l'ugello di un motore a razzo a idrogeno e ossigeno.

1.5.1 La relazione area–Mach

Consideriamo un condotto convergente–divergente attraversato da un flusso isentropico che in gola è sonico: nella gola $M^* = 1$, $u^* = a^*$ e l'area vale A^* . Prendiamo una generica sezione di area A dove il Mach vale M e la velocità u , e applichiamo la continuità (1.9) fra gola e sezione generica:

$$\rho^* a^* A^* = \rho u A \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho} \frac{a^*}{u} = \frac{\rho^*}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{a^*}{u},$$

dove abbiamo fatto comparire la densità totale ρ_0 , costante in tutto il flusso isentropico. Ora ogni fattore è esprimibile in funzione del Mach: ρ_0/ρ dalla (1.3), ρ_0/ρ^* dalla stessa con $M = 1$, e $(u/a^*)^2 = M^{*2}$ dal Mach caratteristico,

$$M^{*2} = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}.$$

Elevando al quadrato e riordinando i tre fattori si ottiene:

Relazione area–numero di Mach

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \quad (1.16)$$

Il Mach locale dipende *soltanto* dal rapporto fra l'area locale e l'area della gola sonica (oltre che da γ).

Questa formula contiene tre messaggi.

Primo: la geometria comanda. Fissato il rapporto d'area, il Mach è determinato — il progettista di un ugello supersonico sceglie il Mach di uscita semplicemente scegliendo A_e/A^* .

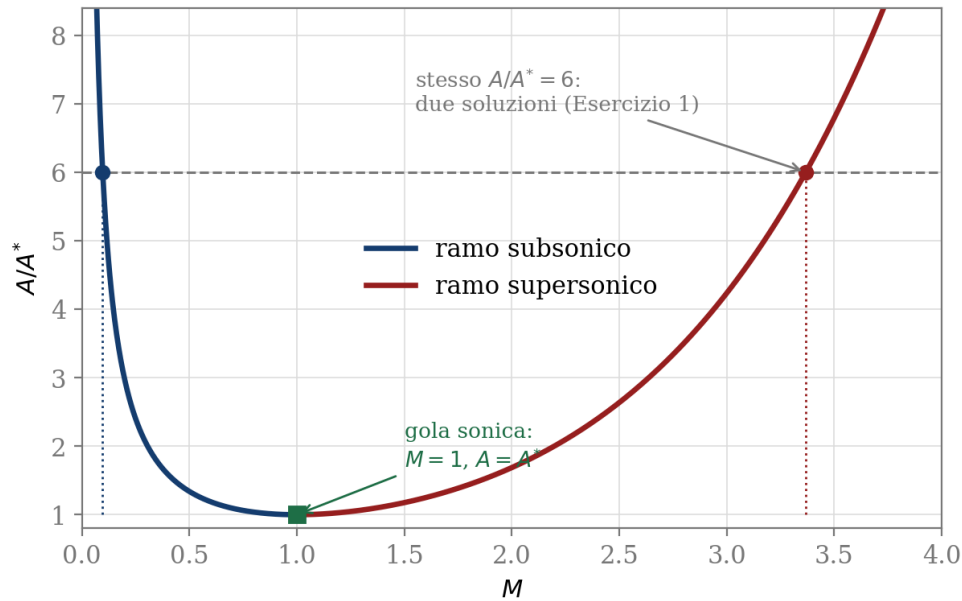


Figura 1.4. La relazione area–Mach (1.16): a ogni rapporto d'area $A/A^* > 1$ corrispondono due soluzioni, una subsonica e una supersonica. Sono evidenziati la gola sonica e il caso $A/A^* = 6$ dell'Esercizio 1.

Secondo: $A \geq A^*$ sempre. Un'area minore di quella sonica è incompatibile con un flusso isentropico: la portata non ci passerebbe.

Terzo: la (1.16) è quadratica nel comportamento, non nella forma — come mostra la Figura 1.4, a ogni $A/A^* > 1$ corrispondono *due* soluzioni, una subsonica e una supersonica. Quale delle due si realizza non lo decide la geometria ma il rapporto di pressioni imposto ai capi del condotto, come vedremo nella prossima sezione. Nelle tabelle dei flussi isentropici i due rami sono elencati separatamente; con Python la (1.16) si inverte in una riga con un metodo di bisezione, scegliendo l'intervallo $(0, 1)$ o $(1, \infty)$.

Il quadro isentropico completo

Per un ugello che espande dal serbatoio ($M \simeq 0$, p_0 , T_0) fino all'uscita supersonica esiste *una sola* soluzione isentropica supersonica. Lungo il condotto il Mach cresce con continuità (ramo subsonico nel convergente, $M = 1$ in gola, ramo supersonico nel divergente), mentre pressione, temperatura e densità *calano* con continuità secondo le (1.1)–(1.3). Le condizioni di uscita dipendono solo da A_e/A^* e dalle condizioni di serbatoio: per una galleria del vento, ciò significa che il Mach in camera di prova è scolpito nella geometria dell'ugello.

1.5.2 Tre esercizi per prendere le misure

Esercizio svolto 1 — Le due facce dello stesso rapporto d'area

In un ugello convergente–divergente il serbatoio si trova a $p_0 = 10$ atm e $T_0 = 300$ K; il flusso è isentropico dal serbatoio all'uscita, con gola sonica. Esistono due sezioni in cui $A/A^* = 6$: una nel convergente e una nel divergente. Calcolare in ciascuna M , p , T e u .

Dati.

$p_0 = 10$ atm; $T_0 = 300$ K; $A/A^* = 6$; aria, $\gamma = 1,4$, $R = 287$ J/(kg K).

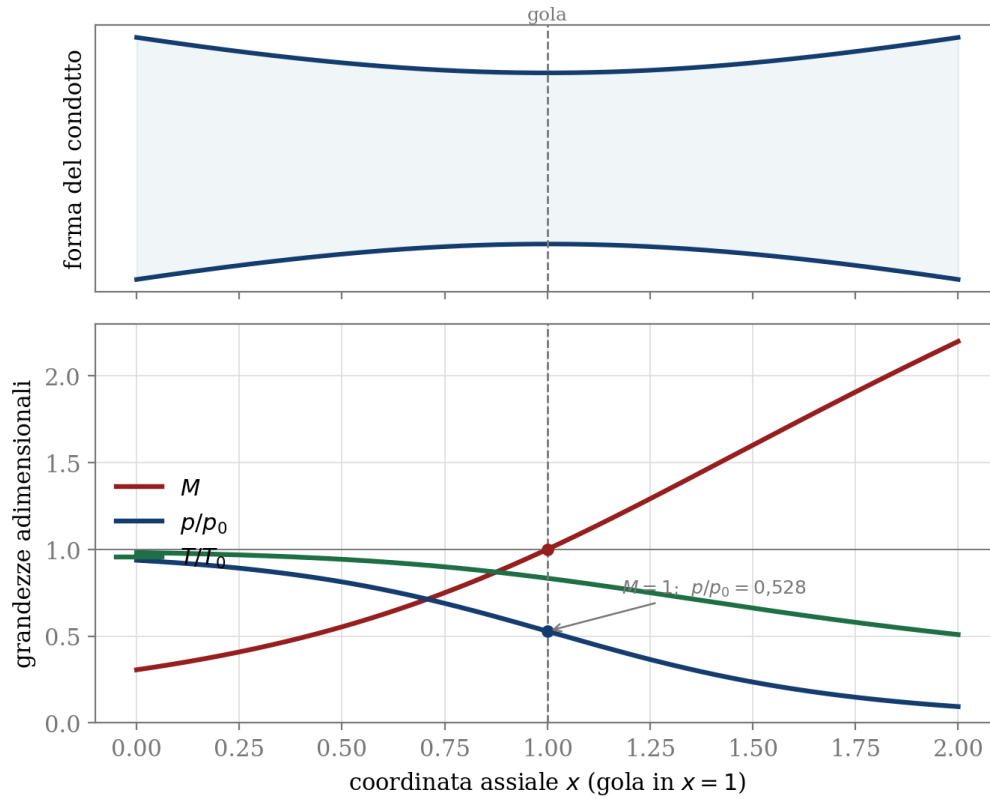


Figura 1.5. L'unica soluzione isentropica subsonico-supersonica per un condotto con $A_e/A_t = 2$: il Mach cresce con continuità attraverso la gola sonica, mentre p/p_0 e T/T_0 calano monotonamente; in gola $p/p_0 = 0,528$.

Fase A — Sezione nel convergente (ramo subsonico).

Invertendo la (1.16) sul ramo subsonico con $A/A^* = 6$ si ottiene $M = 0,0970$. Le relazioni isentropiche danno $p_0/p = 1,0066$ e $T_0/T = 1,0019$, quindi

$$p = \frac{10}{1,0066} = 9,93 \text{ atm}, \quad T = \frac{300}{1,0019} = 299,4 \text{ K}.$$

La velocità del suono locale è $a = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 299,4} = 346,9 \text{ m/s}$ e dunque

$$u = Ma = 0,0970 \cdot 346,9 = 33,6 \text{ m/s}.$$

Il gas striscia appena: siamo di fatto ancora «in serbatoio».

Fase B — Sezione nel divergente (ramo supersonico).

Lo stesso rapporto d'area, letto sul ramo supersonico, dà $M = 3,368$. Ora $p_0/p = 63,1$ e $T_0/T = 3,269$:

$$p = \frac{10}{63,1} = 0,158 \text{ atm}, \quad T = \frac{300}{3,269} = 91,8 \text{ K}.$$

La velocità del suono è crollata insieme alla temperatura, $a = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 91,8} = 192,0 \text{ m/s}$, ma il Mach la moltiplica:

$$u = 3,368 \cdot 192,0 = 646,8 \text{ m/s}.$$

Risultato

Convergente: $M = 0,097$, $p = 9,93 \text{ atm}$, $T = 299,4 \text{ K}$, $u \simeq 34 \text{ m/s}$. Divergente: $M = 3,37$, $p = 0,158 \text{ atm}$, $T = 91,8 \text{ K}$, $u \simeq 647 \text{ m/s}$.

Commento. Stesso rapporto d'area, due mondi: nel convergente il gas è quasi fermo, tiepido, alla pressione del serbatoio; nel divergente corre a quasi due volte la velocità del suono del serbatoio, gelido e rarefatto. È la doppia radice della (1.16) vista dal vivo. Si noti anche il freddo estremo: 91,8 K sono -181°C — un tema che ritroveremo parlando di liquefazione nelle gallerie ipersoniche.

Esercizio svolto 2 — Progetto di massima di una galleria Mach 2,5

Una galleria supersonica deve realizzare in camera di prova $M_e = 2,5$ con condizioni statiche pari a quelle standard al livello del mare ($p_e = 1 \text{ atm}$, $T_e = 288 \text{ K}$). Determinare il rapporto d'area di uscita dell'ugello e le condizioni di serbatoio necessarie.

Fase A — Geometria.

Dalla (1.16) con $M = 2,5$:

$$\frac{A_e}{A^*} = 2,637.$$

Fase B — Condizioni di serbatoio.

In un flusso isentropico le grandezze totali si conservano: quelle di serbatoio coincidono con quelle totali in camera di prova. Con $M_e = 2,5$ le (1.1)–(1.2) danno $p_0/p_e = 17,09$ e $T_0/T_e = 2,25$, quindi

$$p_0 = 17,09 \cdot 1 = 17,09 \text{ atm} \approx 1,73 \text{ MPa}, \quad T_0 = 2,25 \cdot 288 = 648 \text{ K}.$$

Risultato

$$A_e/A^* = 2,64; p_0 = 17,1 \text{ atm}; T_0 = 648 \text{ K}.$$

Commento. Per avere in camera di prova l'aria «di tutti i giorni» a Mach 2,5 bisogna partire da un serbatoio a 17 atmosfere e 375°C : l'espansione nell'ugello restituisce esattamente le condizioni ambiente. Il riscaldamento del serbatoio non è un lusso: senza, la camera di prova sarebbe a $288/2,25 = 128 \text{ K}$.

Esercizio svolto 3 — L'ugello di un motore a razzo a idrogeno e ossigeno

In un motore a razzo la camera di combustione (il «serbatoio» dell'ugello) si trova a $T_0 = 3517 \text{ K}$ e $p_0 = 25 \text{ atm}$. I gas combusti hanno massa molare $\mathcal{M} = 16 \text{ g/mol}$ e $\gamma = 1,22$; la pressione statica all'uscita dell'ugello convergente-divergente vale $p_e = 1,174 \times 10^{-2} \text{ atm}$ e l'area di gola è $A^* = 0,4 \text{ m}^2$. Nell'ipotesi di gas caloricamente perfetto e flusso isentropico, calcolare: (a) il Mach di uscita; (b) la velocità di uscita; (c) la portata in massa; (d) l'area di uscita.

Dati.

$$\gamma = 1,22; R = \mathcal{R}/\mathcal{M} = 8314/16 = 519,6 \text{ J/(kg K)}; p_0/p_e = 25/0,01174 = 2129,5.$$

Perché niente tabelle

Le tabelle dei flussi comprimibili sono compilate per $\gamma = 1,4$: con $\gamma = 1,22$ vanno abbandonate e si lavora direttamente sulle equazioni. È il caso tipico dei gas combusti, più «molli» dell'aria.

Fase A — Mach di uscita.

Invertiamo la (1.2):

$$M_e^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_0}{p_e} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right] = \frac{2}{0,22} \left[2129,5^{0,22/1,22} - 1 \right] = 27,12,$$

da cui $M_e = 5,21$.

Fase B — Velocità di uscita.

La temperatura di uscita segue dall'isentropica in temperatura:

$$\frac{T_e}{T_0} = \left(\frac{p_e}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 0,2511 \quad \Rightarrow \quad T_e = 0,2511 \cdot 3517 = 883 \text{ K}.$$

Quindi $a_e = \sqrt{1,22 \cdot 519,6 \cdot 883} = 748 \text{ m/s}$ e

$$V_e = M_e a_e = 5,21 \cdot 748 \simeq 3,9 \times 10^3 \text{ m/s}.$$

Fase C — Portata in massa.

La portata si valuta comodamente in gola, dove $M = 1$. Dall'equazione di stato, $\rho_0 = p_0/(RT_0) = 25 \cdot 101325/(519,6 \cdot 3517) = 1,386 \text{ kg/m}^3$. Le condizioni critiche per $\gamma = 1,22$:

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{1/(\gamma-1)} = \left(\frac{2}{2,22} \right)^{4,545} = 0,622 \quad \Rightarrow \quad \rho^* = 0,863 \text{ kg/m}^3,$$

$$T^* = \frac{2}{2,22} T_0 = 3168 \text{ K}, \quad a^* = \sqrt{1,22 \cdot 519,6 \cdot 3168} = 1417 \text{ m/s}.$$

Dunque

$$\dot{m} = \rho^* A^* a^* = 0,863 \cdot 0,4 \cdot 1417 \simeq 489 \text{ kg/s}.$$

Fase D — Area di uscita.

La portata è la stessa in ogni sezione: $\dot{m} = \rho_e A_e V_e$. Con $\rho_e = p_e/(RT_e) = 0,01174 \cdot 101325/(519,6 \cdot 883) = 2,59 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$:

$$A_e = \frac{\dot{m}}{\rho_e V_e} = \frac{489}{2,59 \cdot 10^{-3} \cdot 3896} \simeq 48,4 \text{ m}^2.$$

Risultato

$M_e = 5,21$; $V_e \simeq 3900 \text{ m/s}$; $\dot{m} \simeq 489 \text{ kg/s}$; $A_e \simeq 48 \text{ m}^2$ (ossia $A_e/A^* \simeq 121$).

Commento. Quasi quattro chilometri al secondo di velocità di scarico e mezza tonnellata di gas al secondo: sono i numeri che rendono possibile il volo spaziale, e discendono tutti da tre relazioni isentropiche più la continuità. Il modello «gas caloricamente perfetto» qui è una semplificazione dichiarata: nei gas combustibili reali γ e la composizione variano lungo l'ugello, e il calcolo di dettaglio richiede la chimica; per il dimensionamento di massima, però, questi numeri sono già credibili.

Il senso di tutto questo

La (1.16) trasforma la geometria in prestazione: dato il rapporto d'area, il Mach; dato il Mach, tutto il resto. Ma finora abbiamo dato per scontato che l'ugello «funzioni», cioè che in gola ci sia davvero $M = 1$. Chi glielo garantisce? Il rapporto di pressioni ai capi del condotto: è l'argomento della prossima sezione, dove il comportamento dell'ugello si rivela in tutta la sua ricchezza.

1.6 Il rapporto di pressioni: dal soffio subsonico allo strozzamento

Dove stiamo andando

Un ugello appoggiato sul banco non produce alcun flusso: serve una differenza di pressione, come impone l'equazione di Eulero. In questa sezione abbassiamo progressivamente la pressione di scarico a valle di un convergente-divergente e osserviamo, regime dopo regime, tutto ciò che può accadere: flusso interamente subsonico, strozzamento, urto nel divergente, adattamento, sovra- e sottoespansione. Alla fine ricaveremo la formula della portata strozzata, la più usata di tutto il capitolo, e chiuderemo con quattro esercizi che coprono ogni regime.

1.6.1 Il regime interamente subsonico

Sia p_0 la pressione di serbatoio, fissa, e p_e la pressione statica in corrispondenza dell'uscita, che possiamo regolare a piacere (per esempio scaricando in un grande ambiente a pressione controllata). Con $p_e = p_0$ il gas è in equilibrio: nessun flusso. Riduciamo appena p_e : un gradiente di pressione favorevole mette in moto un flusso subsonico. Nel convergente il Mach cresce, tocca il suo massimo nella sezione di area minima e — restando subsonico — torna a calare nel divergente, che per un flusso subsonico è un *diffusore*. La pressione statica, specularmente, cala fino alla sezione minima e poi risale.

A_t non è A^* , finché il flusso è subsonico

Attenzione a una trappola concettuale: A^* è *per definizione* l'area in cui il flusso raggiungerebbe $M = 1$ isentropicamente. Finché nella sezione minima il Mach resta minore di 1, l'area geometrica di gola A_t è *maggiore* di A^* : quest'ultimo è solo una grandezza di riferimento, non un'area fisicamente presente nel condotto. I due valori coincidono nell'istante in cui la gola diventa sonica.

Riducendo ancora p_e il flusso accelera ovunque, il massimo di Mach in gola sale, la portata cresce. In questo regime esistono *infinite* soluzioni isentropiche subsoniche: lo stato del flusso in ogni sezione dipende sia dalla geometria A/A_t sia dal rapporto p_e/p_0 imposto. È un contrasto netto con il caso subsonico-supersonico, dove la soluzione isentropica è unica.

1.6.2 Lo strozzamento (choking)

Esiste un valore particolare di p_e — chiamiamolo p_{e3} — per il quale la gola raggiunge esattamente $M = 1$, con flusso ancora subsonico sia a monte sia a valle. In quell'istante $A_t = A^*$. Se abbassiamo p_e sotto p_{e3} , nella parte convergente non cambia più nulla: il Mach in gola non può superare 1 (lo vieta la relazione area-velocità), e le condizioni in gola e in tutto il convergente restano congelate. La portata smette di crescere.

Flusso strozzato

Si dice *strozzato* (*choked*) il flusso in un condotto la cui gola ha raggiunto $M = 1$: da quel momento la portata in massa è *indipendente* dalla pressione di scarico, per quanto la si abbassi ulteriormente. La portata dipende solo dalle condizioni di serbatoio e dall'area di gola.

Vale la pena quantificare subito. In gola, con $M = 1$:

$$\dot{m} = \rho^* A^* a^* = \rho_0 \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} A^* \sqrt{\gamma R T_0 \frac{2}{\gamma + 1}}.$$

Sostituendo $\rho_0 = p_0/(RT_0)$ e raccogliendo gli esponenti (i passaggi completi sono svolti nel Problema 5.6 in coda alla monografia):

Portata strozzata

$$\dot{m} = \frac{p_0 A^*}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}} \quad (1.17)$$

Per aria ($\gamma = 1,4$, $R = 287 \text{ J/(kg K)}$) il radicale vale 0,0404 in unità SI. La portata cresce con p_0 , cala con $\sqrt{T_0}$, ed è proporzionale all'area di gola.

Una formula da ingegneri

La (1.17) è ovunque: dimensiona gli iniettori, le valvole di sicurezza, le gole delle gallerie, le sonde di portata a ugello sonico (che misurano $\dot{m}$ contando solo p_0 e T_0 !). E contiene una proporzionalità preziosa: $\dot{m} \propto p_0 A^* / \sqrt{T_0}$. Poiché attraverso un urto la portata e T_0 si conservano, ne segue che $p_0 A^*$ è *costante attraverso un urto*: se p_0 cala, A^* cresce nella stessa proporzione. Questo fatto, apparentemente tecnico, sarà l'arma segreta per localizzare gli urti negli ugelli e per dimensionare le gole dei diffusori.

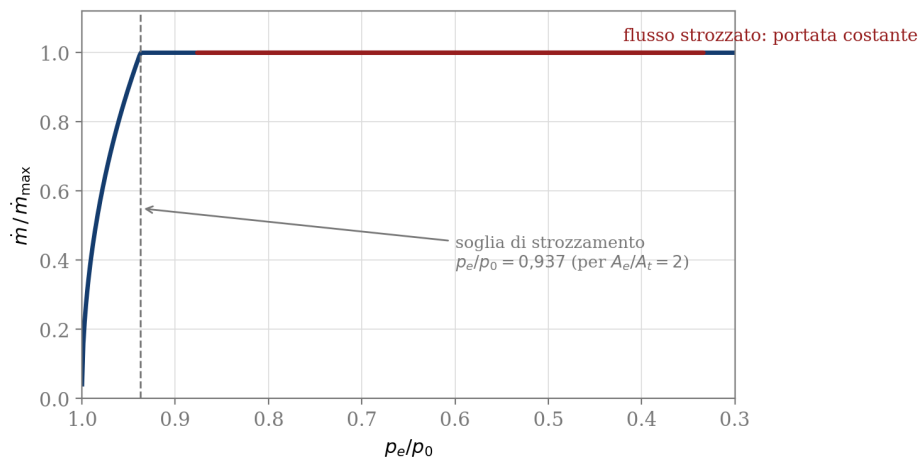


Figura 1.6. La portata in funzione della contropressione per il condotto con $A_e/A_t = 2$ (contropressione decrescente verso destra): sotto la soglia di strozzamento la portata resta congelata al valore massimo (1.17).

Un dettaglio quantitativo: al momento dello strozzamento la pressione in gola vale $p^* = 0,528 p_0$, ma la pressione di scarico p_{e3} necessaria a strozzare è *più alta* di $0,528 p_0$, perché a valle della gola il divergente subsonico ricomprime il flusso e recupera pressione statica fino all'uscita.

1.6.3 L'urto nel divergente e i regimi di getto

Che succede per $p_e < p_{e3}$? La Figura 1.7 anticipa la risposta completa; leggiamola con ordine. Nel convergente niente, come detto. Nel divergente, invece, il flusso appena oltre la gola imbecca il ramo supersonico, ma la soluzione isentropica supersonica completa richiederebbe all'uscita la pressione, bassissima, del progetto isentropico. Se la pressione imposta a valle è superiore a quella, il flusso deve «ricucirsi» con l'ambiente: lo fa con un *urto normale* piazzato nel divergente. A monte dell'urto: espansione supersonica isentropica. Attraverso l'urto: salto di pressione statica, caduta di p_0 , flusso che diventa subsonico. A valle dell'urto: il divergente, ora percorso da flusso subsonico, ricomprime fino a raggiungere all'uscita esattamente la p_e imposta. La posizione dell'urto si aggiusta da sola: sta là dove il salto d'urto più la ricompressione subsonica producono in uscita la pressione richiesta. Abbassando p_e l'urto migra verso l'uscita; per un preciso valore di p_e arriva a piantarsi esattamente sul bordo.

Sotto quel valore l'urto non può più stare nel condotto, e la sistemazione avviene *fuori*, nel getto:

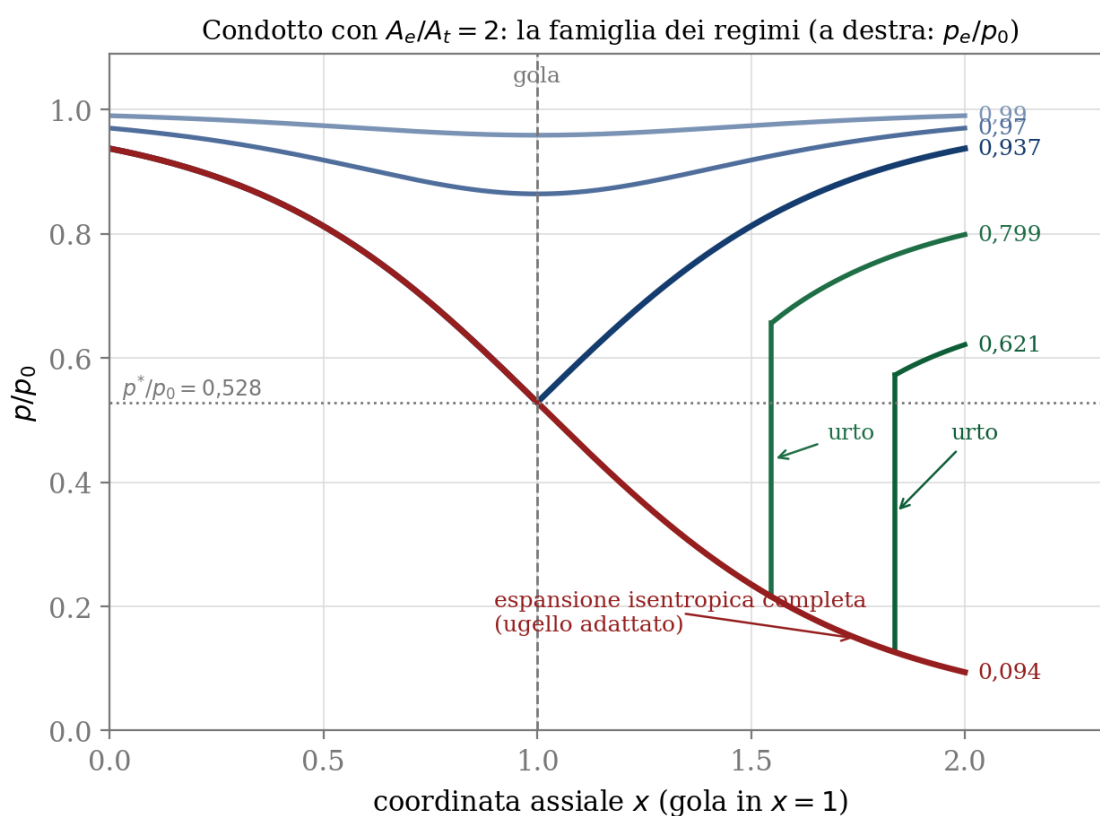


Figura 1.7. La famiglia dei regimi per un condotto con $A_e/A_t = 2$ (distribuzioni calcolate con le equazioni esatte, nello spirito delle celebri misure di Stodola). Dall'alto: due soluzioni interamente subsoniche; la soluzione di soglia con gola sonica ($p_e/p_0 = 0,937$); due soluzioni con urto normale nel divergente; in basso l'espansione isentropica completa ($p_e/p_0 = 0,094$).

- se la pressione d'uscita isentropica p_e è minore della contropressione ambiente p_B , il getto è **sovraespanso** (*overexpanded*): il gas si è espanso «troppo» dentro l'ugello, ed è costretto a ricompimersi attraverso urti obliqui attaccati al bordo d'uscita;
- se $p_e = p_B$ l'ugello è **adattato**: nessuna onda, il getto esce parallelo e indisturbato — è la condizione di progetto;
- se $p_e > p_B$ il getto è **sottoespanso** (*underexpanded*): il gas esce con pressione ancora superiore all'ambiente e completa l'espansione fuori, attraverso ventagli di Prandtl–Meyer centrati sul bordo d'uscita.

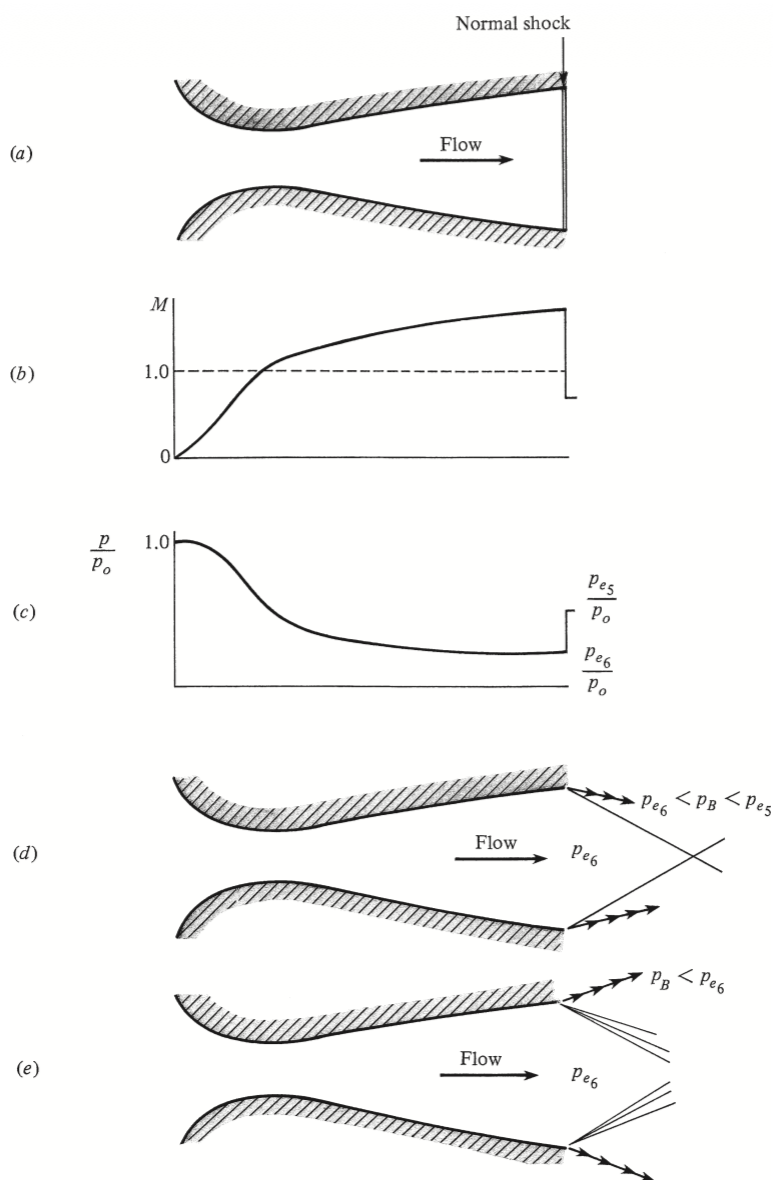


Figura 1.8. I tre regimi del getto all'uscita dell'ugello: sovraespanso (urti obliqui al bordo), adattato (nessuna onda), sottoespanso (ventagli di espansione al bordo).

Dove si vede tutto questo

I «diamanti di Mach» che si osservano nello scarico di un caccia in postbruciatore o di un razzo al banco sono esattamente il reticolo di urti ed espansioni con cui un getto non adattato negozia la propria

pressione con l'atmosfera: ne ripareremo nella sezione sulla riflessione delle onde. Un motore a razzo, progettato per il vuoto o per l'alta quota, al decollo è sempre sovraespanso: la campana «troppo grande» per l'aria densa a terra diventa perfetta man mano che si sale. È il compromesso quotidiano del progettista di propulsori.

1.6.4 Come si localizza un urto nel divergente

Se conosciamo la posizione dell'urto, calcolare p_e/p_0 è un esercizio in quattro mosse (lo faremo nell'Esercizio 6). Il problema inverso — dato p_e/p_0 , trovare l'urto — è quello che capita nella pratica, e ammette due strade.

Per tentativi: si ipotizza la sezione dell'urto, si calcola la p_e/p_0 corrispondente, si confronta con quella assegnata e si corregge l'ipotesi, iterando.

Diretta: si sfrutta la costanza di $p_0 A^*$ attraverso l'urto. Indicando con il pedice i il tratto a monte dell'urto (dove $p_{0,i} = p_0$ e $A_i^* = A_t$) e con il pedice e l'uscita (dove $p_{0,e} = p_{0,2}$ e $A_e^* = A_2^*$), da $p_{0,i} A_i^* = p_{0,e} A_e^*$ segue l'identità

$$\frac{p_e A_e}{p_{0,e} A_e^*} = \frac{p_e A_e}{p_{0,i} A_i^*} = \left(\frac{p_e}{p_{0,i}} \right) \left(\frac{A_e}{A_i^*} \right), \quad (1.18)$$

il cui secondo membro è composto da soli dati del problema. D'altra parte il primo membro è una funzione del solo Mach di uscita: il prodotto dell'isentropica di pressione per la relazione area–Mach dà

$$\frac{p_e}{p_{0,e}} \frac{A_e}{A_e^*} = \frac{1}{M_e} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right)^{-1/2}, \quad (1.19)$$

che, risolta per M_e^2 , fornisce la formula esplicita

$$M_e^2 = -\frac{1}{\gamma-1} + \sqrt{\frac{1}{(\gamma-1)^2} + \frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(\frac{p_{0,e} A_e^*}{p_e A_e} \right)^2}. \quad (1.20)$$

Noto M_e (subsonico), la catena si chiude così: dall'isentropica si ricava $p_{0,e}/p_e$; moltiplicandolo per la $p_e/p_{0,1}$ assegnata si ottiene il rapporto di pressioni totali attraverso l'urto $p_{0,2}/p_{0,1}$; dalla (1.6) invertita esce M_1 ; dalla relazione area–Mach, infine, la posizione A_1/A_t dell'urto. L'Esercizio 7 percorre entrambe le strade e le confronta.

1.6.5 Quattro esercizi, quattro regimi

Esercizio svolto 4 — Un convergente–divergente interamente subsonico

Un condotto convergente–divergente ha rapporto fra area di uscita e area di gola $A_e/A_t = 2$. Il serbatoio è a $p_0 = 1$ atm e la pressione di uscita vale $p_e = 0,95$ atm. Determinare i numeri di Mach in gola e all'uscita.

Fase A — Diagnosi del regime.

Prima domanda, sempre: *in che regime siamo?* Se il divergente fosse supersonico, con $A_e/A^* = 2$ il ramo supersonico della (1.16) darebbe $M_e = 2,20$ e l'isentropica imporrebbe $p_e = p_0/10,65 = 0,094$ atm: dieci volte meno del valore assegnato. Il flusso, quindi, non è supersonico. È strozzato con urto interno, oppure interamente subsonico? Verifichiamo l'ipotesi interamente subsonica.

Fase B — Mach di uscita.

Se il flusso è ovunque subsonico e isentropico, all'uscita $p_0/p_e = 1/0,95 = 1,0526$, da cui, invertendo la (1.2), $M_e = 0,272$. La relazione area–Mach dà allora $A_e/A^* = 2,226$.

Fase C — Verifica di coerenza e Mach in gola.

Il rapporto geometrico fra gola e riferimento sonico vale

$$\frac{A_t}{A^*} = \frac{A_t}{A_e} \frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{2} \cdot 2,226 = 1,113 > 1 :$$

la gola è più larga dell'area sonica, dunque il Mach massimo resta subsonico e l'ipotesi di Fase B è coerente. Invertendo la (1.16) sul ramo subsonico con $A_t/A^* = 1,113$:

$$M_t = 0,676.$$

Risultato

$M_e = 0,27$; $M_t = 0,68$. Flusso interamente subsonico: il condotto lavora da venturi, non da ugello supersonico.

Commento. Con le tabelle («voce più vicina») si otterrebbe $M_e \simeq 0,28$ e $M_t \simeq 0,72$: lo scarto rispetto al calcolo esatto è tutto nell'interpolazione, ed è un ottimo promemoria del perché dichiariamo sempre il metodo usato.

Esercizio svolto 5 — La soglia dello strozzamento

Per un condotto convergente-divergente con $A_e/A_t = 1,6$, calcolare il rapporto p_e/p_0 che rende sonica la gola mantenendo subsonico tutto il resto del condotto.

Fase A — Impostazione.

Alla soglia dello strozzamento la gola è esattamente sonica: $A_t = A^*$, quindi il rapporto geometrico assegnato coincide con il rapporto della relazione area-Mach, $A_e/A^* = 1,6$. Il flusso a valle della gola deve restare subsonico: scegliamo il ramo subsonico.

Fase B — Calcolo.

Invertendo la (1.16) (ramo subsonico) con $A_e/A^* = 1,6$ si ha $M_e = 0,397$, e dall'isentropica $p_0/p_e = 1,1147$:

$$\frac{p_e}{p_0} = \frac{1}{1,1147} = 0,897 \simeq 0,9.$$

Risultato

$p_e/p_0 \simeq 0,90$: basta scendere del dieci per cento sotto la pressione di serbatoio perché la gola diventi sonica.

Commento. La mappa dei regimi per questo condotto si legge tutta da qui. Per $p_e/p_0 > 0,90$: flusso interamente subsonico. Per p_e/p_0 appena sotto: gola sonica e urto nel divergente. La soluzione isentropica supersonica completa richiederebbe (ramo supersonico, $M_e = 1,94$) $p_e/p_0 = 0,141$: solo per quel preciso valore il condotto è adattato; fra 0,141 e circa 0,90 ci sono urti, dentro o fuori. Si noti quanto è stretta la finestra subsonica e quanto è vasta la terra di mezzo degli urti.

Esercizio svolto 6 — Urto in posizione nota: calcolo di p_e/p_0

Un ugello convergente-divergente ha $A_e/A_t = 3$. Nel divergente, nella sezione in cui $A/A_t = 2$, staziona un urto normale. Calcolare il rapporto p_e/p_0 .

Fase A — A monte dell'urto.

Fra serbatoio e urto il flusso è isentropico e supersonico nel divergente, con $A_1^* = A_t$. Alla sezione $A_1/A_1^* = 2$ il ramo supersonico della (1.16) dà

$$M_1 = 2,197.$$

Fase B — Attraverso l'urto.

Le relazioni d'urto (1.4) e (1.6) con $M_1 = 2,197$ forniscono

$$M_2 = 0,547, \quad \frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = 0,629.$$

Un fatto va sottolineato: l'urto è infinitamente sottile, quindi $A_1 = A_2$; ma *l'area sonica di riferimento cambia*. A monte $A_1^* = A_t$; a valle, con $M_2 = 0,547$, la relazione area-Mach dà $A_2/A_2^* = 1,259$, cioè $A_2^* > A_1^*$. È l'effetto dell'aumento di entropia: dopo l'urto servirebbe una gola più larga per tornare sonici. (Coerentemente, $p_0 A^*$ si conserva: $A_2^*/A_1^* = p_{0,1}/p_{0,2} = 1/0,629 = 1,59$.)

Fase C — Dal dopo-urto all'uscita.

A valle dell'urto il flusso, subsonico, è di nuovo isentropico con il nuovo riferimento A_2^* . Il rapporto d'area all'uscita si costruisce a catena:

$$\frac{A_e}{A_2^*} = \frac{A_e}{A_t} \cdot \frac{A_t}{A_2} \cdot \frac{A_2}{A_2^*} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,259 = 1,888,$$

da cui (ramo subsonico) $M_e = 0,327$ e $p_{0,e}/p_e = 1,077$.

Fase D — Ricomposizione del rapporto di pressioni.

Con $p_{0,1} = p_0$ e $p_{0,e} = p_{0,2}$:

$$\frac{p_e}{p_0} = \frac{p_e}{p_{0,e}} \cdot \frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = \frac{1}{1,077} \cdot 0,629 = 0,585.$$

Risultato

$$p_e/p_0 = 0,585.$$

Commento. La strategia è generale e va imparata come un rito: isentropica fino all'urto, salto d'urto (con cambio di A^* e di p_0), isentropica fino all'uscita. Ogni tratto ha il *suo* riferimento sonico e la *sua* pressione totale.

Esercizio svolto 7 — Urto in posizione incognita: iterazione e metodo diretto

Un ugello convergente-divergente ha $A_e/A_t = 3$, serbatoio a $p_0 = 1$ atm e pressione statica di uscita $p_e = 0,5$ atm. Per questo rapporto di pressioni un urto normale staziona nel divergente: determinarne la posizione A/A_t (a) per tentativi e (b) con il metodo diretto, confrontando i risultati.

Fase A — Primo tentativo: urto a $A/A_t = 2,3$.

A monte: $M_1 = 2,352$ (ramo supersonico). Urto: $M_2 = 0,528$, $p_{0,2}/p_{0,1} = 0,5605$; a valle $A_2/A_2^* = 1,289$. All'uscita

$$\frac{A_e}{A_2^*} = 3 \cdot \frac{1}{2,3} \cdot 1,289 = 1,682 \Rightarrow M_e = 0,374, \quad \frac{p_{0,e}}{p_e} = 1,1013,$$

$$p_e = \frac{1}{1,1013} \cdot 0,5605 \cdot 1 = 0,509 \text{ atm.}$$

Troppo alta rispetto a 0,5 atm: l'urto va spostato più a valle (urto più forte, maggiore perdita di p_0 , uscita a pressione minore).

Fase B — Secondo tentativo: urto a $A/A_t = 2,4$.

A monte: $M_1 = 2,399$. Urto: $M_2 = 0,523$, $p_{0,2}/p_{0,1} = 0,5407$; $A_2/A_2^* = 1,298$. All'uscita

$$\frac{A_e}{A_2^*} = 3 \cdot \frac{1}{2,4} \cdot 1,298 = 1,622 \Rightarrow M_e = 0,390, \quad \frac{p_{0,e}}{p_e} = 1,1108,$$

$$p_e = \frac{0,5407}{1,1108} = 0,487 \text{ atm.}$$

Ora è troppo bassa, di un ammontare paragonabile all'eccesso del primo tentativo: la posizione corretta sta circa a metà, $A/A_t \simeq 2,35$.

Fase C — Metodo diretto.

Il secondo membro della (1.18) vale

$$\left(\frac{p_e}{p_{0,1}} \right) \left(\frac{A_e}{A_1^*} \right) = 0,5 \cdot 3 = 1,5.$$

La (1.20) con $\gamma = 1,4$:

$$M_e^2 = -2,5 + \sqrt{6,25 + 5(0,8333)^6 \left(\frac{1}{1,5} \right)^2} = -2,5 + \sqrt{6,994} = 0,1447 \Rightarrow M_e = 0,380.$$

Dall'isentropica $p_{0,e}/p_e = 1,105$; quindi

$$\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = \frac{p_{0,e}}{p_e} \cdot \frac{p_e}{p_{0,1}} = 1,105 \cdot 0,5 = 0,5525.$$

Invertendo la (1.6): $M_1 = 2,371$; e dalla relazione area–Mach la posizione dell'urto:

$$\frac{A}{A_t} = \frac{A_1}{A_1^*} = 2,34.$$

Risultato

Urto a $A/A_t \simeq 2,34$; l'iterazione manuale aveva stimato 2,35: accordo entro mezzo punto percentuale.

Commento. Il metodo diretto sembra magico ma è solo la costanza di $p_0 A^*$ ben spesa: trasforma un problema iterativo in una catena di quattro inversioni. In un codice Python i due metodi convivono felicemente: il diretto per la risposta, l'iterativo come verifica indipendente — esattamente lo spirito «Python-first» della collana.

Il senso di tutto questo

Geometria e rapporto di pressioni: sono le due manopole di ogni condotto comprimibile. La prima fissa che cosa *può* accadere; la seconda decide che cosa *accade*. E la portata strozzata (1.17), con la sua conseguenza $p_0 A^* = \text{cost}$ attraverso gli urti, è il grimaldello quantitativo che apre tutti i problemi, compresi quelli sui diffusori che ci aspettano adesso.

1.7 Diffusori: rallentare senza sprecare

Dove stiamo andando

Accelerare un gas è la metà facile del lavoro: la metà difficile è rallentarlo. Con un esperimento mentale sulla galleria Mach 3 scopriremo perché conviene mettere un diffusore in coda alla camera di prova, definiremo l'efficienza di un diffusore, dimensioneremo la seconda gola e ci scontreremo con il problema dell'avviamento. Chiude la sezione l'esercizio sul diffusore della galleria Mach 2,5 già progettata.

1.7.1 Un esperimento mentale in tre mosse

Vogliamo far funzionare una galleria con camera di prova a $M = 3$, che scarica in atmosfera ($p_\infty = 1 \text{ atm}$). Per $M = 3$: $A_e/A^* = 4,23$ e $p_0/p_e = 36,7$. Quanta pressione di serbatoio serve? Dipende da *come* scarichiamo.

Mossa 1: scarico diretto. Se l'ugello scarica direttamente in atmosfera e vogliamo la camera di prova libera da onde, la pressione statica all'uscita deve eguagliare quella ambiente: $p_e = 1 \text{ atm}$, quindi

$$p_0 = 36,7 \cdot 1 = 36,7 \text{ atm.}$$

Un compressore da quasi quaranta atmosfere: costosissimo.

Mossa 2: condotto ad area costante con urto terminale. Inseriamo dopo l'ugello un condotto ad area costante che funge da camera di prova, e lasciamo che alla sua estremità stazioni un urto normale. Dietro l'urto il flusso è subsonico e la sua pressione statica deve valere $p_2 = p_\infty = 1 \text{ atm}$. Il salto statico di un urto a $M = 3$ vale $p_2/p_e = 10,33$, quindi

$$p_0 = \frac{p_0}{p_e} \cdot \frac{p_e}{p_2} \cdot p_\infty = 36,7 \cdot \frac{1}{10,33} \cdot 1 = 3,55 \text{ atm.}$$

Un urto, che pure è il simbolo della dissipazione, ci ha fatto risparmiare un fattore dieci: perché il suo brutale recupero di pressione statica lavora *per* noi.

Mossa 3: aggiungiamo un divergente dietro l'urto. Dietro l'urto il flusso è subsonico a $M_2 = 0,475$: un divergente lo rallenta ancora, recuperando altra pressione statica, finché all'uscita $M \ll 1$ e pressione statica e totale praticamente coincidono con p_∞ . Il tratto urto più divergente conserva la pressione totale di valle $p_{0,2}$, quindi il rapporto di alimentazione necessario diventa semplicemente il reciproco del rapporto di pressioni totali attraverso l'urto:

$$p_0 = \frac{p_{0,1}}{p_{0,2}} p_\infty = \frac{1}{0,328} = 3,04 \text{ atm.}$$

La morale dell'esperimento

La pressione necessaria per far girare la galleria è determinata dalla *perdita di pressione totale* della catena di rallentamento: tutto ciò che riduce quella perdita riduce la potenza dei compressori. Il dispositivo che rallenta il flusso perdendo meno pressione totale possibile ha un nome: *diffusore*.

Diffusore

Si chiama *diffusore* un condotto il cui compito è rallentare il flusso con la minima perdita di pressione totale. In una galleria supersonica è il tratto convergente-divergente a valle della camera di prova; in un motore a getto è la presa d'aria.

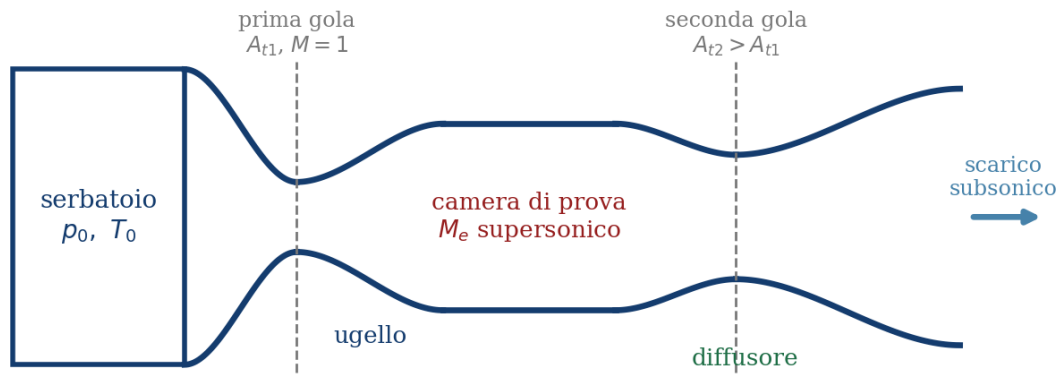


Figura 1.9. L'architettura di una galleria supersonica: serbatoio, ugello convergente–divergente (prima gola sonica), camera di prova, diffusore convergente–divergente (seconda gola, più larga della prima secondo la (1.22)) e scarico subsonico.

1.7.2 Perché il diffusore perfetto non esiste

Verrebbe da sognare il diffusore isentropico: un convergente–divergente rovesciato che comprime il flusso supersonico fino a $M = 1$ nella seconda gola e poi lo rallenti dolcemente, senza alcuna perdita di p_0 . Il rapporto di pressioni per far girare la galleria varrebbe uno: moto perpetuo, e infatti c'è il trucco. Un convergente supersonico deve deviare il flusso a parete, e le deviazioni concave in supersonico generano quasi inevitabilmente urti obliqui; anche senza urti, l'attrito a parete divora pressione totale. Il diffusore isentropico è fisicamente irrealizzabile.

Il meglio che si possa fare, in pratica, è sostituire l'unico urto normale forte con una *sequenza di urti obliqui* più un urto normale debole terminale: dalla teoria degli urti sappiamo che una compressione spezzettata in più urti deboli perde meno pressione totale di un solo urto forte allo stesso Mach. È lo schema del *diffusore a urti obliqui*: rampa di compressione all'ingresso, tratto quasi costante con urto normale debole, divergente subsonico finale. Nella realtà l'interazione fra urti e strato limite a parete restituisce parte del vantaggio: il potenziale teorico non si incassa mai per intero, e il progetto dei diffusori resta una disciplina fortemente empirica.

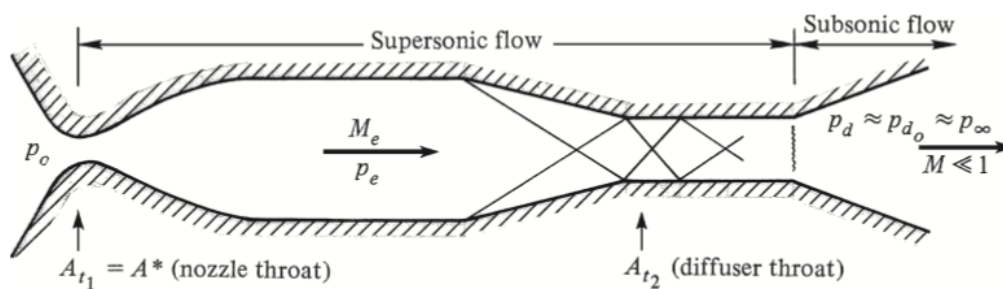


Figura 1.10. Il diffusore a urti obliqui: la compressione è spezzettata in una sequenza di urti obliqui deboli, chiusa da un urto normale debole e dal divergente subsonico.

Efficienza di un diffusore

Per le gallerie si usa confrontare il recupero reale con quello del riferimento a urto normale:

$$\eta_D = \frac{(p_{d,0}/p_0)_{\text{reale}}}{(p_{0,2}/p_{0,1})_{\text{urto normale a } M_e}} \quad (1.21)$$

dove $p_{d,0}$ è la pressione totale all'uscita del diffusore e p_0 quella di serbatoio. Con $\eta_D = 1$ il diffusore recupera come un urto normale; a Mach di prova moderati i diffusori reali fanno un po' meglio ($\eta_D > 1$), in regime ipersonico tipicamente peggio ($\eta_D < 1$).

1.7.3 La seconda gola

Un diffusore a urti obliqui ha una sezione minima: la *seconda gola*, di area A_{t2} , da distinguere dalla prima gola dell'ugello, $A_{t1} = A^*$. Le due gole non possono essere uguali: nel diffusore l'entropia cresce, dunque la pressione totale cala, e la costanza di $p_0 A^*$ (conseguenza della portata strozzata, con $\dot{m}$ e T_0 uguali nelle due gole soniche) impone

Dimensionamento della seconda gola

$$\frac{A_{t2}}{A_{t1}} = \frac{p_{0,1}}{p_{0,2}} \quad (1.22)$$

La seconda gola è sempre *più larga* della prima, nella stessa proporzione in cui la pressione totale è calata fra ugello e diffusore. Solo il diffusore isentropico ideale avrebbe $A_{t2} = A_{t1}$.

Se A_{t2} è più piccola di quanto imposto dalla (1.22), la seconda gola non riesce a smaltire la portata: il diffusore *strozza*, e il flusso supersonico in camera di prova non può stabilirsi.

1.7.4 Il problema dell'avviamento

C'è di peggio. All'accensione della galleria un urto normale transiente spazza il circuito dall'ugello verso valle. Nel momento in cui questo urto di avviamento si presenta all'ingresso del diffusore, la seconda gola deve lasciare passare la portata di un flusso che ha subito la perdita di pressione totale *di un urto normale al Mach di prova*: nella (1.22) va quindi inserito il rapporto $p_{0,2}/p_{0,1}$ dell'urto normale a M_e , che è la perdita peggiore possibile. Se A_{t2} è almeno pari a questo valore di avviamento, l'urto viene «ingoiato» dal diffusore e la galleria parte; se è più piccola, l'urto resta piantato a monte e la galleria non si avvia.

Il paradosso progettuale è servito: l'area che garantisce l'avviamento è *più grande* di quella che darebbe la massima efficienza a regime (dove gli urti obliqui perdono meno del normale). Un diffusore a geometria fissa avviabile lavora quindi sempre sotto il suo ottimo. La soluzione elegante — gole a geometria variabile, che si stringono dopo l'avviamento — esiste, ma è complessa e costosa: la maggior parte delle gallerie operative accetta il compromesso della geometria fissa. Lo stesso identico dilemma governa le prese d'aria supersoniche dei velivoli: i coni mobili dell'SR-71 o le rampe del Concorde sono esattamente «seconde gole» a geometria variabile.

Limiti del modello, dichiarati

Tutto questo paragrafo maneggia un fenomeno — l'avviamento e il flusso reale nel diffusore — che è tridimensionale, non stazionario e dominato dall'interazione urti/strato limite. Le formule quasi-unidimensionali (in particolare la (1.22)) danno la *stima di dimensionamento*, non la verità di dettaglio: il progetto fine dei diffusori si fa con dati empirici e prove. Va detto e scritto, anche all'esame.

Esercizio svolto 8 — Il diffusore della galleria Mach 2,5

Per la galleria dell'Esercizio 2 ($M_e = 2,5$, $p_0 = 17,09$ atm), stimare il rapporto fra area della seconda gola e area della prima necessario all'avviamento; assumendo poi $\eta_D = 1,2$ a regime, calcolare il rapporto fra pressione totale all'uscita del diffusore e pressione di serbatoio.

Fase A — Avviamento.

L'urto normale a $M = 2,5$ ha $p_{0,2}/p_{0,1} = 0,499$. Dalla (1.22):

$$\frac{A_{t2}}{A_{t1}} = \frac{1}{0,499} = 2,00.$$

La seconda gola deve avere area doppia della prima.

Fase B — Recupero a regime.

Dalla definizione (1.21):

$$\left(\frac{p_{d,0}}{p_0}\right)_{\text{reale}} = \eta_D \left(\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}}\right)_{\text{urto a } 2,5} = 1,2 \cdot 0,499 = 0,599.$$

Risultato

$A_{t2}/A_{t1} = 2,0$; $p_{d,0}/p_0 = 0,599$, ossia $p_{d,0} = 0,599 \cdot 17,09 = 10,2$ atm.

Commento. Dieci atmosfere all'uscita del diffusore contro una sola di ambiente: scaricare direttamente in atmosfera sarebbe uno spreco enorme (il getto tornerebbe a espandersi in modo incontrollato). La risposta ingegneristica è il *circuito chiuso*: il flusso subsonico d'uscita viene ricondotto all'ingresso dell'ugello, un ventilatore azionato da un motore ripiana la sola perdita di pressione del giro, e un refrigeratore smaltisce il calore immesso. È l'architettura delle grandi gallerie supersoniche continue.

Il senso di tutto questo

Il diffusore è la lezione di umiltà della gasdinamica: comprimere costa, e costa in pressione totale — la valuta pregiata del circuito. Tutta l'arte sta nel perderne poca: urti deboli in serie invece di uno forte, seconda gola dimensionata sull'avviamento, e la consapevolezza che oltre un certo punto parlano solo le prove sperimentali.

1.8 La riflessione delle onde da un contorno libero**Dove stiamo andando**

I getti sovra- e sottoespansi ci hanno lasciato con onde che escono dall'ugello e incontrano il bordo del getto. Che cosa succede quando un'onda incontra non una parete solida, ma il confine fra il getto e l'aria ferma circostante? La risposta — sorprendente — spiega i diamanti di Mach che tutti abbiamo visto nelle fotografie degli scarichi supersonici.

Il getto che esce da un ugello in atmosfera è delimitato da una superficie di separazione con il gas quiescente circostante: un *contorno libero*. Su questa superficie vale una condizione al contorno precisa: la pressione statica deve essere continua, cioè uguale a p_∞ lungo tutto il confine. A differenza di una parete solida, però, il contorno libero può cambiare forma e direzione: vincola la pressione, non la geometria.

Vediamo le conseguenze. Un urto obliquo che dall'interno del getto incide sul contorno libero porta dietro di sé una pressione $p_2 > p_\infty$; ma sul confine la pressione deve restare p_∞ . L'unica onda riflessa capace di riportare la pressione da p_2 giù a p_∞ è un *ventaglio di espansione*: l'urto si riflette come espansione. Il flusso, deviato dall'urto incidente e poi ancora dall'espansione riflessa nello stesso verso, piega, e il contorno libero piega con lui.

Specularmente, un'onda di espansione che incide sul contorno libero abbassa la pressione sotto p_∞ : per risalire serve una compressione, e infatti l'espansione si riflette come un ventaglio di onde di compressione, che a breve distanza coalescono in un urto.

Le due regole della riflessione

1. Su una **parete solida** le onde si riflettono *in natura uguale*: compressione riflessa come compressione, espansione come espansione (la parete impone la direzione del flusso).
2. Su un **contorno libero** le onde si riflettono *in natura opposta*: compressione riflessa come espansione, espansione come compressione (il contorno impone la pressione).

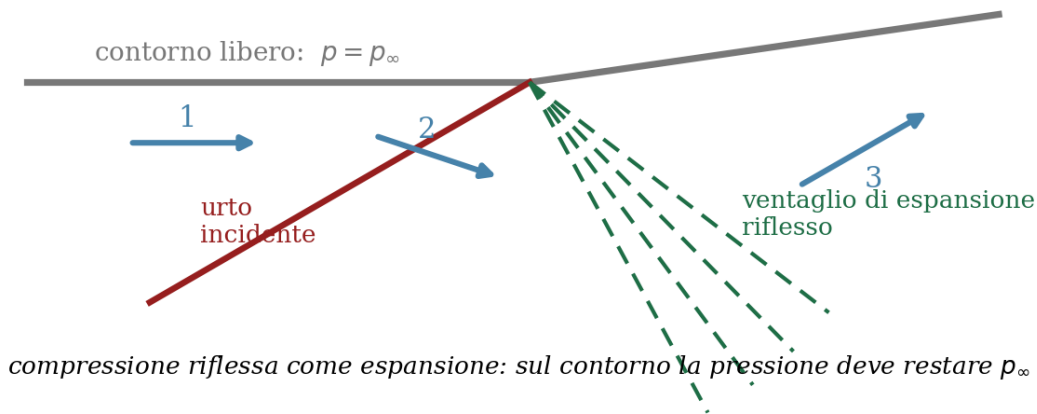


Figura 1.11. Urto obliquo che incide sul contorno libero di un getto: per mantenere $p = p_\infty$ sul confine, l'onda riflessa è un ventaglio di espansione, e il contorno piega. È il meccanismo elementare dei diamanti di Mach (cfr. Problema 5.15 per il calcolo completo).

Ora il quadro del getto non adattato si compone da solo. In un getto *sovraespanso* gli urti obliqui al bordo d'uscita si incrociano, raggiungono i contorni liberi, si riflettono come espansioni; le espansioni attraversano il getto, toccano il confine opposto, tornano compressioni; e così via. Il risultato è il celebre reticolo periodico a losanghe — i *diamanti di Mach* — visibile a occhio nudo negli scarichi caldi grazie alla luminosità delle zone ricomprese. Nel getto *sottoespanso* la sequenza parte con le espansioni e prosegue specularmente.

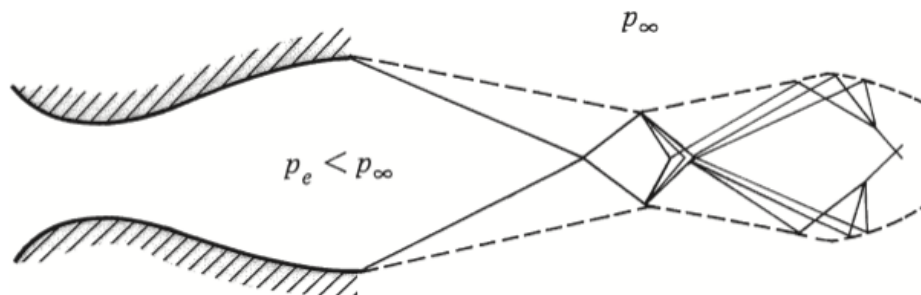


Figura 1.12. I diamanti di Mach nello scarico di un getto non adattato: il reticolo periodico di urti ed espansioni con cui il getto negozia la propria pressione con l'atmosfera.

In entrambi i casi la viscosità e il mescolamento sul contorno del getto smorzano progressivamente il motivo, che sfuma a valle.

Un'analisi quantitativa è possibile

Le regole qui sopra sono qualitative solo in apparenza: ogni riflessione si calcola con gli strumenti degli urti obliqui e di Prandtl–Meyer richiamati all'inizio. Il Problema 5.15, in coda, fa esattamente questo: un urto obliquo assegnato incide su un contorno libero e si chiede il Mach e la direzione del flusso dopo l'espansione riflessa. L'analisi fine dei ventagli che si incrociano richiede invece il metodo delle caratteristiche, che appartiene a un corso successivo.

Il senso di tutto questo

Una sola condizione al contorno — pressione continua su una frontiera deformabile — genera la fenomenologia più fotogenica della gasdinamica. Quando vedrete i diamanti nello scarico di un caccia, saprete leggerli: sono il getto che tratta, onda dopo onda, la propria pressione con l'atmosfera.

1.9 Due pagine di storia: de Laval e Stodola

Dove stiamo andando

L'ugello convergente–divergente non nasce in aeronautica ma nelle turbine a vapore di fine Ottocento. Due figure complementari — l'inventore Carl G. P. de Laval e il professore Aurel Stodola — ne scrissero rispettivamente il primo e il secondo capitolo. La storia è istruttiva anche sul metodo: intuizione tecnica prima, verifica scientifica poi.

1.9.1 De Laval: l'intuizione

L'ingegnere svedese Carl Gustaf Patrick de Laval (1845–1913), inventore prolifico (in Europa il suo nome resta legato soprattutto alle scrematrici centrifughe per il latte), si scontrò negli anni Ottanta dell'Ottocento con un limite delle sue turbine a vapore: con i soli ugelli convergenti dell'epoca, il getto di vapore che investiva le palette usciva a velocità modesta e le turbine giravano piano. Oggi sappiamo leggere il fenomeno con la teoria di questo capitolo: quegli ugelli erano *strozzati*, e da un convergente non può uscire più che flusso sonico. Nel 1888 de Laval aggiunse un tratto divergente a valle della sezione minima: il vapore continuò a espandersi, uscì supersonico, e le sue turbine balzarono a regimi di rotazione dell'ordine dei trentamila giri al minuto. Da allora il convergente–divergente si chiama anche *ugello di de Laval*.

Curiosamente, né de Laval né i suoi contemporanei erano del tutto certi che nel divergente il flusso fosse davvero supersonico: mancava la prova sperimentale.

1.9.2 Stodola: la verifica

La prova arrivò nel 1903 da Aurel Boleslav Stodola (1859–1942), professore al Politecnico di Zurigo e massimo esperto europeo di turbine a vapore, convinto assertore della ricerca ingegneristica in un'epoca in cui il «prova e riprova» empirico dominava le officine. Stodola costruì un ugello convergente–divergente strumentato: un sottile tubo forato, disposto lungo l'asse, gli permise di misurare la distribuzione assiale di pressione al variare della contropressione di scarico, regolata con una valvola. Le sue curve sperimentali riproducono esattamente la mappa dei regimi che abbiamo costruito in teoria: la famiglia interamente subsonica ad alte contropressioni, l'espansione isentropica completa alla contropressione di progetto, e — per i valori intermedi — i bruschi salti di pressione dell'urto normale in posizioni via via diverse del divergente. Era la prima conferma sperimentale sistematica del comportamento dell'ugello supersonico; di lì a poco Ludwig Prandtl a Gottinga avrebbe fotografato quelle stesse onde con le tecniche schlieren.

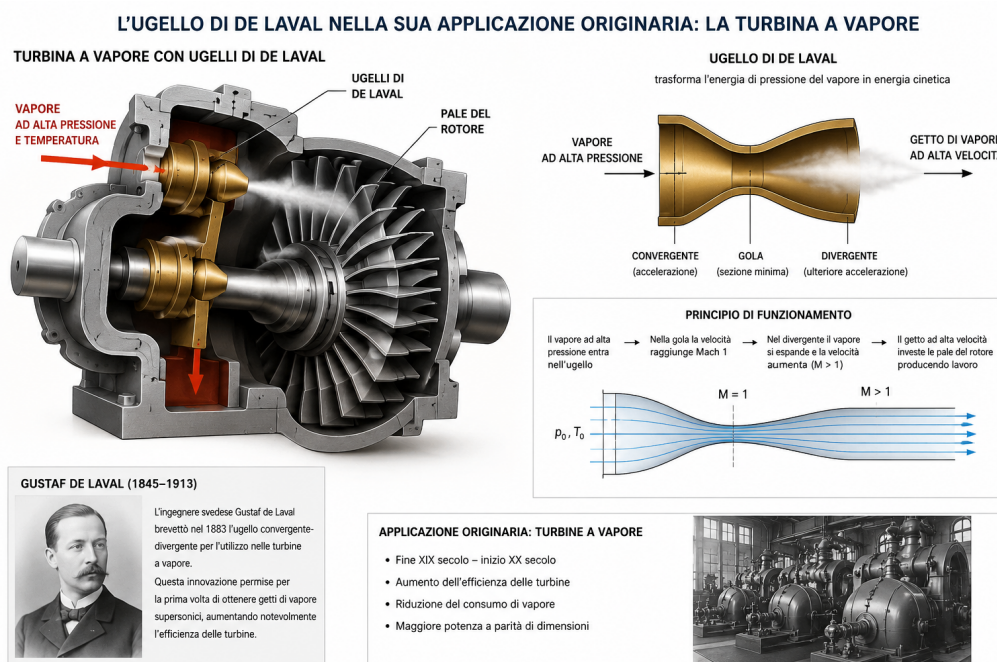


Figura 1.13. L'ugello di de Laval nella sua applicazione originaria: la turbina a vapore.

Il senso di tutto questo

Un capitolo intero di teoria era già scritto, di fatto, nel ferro delle turbine del 1888 e nelle curve di pressione del 1903. È un promemoria prezioso: le tabelle isentropiche che oggi maneggiamo con leggerezza sono il distillato di un dialogo fra invenzione e misura durato decenni.

1.10 Sintesi e formulario

Dove stiamo andando

Un solo colpo d'occhio su tutto il capitolo: le equazioni, la mappa dei regimi, e le formule da portare all'esame.

1.10.1 Le idee in dieci righe

Il flusso quasi-unidimensionale è governato dalla variazione d'area. Le forme algebriche dei tre principi di conservazione sono le (1.9), (1.10), (1.11); le differenziali sono le (1.12), (1.13), (1.14). Combinandole nasce la relazione area–velocità (1.15): subsonico e supersonico rispondono alla variazione d'area con segni opposti, e il passaggio per $M = 1$ può avvenire solo in un minimo d'area. La versione quantitativa è la relazione area–Mach (1.16): il Mach locale dipende solo da A/A^* (e da γ), con doppia soluzione subsonica/supersonica.

1.10.2 La mappa dei regimi del convergente–divergente

A serbatoio fissato, riducendo progressivamente la contropressione di scarico si attraversano nell'ordine: (1) flusso interamente subsonico, con massimo di Mach in gola e portata crescente; (2) gola sonica: strozzamento, portata massima e da qui in poi costante; (3) urto normale nel divergente, che arretra verso l'uscita al calare della contropressione; (4) urto esattamente sul bordo d'uscita; (5) getto sovraespanso: urti obliqui esterni al bordo; (6) ugello adattato: nessuna onda; (7) getto sottoespanso: ventagli di espansione esterni.

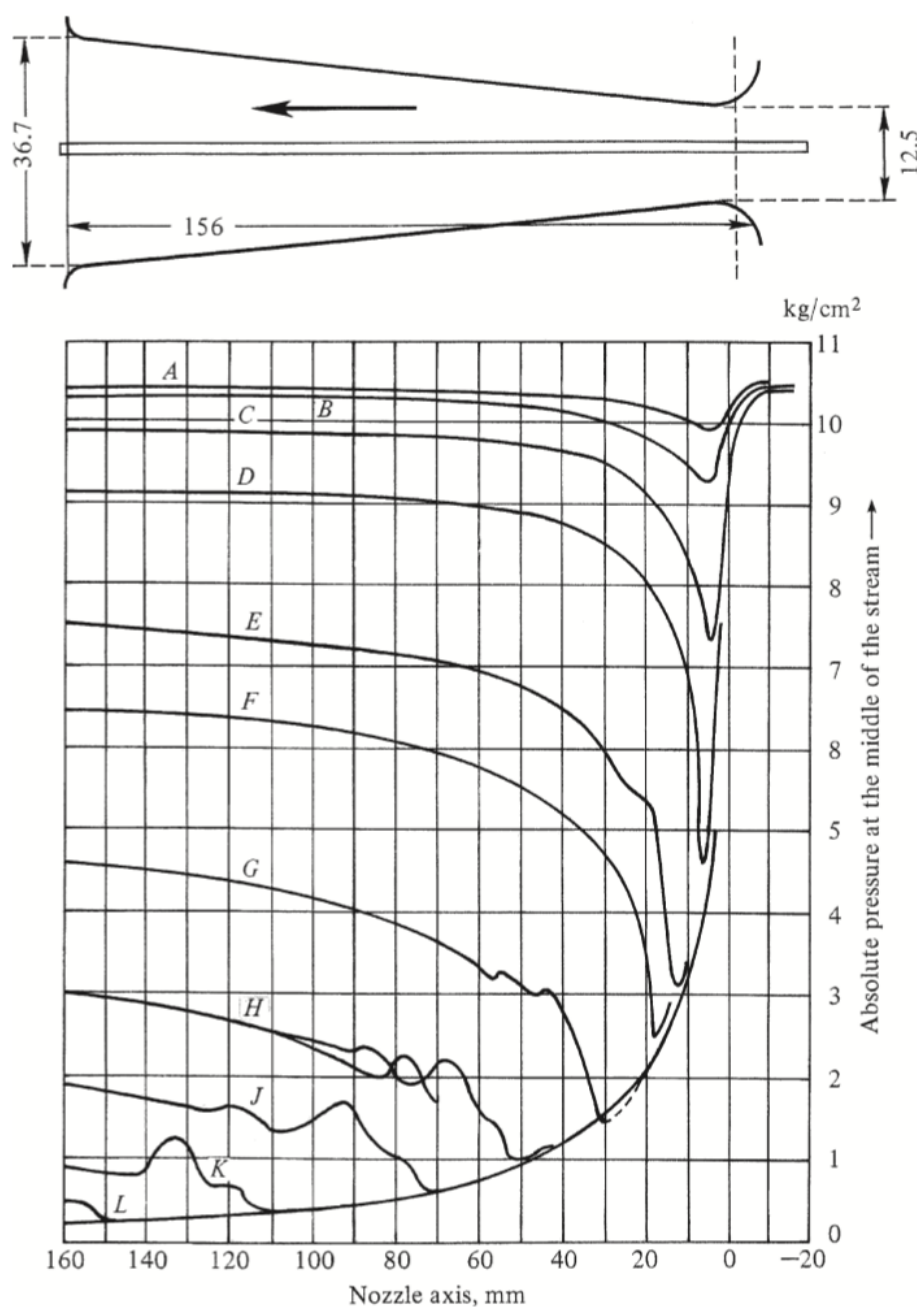


Figura 1.14. Le misure di Stodola (1903): distribuzioni assiali di pressione in un ugello convergente-divergente al variare della contropressione — la conferma sperimentale della mappa dei regimi di Figura 1.7.

1.10.3 Formulario essenziale

Portata	$\dot{m} = \rho u A = \text{cost}$
Eulero	$dp = -\rho u du$
Energia	$h_0 = \text{cost}$, ossia $T_0 = \text{cost}$ (gas cal. perfetto)
Area-velocità	$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u}$
Area-Mach	$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}$
Portata strozzata	$\dot{m} = \frac{p_0 A^*}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}}$
Attraverso un urto	$p_0 A^* = \text{cost}$
Seconda gola (avviamento)	$\frac{A_{t2}}{A_{t1}} = \frac{p_{0,1}}{p_{0,2}} \Big _{\text{urto normale a } M_e}$
Efficienza diffusore	$\eta_D = \frac{(p_{d,0}/p_0)_{\text{reale}}}{(p_{0,2}/p_{0,1})_{\text{urto a } M_e}}$
Riflessione	parete: natura uguale; contorno libero: natura opposta

Il senso di tutto questo

Con gli urti normali, gli urti obliqui, le espansioni e ora il condotto ad area variabile, il primo piano dell'edificio della fluidodinamica comprimibile è completo. I ventidue problemi che seguono sono il collaudo: percorreteli con carta, penna e — perché no — uno script Python a fianco.

1.11 Esercizi di fine capitolo, tutti risolti

Dove stiamo andando

Chiudiamo con il collaudo completo: i ventidue problemi conclusivi del capitolo di riferimento, qui riformulati e risolti passo passo. I dati originariamente in unità imperiali sono convertiti in SI ($1^\circ \text{R} = 5/9 \text{ K}$). I problemi 5.1–5.7 esercitano gli ugelli; dal 5.12 entrano in scena i diffusori; i problemi 5.18–5.22 esplorano le condizioni estreme delle gallerie ipersoniche. Salvo diversa indicazione: aria, $\gamma = 1,4$, $R = 287 \text{ J/(kg K)}$, $1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$.

5.1 Galleria Mach 2,4 in condizioni standard

Una galleria supersonica deve produrre in camera di prova $M = 2,4$ con condizioni statiche atmosferiche standard ($p_e = 1 \text{ atm}$, $T_e = 288 \text{ K}$). Calcolare (a) il rapporto d'area uscita/gola dell'ugello, (b) pressione e temperatura di serbatoio.

Fase A — Geometria.

Relazione area-Mach (1.16) con $M = 2,4$:

$$\frac{A_e}{A^*} = 2,403.$$

Fase B — Serbatoio.

Le grandezze totali si conservano nell'ugello isentropico; a $M = 2,4$: $p_0/p = 14,62$, $T_0/T = 2,152$. Quindi

$$p_0 = 14,62 \cdot 1 = 14,6 \text{ atm}, \quad T_0 = 2,152 \cdot 288 = 620 \text{ K}.$$

Risultato

$$A_e/A^* = 2,40; p_0 = 14,6 \text{ atm}; T_0 \simeq 620 \text{ K}.$$

Problema 5.2 — Tubo di Pitot in camera di prova

Il serbatoio di una galleria supersonica è a 10 atm; un tubo di Pitot immerso nella camera di prova legge 0,627 atm. Determinare il Mach di prova e il rapporto d'area dell'ugello.

Fase A — Che cosa legge un Pitot in supersonico.

Davanti al naso della sonda si forma un urto normale staccato: il Pitot misura la pressione totale *a valle dell'urto*, $p_{0,2}$. A monte la pressione totale è quella di serbatoio, $p_{0,1} = 10 \text{ atm}$. Dunque il dato è

$$\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = \frac{0,627}{10} = 0,0627.$$

Fase B — Inversione.

Invertendo la (1.6) rispetto a M_1 : $M_1 = 4,98$, in pratica $M \simeq 5$. Dalla relazione area-Mach: $A_e/A^* = 24,6$ (il valore tondo $M = 5$ darebbe 25,0).

Risultato

$$M \simeq 4,98 (\approx 5); A_e/A^* \simeq 24,6.$$

Problema 5.3 — Sonda di pressione statica lungo l'ugello

Il serbatoio è a 5 atm. Una sonda statica, spostata lungo l'asse dell'ugello, legge nelle tre stazioni: (a) 4,00 atm, (b) 2,64 atm, (c) 0,50 atm. Per ciascuna determinare Mach locale e rapporto d'area A/A^* .

Fase A — Metodo.

Nel flusso isentropico $p_0 = 5 \text{ atm}$ ovunque: da p_0/p si inverte la (1.2) per M , poi la (1.16) dà A/A^* . Il discrimine fra i rami è il rapporto critico $p_0/p^* = 1,893$.

Fase B — Le tre stazioni.

stazione	p_0/p	M	A/A^*
(a) $p = 4,00 \text{ atm}$	1,250	0,574	1,221
(b) $p = 2,64 \text{ atm}$	1,894	1,00	1,000
(c) $p = 0,50 \text{ atm}$	10,0	2,157	1,931

La stazione (a) è nel convergente; la (b) è, con precisione notevole, la gola ($p/p_0 = 0,528$); la (c) è nel divergente supersonico.

Risultato

$$(a) M = 0,57, A/A^* = 1,22; (b) M = 1,00, A/A^* = 1,00; (c) M = 2,16, A/A^* = 1,93.$$

Problema 5.4 — Condotta convergente–divergente interamente subsonico

In un condotto convergente–divergente le aree di ingresso, gola e uscita valgono $1,00 \text{ m}^2$, $0,70 \text{ m}^2$ e $0,85 \text{ m}^2$. All'ingresso $M_1 = 0,3$ e $p_1 = 0,8 \times 10^5 \text{ Pa}$. Il flusso è ovunque subsonico: calcolare M e p in gola e all'uscita.

Fase A — Il riferimento sonico.

Il flusso è subsonico e isentropico: A^* è un puro riferimento, lo stesso per tutte le sezioni. Dall'ingresso: a $M_1 = 0,3$, $A_1/A^* = 2,035$, quindi

$$A^* = \frac{1,00}{2,035} = 0,491 \text{ m}^2, \quad p_0 = p_1 \left(\frac{p_0}{p} \right)_{M=0,3} = 0,8 \cdot 10^5 \cdot 1,064 = 8,52 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

Fase B — Gola.

$A_t/A^* = 0,70/0,491 = 1,425$; ramo subsonico: $M_t = 0,460$, e $p_t = p_0/(p_0/p)_{0,460} = 8,52 \cdot 10^4/1,156 = 7,37 \times 10^4 \text{ Pa}$.

Fase C — Uscita.

$A_e/A^* = 0,85/0,491 = 1,730$; ramo subsonico: $M_e = 0,362$, e $p_e = 8,52 \cdot 10^4/1,095 = 7,78 \times 10^4 \text{ Pa}$.

Risultato

Gola: $M_t = 0,46$, $p_t = 7,37 \times 10^4 \text{ Pa}$. Uscita: $M_e = 0,36$, $p_e = 7,78 \times 10^4 \text{ Pa}$.

Commento. La pressione tocca il minimo in gola e poi *risale*: nel subsonico il divergente è un diffusore. E si noti $A_t > A^*$: la gola geometrica non è sonica.

Problema 5.5 — Divergente subsonico

Un condotto divergente ha $A_2/A_1 = 1,7$. All'ingresso $T_1 = 300 \text{ K}$ e $u_1 = 250 \text{ m/s}$; all'uscita $p_2 = 1 \text{ atm}$. Calcolare la pressione d'ingresso p_1 e la velocità d'uscita u_2 .

Fase A — Mach d'ingresso.

$a_1 = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 300} = 347,2 \text{ m/s}$, quindi $M_1 = 250/347,2 = 0,720$: subsonico, e nel divergente rallenterà.

Fase B — Mach d'uscita dalla geometria.

$A_1/A^* = 1,0805$ a $M_1 = 0,720$; dunque $A_2/A^* = 1,7 \cdot 1,0805 = 1,837$, e sul ramo subsonico $M_2 = 0,337$.

Fase C — Pressioni.

La pressione totale, costante, si ricava dall'uscita: $p_0 = p_2 (p_0/p)_{M_2} = 1 \cdot 1,082 = 1,082 \text{ atm}$. All'ingresso $(p_0/p)_{M_1} = 1,412$:

$$p_1 = \frac{1,082}{1,412} = 0,766 \text{ atm} = 7,76 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

Fase D — Velocità d'uscita.

$T_0 = T_1 (1 + 0,2M_1^2) = 300 \cdot 1,1037 = 331,1 \text{ K}$; $T_2 = T_0/(1 + 0,2M_2^2) = 331,1/1,0227 = 323,8 \text{ K}$;
 $a_2 = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 323,8} = 360,7 \text{ m/s}$;

$$u_2 = M_2 a_2 = 0,337 \cdot 360,7 = 121,5 \text{ m/s}.$$

Risultato

$p_1 \simeq 0,77 \text{ atm}$; $u_2 \simeq 122 \text{ m/s}$: il divergente ha dimezzato la velocità recuperando pressione.

Problema 5.6 — Derivazione della formula della portata strozzata

Dimostrare la (1.17) per un ugello strozzato.

Fase A — Portata in gola.

Con gola sonica, $\dot{m} = \rho^* A^* u^*$ e $u^* = a^* = \sqrt{\gamma R T^*}$.

Fase B — Tutto in funzione delle grandezze di serbatoio.

Dalle condizioni critiche:

$$\rho^* = \rho_0 \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad T^* = T_0 \frac{2}{\gamma + 1}, \quad p_0 = \frac{p_0}{R T_0}.$$

Sostituendo:

$$\dot{m} = \frac{p_0}{R T_0} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} A^* \sqrt{\gamma R T_0 \frac{2}{\gamma + 1}}.$$

Fase C — Riordino degli esponenti.

Raccogliamo: la parte in T_0 dà $T_0^{-1} \cdot T_0^{1/2} = T_0^{-1/2}$; la parte in R dà $R^{-1} \cdot R^{1/2} = R^{-1/2}$; le potenze di $2/(\gamma + 1)$ si sommano,

$$\left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{2+(\gamma-1)}{2(\gamma-1)}} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}.$$

Portando tutto sotto radice:

$$\dot{m} = \frac{p_0 A^*}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}},$$

che è la (1.17). ■

Problema 5.7 — Come scala la portata con le condizioni di serbatoio

Con serbatoio a 15 atm e 750 K una galleria smaltisce 1,5 kg/s. Quanto vale la portata se il serbatoio passa a 20 atm e 600 K?

Fase A — La scalatura.

La galleria è strozzata e la gola non cambia: dalla (1.17), $\dot{m} \propto p_0 / \sqrt{T_0}$. Quindi

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1 \frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} \sqrt{\frac{T_{0,1}}{T_{0,2}}} = 1,5 \cdot \frac{20}{15} \sqrt{\frac{750}{600}} = 1,5 \cdot 1,333 \cdot 1,118.$$

Risultato

$$\dot{m}_2 = 2,24 \text{ kg/s.}$$

Problema 5.8 — Che cosa sente il naso di un modello tozzo

Un modello a naso arrotondato è montato nella camera di prova di una galleria con serbatoio a 10 atm e $T_0 = 800^\circ\text{R} = 444,4 \text{ K}$; il rapporto d'area dell'ugello è $A/A^* = 25$. Calcolare pressione e temperatura nel punto di ristagno sul naso del modello.

Fase A — Mach di prova.

Dalla (1.16), ramo supersonico, $A/A^* = 25$ dà esattamente $M_e = 5,00$.

Fase B — Il naso vede un urto normale.

Davanti a un corpo tozzo in supersonico staziona un urto staccato, che sulla linea di ristagno è normale. Nel punto di ristagno la pressione è la totale *a valle dell'urto*:

$$p_{\text{naso}} = p_{0,2} = p_{0,1} \left(\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} \right)_{M=5} = 10 \cdot 0,0617 = 0,617 \text{ atm} = 62,5 \text{ kPa}.$$

La temperatura totale invece attraversa l'urto indenne (l'urto è adiabatico):

$$T_{\text{naso}} = T_0 = 444,4 \text{ K}.$$

Risultato

$$p_{\text{naso}} \simeq 0,62 \text{ atm}; T_{\text{naso}} = 444 \text{ K}.$$

Commento. Il risultato spiazza al primo incontro: il punto di ristagno, dove «tutto si ferma», sta a una pressione *inferiore* a quella ambiente al suolo, perché a Mach 5 l'urto ha bruciato il 94% della pressione totale. La temperatura, invece, torna integralmente: per questo il riscaldamento cinetico è il vero nemico del volo ipersonico.

Problema 5.9 — Lastra piana in incidenza in camera di prova

Una lastra piana è montata in camera di prova con incidenza di 10° ; sulla faccia dorsale (in ombra aerodinamica) la pressione statica misurata vale 1,0 atm. La gola dell'ugello ha area $0,0500 \text{ m}^2$ e l'uscita $0,0844 \text{ m}^2$. Determinare la pressione di serbatoio.

Fase A — Mach di prova dalla geometria.

$$A_e/A^* = 0,0844/0,0500 = 1,688: \text{ sul ramo supersonico, } M_e = 2,00.$$

Fase B — Il dorso della lastra: un'espansione di Prandtl–Meyer.

Il flusso a $M_e = 2$ che incontra il dorso della lastra inclinata di 10° deve deviare di 10° «allontanandosi» dalla superficie: spigolo convesso, dunque ventaglio di espansione. Con la (1.8): $\nu(2,00) = 26,4^\circ$, quindi $\nu_3 = 26,4 + 10 = 36,4^\circ$, da cui $M_3 = 2,385$.

Fase C — Risalita alla pressione di serbatoio.

L'espansione è isentropica: la pressione totale sul dorso è ancora quella di serbatoio. A $M_3 = 2,385$, $p_0/p_3 = 14,29$; con $p_3 = 1,0 \text{ atm}$:

$$p_0 = 14,29 \cdot 1,0 = 14,3 \text{ atm}.$$

Risultato

$$p_0 \simeq 14,3 \text{ atm} \text{ (la statica indisturbata di prova risulta } p_e = p_0/7,824 = 1,83 \text{ atm)}.$$

Commento. Un problema «di gallerie» risolto con un attrezzo del capitolo precedente: è il primo assaggio di come i capitoli della comprimibile lavorino ormai in squadra.

Problema 5.10 — Pitot all'uscita di un ugello: il quadro completo

Un ugello supersonico ha serbatoio a 10 atm e 500 K; un Pitot al bordo d'uscita legge 0,6172 atm; l'area di gola è $0,3 \text{ m}^2$. Calcolare: (a) M_e ; (b) A_e ; (c) p_e e T_e ; (d) la portata.

Fase A — Mach d'uscita dal Pitot.

Come nel Problema 5.2: $p_{0,2}/p_{0,1} = 0,6172/10 = 0,0617$, e l'inversione della (1.6) dà $M_e = 5,00$.

Fase B — Area d'uscita.

$$A_e/A^* = 25,0 \text{ a } M = 5, \text{ quindi } A_e = 25 \cdot 0,3 = 7,5 \text{ m}^2.$$

Fase C — Condizioni statiche d'uscita.

$$p_0/p_e = 529,1 \text{ e } T_0/T_e = 6,00 \text{ a } M = 5:$$

$$p_e = \frac{10}{529,1} = 1,89 \times 10^{-2} \text{ atm} = 1,92 \text{ kPa}, \quad T_e = \frac{500}{6} = 83,3 \text{ K}.$$

Fase D — Portata.

Formula della portata strozzata (1.17) in SI ($p_0 = 1,013 \times 10^6 \text{ Pa}$):

$$\dot{m} = \frac{1,013 \cdot 10^6 \cdot 0,3}{\sqrt{500}} \sqrt{\frac{1,4}{287} \left(\frac{2}{2,4}\right)^6} = \frac{3,04 \cdot 10^5}{22,36} \cdot 0,0404 = 549 \text{ kg/s}.$$

Risultato

$$M_e = 5,0; A_e = 7,5 \text{ m}^2; p_e = 1,89 \times 10^{-2} \text{ atm}; T_e = 83,3 \text{ K}; \dot{m} \simeq 550 \text{ kg/s}.$$

Problema 5.11 — Localizzare l'urto nel divergente

Un condotto convergente-divergente ha area d'uscita $0,50 \text{ m}^2$ e gola $0,25 \text{ m}^2$; il serbatoio è a $1,0 \text{ atm}$ e l'uscita a $0,6 \text{ atm}$. Il flusso diventa supersonico nel divergente e termina con un urto normale interno: trovare il rapporto d'area A/A^* della sezione dell'urto.

Fase A — Metodo diretto.

Il dato combinato (1.18):

$$\left(\frac{p_e}{p_{0,1}}\right) \left(\frac{A_e}{A_1^*}\right) = 0,6 \cdot 2 = 1,2.$$

Dalla (1.20):

$$M_e^2 = -2,5 + \sqrt{6,25 + 5 (0,8333)^6 \left(\frac{1}{1,2}\right)^2} = 0,2227 \Rightarrow M_e = 0,472.$$

Fase B — Rialita all'urto.

$$(p_{0,e}/p_e)_{0,472} = 1,165, \text{ quindi}$$

$$\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = 1,165 \cdot 0,6 = 0,699.$$

Invertendo la (1.6): $M_1 = 2,047$; e la relazione area-Mach colloca l'urto a

$$\frac{A}{A^*} = \frac{A}{A_t} = 1,76.$$

Risultato

L'urto staziona nella sezione con $A/A^* \simeq 1,76$ (cioè $A \simeq 0,44 \text{ m}^2$).

Problema 5.12 — Seconda gola minima per l'avviamento

L'ugello di una galleria supersonica ha rapporto d'area $A_e/A_{t1} = 104,1$ e prima gola $A_{t1} = 1,0 \text{ cm}^2$. Determinare l'area minima della seconda gola A_{t2} che consente l'avviamento.

Fase A — Mach di prova.

Dalla (1.16), ramo supersonico, $A/A^* = 104,1$ corrisponde a $M_e = 7,00$: una galleria ipersonica.

Fase B — Perdita di avviamento e area richiesta.

Durante l'avviamento la seconda gola deve digerire la portata a valle di un urto normale a $M_e = 7$, per il quale la (1.6) dà $p_{0,2}/p_{0,1} = 0,01536$. Dalla (1.22):

$$A_{t2} = \frac{A_{t1}}{p_{0,2}/p_{0,1}} = \frac{1,0}{0,01536} = 65,1 \text{ cm}^2.$$

Risultato

$A_{t2} \geq 65 \text{ cm}^2$: sessantacinque volte la prima gola.

Commento. A Mach 7 l'urto normale distrugge il 98,5% della pressione totale: ecco perché i diffusori ipersonici hanno gole enormi e perché, a questi Mach, il recupero da urto normale è già un traguardo ($\eta_D < 1$).

Problema 5.13 — Efficienza di un diffusore misurata sul campo

Una galleria con Mach di prova 2,6 e serbatoio a 1,8 atm scarica direttamente in atmosfera; all'uscita del diffusore il Mach è molto basso ($\approx 0,1$). Calcolare η_D .

Fase A — La pressione totale all'uscita del diffusore.

A $M \approx 0,1$ pressione statica e totale quasi coincidono ($p_0/p = 1,007$): scaricando in atmosfera, $p_{d,0} \simeq p_\infty = 1 \text{ atm}$.

Fase B — Il confronto con l'urto normale.

$(p_{d,0}/p_0)_{\text{reale}} = 1/1,8 = 0,556$; per l'urto normale a $M = 2,6$, $p_{0,2}/p_{0,1} = 0,460$. Dalla (1.21):

$$\eta_D = \frac{0,556}{0,460} = 1,21.$$

Risultato

$\eta_D \simeq 1,21$: il diffusore recupera il 21% meglio di un urto normale — tipico dei Mach di prova moderati.

Problema 5.14 — Getto sottoespanso: la deflessione al bordo d'uscita

Un ugello ha $A_e/A_t = 10$, serbatoio a $p_0 = 10,00 \text{ atm}$ e contropressione ambiente $p_B = 0,04 \text{ atm}$. Calcolare l'angolo θ di cui il flusso devia appena superato il bordo d'uscita.

Fase A — Condizioni di uscita e diagnosi.

Ramo supersonico con $A/A^* = 10$: $M_e = 3,92$; l'isentropica dà $p_0/p_e = 136,9$, cioè $p_e = 0,0731 \text{ atm}$. Poiché $p_e > p_B$, il getto è sottoespanso: al bordo d'uscita nasce un ventaglio di espansione che completa l'espansione fino a p_B .

Fase B — Espansione esterna con Prandtl–Meyer.

Il ventaglio è isentropico, quindi p_0 si conserva anche fuori: il Mach finale M_B soddisfa

$$\frac{p_0}{p_B} = \frac{10}{0,04} = 250 \Rightarrow M_B = 4,38.$$

La deflessione è la differenza delle funzioni di Prandtl–Meyer (1.8):

$$\theta = \nu(M_B) - \nu(M_c) = 70,5 - 64,7 = 5,8^\circ.$$

Risultato

Il getto si apre di $\theta \simeq 5,8^\circ$ verso l'esterno.

Problema 5.15 — Urto obliquo su un contorno libero

Un urto obliquo con $M_1 = 4,0$ e inclinazione $\beta = 50^\circ$ incide su un contorno a pressione costante (il bordo di un getto). Determinare il Mach M_3 a valle dell'espansione riflessa e la direzione del flusso in regione 3 rispetto a quella a monte dell'urto.

Fase A — L'urto incidente.

Componente normale: $M_{n1} = 4 \sin 50^\circ = 3,064$. Dalle relazioni d'urto: $M_{n2} = 0,471$, $p_2/p_1 = 10,79$. La deflessione dalla (1.7): $\theta = 33,1^\circ$; dunque

$$M_2 = \frac{M_{n2}}{\sin(\beta - \theta)} = \frac{0,471}{\sin 16,9^\circ} = 1,62.$$

Il flusso in regione 2 è deviato di $33,1^\circ$ verso il contorno.

Fase B — La riflessione: un'espansione fino a $p_3 = p_1$.

Sul contorno libero la pressione deve tornare al valore ambiente $p_1 = p_\infty$: serve un'espansione che porti da $p_2 = 10,79 p_1$ a $p_3 = p_1$. L'espansione è isentropica, quindi la pressione totale in regione 2 si conserva:

$$\frac{p_{0,2}}{p_1} = \frac{p_{0,2}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} = (p_0/p)_{M=1,62} \cdot 10,79 = 4,37 \cdot 10,79 = 47,2.$$

In regione 3, dunque, $p_{0,3}/p_3 = 47,2$: invertendo l'isentropica,

$$M_3 = 3,17.$$

Fase C — La direzione finale.

La deflessione dell'espansione è $\Delta\theta = \nu(M_3) - \nu(M_2) = 52,9 - 15,4 = 37,5^\circ$, nello stesso verso della deflessione d'urto (il flusso continua a piegare verso l'esterno, e il contorno libero con lui). Rispetto al flusso a monte:

$$\theta_{\text{tot}} = 33,1 + 37,5 = 70,5^\circ.$$

Risultato

$M_3 \simeq 3,17$; il flusso in regione 3 è ruotato di circa $70,5^\circ$ rispetto alla direzione a monte dell'urto.

Commento. Un urto così forte ($\beta = 50^\circ$ a Mach 4) strapazza il getto: il contorno si impenna di settanta gradi. Nei getti reali gli urti al bordo sono molto più deboli e i diamanti restano composti; ma la meccanica è esattamente questa.

Problema 5.16 — Il Mach di uscita di un ugello a razzo

Nella camera di combustione di un razzo a idrogeno e ossigeno regnano 4000 K e 15 atm; all'uscita dell'ugello la pressione vale $1,174 \times 10^{-2}$ atm. Con $\gamma = 1,22$ costante e $R = 519,6 \text{ J/(kg K)}$, calcolare il Mach di uscita.

Fase A — Inversione dell'isentropica.

$$M_e^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_0}{p_e} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right] = \frac{2}{0,22} \left[\left(\frac{15}{0,01174} \right)^{0,1803} - 1 \right].$$

Il rapporto di pressioni vale 1277,7; elevato a 0,1803 dà 3,633; quindi

$$M_e^2 = 9,091 \cdot 2,633 = 23,9 \Rightarrow M_e = 4,89.$$

Risultato

$M_e \simeq 4,9$. (Si noti che né T_0 né R servono per il solo Mach: entrerebbero in gioco per velocità e portata.)

Problema 5.17 — Progetto completo di una galleria Mach 3

Si vuole una galleria Mach 3 con condizioni statiche in camera di prova $p_e = 0,1$ atm e $T_e = 400^\circ\text{R} = 222,2$ K. Calcolare: (a) A_e/A^* dell'ugello; (b) A_{t2}/A_{t1} ; (c) p_0 ; (d) T_0 .

Fase A — Ugello.

$$A M = 3: A_e/A^* = 4,235.$$

Fase B — Diffusore (avviamento).

$$\text{Urto normale a } M = 3: p_{0,2}/p_{0,1} = 0,3283; \text{ quindi } A_{t2}/A_{t1} = 1/0,3283 = 3,05.$$

Fase C — Serbatoio.

$$p_0/p = 36,73 \text{ e } T_0/T = 2,80 \text{ a } M = 3:$$

$$p_0 = 36,73 \cdot 0,1 = 3,67 \text{ atm}, \quad T_0 = 2,80 \cdot 222,2 = 622 \text{ K}.$$

Risultato

$A_e/A^* = 4,23$; $A_{t2}/A_{t1} = 3,05$; $p_0 = 3,67$ atm; $T_0 = 622$ K.

Problema 5.18 — Due gallerie ipersoniche, quasi la stessa velocità

Due gallerie ipersoniche condividono la temperatura di serbatoio $T_0 = 3000$ K (aria). (a) La prima ha camera di prova a $M = 10$: calcolarne la velocità. (b) La seconda a $M = 20$: *idem*. (c) Confrontare e commentare.

Fase A — Galleria Mach 10.

$$T = \frac{3000}{1 + 0,2 \cdot 100} = \frac{3000}{21} = 142,9 \text{ K}, \quad a = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 142,9} = 239,6 \text{ m/s},$$

$$u = 10 \cdot 239,6 = 2396 \text{ m/s}.$$

Fase B — Galleria Mach 20.

$$T = \frac{3000}{1 + 0,2 \cdot 400} = \frac{3000}{81} = 37,0 \text{ K}, \quad a = 122,0 \text{ m/s}, \quad u = 20 \cdot 122,0 = 2440 \text{ m/s}.$$

Fase C — Confronto.

Raddoppiare il Mach ha aumentato la velocità di appena l'1,8%. La ragione è energetica: a serbatoio fissato, l'energia disponibile per unità di massa è $c_p T_0$, e a Mach 10 è già quasi tutta convertita in energia cinetica. Il Mach cresce soprattutto perché la temperatura — e con lei la velocità del suono — crolla al denominatore: le gallerie ipersoniche sono macchine ad altissimo Mach ma non a velocità proporzionalmente alta.

Risultato

(a) $u \simeq 2396$ m/s; (b) $u \simeq 2440$ m/s: quasi uguali.

Problema 5.19 — La velocità massima teorica

Per una galleria con $T_0 = 3000$ K in aria, calcolare la massima velocità teoricamente raggiungibile in camera di prova e confrontarla con i risultati del problema precedente.

Fase A — Tutta l'entalpia in energia cinetica.

Dalla conservazione dell'energia (I.11), il limite si raggiunge espandendo fino a $T \rightarrow 0$:

$$c_p T_0 = \frac{u_{\max}^2}{2} \Rightarrow u_{\max} = \sqrt{2c_p T_0} = \sqrt{2 \cdot 1004,5 \cdot 3000} = 2455 \text{ m/s},$$

con $c_p = \gamma R / (\gamma - 1) = 1004,5$ J/(kg K).

Risultato

$u_{\max} = 2455$ m/s: la galleria Mach 10 ne realizza già il 97,6%, la Mach 20 il 99,4%. Il «muro» è l'entalpia di serbatoio.

Problema 5.20 — Il limite della liquefazione: aria

Nelle gallerie ipersoniche convenzionali la temperatura statica in camera di prova è bassissima; l'aria, indicativamente, liquefa attorno a 50 K (con dipendenza dalla pressione locale). Per una galleria Mach 20 ad aria, calcolare la minima T_0 che evita la liquefazione in camera di prova.

Fase A — Imposizione del vincolo.

Serve $T \geq 50$ K a $M = 20$:

$$T_0 = T (1 + 0,2 \cdot 400) = 50 \cdot 81 = 4050 \text{ K}.$$

Risultato

$T_{0,\min} = 4050$ K: oltre le possibilità dei riscaldatori delle gallerie continue — ecco perché non esistono gallerie Mach 20 continue ad aria.

Commento sul modello. La soglia di 50 K è una semplificazione dichiarata: la liquefazione dipende dalla pressione, e un flusso bifase renderebbe comunque inservibili le misure ben prima della condensazione completa.

Problema 5.21 — Il limite della liquefazione: elio

L'elio, alle basse pressioni tipiche delle camere di prova, liquefa attorno a 2,2 K. Per una galleria Mach 20 a elio ($\gamma = 1,67$), calcolare la minima T_0 che evita la liquefazione.

Fase A — Stesso vincolo, altro gas.

Con $\gamma = 1,67$, $(\gamma - 1)/2 = 0,335$:

$$T_0 = 2,2 (1 + 0,335 \cdot 400) = 2,2 \cdot 135 = 297 \text{ K}.$$

Risultato

$T_{0,\min} = 297 \text{ K}$: temperatura ambiente! Per questo esistono gallerie ipersoniche a elio ad altissimo Mach: niente riscaldatori.

Problema 5.22 — Il rapporto d'area di una galleria a elio

Per la galleria a elio del problema precedente ($M = 20$, $\gamma = 1,67$), calcolare il rapporto d'area uscita/gola dell'ugello e confrontarlo con quello di una galleria Mach 20 ad aria.

Fase A — Elio.

Relazione area–Mach (1.16) con $\gamma = 1,67$, $M = 20$ (esponente $(\gamma + 1)/(\gamma - 1) = 3,985$):

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{20} \left[\frac{2}{2,67} (1 + 0,335 \cdot 400) \right]^{1,993} = \frac{1}{20} (101,1)^{1,993} \simeq 494.$$

Fase B — Aria, per confronto.

Con $\gamma = 1,4$, $M = 20$:

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{20} \left[\frac{2}{2,4} \cdot 81 \right]^3 = \frac{67,5^3}{20} \simeq 15\,400.$$

Risultato

Elio: $A_e/A^* \simeq 494$; aria: $A_e/A^* \simeq 15\,400$ — oltre trenta volte tanto. Il γ alto dell'elio rende l'ugello enormemente più compatto: seconda ragione, dopo la liquefazione, del successo delle gallerie a elio.

Il senso di tutto questo

Ventidue problemi, un solo schema mentale: individuare il regime, scegliere il riferimento sonico e la pressione totale giusti per ogni tratto, e lasciare che tre relazioni isentropiche, l'urto normale e la costanza di $p_0 A^*$ facciano il resto. Chi arriva in fondo a questa lista possiede, operativamente, tutto il capitolo.