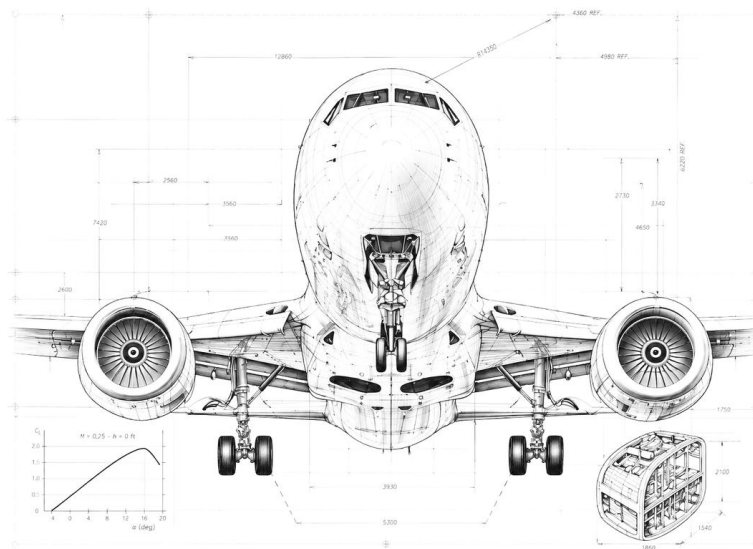


Generalità sui Fluidi

Proprietà fisiche fondamentali e ipotesi del continuo



Prof. Ing. Biagio Raucci

Istituto Tecnico – Indirizzo Trasporti e Logistica
Articolazione Conduzione del Mezzo Aereo

13 luglio 2026

Indice

Prefazione	5
I Che cos'è un fluido	6
I.1 Un problema di definizione	6
I.2 La definizione fenomenologica	7
I.2.1 Solido elastico e fluido a confronto	7
I.3 La spiegazione microscopica	9
I.3.1 La curva di Lennard–Jones	9
I.3.2 Perché il solido è elastico	10
I.3.3 Perché il gas è un fluido	11
I.3.4 Il caso più sottile: i liquidi	12
I.4 Sintesi: un'unica risposta, tre meccanismi	13
2 L'ipotesi del continuo	14
2.1 Un'incongruenza da chiarire	14
2.2 L'esperimento dello strumento a scala variabile	15
2.2.1 Regione I: la grandezza non è definita	15
2.2.2 Regione II: fluttuazioni e convergenza	16
2.2.3 Regione III: la variazione di campo	16
2.3 Le conseguenze della discretezza	17
2.4 La costruzione del continuo	17
2.4.1 Un materiale continuo può replicare un sistema discreto?	18
2.4.2 L'invenzione della temperatura e della pressione	19
2.5 Quante molecole in un volume d'aria?	20
2.6 Il libero cammino medio molecolare	21
2.7 Il numero di Knudsen	22
2.8 Sintesi	23
3 Densità ed espansione termica	24
3.1 La densità come proprietà di campo	24
3.2 Dipendenza della densità dalla temperatura	24
3.2.1 Linearizzazione e coefficiente di espansione termica	25
3.2.2 Il segno di α	26
3.2.3 Determinazione sperimentale nei liquidi	26
3.2.4 L'anomalia dell'acqua	26
3.3 Il coefficiente di espansione termica dei gas	27
3.3.1 Le due forme dell'equazione di stato	27

3.3.2	Derivazione di α per il gas perfetto	28
3.3.3	L'universalità di α	28
3.4	Interpretazione microscopica dell'espansione termica	29
3.4.1	La distribuzione di Maxwell–Boltzmann	29
3.4.2	Il meccanismo nei liquidi: l'asimmetria del potenziale	30
3.4.3	Il meccanismo nei gas: la pressione cinetica	31
3.5	Formulazione differenziale complessiva	32
4	Comprimibilità di un fluido	33
4.1	Il modulo di comprimibilità	33
4.2	Liquidi: praticamente incompressibili	34
4.3	Gas: la comprimibilità dipende dalla trasformazione	34
4.4	Un esempio svolto	35
5	Viscosità e sforzi tangenziali	36
5.1	La velocità di deformazione	36
5.2	La legge di Newton per i fluidi	36
5.3	Il significato microscopico della viscosità	38
5.4	Dipendenza dalla temperatura	39
5.5	Viscosità cinematica	39
5.6	Un esempio svolto	40
6	La tensione di vapore	41
6.1	Una proprietà di confine tra liquido e gas	41
6.2	Il quadro microscopico: dal modello di liquido all'evaporazione	41
6.2.1	Il liquido come aggregato di molecole in agitazione	41
6.2.2	La distribuzione delle velocità e la coda energetica	42
6.2.3	Il meccanismo dell'evaporazione	43
6.3	L'esperimento ideale e la definizione di tensione di vapore	43
6.3.1	Descrizione dell'esperimento	43
6.3.2	L'evoluzione verso l'equilibrio	43
6.4	Dipendenza dal materiale	45
6.5	Dipendenza dalla temperatura	45
6.5.1	Interpretazione microscopica	45
6.5.2	Dati sperimentali per l'acqua	46
6.5.3	Una formula per la tensione di vapore dell'acqua	46
6.6	Ebollizione: quando la tensione di vapore eguaglia la pressione esterna	47
6.7	Applicazioni tecnologiche del controllo dell'ebollizione	48
6.7.1	La pentola a pressione	48
6.7.2	I sistemi di raffreddamento pressurizzati	49
6.7.3	La liofilizzazione	49
6.8	La cavitazione	49
6.8.1	Il legame con la fluidodinamica	49

6.8.2	Innesco della cavitazione	50
6.8.3	Il danno da cavitazione	50
6.8.4	Una nota storica: il limite dei dieci metri	51
6.9	Sintesi	52
7	La tensione superficiale	53
7.1	Introduzione	53
7.2	Che cos'è la tensione superficiale	53
7.3	Origine microscopica	54
7.3.1	Richiamo: la distanza di equilibrio molecolare	54
7.3.2	Molecola interna e molecola all'interfaccia	55
7.3.3	La superficie come membrana	56
7.4	Definizione operativa del coefficiente σ	57
7.5	La legge di Laplace	58
7.5.1	Un elemento di membrana curva	58
7.5.2	Il bilancio con la pressione	59
7.5.3	Il raggio di curvatura medio: un invariante geometrico	60
7.6	Applicazioni della legge di Laplace	60
7.6.1	Recipiente sferico in pressione	60
7.6.2	Bolla d'aria in un liquido e bolla di sapone	61
7.7	Determinazione e valori della tensione superficiale	63
7.7.1	Come si misura	63
7.7.2	Ordini di grandezza e dipendenza dal materiale	63
7.7.3	Perché l'acqua è anomala: la molecola polare e il legame idrogeno	63
7.7.4	Dipendenza dalla temperatura	64
7.7.5	I tensioattivi: perché il sapone lava	64
7.8	La maturazione di Ostwald	66
7.9	Angolo di contatto e capillarità	67
7.9.1	Il contatto trifase e l'angolo θ	67
7.9.2	La legge della risalita capillare	67
7.9.3	Alcuni ordini di grandezza	68
7.9.4	Quando il liquido scende: la depressione capillare	70
7.10	Il punto triplo e l'equilibrio delle tensioni	71
7.10.1	Il bilancio delle tre tensioni	71
7.10.2	Quando l'equilibrio non esiste: lo spreading	72
7.11	Sintesi	72
8	Esercizi svolti	73
8.1	Scopo del capitolo	73
8.2	Comprimibilità: il problema della siringa	73
8.2.1	Impostazione	73
8.2.2	Dati numerici comuni	74

8.2.3	Caso 1: siringa piena d'acqua	75
8.2.4	Caso 2: siringa piena d'aria	75
8.3	Espansione termica	76
8.3.1	Impostazione	76
8.3.2	Caso dei liquidi (acqua)	77
8.3.3	Caso dei gas (aria)	77
8.4	Viscosità: il calcolo di lubrificazione	78
8.4.1	Impostazione	78
8.4.2	Un caso e un confronto	78
8.5	Conclusioni	79
A	Notazione e simboli	81
A.1	Grandezze fisiche fondamentali	82
A.2	Convenzioni tipografiche e simboliche	83

Prefazione

Questa monografia raccoglie in forma organica i concetti di base della *fluidodinamica*, ossia della branca della meccanica del continuo che studia il comportamento dei fluidi in quiete e in movimento. Il materiale è pensato come solida preparazione preliminare per lo studio dell'aerodinamica, della propulsione e della meccanica del volo: prima di poter descrivere come nasce la portanza su un'ala o come un getto genera spinta, occorre infatti possedere un linguaggio preciso per parlare di *che cosa sia* un fluido e di *quali proprietà* lo caratterizzino.

L'impostazione seguita è volutamente *fenomenologica* e progressiva. Ogni grandezza viene introdotta partendo dal suo significato fisico, chiarito ove possibile con un'immagine intuitiva o con un modello meccanico semplice; solo dopo si passa alla formulazione matematica, alla discussione delle ipotesi di validità e all'interpretazione tecnica dei risultati. Numerosi esempi numerici svolti, slegati da configurazioni reali e basati unicamente su valori tabulati per sostanze di riferimento (acqua, aria, mercurio), aiutano a fissare gli ordini di grandezza in gioco: sapere che il modulo di comprimibilità dell'acqua vale qualche miliardo di pascal è cosa diversa dall'aver capito che, spingendo con tutta la forza del pollice una siringa piena d'acqua, il pistone avanza di appena una decina di micron.

Il percorso si sviluppa in otto capitoli e un'appendice. Si parte dalla *definizione di fluido* a partire dalla sua risposta agli sforzi, e dalla sua spiegazione microscopica; si affronta poi l'*ipotesi del continuo*, il ponte logico che consente di trattare con l'analisi matematica una materia in realtà discreta; si passa quindi alle grandezze di stato e alle proprietà costitutive – la *densità* con la dilatazione termica, la *comprimibilità*, la *viscosità* con gli sforzi tangenziali interni; si studiano infine due proprietà proprie dei liquidi e legate alle interfacce e alle transizioni di fase: la *tensione di vapore*, con il fenomeno tecnicamente cruciale della cavitazione, e la *tensione superficiale*, con la capillarità. Un capitolo di *esercizi svolti* riprende le definizioni principali e le mette alla prova su problemi semplici ma istruttivi; chiude il testo un'appendice sulle notazioni adottate.

Lo stile grafico ricorre ad alcuni riquadri tematici, con una funzione precisa: le *definizioni* fissano il significato rigoroso di una grandezza; i riquadri di *concetto chiave* e *formula chiave* isolano i risultati centrali; le *osservazioni* e le *note* approfondiscono un dettaglio o un'analogia; le *attenzioni* segnalano insidie e fraintendimenti frequenti; gli *esempi* raccolgono le applicazioni numeriche. Dove è possibile, il filo del discorso viene riportato a fenomeni quotidiani e ad applicazioni della tecnica aeronautica, cui questi appunti sono in ultima analisi destinati.

Che cos'è un fluido

1.1 Un problema di definizione

A livello intuitivo tutti riconosciamo che l'acqua e l'aria sono fluidi, mentre un blocco di marmo o un cubo d'acciaio non lo sono. Tuttavia, tradurre questa intuizione in una definizione rigorosa non è affatto immediato, perché la distinzione tra solidi e fluidi non si fonda tanto sulla struttura microscopica della materia quanto sul modo in cui il materiale risponde alle sollecitazioni esterne.

Conviene allora partire proprio dalla struttura per poi arrivare al comportamento. Nei solidi gli atomi o le molecole occupano posizioni ben definite, attorno alle quali oscillano con piccola ampiezza; sono tenuti in tali posizioni da forze che diventano fortemente *repulsive* quando la distanza reciproca tende a diminuire e *attrattive* quando essa tende ad aumentare. Esiste cioè una distanza di equilibrio d alla quale la forza risultante fra due molecole vicine si annulla.

Nei gas, al contrario, gli atomi o le molecole non hanno alcuna posizione definita: si muovono di moto casuale (agitazione termica) e cambiano continuamente direzione a causa degli urti reciproci. La distanza media percorsa da una molecola fra un urto e il successivo si chiama *libero cammino medio* e si indica con λ . Nei gas λ è molto maggiore della distanza di equilibrio d , e ciò spiega la grande facilità con cui un gas cambia volume adattandosi allo spazio disponibile.

I liquidi occupano una posizione intermedia. Le loro molecole distano mediamente una quantità dell'ordine di d , come nei solidi, ma non sono vincolate a una posizione fissa, come nei gas. Ne consegue che un liquido cambia forma con estrema facilità, mentre per variarne il volume in modo apprezzabile occorrono sollecitazioni enormemente elevate.

Nota

Un utile insieme di modelli meccanici aiuta a fissare le idee. Un *solido* si può pensare come un insieme di sferette collegate da molle molto rigide: forze esterne ne alterano le distanze reciproche, ma al cessare della sollecitazione la disposizione iniziale viene ristabilita. Un *gas* si può immaginare come delle palline di polistirolo tenute in perenne agitazione da una ventola dentro un sacchetto: variando il volume del sacchetto, le palline vagano comunque nell'intero spazio disponibile. Un *liquido*, infine, è come un sacchetto pieno di biglie: sollecitazioni tangenziali lo deformano a piacimento, ma comprimerlo produce variazioni di volume praticamente nulle.

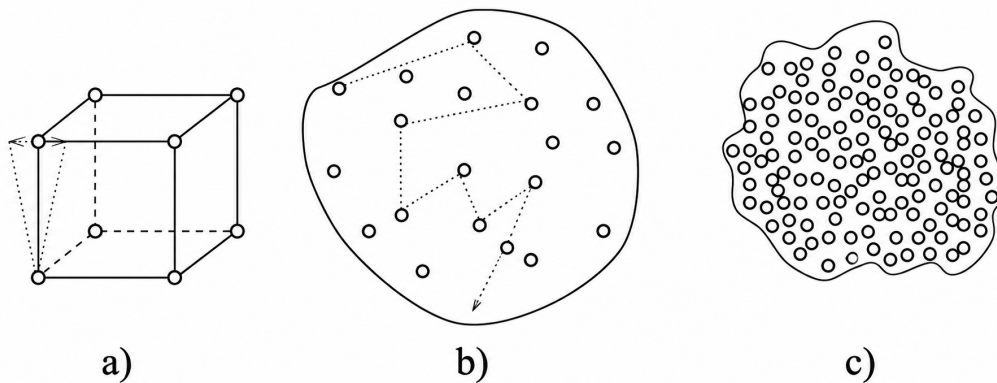


Figura 1.1. Struttura schematica di solidi (a), gas (b) e liquidi (c): posizioni ordinate e vincolate nei solidi, moto caotico nei gas, struttura compatta ma non vincolata nei liquidi.

1.2 La definizione fenomenologica

Guardando alla struttura microscopica abbiamo notato che gas e liquidi condividono una caratteristica: cambiano facilmente forma quando sono soggetti a un'azione esterna di taglio. È proprio su questa proprietà che si costruisce la definizione operativa.

Definizione

Si dice *fluido* un materiale che si deforma indefinitamente quando è sottoposto a una sollecitazione tangenziale esterna, e che, al cessare di tale azione, non recupera la forma iniziale. Equivalentemente: in condizioni di quiete un fluido è in grado di resistere ai soli sforzi normali.

Questa definizione ha carattere *fenomenologico*: prescinde cioè dalla struttura intima del materiale e considera solo la sua risposta alle azioni esterne. Il punto qualificante è il comportamento sotto sforzo di taglio. Un solido, sollecitato tangenzialmente, si deforma di una quantità finita e poi si arresta in una nuova configurazione di equilibrio; un fluido, invece, non raggiunge mai l'equilibrio sotto uno sforzo di taglio costante, ma continua a deformarsi finché lo sforzo permane. Per questo, come vedremo, per un fluido non ha senso parlare di *deformazione* in risposta al taglio, bensì di *velocità di deformazione*.

1.2.1 Solido elastico e fluido a confronto

Conviene rendere questa distinzione del tutto esplicita mediante un esperimento concettuale, partendo da un materiale che di certo non consideriamo fluido: un blocco d'acciaio. Immaginiamo di poggiarlo su un piano e di bloccarne la faccia inferiore, applicando sulla faccia superiore uno sforzo di taglio τ . Se potessimo osservare in dettaglio ciò che accade, vedremmo il blocco deformarsi *angolarmente* di una quantità finita γ .

Il punto decisivo è ciò che segue. Finché manteniamo lo sforzo, il blocco resta fermo nella configurazione deformata; nell'istante in cui rimuoviamo la sollecitazione, esso *recupera* la posizione iniziale. I materiali che si comportano così si dicono *solidi elastici*, e per molti di essi vale addirittura una proporzionalità diretta fra lo

sforzo di taglio e la deformazione angolare:

$$\tau \propto \gamma.$$

Consideriamo ora una classe di materiali diversa – acqua, aria, olio, mercurio – e sottoponiamola *esattamente allo stesso esperimento*. Osserviamo due differenze qualitative fondamentali:

1. sotto lo sforzo di taglio questi materiali *continuano a deformarsi*, e non smettono finché non interrompiamo la sollecitazione;
2. all'atto della rimozione dello sforzo, il materiale *non recupera* la configurazione iniziale.

Dalla deformazione alla sua velocità

Per un fluido la proporzionalità $\tau \propto \gamma$ non ha senso: poiché l'angolo γ cresce senza sosta, non gli si può associare un valore definito da mettere in relazione con τ . La grandezza corretta è allora la *velocità di deformazione angolare* $\dot{\gamma}$, cioè la derivata di γ rispetto al tempo. Sotto uno sforzo di taglio costante l'angolo γ cresce *linearmente* nel tempo, e quindi la sua derivata $\dot{\gamma}$ risulta *costante*: è proprio $\dot{\gamma}$ – non γ – a essere legata in modo semplice allo sforzo applicato, come vedremo nel capitolo sulla viscosità.

Due limiti della definizione operativa

La definizione è *operativa*: comporta cioè l'esecuzione di una prova. Ne discendono due conseguenze da tenere presenti.

- Non è possibile stabilire “a vista” se un materiale sia un fluido: bisogna *sollecitarlo tangenzialmente* e osservarne la risposta.
- La definizione non fa riferimento all'*intensità* della velocità di deformazione. Esistono materiali la cui deformazione, pur continua, è così lenta che sulla scala dei tempi umani appaiono solidi – il vetro, l'asfalto, la pece, il ghiaccio dei ghiacciai – ma che soddisfano perfettamente la relazione appena descritta. Dal punto di vista della fluidodinamica sono, a tutti gli effetti, *fluidi* (dalla viscosità semplicemente enorme).

Attenzione

La classificazione “solido/fluido” non è assoluta. Esistono i *solidi amorfi* (come il vetro) che, pur avendo una struttura simile a quella di un liquido, si comportano esternamente da solidi; esistono materiali (i *fluidi di Bingham*) che si comportano da solidi finché lo sforzo resta sotto una soglia e da fluidi oltre di essa; e le stesse caratteristiche di un materiale dipendono da pressione e temperatura, con comportamenti ambigui in prossimità delle transizioni di fase. Così come esistono solidi che, oltre al comportamento elastico, ne presentano uno *plastico*, esistono fluidi che accanto alla componente *viscosa* mostrano anche una componente *elastica*: sono i materiali *viscoelastici*, casi intermedi fra i due comportamenti idealizzati appena descritti.

Finora abbiamo distinto solidi elastici e fluidi limitandoci a *osservare dall'esterno* come rispondono a una sollecitazione. Resta aperta la domanda più profonda: *perché* questi materiali si comportano in modo così diverso? Per rispondere occorre abbandonare per un momento il punto di vista macroscopico e guardare a come la materia è organizzata a livello microscopico.

1.3 La spiegazione microscopica

La materia, che a scala macroscopica immaginiamo come un continuo, è in realtà costituita da *unità discrete* – atomi, molecole, ioni, cristalli – che si scambiano forze mutue di intensità variabile a seconda di come sono legate. Per comodità le chiameremo genericamente “particelle”.

1.3.1 La curva di Lennard–Jones

Prendiamo due qualunque di queste particelle e indichiamo con R la loro distanza reciproca. Indipendentemente dal materiale, la forza F che esse si scambiano segue un andamento *universale*, descritto dalla cosiddetta *curva di Lennard–Jones*. Adottiamo la convenzione per cui $F < 0$ indica forze *attrattive* e $F > 0$ forze *repulsive*.

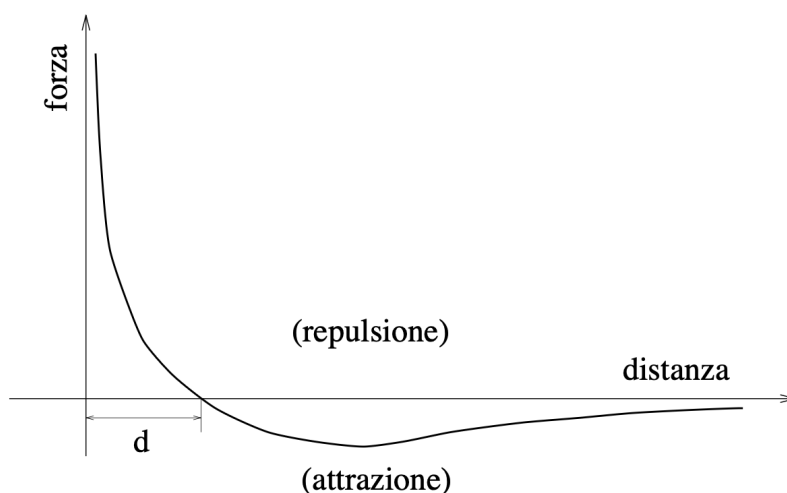


Figura 1.2. Forza F scambiata fra due particelle in funzione della distanza R (curva di Lennard–Jones): attrattiva a grandi distanze, repulsiva a piccole, nulla alla distanza di equilibrio d .

La curva si legge in tre regimi:

- **grandi distanze:** la forza tende asintoticamente a zero. Le particelle, molto lontane, si ignorano a vicenda: è il regime dei *gas perfetti*;
- **distanza di equilibrio d :** la forza si annulla. È la distanza alla quale le due particelle non si scambiano alcuna forza risultante;
- **piccole distanze:** avvicinando ulteriormente le particelle, la forza attrattiva prima cresce in modulo, poi satura, si annulla e infine diventa *repulsiva* in modo rapidissimo. All’origine di tutto ciò vi sono le interazioni fra orbitali elettronici e nuclei.

L’analogia della molla

Nell’intorno della distanza di equilibrio d , il sistema di due particelle si comporta come due masse collegate da una *molla* a riposo. Se si tenta di avvicinarle, la molla si comprime e nasce una forza repulsiva; se si tenta di allontanarle, la molla si allunga e nasce una forza attrattiva. I materiali le cui unità stazionano stabilmente a questa distanza di equilibrio sono tipicamente i *solidi elastici*.

1.3.2 Perché il solido è elastico

Disponiamo idealmente le particelle di un solido in un reticolo regolare, ciascuna alla distanza di equilibrio d dalle vicine: le forze reciproche sono nulle e la risultante è nulla. Applichiamo ora uno sforzo di taglio, che deforma il reticolo di un angolo γ (gli angoli sono grandezze *intensive*: la deformazione macroscopica si riproduce identica a livello microscopico).

Consideriamo due particelle inizialmente sovrapposte in verticale. Dopo la deformazione, la particella superiore trasla orizzontalmente: il segmento che congiunge le due diventa l'*ipotenusa* di un triangolo rettangolo, e in quanto tale è più lungo del cateto verticale iniziale. La distanza reciproca è dunque *aumentata* rispetto a d : nasce necessariamente una forza attrattiva di richiamo, con una componente orizzontale che si oppone allo sforzo applicato.

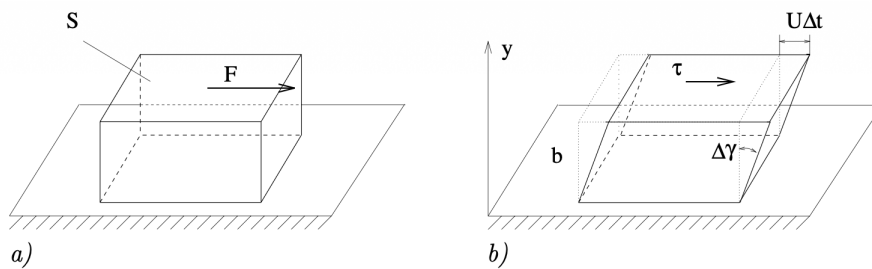


Figura 1.3. Deformazione di taglio del reticolo: la traslazione orizzontale allunga la distanza fra le particelle oltre d , generando forze attrattive di richiamo con componente orizzontale opposta allo sforzo esterno.

Sommando i contributi di tutte le coppie, si ottiene una reazione orizzontale complessiva. Il meccanismo di equilibrio è allora il seguente: partendo dalla configurazione indeformata, all'applicarsi dello sforzo il materiale comincia a deformarsi; più si deforma, più cresce la reazione interna, finché la risultante delle reazioni *bilancia* esattamente la forzante esterna. Raggiunta questa nuova configurazione di equilibrio, nessuna ulteriore deformazione è possibile: ecco perché il solido si ferma a una deformazione *finita*.

Il recupero elastico come pendolo smorzato

Il lavoro compiuto dallo sforzo di taglio viene immagazzinato come *energia elastica* di deformazione (l'energia delle "molle" interne). Quando rimuoviamo lo sforzo, le componenti orizzontali delle reazioni interne non hanno più nulla da contrastare e accelerano il materiale verso la configurazione iniziale. Il materiale, però, vi giunge con *massima velocità*, la oltrepassa e comincia a oscillare avanti e indietro, come un pendolo: energia elastica $\rightarrow$ cinetica $\rightarrow$ potenziale, e ritorno. A ogni oscillazione una piccola parte di energia viene dissipata in calore per attriti interni, finché le oscillazioni si smorzano e il solido recupera la forma iniziale – risultando alla fine impercettibilmente più caldo.

In sintesi: i solidi elastici sono tali perché le loro unità sono trattenute da *legami forti e stabili* attorno alla posizione di equilibrio d ; qualunque scostamento – in avvicinamento o in allontanamento – genera forze di richiamo intense.

1.3.3 Perché il gas è un fluido

Poniamoci ora nel caso opposto, quello dei *gas*. Sulla curva di Lennard–Jones i gas occupano la regione delle grandi distanze: le loro molecole sono così lontane da non scambiarsi alcuna forza. Le uniche interazioni sono le *collisioni*. Non essendovi legami a trattenerle, le molecole possiedono velocità *casuali*, elevate (per l'aria in condizioni ambiente, dell'ordine di da 300 m/s a 500 m/s) e distribuite secondo una precisa legge statistica.

Attenzione

Quando diciamo che un volume di gas è “fermo”, non intendiamo che le singole molecole siano ferme – esse sfrecciano a centinaia di metri al secondo – ma soltanto che la *media* vettoriale delle loro velocità è nulla.

Vediamo allora come nasce il comportamento fluido. Immaginiamo il gas racchiuso fra due pareti, quella inferiore ferma e quella superiore inizialmente ferma. In uno strato di fluido a contatto con la parete superiore, le molecole hanno velocità casuali la cui somma è nulla: il volumetto è macroscopicamente in quiete. Le molecole urtano la parete e rimbalzano secondo le leggi ordinarie degli urti.

Mettiamo ora in moto la parete superiore con velocità u . Le molecole che la colpiscono rimbalzano contro una *parete in movimento*, e le loro traiettorie post-urto risultano modificate: la media delle velocità dello strato non è più nulla, ma acquista un *bias*, una componente sistematica nella direzione del moto della parete. Macroscopicamente, lo strato a contatto si mette in moto con una certa velocità media.

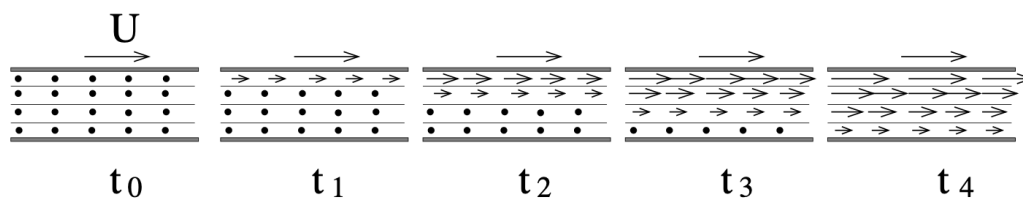


Figura 1.4. Trasferimento di quantità di moto in un gas: le molecole che urtano la parete superiore in moto acquistano un bias nella sua direzione e, per collisioni successive, lo trasmettono agli strati inferiori, generando un profilo di velocità lineare.

Il processo non si arresta lì. Le molecole “biasate” migrano verso lo strato sottostante e, urtando le molecole di quest’ultimo, trasmettono la loro componente di velocità verso il basso, ma progressivamente diluita. Affettando il volume in lamine parallele, si trova che ciascuna si muove nella direzione del moto con intensità via via minore: emerge così un *profilo di velocità lineare*, cui corrisponde una velocità di deformazione angolare costante.

Nota

Questo argomento è qualitativo, ma il profilo lineare non è affatto una grossolana approssimazione: si dimostrerà, più avanti nello studio della fluidodinamica, che esso costituisce una *soluzione esatta* delle equazioni del moto dei fluidi (le equazioni di Navier–Stokes).

Quando cessiamo di trascinare la parete, non vi sono legami che riportino le molecole alla configurazione precedente: gli urti riportano semplicemente a zero la velocità media di ogni strato, ma *rispetto all’ulti-*

ma *configurazione deformata*. Il gas resta così nella forma raggiunta, senza recuperare quella iniziale: è il comportamento tipico di un fluido.

1.3.4 Il caso più sottile: i liquidi

I liquidi sono il caso più difficile, perché non stanno né all'estremo ordinato dei solidi (unità bloccate da legami forti) né all'estremo disordinato dei gas (unità del tutto libere). Sono materiali *metastabili*: sulla curva di Lennard–Jones le loro molecole stazionano *alla* distanza di equilibrio, dove la forza media è nulla, come nei solidi – ma con una differenza cruciale.

Tutte le particelle, comprese quelle di un solido, oscillano attorno alla propria posizione di equilibrio, e l'ampiezza di tali oscillazioni cresce con la *temperatura*. Nei solidi le oscillazioni sono così piccole da non intaccare i legami. Nei liquidi, invece, l'ampiezza è tale che i legami vengono *rotti e riformati di continuo*: le molecole hanno troppa energia per mantenere legami stabili, ma troppo poca per spezzarli definitivamente e diventare gas.

Lo stato liquido esiste solo in una finestra di temperatura

Ne discende che qualunque materiale è liquido solo entro un certo intervallo di temperatura. L'acqua sotto 0 °C solidifica (le oscillazioni si riducono al punto da formare legami stabili) e sopra 100 °C, a pressione ambiente, evapora (i legami si spezzano definitivamente). Lo stesso vale per l'alluminio, che ci appare solido ma, oltre una certa temperatura, fonde e diventa liquido, e a temperatura ancora maggiore vaporizza – è proprio vaporizzando alluminio su vetro che si producono gli specchi.

Come immaginare, allora, la struttura di un liquido? Come un insieme di “isole” di solido – gruppetti di particelle temporaneamente legate come molle – immerse in un “mare” di molecole libere dotate di energia sufficiente a comportarsi come un gas. Un'immagine efficace è quella di una granita in un bicchiere d'acqua: i granelli di ghiaccio sono le isole, l'acqua liquida è il mare di molecole libere.

Attenzione

L'analogia della granita “zoppica” su un punto essenziale. In un bicchiere reale distinguiamo stabilmente ghiaccio e acqua; nel liquido, invece, l'immagine è solo *istantanea*: un attimo dopo le isole solide si sono dissolte e ciò che era solido è diventato mare di molecole libere, mentre altrove nuove isole si sono formate. La riaggregazione è incessante.

È proprio la presenza costante di molecole libere a fungere da “lubrificante”, permettendo alle isole di scorrere le une sulle altre – come biglie di vetro dentro una busta di plastica, che rotolano e scivolano con facilità pur restando a contatto. Quando uno strato di liquido si muove, trascina le proprie isole, che per attrito trascinano quelle sottostanti: anche qui, il risultato d'insieme è un profilo di velocità lineare.

1.4 Sintesi: un'unica risposta, tre meccanismi

Il quadro si ricompone così. Gas e liquidi occupano posizioni completamente diverse sulla curva di Lennard-Jones – i primi a grandi distanze, senza forze reciproche; i secondi alla distanza di equilibrio, ma con fluttuazioni che rompono e riformano i legami di continuo – eppure condividono lo *stesso comportamento macroscopico*: si deformano con continuità sotto sforzo di taglio. I solidi, con le loro unità trattenute da legami stabili a piccole oscillazioni, rispondono invece con una deformazione finita e reversibile.

È dunque l'*equivalenza di risposta* – non la somiglianza di struttura – a giustificare il fatto di raccogliere gas e liquidi sotto un'unica categoria, quella dei fluidi, contrapposta a quella dei solidi elastici.

L'ipotesi del continuo

Ogni volta che, studiando la meccanica dei fluidi o quella dei solidi deformabili, scriviamo la velocità di una particella, la densità in un punto o la temperatura di un elementino di materia, compiamo in modo quasi involontario un atto di fede. Diamo per scontato che queste grandezze esistano *in ogni punto* dello spazio occupato dal materiale e che possano essere derivate, integrate, inserite in equazioni differenziali. Eppure la materia di cui sono fatti l'aria che respiriamo, l'acqua che scorre e il metallo di un longherone alare non è affatto continua: è un pulviscolo di atomi e molecole separati da grandi spazi vuoti. Questo capitolo è dedicato al ponte che colma quella distanza – l'*ipotesi del continuo* – di cui seguiamo la costruzione passo dopo passo, fino al criterio quantitativo che ne stabilisce la validità.

2.1 Un'incongruenza da chiarire

Quando descriviamo un materiale ci troviamo, spesso senza accorgercene, a usare due linguaggi diversi e apparentemente incompatibili. Da un lato parliamo del materiale come di un *insieme di unità elementari*: ogni proprietà appartiene alla singola unità – *questa* molecola ha *quella* velocità, quella massa, quell'energia. Dall'altro lato parliamo del materiale *nel suo insieme*: diciamo che il fluido ha una certa velocità, una certa densità, una certa temperatura, una certa pressione, attribuendo cioè le grandezze non alle singole particelle, ma a una porzione estesa di materia.

Nota

La domanda cruciale è allora: quando scriviamo “densità”, “velocità”, “temperatura”, a chi ci stiamo riferendo? Alle singole unità che compongono la materia, oppure al materiale considerato globalmente? Questo passaggio è tanto delicato quanto fondamentale, perché da esso dipende la legittimità di tutto l'apparato matematico che useremo in seguito.

Due descrizioni della stessa aria

Consideriamo l'aria contenuta in una stanza. Descrizione *microscopica*: un numero enorme di molecole di azoto e ossigeno che sfrecciano in ogni direzione con velocità dell'ordine delle centinaia di metri al secondo, urtandosi miliardi di volte al secondo. Descrizione *macroscopica*: aria ferma, a temperatura ambiente, a pressione atmosferica. Entrambe le descrizioni sono “vere”, ma parlano di enti diversi: la velocità macroscopica dell'aria è nulla, mentre la velocità di ogni singola molecola è tutt'altro che nulla. Riconciliare queste due immagini è il compito dell'ipotesi del continuo.

2.2 L'esperimento dello strumento a scala variabile

Per rispondere immaginiamo un esperimento ideale. Disponiamo di uno strumento di misura – pensiamo a un termometro, ma il ragionamento vale per qualsiasi grandezza – il cui elemento sensibile ha una *dimensione caratteristica* S che possiamo variare a piacimento, da un valore idealmente nullo fino a una dimensione molto grande. In un termometro a mercurio, ad esempio, l'elemento sensibile è il bulbo, e misurare la temperatura significa in realtà misurare la temperatura *media* nella regione occupata dal bulbo.

Poniamo sull'asse delle ascisse la dimensione S e sull'asse delle ordinate il valore misurato di una grandezza generica q (pressione, densità, temperatura, velocità). Si scopre un fatto notevole: *tutte* le grandezze si comportano nello stesso modo al variare di S , con un andamento che presenta tre regioni ben distinte.

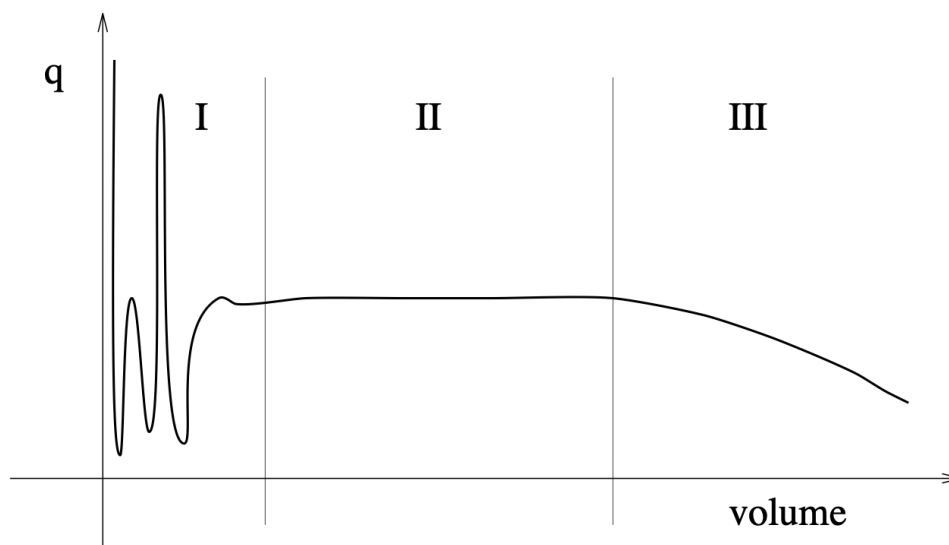


Figura 2.1. Andamento del valore misurato di una generica grandezza q in funzione della dimensione S dell'elemento sensibile. Si distinguono la regione di indefinizione, la regione delle fluttuazioni con successiva convergenza (il plateau del continuo) e la regione di variazione di campo.

2.2.1 Regione I: la grandezza non è definita

Immaginiamo un elemento sensibile talmente piccolo che, al suo interno, non cada *nemmeno una* molecola. Qual è la densità, la velocità o la pressione misurata in una regione del genere? La risposta è che *non possiamo rispondere*: non c'è alcuna unità su cui misurare la grandezza.

“Non definito” non significa “zero”

Occorre distinguere con cura due situazioni diverse. Se all'interno del volume di misura cadessero alcune molecole e la loro media risultasse nulla, allora la grandezza varrebbe *zero*. Ma qui non cade alcuna molecola: la grandezza non vale zero, semplicemente *non è definita*, perché manca l'oggetto stesso su cui calcolare la media. È una distinzione sottile ma essenziale.

Il voto medio prima del primo esame

Chiediamo a uno studente che non ha ancora sostenuto alcun esame: “qual è il tuo voto medio?”. Il voto medio non è zero – lo zero sarebbe un voto pessimo effettivamente conseguito – bensì *non è definito*, perché non esiste ancora alcun voto su cui calcolare la media. Allo stesso modo, in un volume che non contiene molecole, la densità non è nulla: è priva di significato.

2.2.2 Regione II: fluttuazioni e convergenza

Facciamo ora crescere la dimensione S : dentro l'elemento sensibile cominciano a cadere alcune molecole, poche, su cui è finalmente possibile effettuare una misura. Poiché i campioni sono ancora scarsi, però, la statistica è fortemente *fluttuante*: il valore misurato salta in modo irregolare. Al crescere del volume il numero di campioni aumenta, le fluttuazioni si smorzano progressivamente e il valore misurato *converge* a un valore medio stabile. Questo valore stabile è precisamente ciò che intendiamo quando parliamo del valore di una grandezza “in un punto”.

L'età media di due studenti a caso

Prendiamo due studenti a caso in un'aula e calcoliamone l'età media. Potremmo pescare due matricole giovanissime o due studenti fuori corso, e in entrambi i casi la media non sarebbe rappresentativa dell'aula. Prendendo invece dieci, venti, cinquanta studenti, la media si stabilizza e diventa affidabile. È esattamente ciò che accade alla grandezza q quando il volume di misura racchiude sempre più molecole.

Nota

Un punto, in senso geometrico, è un ente di dimensione nulla: al suo interno non vi sarebbe mai nulla da misurare. Quando definiamo una grandezza “in un punto”, in realtà abbiamo tacitamente in mente una regione abbastanza grande da contenere un numero elevato di unità – così da fornire un valore statistico a convergenza – ma abbastanza piccola da poter essere assimilata a un punto sulla scala del problema che stiamo studiando.

2.2.3 Regione III: la variazione di campo

Che cosa accade se il volume di misura cresce *troppo*? A quel punto l'elemento sensibile comincia a “sentire” le variazioni spaziali della grandezza. Se, ad esempio, il sensore di temperatura cresce ma rimane all'interno della stanza, il valore misurato resta costante; se però lo facciamo crescere tanto da sporgere fuori dalla finestra, cominceremo a mediare aria interna ed esterna, e la grandezza tornerà a variare.

Attenzione

La variazione della regione III ha natura completamente diversa da quella della regione I. Qui la grandezza non varia perché la statistica non è a convergenza, ma perché stiamo mediando *porzioni di fluido fisicamente diverse*, con valori mediamente distinti. È la naturale dipendenza della grandezza dalla posizione: densità, temperatura e velocità sono *funzioni di campo*, ossia funzioni dello spazio.

Ha dunque senso definire una grandezza a livello locale soltanto finché rimaniamo nel plateau della regione II. Scendere al di sotto significa misurare artefatti di una statistica non convergente; salire troppo significa confondere valori appartenenti a porzioni diverse del campo.

2.3 Le conseguenze della discretezza

Abbiamo individuato un limite inferiore di scala, che indicheremo con $\bar{S}$, al di sotto del quale non ha più senso distinguere due valori distinti di una grandezza. Se questo limite non venisse “curato” da un’ipotesi opportuna, le conseguenze sarebbero gravi. Ne distinguiamo una pratica e una teorica.

L’inconveniente *pratico* è che, al di sotto di $\bar{S}$, non è possibile distinguere due valori diversi della grandezza. Se per assurdo $\bar{S}$ valesse 2 m, non avrebbe senso misurare la pressione dell’aria in due punti distinti attorno a un’automobile (lunga circa 4 m) e pretendere di distinguerne i valori. Come vedremo, per l’aria in condizioni ambiente $\bar{S}$ è per fortuna piccolissimo, e questo inconveniente non si presenta.

L’inconveniente veramente grave è *teorico* e riguarda il concetto stesso di *limite*. La densità di una sostanza si ottiene misurando la massa Δm e il volume ΔV di una porzione di materia e passando al limite:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (2.1)$$

Il limite non esiste più

Osserviamo la definizione (2.1) in ottica microscopica. Facendo tendere ΔV a zero, prima o poi raggiungiamo una scala in cui nel volume non cade più alcuna molecola: a quel punto la massa Δm non è nulla, è *non definita*, perché non c’è nulla su cui misurarla. L’operazione di limite perde di significato: il limite semplicemente *non esiste*.

E qui sta il punto drammatico: questo non riguarda soltanto la densità. Tutta l’analisi matematica poggia sul concetto di limite. La velocità è il limite di un rapporto incrementale; l’accelerazione è il limite di un rapporto incrementale; l’integrale è il limite di una sommatoria; le derivate, le equazioni differenziali, tutto si fonda sul passaggio al limite. Se non poniamo rimedio a questo problema, l’intera “cassetta degli attrezzi” matematici perde di significato quando applicata alla materia reale: da qui la necessità di un’ipotesi che salvi il modello.

2.4 La costruzione del continuo

L’idea consiste nel sostituire il materiale reale – fatto di “palline” discrete separate da spazi vuoti – con un materiale *ideale* in cui la materia sia distribuita *ovunque in modo omogeneo*, senza alcuno spazio vuoto in cui le grandezze non siano definite.

Ipotesi del continuo

L’*ipotesi del continuo* consiste nel rimpiazzare il materiale reale, di natura discreta, con un materiale fittizio in cui ogni grandezza fisica è definita in ogni punto, a qualunque scala, inclusa la scala nulla. Le proprietà di questo materiale continuo sono scelte in modo da riprodurre fedelmente le proprietà del sistema discreto reale.

In pratica prendiamo il valore *a convergenza* di ciascuna grandezza (il plateau della regione II) e lo estendiamo in modo fittizio fino alla dimensione nulla. Nel materiale continuo, allora, chiedersi quanto valga la densità in un punto non crea alcun problema: possiamo ridurre progressivamente il volume senza che la grandezza perda mai significato. Riacquistano così pieno senso tutte le operazioni di limite, e con esse le derivate, gli integrali e la soluzione delle equazioni differenziali. Non a caso la meccanica che studia questi materiali si chiama *meccanica del continuo*.

2.4.1 Un materiale continuo può replicare un sistema discreto?

Resta una questione tutt'altro che ovvia: siamo sicuri di poter costruire un equivalente continuo che possieda *esattamente* tutte le proprietà del sistema discreto? Verifichiamolo sull'esempio più semplice immaginabile. Consideriamo, in uno spazio bidimensionale (un quadrato di lato L), un sistema discreto di sole *due* unità: due molecole di uguale massa m , con velocità *uguali in modulo e opposte in verso*.

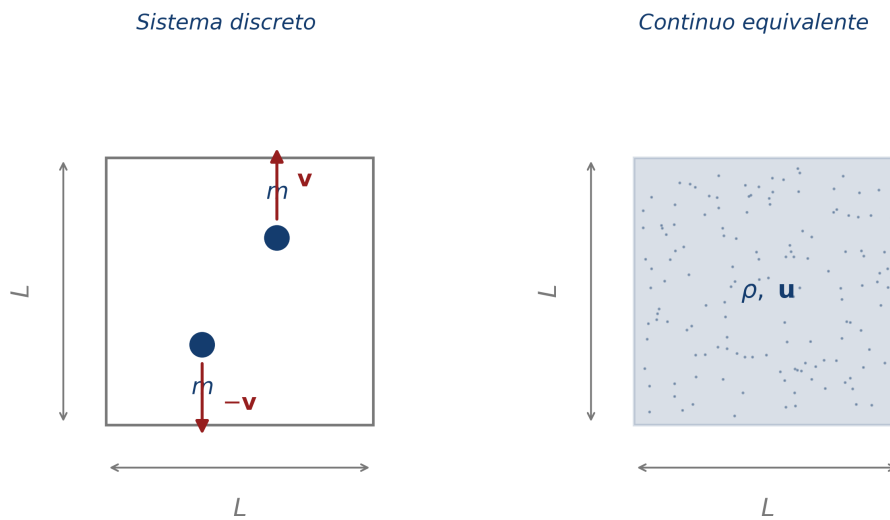


Figura 2.2. Il sistema discreto minimale: due unità di uguale massa m con velocità uguali e opposte, racchiuse in un dominio quadrato di lato L . A destra, il corrispondente materiale continuo con proprietà definite in ogni punto.

Costruiamo, grandezza per grandezza, il continuo equivalente. La *massa* è immediata: se il sistema discreto contiene due masse m , il continuo avrà massa totale $M = 2m$. La *densità*, che nel discreto non è definita (la massa è concentrata in due punti), nel continuo si ottiene distribuendo la massa $2m$ nel volume del dominio – un cubo di lato L – ed è perfettamente definita ovunque:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{2m}{L^3}.$$

Per la *velocità* imponiamo che la quantità di moto del continuo eguagli quella del sistema discreto. Poiché le due velocità sono uguali e opposte, la quantità di moto complessiva è nulla, $m \mathbf{v} + m (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, e ne segue che la velocità d'insieme del continuo è il vettore nullo, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

2.4.2 L'invenzione della temperatura e della pressione

Proviamo ora a calcolare l'*energia cinetica*. Nel sistema discreto essa è la somma dei contributi delle due unità; avendo uguale massa e velocità di uguale modulo $|\mathbf{v}| = v$,

$$E_c^{\text{disc}} = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 = m v^2 \neq 0.$$

Nel continuo, invece, la velocità d'insieme è nulla, dunque l'energia cinetica *macroscopica* risulterebbe $E_c^{\text{cont}} = \frac{1}{2} M |\mathbf{u}|^2 = 0$.

Le due energie non coincidono

Abbiamo già fissato massa e velocità del continuo: non restano gradi di libertà. Eppure l'energia cinetica del discreto è diversa da zero, mentre quella del continuo è nulla. I due sistemi *non* sono equivalenti. Per renderli tali siamo costretti a introdurre una grandezza nuova.

La velocità $\mathbf{u}$ è soltanto la velocità *d'insieme* del sistema. Ma il sistema possiede anche un'energia legata all'*agitazione* delle unità, di cui nel continuo non è rimasta traccia visibile. Per rendere conto di questa energia introduciamo una nuova grandezza: la *temperatura*. La fisica statistica la mette in relazione con l'energia cinetica di agitazione delle molecole attraverso la costante di Boltzmann k_B .

Nota

Ne segue una conclusione che può sorprendere: la temperatura non è una grandezza che “esista” per le singole molecole – una singola molecola non ha temperatura, ha una velocità. La temperatura è una grandezza che siamo *obbligati a inventare* affinché il continuo abbia proprietà energetiche confrontabili con quelle del sistema discreto.

Il sistema non è ancora completo. Collochiamo una parete lungo il bordo del dominio. Nel sistema discreto la molecola che si muove verso la parete la urta e rimbalza: per il teorema dell'impulso, la variazione di quantità di moto $m \Delta \mathbf{v}$ corrisponde a una forza trasmessa alla parete. Nel continuo, invece, la velocità d'insieme è nulla: nulla sembra in grado di trasmettere una forza. Siamo dunque costretti a inventare un'ulteriore grandezza: la *pressione*.

Pressione come grandezza emergente

La pressione è la grandezza macroscopica che rende conto, nel modello continuo, della forza esercitata sulle pareti dall'incessante bombardamento delle molecole, anche quando il fluido nel suo insieme è in quiete.

Nota

Forse deluderà scoprire che pressione e temperatura non sono le grandezze “reali” che esistono nelle molecole: sono nostre *invenzioni*, introdotte perché un modello continuo – sul quale possiamo applicare tutta l'analisi matematica – risulti equivalente al sistema reale discreto. Lo stesso vale per il coefficiente di espansione termica, la tensione superficiale, la tensione di vapore, l'entropia: tutte

grandezze che dobbiamo introdurre affinché un sistema di tante unità in moto disordinato possa essere replicato da un continuo in cui le grandezze sono definite a ogni scala.

2.5 Quante molecole in un volume d'aria?

Se ci diamo tanta pena a inventare grandezze fittizie, è perché disporre di un modello continuo offre un vantaggio enorme. Ma quanto è irrinunciabile? E quanto vale davvero il limite $\bar{S}$? Rispondiamo con un calcolo concreto, partendo dall'aria che respiriamo.

La densità dell'aria in condizioni ambiente vale circa $\rho_{\text{aria}} \approx 1,2 \text{ kg/m}^3$: un cubo d'aria di un metro di lato ha massa di circa 1,2 kg. Per contare le molecole ci serve il *numero di Avogadro* $N_A \approx 6 \times 10^{23}$ molecole per mole e il *peso molecolare* medio dell'aria. Assumendo l'aria composta per l'80 % di azoto molecolare (N_2 , massa molare $\approx 28 \text{ g/mol}$) e per il 20 % di ossigeno molecolare (O_2 , $\approx 32 \text{ g/mol}$), la media pesata dà

$$M_{\text{aria}} \approx 0,80 \cdot 28 + 0,20 \cdot 32 \approx 29 \text{ g/mol}.$$

Dal metro cubo al numero di molecole

In un metro cubo abbiamo 1200 g d'aria, e ogni mole pesa circa 29 g: il numero di moli è $n = 1200/29 \approx 41$. Poiché ogni mole contiene 6×10^{23} molecole, il numero totale in un metro cubo d'aria è

$$N = 41 \cdot 6 \times 10^{23} \approx 2,46 \times 10^{25} \text{ molecole}.$$

È un numero inconcepibile: circa 246 milioni di miliardi di miliardi di molecole.

Questo risultato risponde già alla prima domanda: è impossibile, in pratica, seguire le singole molecole e mediarne il comportamento. Nessun sistema di calcolo può gestire un numero simile di unità. L'uso di un modello continuo non è, in linea di principio, obbligatorio; ma in pratica è l'unica strada percorribile.

Per stimare $\bar{S}$ riduciamo progressivamente il volume di misura: passare da un cubo di lato 1 a uno di lato 1/1000 divide il volume per 10^9 , cioè sottrae 9 all'esponente del numero di molecole.

Volume	Lato del cubo	Molecole contenute
1 m ³	1 m	$\approx 2,46 \times 10^{25}$
1 mm ³	1 mm	$\approx 2,46 \times 10^{16}$
1 μm ³	1 μm	$\approx 2,46 \times 10^7$
1 nm ³	1 nm	$\approx 2,46 \times 10^{-2}$

In un millimetro cubo restano circa $2,46 \times 10^{16}$ molecole; in un micron cubo – un cubo di un millesimo di millimetro di lato – ancora circa $2,46 \times 10^7$, cioè quasi 25 milioni: più che sufficienti per qualsiasi media statistica. Alla scala del micron, per l'aria in condizioni ambiente, l'ipotesi del continuo è dunque ancora largamente valida.

Interpretare un numero minore di uno

Scendendo al nanometro cubo il conto fornisce $\approx 2,46 \times 10^{-2}$ molecole. Poiché una molecola è indivisibile, questo numero non va inteso alla lettera: ci dice che, a questa scala, per avere *speranza* di trovare una molecola dobbiamo mettere insieme l'inverso di tale numero, ossia circa 40 cubetti (in media una molecola ogni 40 nanometri cubi). Il limite $\bar{S}$ si colloca dunque *tra* il nanometro e il micron.

2.6 Il libero cammino medio molecolare

Per individuare con precisione $\bar{S}$ introduciamo una grandezza fisica. Seguiamo una molecola nel suo moto: essa procede in linea retta finché non collide con un'altra molecola, nell'urto cambia direzione, prosegue fino a un nuovo urto, e così via.

Libero cammino medio molecolare

Il *libero cammino medio molecolare* λ è la distanza media percorsa da una molecola tra due urti consecutivi. Esso misura la “scala della granulosità” del gas: al di sotto di λ la natura discreta della materia si manifesta pienamente.

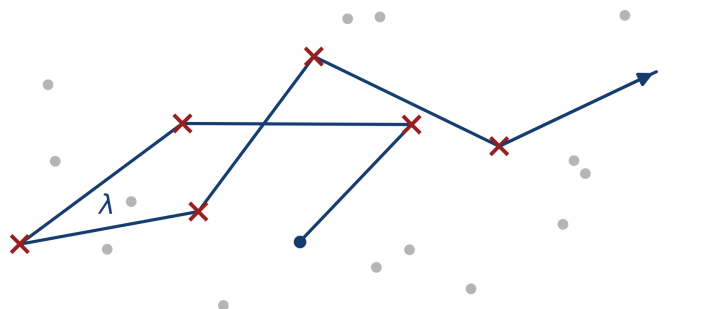


Figura 2.3. Traiettoria a spezzata di una molecola in un gas: i tratti rettilinei sono interrotti dagli urti. La lunghezza media dei tratti è il libero cammino medio λ .

Per l'aria in condizioni ambiente il libero cammino medio vale circa

$$\lambda_{\text{aria}} \approx 70 \text{ nm.}$$

Nota

Questo valore coincide, non a caso, con il limite $\bar{S}$ al di sotto del quale l'ipotesi del continuo cessa di valere, ed è coerente con la stima grossolana del paragrafo precedente: 70 nm sta esattamente fra il nanometro (ben al di sotto) e il micron (mille nanometri, ben al di sopra).

Nanotecnologie e alta rarefazione

In condizioni standard $\bar{S}$ è così piccolo (poche decine di nanometri) che non dobbiamo preoccuparci di violarlo. Vi sono però due situazioni in cui l'ipotesi va verificata con cura. La prima sono le *nanotecnologie*, che operano a scale dell'ordine dei nanometri: lì temperatura e condizione di aderenza alla parete possono cambiare significato. La seconda è l'*estrema rarefazione*: la densità dell'aria, pari a $1,2 \text{ kg/m}^3$ al suolo, scende a circa $0,4 \text{ kg/m}^3$ a $10\,000 \text{ m}$ di quota e crolla a valori di 10^{-9} o inferiori nello spazio, dove λ può raggiungere metri o chilometri. In entrambi i casi la natura discreta della materia torna a manifestarsi.

2.7 Il numero di Knudsen

Abbiamo usato con disinvoltura gli aggettivi “piccolo” e “grande”. Ma nella scienza queste parole acquistano significato solo se riferite a un termine di confronto: un euro è poco per una cena, tantissimo per un granello di zucchero. Per stabilire se il libero cammino medio sia abbastanza piccolo da giustificare l'ipotesi del continuo, dobbiamo confrontarlo con una lunghezza di riferimento.

Indichiamo con L la dimensione caratteristica dell'oggetto immerso nel flusso – una corda alare, il diametro di un condotto – e con λ il libero cammino medio. Il loro rapporto definisce un numero adimensionale fondamentale.

Numero di Knudsen

Il *numero di Knudsen* è il rapporto tra il libero cammino medio molecolare λ e la dimensione caratteristica L dell'oggetto immerso nel flusso:

$$Kn = \frac{\lambda}{L}.$$

Esso misura il grado di rarefazione del gas rispetto alla scala del problema.

Formula chiave

L'ipotesi del continuo è valida quando

$$Kn = \frac{\lambda}{L} \ll 1,$$

ossia quando la scala delle collisioni intermolecolari è incomparabilmente più piccola delle dimensioni macroscopiche del flusso. Quando invece $Kn \gtrsim 1$ le due lunghezze diventano comparabili: si parla di *gas rarefatti*, per i quali il modello continuo non è più applicabile e occorre ricorrere alla dinamica statistica delle singole molecole.

Aria attorno a un'ala

Per l'aria in condizioni ambiente $\lambda \approx 70 \text{ nm} = 7 \times 10^{-8} \text{ m}$. Per una corda alare $L = 1,5 \text{ m}$ si ottiene

$$Kn = \frac{7 \times 10^{-8} \text{ m}}{1,5 \text{ m}} \approx 5 \times 10^{-8},$$

un valore enormemente inferiore all'unità: attorno a un'ala, in condizioni ordinarie, l'aria si comporta come un continuo perfetto e possiamo usare con piena sicurezza tutte le equazioni della fluidodinamica. Al contrario, per una navetta spaziale in orbita a circa 100 km di quota, dove l'aria è estremamente rarefatta, λ cresce enormemente e Kn può avvicinarsi all'unità: lì il modello continuo entra in crisi.

Nota

Il regime del continuo ($Kn \ll 1$) e quello dei gas rarefatti ($Kn \gtrsim 1$) sono separati da una regione intermedia (regime di *scorrimento*, o *slip*, e regime di transizione) in cui il modello continuo può ancora essere usato a patto di modificare le condizioni al contorno alla parete. Il passaggio dal continuo al rarefatto non è brusco, bensì graduale.

2.8 Sintesi

La materia è formata da unità discrete separate da spazi vuoti. Questa struttura granulare impedisce, in linea di principio, di definire le grandezze fisiche a qualunque scala e di usare l'analisi matematica, il cui fondamento – il concetto di limite – richiede che le grandezze siano definite a scale arbitrariamente piccole. Per superare l'ostacolo sostituiamo il materiale reale con un *surrogato continuo*, le cui grandezze sono definite a tutte le scale; per recuperare le proprietà che nel continuo andrebbero perdute siamo costretti a introdurre grandezze *ad hoc*, prime fra tutte la temperatura (per l'energia di agitazione) e la pressione (per la forza trasmessa alle pareti). Il criterio operativo che stabilisce la validità del modello è racchiuso in un solo numero, il numero di Knudsen $Kn = \lambda/L$: dove $Kn \ll 1$ possiamo dimenticare la natura discreta della materia, dove $Kn \gtrsim 1$ dobbiamo tornare alla statistica delle singole molecole. Tutto ciò che segue in questa monografia poggia, silenziosamente, su questa singola assunzione.

Densità ed espansione termica

3.1 La densità come proprietà di campo

Nello studio dei fluidi la prima grandezza che occorre definire con precisione è la *densità*. Essa esprime la quantità di massa contenuta nell'unità di volume e si indica con il simbolo ρ ; nel Sistema Internazionale la sua unità di misura è il kg/m^3 .

L'apparente semplicità di questa definizione nasconde una questione concettuale. Un fluido reale è costituito da un numero enorme di molecole separate da spazi vuoti: a scala sufficientemente piccola la "massa contenuta in un volume" fluttuerebbe in modo discontinuo a seconda che, in quell'istante, il volumetto contenga o meno una molecola. È soltanto adottando l'ipotesi del continuo, discussa nel capitolo precedente, che possiamo trattare il fluido come un mezzo continuo e definire le sue proprietà in ogni punto dello spazio, a qualunque scala.

Definizione

Fissato un punto materiale del fluido, si consideri un suo intorno di volume ΔV contenente una massa Δm . Si definisce *densità puntuale* il limite

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

inteso nel senso del continuo: ΔV si riduce fino a scale macroscopicamente piccole ma ancora contenenti un numero elevato di molecole.

Poiché questa operazione può essere ripetuta in ogni punto, la densità si configura come una *funzione di campo*: dipende dalla posizione $\mathbf{x}$ e, se il fenomeno è non stazionario, anche dal tempo, $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$. Oltre che dallo spazio e dal tempo, la densità dipende dallo *stato* del fluido: per un gas l'equazione di stato la lega alla pressione e alla temperatura. È esperienza comune che una bibita posta nel congelatore modifichi il proprio volume e che i materiali, in generale, si dilatino quando vengono riscaldati. La temperatura è dunque, con certezza, una delle grandezze da cui ρ dipende: cominciamo con essa.

3.2 Dipendenza della densità dalla temperatura

Il modo preciso in cui la densità varia con la temperatura dipende dalla natura del materiale. Per cogliere il comportamento nella sua generalità, rappresentiamo qualitativamente su un diagramma l'andamento di ρ in funzione di T , senza riportare valori numerici sugli assi.

Due osservazioni emergono immediatamente. In primo luogo, la densità *diminuisce al crescere della temperatura*: è un comportamento del tutto generale, valido per i liquidi, per i gas e persino per la grande maggioranza dei solidi, con pochissime eccezioni notevoli. In secondo luogo, questa diminuzione *non è costante*:

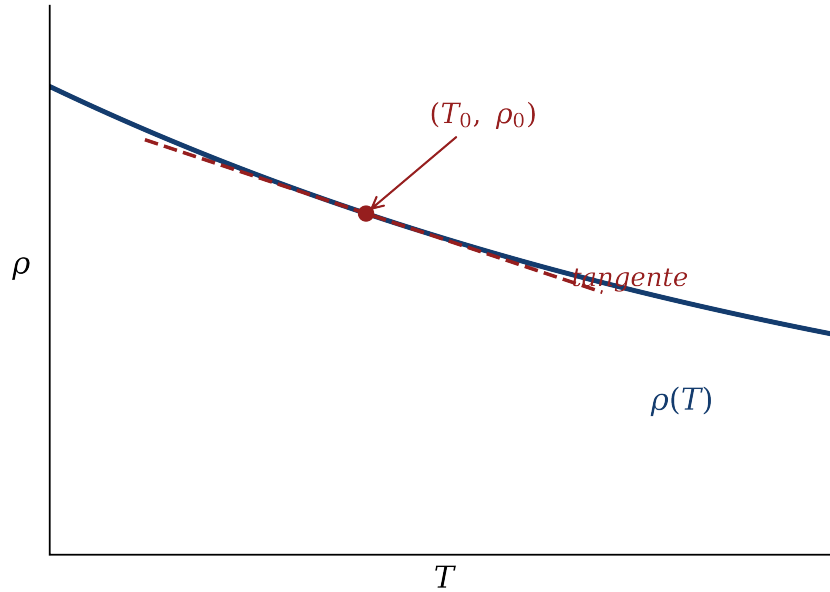


Figura 3.1. Andamento qualitativo della densità ρ in funzione della temperatura T . La curva è monotona decrescente e non lineare; in rosso è tracciata la tangente nel punto di riferimento (T_0, ρ_0) , la cui pendenza vale $\rho_0 \alpha$.

la curva non è una retta, ma presenta una pendenza che cambia con continuità lungo l'intero intervallo di temperature.

3.2.1 Linearizzazione e coefficiente di espansione termica

Se volessimo descrivere in modo esatto la variazione di ρ con T sull'intero intervallo, dovremmo conoscere la funzione $\rho(T)$ nella sua interezza – cosa che, per i liquidi, in generale non è possibile. Fortunatamente queste curve, pur variando la loro pendenza, lo fanno in modo regolare. Ciò suggerisce una strategia pratica: la *linearizzazione locale* nell'intorno di un punto di interesse.

Sia dunque T_0 la temperatura di interesse, alla quale il fluido presenta densità ρ_0 ; tracciamo la retta tangente alla curva $\rho(T)$ in (T_0, ρ_0) e approssimiamo la funzione con essa:

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \alpha (T - T_0), \quad \text{ovvero} \quad \frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \alpha \Delta T. \quad (3.1)$$

Il primo membro rappresenta la variazione relativa di densità; il fattore $\Delta T = T - T_0$ è la variazione di temperatura. Il coefficiente α regola il rapporto tra le due: la pendenza *locale* della curva $\rho(T)$ nel punto di riferimento vale $\rho_0 \alpha$.

Definizione

La quantità α che compare nella (3.1) è detta *coefficiente di espansione termica* (o, più precisamente, *coefficiente isobaro di espansione termica*) del fluido. Essa misura la variazione relativa di densità per unità di variazione di temperatura, a pressione costante.

3.2.2 Il segno di α

Poiché la densità *diminuisce* al crescere della temperatura, la curva $\rho(T)$ è decrescente e la sua tangente forma con l'asse delle ascisse un angolo ottuso: la pendenza $\rho_0 \alpha$ è negativa. Essendo $\rho_0 > 0$ per definizione, deve necessariamente risultare

$$\alpha < 0.$$

Il coefficiente di espansione termica è dunque, di norma, un numero *negativo*: quando la temperatura cresce, la densità diminuisce.

Attenzione

In parte della letteratura tecnica il coefficiente di espansione termica viene definito a partire dal *volume* anziché dalla densità; in tal caso il segno risulta invertito e si trova un coefficiente positivo. Le due convenzioni sono equivalenti – poiché a massa costante un aumento di volume corrisponde a una diminuzione di densità – ma è indispensabile verificare quale definizione adotta la tabella o il testo che si sta consultando prima di utilizzarne i valori.

3.2.3 Determinazione sperimentale nei liquidi

Per un liquido non disponiamo, in generale, di una forma analitica di $\rho(T)$. Il coefficiente α va dunque determinato *sperimentalmente*: si misura la densità per punti al variare della temperatura, si sceglie il regime di temperature di interesse e si linearizza la curva nel suo intorno.

Esempio

Si voglia valutare la dilatazione di un olio lubrificante all'interno di un motore, sapendo che in quell'organo la temperatura di esercizio varia tra circa 70 °C e 90 °C. La procedura corretta consiste nel prendere la curva $\rho(T)$ dell'olio nell'intorno di 80 °C e linearizzarla in un intervallo di circa ± 10 °C, ricavando il valore di α appropriato a quel regime. Analogamente, per l'acqua superficiale del mare in estate (circa 22 °C) si linearizzerà la curva nell'intorno di tale temperatura.

Due considerazioni qualitative, ricavabili dalle tabelle, sono istruttive. Anzitutto il coefficiente di espansione termica dell'acqua *aumenta in modulo* passando da 20 °C a 90 °C: dipende fortemente dalla temperatura, e ciò impone di non usare mai un valore di α al di fuori dell'intervallo per cui è stato determinato. Inoltre, a parità di temperatura, l'acetone presenta un coefficiente assai maggiore di quello dell'acqua (quasi dieci volte): si dilata molto di più a parità di riscaldamento. La dilatazione termica è quindi anche una spiccata proprietà del materiale.

3.2.4 L'anomalia dell'acqua

Abbiamo affermato che la densità diminuisce monotonamente al crescere della temperatura. Esiste però un'eccezione di straordinaria importanza: l'*acqua*. Il suo comportamento non è monotono – essa raggiunge la *massima densità* alla temperatura di circa $T = 4$ °C.

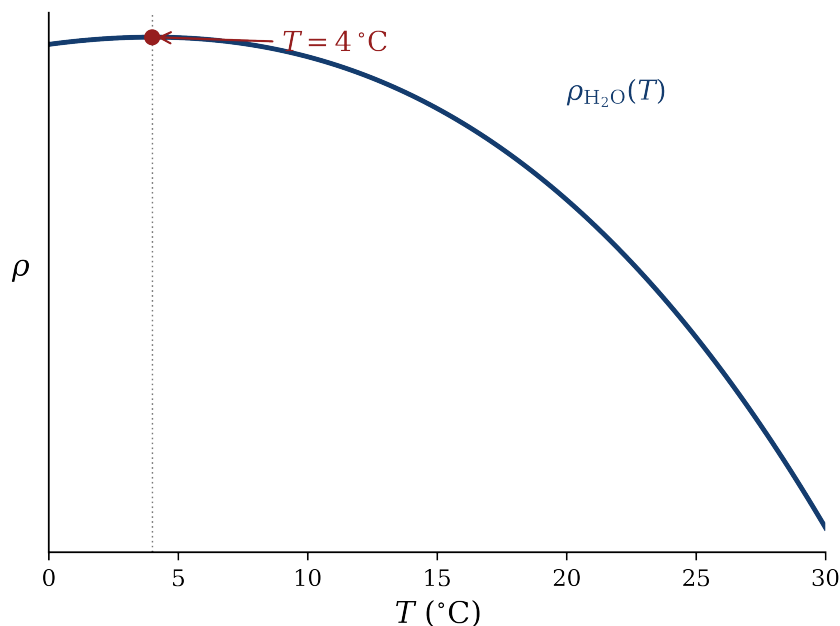


Figura 3.2. Anomalia dell'acqua: la densità presenta un massimo intorno a $T = 4\text{ }^{\circ}\text{C}$, anziché diminuire monotonicamente. Per chiarezza la scala delle ordinate è fortemente amplificata.

Osservazione

Questo comportamento anomalo è responsabile della sopravvivenza delle forme di vita acquatica. Poiché l'acqua ha densità massima a $4\text{ }^{\circ}\text{C}$, l'acqua più fredda di questa temperatura è *meno densa* e non può occupare gli strati più profondi. Se, al contrario, l'acqua si comportasse come la quasi totalità degli altri fluidi, l'acqua più fredda si disporrebbe sul fondo e i corpi idrici ghiaccerebbero dal basso verso l'alto, con esiti letali per flora e fauna. Grazie all'anomalia, invece, sul fondo di oceani e laghi l'acqua permane stabilmente a circa $4\text{ }^{\circ}\text{C}$, e la vita sopravvive anche sotto la superficie ghiacciata.

3.3 Il coefficiente di espansione termica dei gas

Consultando le tabelle in cerca del coefficiente di espansione termica di un gas – l'aria, l'azoto, l'elio – si fa una scoperta sorprendente: *non lo si trova*. La ragione può essere duplice: o è banalmente *facile* calcolarlo per via teorica, oppure esso varia così rapidamente da rendere priva di senso ogni linearizzazione. Come vedremo, sono vere entrambe le cose.

3.3.1 Le due forme dell'equazione di stato

Per i *gas perfetti* disponiamo di un'informazione che manca per i liquidi: l'*equazione di stato*. La scriviamo nella forma

$$\frac{p}{\rho} = R T, \quad (3.2)$$

in cui p è la pressione, ρ la densità, T la temperatura assoluta e R la costante *particolare* del gas considerato.

Attenzione

Un'altra forma classica dell'equazione di stato è $pV = n\mathcal{R}T$, dove però $\mathcal{R}$ è la costante *universale* dei gas, uguale per tutti. La relazione tra le due è $R = \mathcal{R}/\mathcal{M}$, essendo $\mathcal{M}$ il peso molecolare del gas: più il gas è pesante, più la sua costante particolare R è piccola. Adottiamo la forma (3.2) perché coinvolge direttamente la densità.

3.3.2 Derivazione di α per il gas perfetto

In forma differenziale la (3.1) si scrive $d\rho/\rho = \alpha dT$, da cui, risolvendo rispetto ad α ,

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p. \quad (3.3)$$

La derivata è presa *a pressione costante*: l'equazione di stato coinvolge tre variabili di stato, e nel definire α facciamo variare soltanto ρ e T mantenendo p costante. È per questo che α si chiama, più correttamente, coefficiente *isobaro* di espansione termica.

Dalla (3.2) ricaviamo $\rho = (p/R)(1/T)$. Poiché p è costante, il fattore p/R è costante e la derivata di $1/T$ vale $-1/T^2$:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \frac{p}{R} \left(-\frac{1}{T^2} \right) = -\frac{1}{T} \underbrace{\frac{p}{R}}_{=\rho} \frac{1}{T} = -\frac{\rho}{T}. \quad (3.4)$$

Sostituendo la (3.4) nella definizione (3.3) e dividendo per ρ otteniamo il risultato cercato:

$$\alpha = -\frac{1}{T} \quad (3.5)$$

Osservazione

Il risultato (3.5) spiega tutto ciò che avevamo osservato. Per un gas perfetto il coefficiente di espansione termica è semplicemente l'opposto dell'inverso della temperatura assoluta. Da un lato ciò chiarisce perché non compaia nelle tabelle: è banalissimo da calcolare. Dall'altro mostra che α dipende fortemente dalla temperatura, tanto che in molti casi la linearizzazione perde di significato.

3.3.3 L'universalità di α

La (3.5) contiene un'ulteriore, notevole informazione: α dipende *soltanto* dalla temperatura e *non* dalla costante R . Poiché R è l'unica grandezza che porta con sé l'informazione sulla natura del gas, ne segue che *tutti i gas perfetti, posti alla stessa temperatura, hanno lo stesso coefficiente di espansione termica*. Questo fatto apparentemente astratto permette di sciogliere un enigma storico.

Perché kelvin e grado centigrado hanno la stessa ampiezza

La scala centigrada, dovuta a Celsius, ha origine *antropomorfica*: si prende l'acqua, si pone a zero il punto di congelamento e a cento quello di ebollizione a pressione ambiente, suddividendo poi in cento parti. Nulla, in questa costruzione, ha un fondamento fisico intrinseco. La temperatura assoluta in

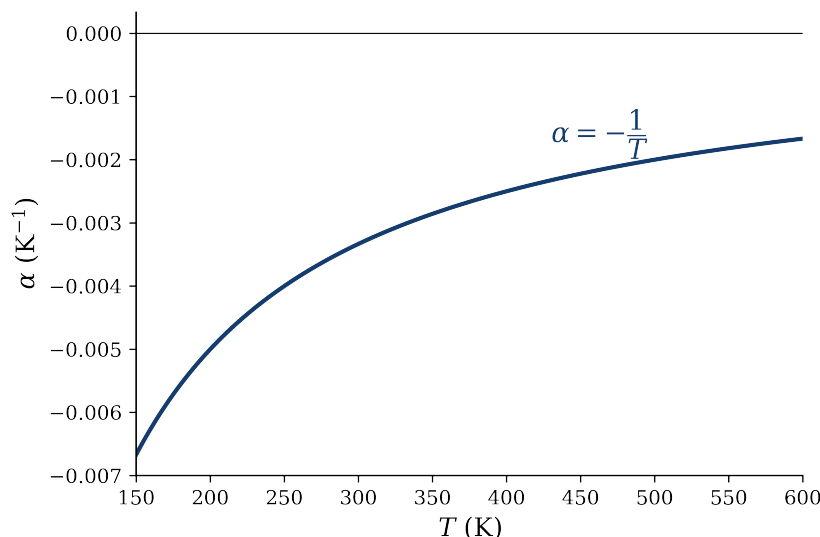


Figura 3.3. Andamento del coefficiente di espansione termica $\alpha = -1/T$ per un gas perfetto in funzione della temperatura assoluta. La dipendenza iperbolica rende poco significativa qualunque linearizzazione su intervalli ampi.

kelvin è invece ben più profonda: determina l'equazione di stato, l'energia interna, l'entropia. Come può una scala convenzionale avere la stessa unità di una scala dal fondamento fisico? La risposta è storica. Si era osservato sperimentalmente che un gas qualunque, portato a 0°C e raffreddato di un grado, riduceva il proprio volume di $1/273$ del valore iniziale, *indipendentemente dalla natura del gas* (è proprio l'universalità di α). Estrapolando linearmente, a -273°C il volume si sarebbe annullato: nacque così l'idea di assumere quel valore come nuova origine, ed è questa osservazione ad averci lasciato in eredità la scala Kelvin, la cui ampiezza del grado coincide, per costruzione, con quella del grado centigrado. L'estrapolazione ha però valore soltanto concettuale: ben prima di raggiungere lo zero assoluto il gas reale liquefa e la relazione $\alpha = -1/T$ cessa di valere.

3.4 Interpretazione microscopica dell'espansione termica

Abbiamo constatato che, sia nei liquidi sia nei gas, un aumento di temperatura comporta una diminuzione di densità. Resta da capire *perché*. Scopriremo un fatto notevole: il risultato macroscopico è identico, ma il meccanismo fisico che lo produce è *completamente diverso* nei due casi. Prima occorre uno strumento fondamentale: la distribuzione delle velocità molecolari.

3.4.1 La distribuzione di Maxwell–Boltzmann

Consideriamo una molecola del fluido e chiediamoci quale sia la probabilità che essa possieda una velocità compresa tra v e $v + dv$. Stiamo così definendo una *funzione densità di probabilità* delle velocità. Per un gas perfetto, Maxwell e Boltzmann ne fornirono la forma esplicita:

$$p(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{m v^2}{2kT} \right), \quad (3.6)$$

dove k è la costante di Boltzmann, T la temperatura assoluta e m la massa della singola molecola.

La struttura della (3.6) è più semplice di quanto la formula suggerisca: a parte il fattore di scala, essa è il prodotto di due termini in competizione, un fattore v^2 e un esponenziale decrescente. Per piccole velocità domina il termine quadratico e la funzione cresce come una parabola; per grandi velocità prevale l'esponenziale, che la fa decadere rapidamente a zero. Ne risulta la caratteristica curva a campana asimmetrica.

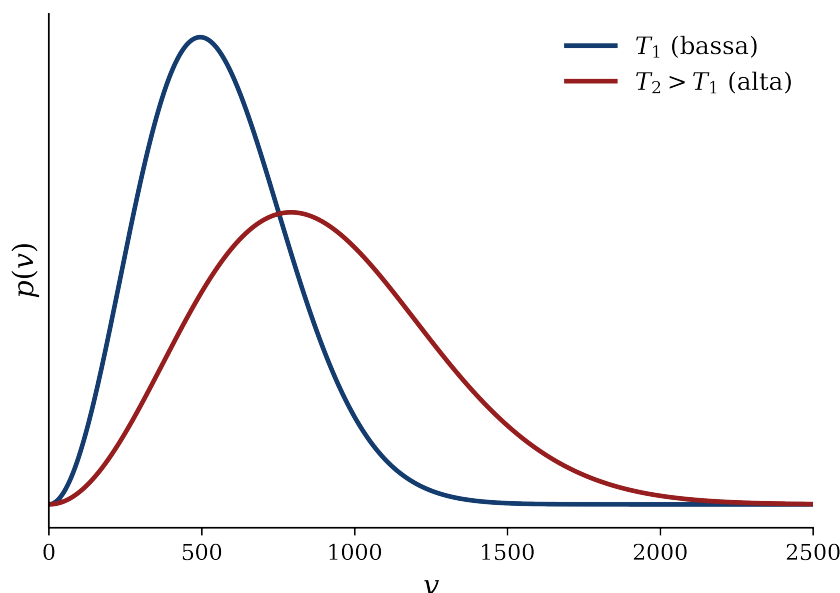


Figura 3.4. Distribuzione di Maxwell–Boltzmann delle velocità molecolari a due temperature. All'aumentare della temperatura il picco si abbassa e si sposta verso velocità maggiori; l'area sottesa resta unitaria.

Osservazione

La frazione di molecole con velocità compresa tra v e $v + dv$ è pari all'area sottesa dalla curva in quell'intervallo. Poiché ogni molecola possiede certamente una velocità compresa tra zero e infinito, l'area totale deve valere esattamente uno, $\int_0^\infty p(v) dv = 1$: è la proprietà di normalizzazione che definisce una densità di probabilità. Aumentando la temperatura il massimo si sposta verso velocità più alte e la coda si innalza; diminuendola, il picco si alza e si sposta verso sinistra. In ogni caso l'area resta unitaria.

3.4.2 Il meccanismo nei liquidi: l'asimmetria del potenziale

Nei liquidi le molecole si trovano mediamente alla loro *distanza di equilibrio*, il minimo del potenziale di Lennard–Jones $U(r)$: a piccole distanze prevalgono le forze repulsive, a grandi distanze quelle attrattive.

Nei liquidi le molecole possiedono troppa energia per restare stabilmente nella posizione di equilibrio: oscillano violentemente attorno ad essa, rompendo e riformando di continuo i legami. A bassa temperatura (T_1) l'ampiezza delle oscillazioni è contenuta; portando il materiale a $T_2 > T_1$, le molecole oscillano con ampiezza maggiore. Qui interviene il punto decisivo. Se le oscillazioni aumentassero restando *simmetriche*, la posizione media resterebbe invariata e non si avrebbe alcuna dilatazione. Ma la curva $U(r)$ *non è simmetrica* attorno al minimo: quando la molecola si avvicina all'altra, la forza repulsiva cresce più che linearmente e l'escursione risulta *ridotta*; quando si allontana, la forza attrattiva cresce meno che linearmente e l'escursione ri-

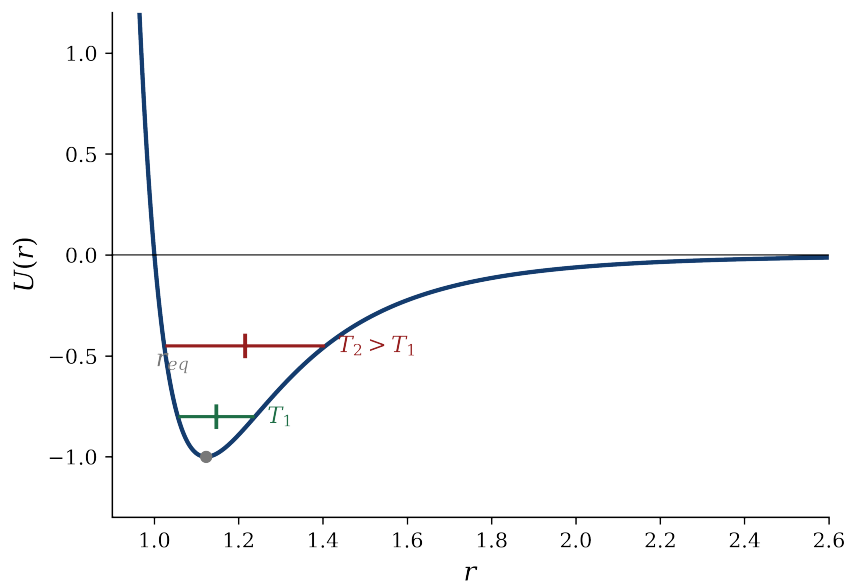


Figura 3.5. Energia potenziale d'interazione $U(r)$ tra due molecole (potenziale di Lennard-Jones). Le barrette orizzontali rappresentano l'ampiezza delle oscillazioni a due temperature: al crescere della temperatura ($T_2 > T_1$) l'escursione diventa asimmetrica e la posizione media si sposta verso destra, cioè verso distanze maggiori.

sulta *ampliata*. L'oscillazione si estende dunque più verso destra che verso sinistra: la *posizione media* si sposta verso distanze maggiori.

Osservazione

Ecco spiegata l'espansione termica dei liquidi. Poiché la distanza media tra le molecole aumenta con la temperatura, a parità di massa il materiale occupa più volume, e la sua densità diminuisce. La dilatazione nasce interamente dall'*asimmetria del potenziale intermolecolare*.

3.4.3 Il meccanismo nei gas: la pressione cinetica

Nei gas lo scenario è completamente diverso. Le molecole sono tanto distanti che le forze intermolecolari sono trascurabili: ciò che conta sono le *collisioni*, e il diagramma del potenziale non si applica. Aumentando la temperatura, la distribuzione di Maxwell-Boltzmann si sposta verso destra: una frazione maggiore di molecole possiede velocità elevata, e a ogni urto contro una parete trasferisce una quantità di moto maggiore. Poiché la pressione esercitata dal gas è prodotta proprio da questi urti per unità di tempo e superficie, ne segue che *a volume costante un aumento di temperatura fa crescere la pressione*. Ma il coefficiente α è definito *a pressione costante*: l'unico modo per riportare la pressione al valore iniziale è concedere alle molecole più spazio, ossia *aumentare il volume*.

Osservazione

Un gas mantenuto a pressione costante, quando viene riscaldato, si dilata. Il risultato macroscopico è identico a quello dei liquidi – diminuzione di densità con la temperatura – ma il meccanismo fisico è radicalmente diverso: nei liquidi è l'asimmetria del potenziale a spostare la distanza media di equilibrio; nei gas è la crescita della pressione cinetica a imporre, a pressione costante, l'espansione del volume.

Un parallelo con la viscosità

Questa dualità di meccanismi non è isolata: la ritroviamo nella viscosità. Anche lì l'effetto macroscopico – la trasmissione di quantità di moto tra strati adiacenti – è identico nei liquidi e nei gas, ma l'origine microscopica è diversa. La prova più eloquente sta nella dipendenza dalla temperatura: nei gas la viscosità *aumenta* al crescere della temperatura, nei liquidi *diminuisce*. Due comportamenti opposti che tradiscono due meccanismi distinti dietro uno stesso fenomeno macroscopico. Torneremo su questo nel capitolo dedicato alla viscosità.

3.5 Formulazione differenziale complessiva

Riassumiamo. La densità di un fluido è una proprietà di campo che dipende dallo stato termodinamico. La sua dipendenza dalla temperatura, a pressione costante, è governata dal coefficiente isobaro di espansione termica

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p,$$

generalmente negativo, determinato sperimentalmente per i liquidi e pari a $-1/T$ per i gas perfetti. Volendo tener conto simultaneamente delle variazioni di temperatura e di pressione, si scrive il differenziale totale della densità:

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T dp = \rho \alpha_p dT + \frac{\rho}{E_T} dp, \quad (3.7)$$

dove α_p è il coefficiente di espansione termica a pressione costante ed E_T il modulo di comprimibilità a temperatura costante (oggetto del prossimo capitolo). Nel caso particolare di un gas perfetto si ha $\alpha_p = -1/T$ ed $E_T = p$, sicché la (3.7) si riduce alla forma compatta

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dT}{T} + \frac{dp}{p}, \quad (3.8)$$

che si ottiene anche direttamente differenziando in modo logaritmico la legge di stato $p = \rho RT$. Il termine in dT descrive l'espansione termica qui studiata; il termine in dp descrive la comprimibilità: due effetti distinti concettualmente che concorrono insieme a determinare le variazioni di densità di un fluido reale.

Comprimibilità di un fluido

4.1 Il modulo di comprimibilità

Una proprietà essenziale di un fluido è la sua *comprimibilità*, cioè la facilità con cui varia percentualmente il proprio volume in seguito a una variazione di pressione. Supponiamo che un fluido occupi inizialmente un volume V e che, in seguito all'applicazione di una variazione di pressione dp , il volume subisca la variazione dV .

Definizione

Si definisce *modulo di comprimibilità* la grandezza

$$E = - \frac{dp}{dV/V},$$

che ha le stesse dimensioni di una pressione (Pa). Il segno negativo tiene conto del fatto che a variazioni di pressione positive corrispondono diminuzioni di volume, cioè $dV < 0$: senza quel segno il modulo risulterebbe negativo, mentre per convenzione lo si vuole positivo. Il suo reciproco $\beta = 1/E$ è detto *coefficiente di comprimibilità*.

Conviene riscrivere E in funzione della densità anziché del volume. Poiché la massa $m = \rho V$ è costante, differenziando in modo logaritmico la relazione $m = \rho V$ si ottiene

$$\frac{dV}{V} = - \frac{d\rho}{\rho},$$

e quindi

Formula chiave

$$E = \frac{dp}{d\rho/\rho}.$$

Quanto più E è grande, tanto più il fluido è *rigido* alla compressione: occorre una grande variazione di pressione per produrre una piccola variazione relativa di volume (o di densità).

4.2 Liquidi: praticamente incompressibili

Nei liquidi E assume valori estremamente elevati. A titolo di riferimento: $E = 2,15 \times 10^9$ Pa per l'acqua, $E = 2,85 \times 10^{10}$ Pa per il mercurio, $E = 1,3 \times 10^9$ Pa per la benzina. Valori così grandi significano che variazioni di pressione anche notevoli producono variazioni di volume del tutto trascurabili: è per questo che, nella grande maggioranza delle applicazioni, i liquidi si considerano *incompressibili*.

Attenzione

Nel linguaggio tecnico italiano è corretto dire “fluido *incompressibile*” (dal verbo *comprimere*), non “incompressibile”. L'aggettivo descrive un fluido la cui densità resta praticamente costante al variare della pressione, e si riferisce alla proprietà del fluido, non a un'azione subita.

4.3 Gas: la comprimibilità dipende dalla trasformazione

Per i gas il valore di E resta *indeterminato* finché non si specifica la natura della trasformazione che lega p a ρ (o a V). Consideriamo una trasformazione politropica generica,

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const.}$$

Differenziando,

$$\frac{\rho^k dp - k p \rho^{k-1} d\rho}{\rho^{2k}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{d\rho/\rho} = k p,$$

da cui il risultato compatto

Formula chiave

$$E = k p.$$

Ne discendono due casi notevoli:

- **trasformazione isoterma** ($p/\rho = \text{const}$, cioè $k = 1$): $E = p$;
- **trasformazione isentropica** ($p/\rho^\gamma = \text{const}$, con $\gamma = c_p/c_v$ rapporto fra i calori specifici a pressione e a volume costante): $E = \gamma p$.

Poiché $\gamma > 1$ (per l'aria $\gamma = 1,4$), a parità di pressione un gas compresso in modo isentropico è *più rigido* di uno compresso in modo isoterma. La ragione fisica è intuitiva: comprimendo un gas senza lasciargli disperdere calore, esso si scalda, e un gas caldo è più difficile da comprimere.

Densità: dipendenza da T e p

Mettendo insieme dilatazione termica e comprimibilità, la variazione di densità si scrive come differenziale totale

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T dp = \rho \alpha_p dT + \frac{\rho}{E_T} dp,$$

dove α_p è il coefficiente di dilatazione termica a pressione costante ed E_T il modulo di comprimibilità a temperatura costante. Per un gas perfetto risulta $\alpha_p = 1/T$ ed $E_T = p$, da cui

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dT}{T} + \frac{dp}{p},$$

relazione che si ottiene anche direttamente differenziando in modo logaritmico la legge di stato dei gas perfetti $p = \rho RT$.

4.4 Un esempio svolto

Esempio

Un fluido occupa inizialmente il volume V_0 . Aumentando la sua pressione di $\Delta p = 8 \text{ GPa}$, il volume diminuisce della percentuale $\%V = 24,47$. Calcolare il modulo di comprimibilità e riconoscere la sostanza.

Soluzione. Partiamo dalla definizione in forma differenziale,

$$E = -\frac{dp}{dV/V} \implies \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{E}.$$

Integrando fra lo stato iniziale e quello finale (assumendo E costante nel range),

$$\int_{V_0}^{V_f} \frac{dV}{V} = -\frac{\Delta p}{E} \implies \ln \frac{V_f}{V_0} = -\frac{\Delta p}{E}.$$

Poiché $V_f/V_0 = 1 - \%V/100$, si ricava

$$E = -\frac{\Delta p}{\ln\left(1 - \frac{\%V}{100}\right)} \simeq 2,85 \times 10^{10} \text{ Pa}.$$

Confrontando con i valori tabulati, si riconosce che il fluido è il *mercurio*.

Viscosità e sforzi tangenziali

5.1 La velocità di deformazione

Riprendiamo la definizione fenomenologica di fluido, secondo cui un fluido si deforma con continuità sotto uno sforzo di taglio costante. Questa proprietà, che nel Capitolo 1 ci è servita a distinguere qualitativamente un fluido da un solido, si presta ora a essere resa quantitativa: vogliamo cioè stabilire un legame preciso fra lo sforzo applicato e la risposta del fluido. È proprio da questo legame che nasce la grandezza fisica chiamata *viscosità*.

Consideriamo una particella fluida inizialmente a forma di parallelepipedo, e applichiamo su una sua superficie S una forza F tangente alla superficie stessa. La particella è così sottoposta a uno *sforzo di taglio*

$$\tau = \frac{F}{S}.$$

Poiché stiamo trattando un fluido, esso non raggiunge una deformazione di equilibrio, ma si deforma continuamente. Non ha quindi senso misurare la *deformazione*: occorre misurarne la *velocità*. È questa una differenza concettuale radicale rispetto alla meccanica dei solidi. In un solido elastico lo sforzo è legato alla deformazione γ (la legge di Hooke per il taglio recita $\tau = G\gamma$, con G modulo di elasticità tangenziale); in un fluido, invece, una deformazione fissata non corrisponde ad alcuno sforzo di equilibrio, perché il fluido continuerebbe a scorrere. L'analogo del modulo elastico dovrà dunque legare lo sforzo non alla deformazione, ma alla sua derivata temporale.

Supponiamo che la superficie superiore trasli con velocità costante U : in un tempo Δt essa percorre una distanza $U \Delta t$, e se b è l'altezza dell'elemento fluido, la deformazione angolare $\Delta\gamma$ soddisfa

$$\tan(\Delta\gamma) = \frac{U \Delta t}{b} \simeq \Delta\gamma,$$

dove l'approssimazione vale nel limite di piccoli angoli, cioè per Δt sufficientemente breve. La *velocità di deformazione angolare* è allora

$$\dot{\gamma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} = \frac{U}{b} = \frac{dU}{dy},$$

dove y è la coordinata ortogonale alle superfici e l'ultimo passaggio vale nel caso – che dimostreremo in seguito – di distribuzione lineare della velocità all'interno dell'elemento.

5.2 La legge di Newton per i fluidi

Ripetendo idealmente l'esperimento con valori diversi di τ , si scopre un fatto sperimentale di grande portata: la velocità di deformazione angolare $\dot{\gamma}$ risulta *proporzionale* allo sforzo applicato, attraverso una costante μ che dipende soltanto dal tipo di fluido e dalla sua temperatura.

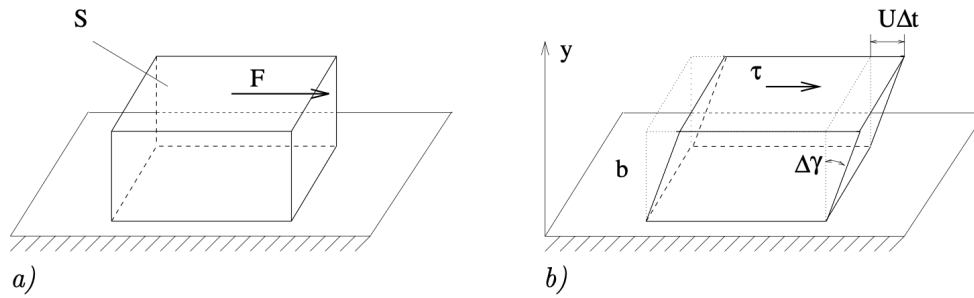


Figura 5.1. Deformazione di una particella fluida sotto sforzo di taglio τ : la superficie superiore trasla con velocità U generando la deformazione angolare $\Delta\gamma$ nel tempo Δt .

Formula chiave

$$\tau = \mu \dot{\gamma} = \mu \frac{dU}{dy}.$$

La costante μ prende il nome di *viscosità dinamica*. La relazione lineare fra sforzo e velocità di deformazione caratterizza una classe di fluidi detti *newtoniani*. Sebbene essa sia la più semplice ipotizzabile, tutti i fluidi di uso più comune – acqua, aria, la maggior parte dei gas in condizioni non critiche, gli idrocarburi, il mercurio – vi obbediscono con ottima fedeltà.

Nota

Vale la pena sottolineare la portata di questa relazione come *definizione*. Un fluido si dice *newtoniano* quando, sollecitato tangenzialmente, si deforma angularmente con continuità e con velocità di deformazione $\dot{\gamma}$ direttamente proporzionale allo sforzo di taglio applicato attraverso l'unica costante μ . È essenziale che μ dipenda *soltanto* dal materiale e dal suo stato termodinamico (temperatura e, in misura molto minore, pressione), e non dallo sforzo applicato: è questo che rende μ una vera proprietà del fluido. Si comportano da fluidi newtoniani i gas lontani dal punto di liquefazione (in pratica i gas assimilabili a gas perfetti) e la grande maggioranza dei liquidi d'uso comune. La dinamica dei fluidi newtoniani costituisce il nucleo centrale della fluidodinamica classica, e sarà il quadro di riferimento per tutta la trattazione successiva.

Fluidi non newtoniani

Esistono importanti eccezioni. Il *sangue* reagisce con sforzi che crescono meno che linearmente con $\dot{\gamma}$ (comportamento detto *shear-thinning*), permettendo al cuore di pompare, a parità di portata, con minore sforzo; si comporta in modo quasi newtoniano ad alte velocità di deformazione (aorta) e non newtoniano a basse (capillari). I *fluidi di Bingham* non si deformano affatto finché lo sforzo resta sotto una soglia τ_0 , seguendo poi una legge $\tau - \tau_0 = \mu \dot{\gamma}$ per $\tau \geq \tau_0$: le dune di sabbia ne sono un esempio, poiché la componente tangenziale della gravità resta al di sotto della soglia finché la pendenza non cambia. Altri fluidi (vernici, ketchup) sono *tissotropici*, riducendo la propria viscosità se agitati. Lo studio di questi comportamenti è oggetto della *reologia*.

5.3 Il significato microscopico della viscosità

Per capire in che modo la viscosità agisca, ripensiamo all'esperimento della lastra in moto. Nell'istante immediatamente successivo all'inizio della traslazione, solo le molecole a contatto con la superficie in moto vengono trascinate; gli strati sottostanti restano in quiete. A causa dell'agitazione termica, però, le molecole in moto trasferiscono per urto parte della propria quantità di moto a quelle statisticamente ferme, che a loro volta iniziano a muoversi. Il processo si propaga verso il basso strato dopo strato, e raggiunge l'equilibrio quando si bilanciano l'azione degli strati superiori, che tendono a trascinare l'intero elemento, e quella della superficie inferiore ferma, che tende ad arrestarlo: si stabilisce così il profilo di velocità.

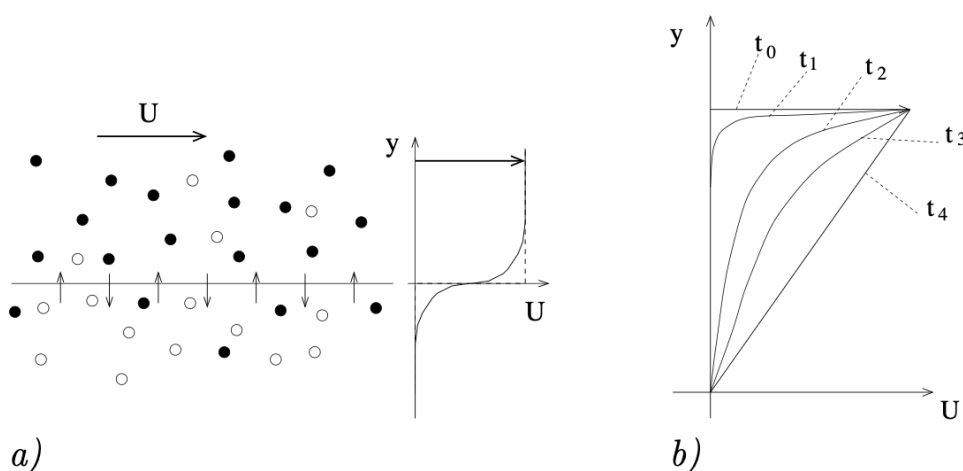


Figura 5.2. Trasferimento progressivo di quantità di moto fra strati di fluido inizialmente in quiete e successiva formazione del profilo di velocità.

La viscosità è dunque la misura dell'*attitudine di un fluido a diffondere la quantità di moto* per effetto del moto caotico molecolare. Questo chiarisce un punto concettuale rilevante: lo stesso meccanismo microscopico – il trasporto di una grandezza da parte dell'agitazione termica – è all'origine di tutti i fenomeni di diffusione. Come la conducibilità termica descrive la diffusione di energia e la diffusività molecolare quella di massa, così la viscosità descrive la diffusione di quantità di moto. Non a caso, come vedremo, la viscosità cinematica ha le stesse dimensioni fisiche della diffusività termica.

Dalla relazione $\tau = \mu \, dU/dy$ si ricavano facilmente le dimensioni della viscosità dinamica: $[\mu] = \text{N s/m}^2 = \text{Pa s}$.

Attenzione

Nel linguaggio comune viscosità e densità vengono spesso confuse: si sente dire “liquido molto denso” per indicare una sostanza viscosa. Sono però grandezze distinte. La densità misura la massa per unità di volume; la viscosità misura la facilità con cui il fluido diffonde quantità di moto. L'olio, ad esempio, è più viscoso dell'acqua ma meno denso, come mostra il fatto che galleggia su di essa.

5.4 Dipendenza dalla temperatura

Il meccanismo microscopico spiega anche la forte dipendenza della viscosità dalla temperatura, ma con andamenti opposti per gas e liquidi.

- Nei **gas** la quantità di moto è trasportata dalle molecole che, nel loro moto d'agitazione termica, attraversano gli strati adiacenti. Un aumento di temperatura intensifica tale agitazione, rendendo più efficiente la diffusione di quantità di moto: la viscosità *cresce* con la temperatura.
- Nei **liquidi** il trasporto di quantità di moto è dominato dai legami coesivi fra molecole vicine. Un aumento di temperatura indebolisce tali legami e conferisce alle molecole maggiore mobilità: questo effetto prevale, e la viscosità *diminuisce* con la temperatura.

Un esempio quotidiano è l'olio in padella: freddo aderisce al fondo e fluisce a fatica, ma appena si scalda scorre con facilità, "come se fosse acqua". La pressione, invece, ha in genere un effetto molto ridotto sulla viscosità e di norma si trascura.

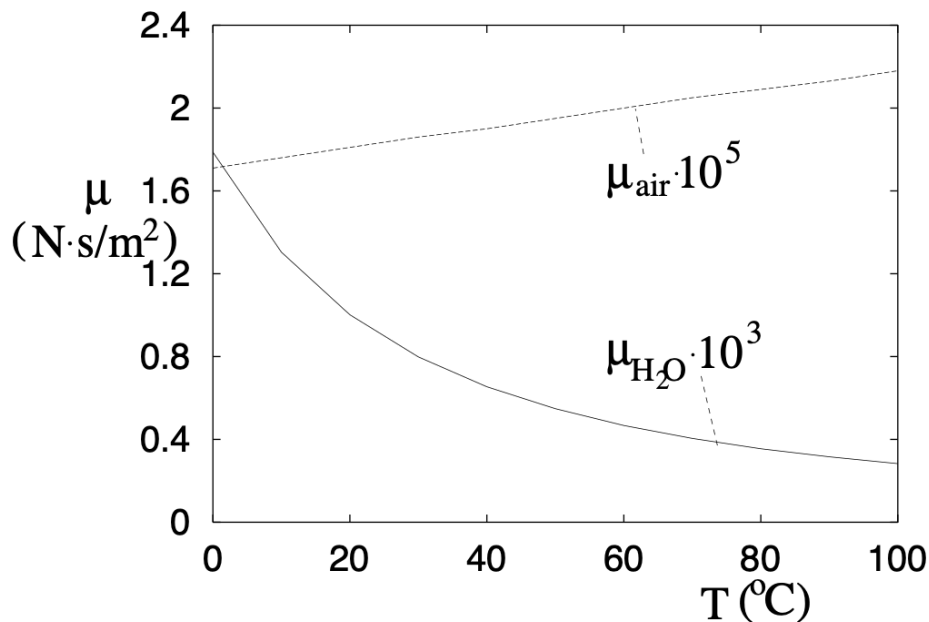


Figura 5.3. Andamento opposto della viscosità con la temperatura per aria (crescente) e acqua (decescente).

5.5 Viscosità cinematica

Ricorrerà spesso la quantità

Formula chiave

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},$$

detta *viscosità cinematica*, con dimensioni $[\nu] = \text{m}^2/\text{s}$. La densità compare a denominatore: comprimendo un fluido, la densità aumenta e la viscosità cinematica diminuisce. Questo effetto è rilevante per i gas, mentre nei liquidi si può generalmente trascurare. Le dimensioni m^2/s sono, non a caso, quelle di una diffusività: ν misura la velocità con cui la quantità di moto si propaga nel fluido, e comparirà in modo naturale quando scriveremo l'equazione del moto in forma differenziale. È interessante notare che, sebbene l'aria sia molto meno viscosa dell'acqua in termini di μ , la sua bassa densità fa sì che la sua viscosità *cinematica* ν sia in realtà maggiore di quella dell'acqua di oltre un ordine di grandezza.

5.6 Un esempio svolto

Esempio

Si consideri il flusso d'acqua tra due lastre piane parallele, di cui la superiore si muove con velocità U e l'inferiore, vincolata a una molla di costante elastica K , viene spostata di una quantità x . Il profilo di velocità fra le lastre è lineare. Determinare U .

Dati: $h = 4 \text{ mm}$ (distanza fra le lastre), $l = 1 \text{ m}$ (lunghezza), $b = 1,3 \text{ m}$ (dimensione ortogonale al foglio), $x = 0,25 \text{ cm}$, $K = 10^3 \text{ N/m}$, viscosità dinamica dell'acqua $\mu \simeq 10^{-3} \text{ Pa s}$.

Soluzione. Il profilo di velocità fra le lastre è lineare (come vedremo, è una soluzione esatta delle equazioni del moto):

$$u(y) = \frac{U y}{h},$$

con y misurato dalla lastra ferma. Lo sforzo di parete sulla lastra inferiore è

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\mu U}{h}.$$

La forza viscosa risultante, integrata sulla superficie bl , vale

$$F = \int_S \tau_w dS = \frac{\mu U b l}{h},$$

e deve eguagliare la reazione elastica della molla $F = Kx$. Uguagliando,

$$U = \frac{K x h}{\mu b l} \simeq 6,86 \text{ m/s}.$$

Il risultato mostra come, nonostante la piccolezza della viscosità dell'acqua, la forza viscosa integrata su una superficie estesa sia tutt'altro che trascurabile: è questo il principio su cui si fonda il funzionamento dei viscosimetri a lastre scorrevoli.

La tensione di vapore

6.1 Una proprietà di confine tra liquido e gas

Nello studio delle proprietà dei fluidi abbiamo finora incontrato grandezze che descrivono separatamente il comportamento dei gas e quello dei liquidi: la densità, la comprimibilità, la viscosità. La *tensione di vapore* (o, in modo del tutto equivalente, *pressione di vapore saturo*) occupa invece una posizione particolare, perché è la proprietà che descrive l'attitudine di un liquido a trasformarsi spontaneamente in gas. Essa vive dunque sul confine tra le due fasi e ne governa la transizione.

Comprendere questa grandezza non è un esercizio puramente accademico. Da essa dipendono fenomeni tanto quotidiani quanto tecnologicamente rilevanti: l'ebollizione dell'acqua in cucina, il funzionamento della pentola a pressione, la liofilizzazione degli alimenti destinati alle missioni spaziali e, soprattutto per chi si occupa di macchine a fluido, la *cavitazione* – un fenomeno che erode le eliche navali, danneggia le pompe dei propulsori a razzo e limita le prestazioni dei sistemi di raffreddamento.

Concetto chiave

La tensione di vapore è la pressione parziale esercitata dal vapore di un liquido quando questo si trova in equilibrio dinamico con la propria fase liquida, a una data temperatura. È una funzione crescente della temperatura e dipende in modo fondamentale dalla natura del liquido.

Affronteremo l'argomento in modo progressivo: partiremo dal significato microscopico del fenomeno, appoggiandoci al modello molecolare del liquido e alla distribuzione statistica delle velocità; costruiremo poi la nozione macroscopica di equilibrio e di pressione di vapore saturo; ne studieremo la dipendenza dalla temperatura e dal materiale; e infine esamineremo le sue conseguenze tecnologiche, culminando nello studio della cavitazione, di grande interesse per l'ingegneria aeronautica e aerospaziale.

6.2 Il quadro microscopico: dal modello di liquido all'evaporazione

6.2.1 Il liquido come aggregato di molecole in agitazione

Riprendiamo il modello microscopico di liquido introdotto nel Capitolo 1. Le molecole che lo compongono sono tenute assieme da *forze coesive* di natura elettromagnetica, ben descritte in prima approssimazione dal potenziale di Lennard-Jones: a una certa distanza di equilibrio la forza risultante scambiata tra due molecole è nulla, mentre a distanze minori prevale la repulsione e a distanze maggiori l'attrazione.

A differenza di un solido, tuttavia, nel liquido questi legami non sono permanenti. In ogni istante coesistono regioni in cui le molecole si comportano come se fossero legate rigidamente – quasi fossero un solido locale – e regioni in cui le molecole sono sostanzialmente libere. Il quadro è dinamico: dopo un intervallo di tempo

brevissimo il sistema si riconfigura, e statisticamente si ritrova sempre lo stesso numero di molecole legate e lo stesso numero di molecole libere, ma non si tratta mai delle stesse molecole.

A questa struttura statistica si sovrappone l'*agitazione termica*: ogni molecola possiede una propria velocità, interpretabile come una vibrazione attorno alla posizione di equilibrio. Il punto cruciale è che queste velocità non sono tutte uguali, ma *distribuite* secondo una precisa legge di probabilità.

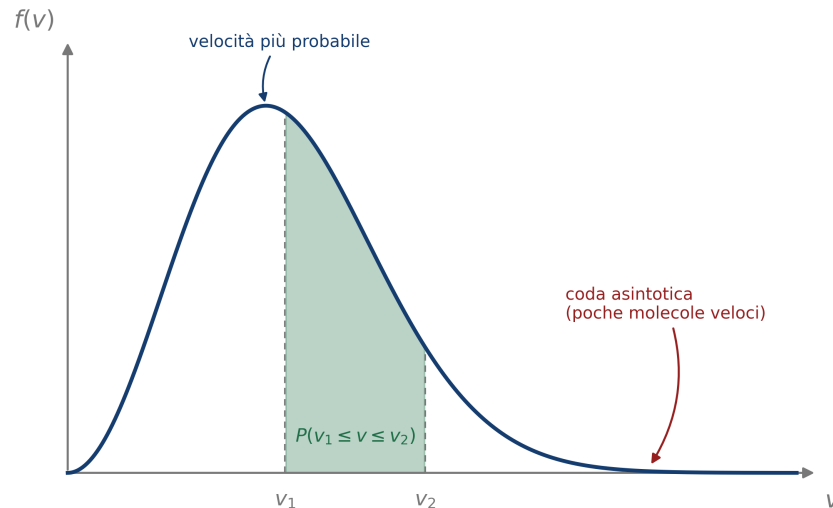


Figura 6.1. Distribuzione statistica delle velocità molecolari (tipo Maxwell-Boltzmann). L'area sottesa alla curva tra due valori di velocità rappresenta la probabilità di trovare una molecola in quell'intervallo. La coda a destra, che tende asintoticamente a zero, rappresenta le molecole più veloci: sono poche, ma esistono.

6.2.2 La distribuzione delle velocità e la coda energetica

Detta v la velocità di una molecola e $p(v)$ la densità di probabilità associata, la probabilità di trovare una molecola con velocità compresa tra v_1 e v_2 è data dall'area sottesa alla curva:

$$\Pr\{v_1 \leq v \leq v_2\} = \int_{v_1}^{v_2} p(v) dv.$$

Per un gas ideale questa densità di probabilità è la ben nota distribuzione di Maxwell-Boltzmann; per un liquido la trattazione è più complessa, ma la forma qualitativa e le conclusioni fisiche restano valide e sufficienti ai nostri scopi.

Della curva interessano tre caratteristiche:

- la probabilità di trovare molecole a velocità nulla è nulla: $p(0) = 0$;
- la distribuzione è *asimmetrica*, per cui il valore medio della velocità è maggiore del valore più probabile (il picco è spostato a sinistra rispetto alla media);
- la curva tende a zero *asintoticamente* per velocità elevate. Ciò significa che le velocità molto alte sono improbabili, ma non impossibili: essendo il numero di molecole enorme (dell'ordine del numero di Avogadro), esisterà sempre una piccola frazione di molecole dotate di velocità – e quindi di energia cinetica – molto superiori alla media.

È proprio questa *coda energetica* della distribuzione a rendere possibile l'evaporazione.

6.2.3 Il meccanismo dell'evaporazione

Consideriamo la superficie libera di un liquido. Una molecola che si trovi nelle vicinanze dell'interfaccia e che possieda un'energia cinetica sufficientemente elevata può *vincere* le forze coesive che la trattengono nella fase liquida e sfuggire nella fase gassosa. Questo, e non altro, è il fenomeno dell'evaporazione: non è necessario riscaldare il liquido fino all'ebollizione, perché in ogni istante esiste una frazione di molecole abbastanza energetiche da abbandonare la fase liquida.

Concetto chiave

Esiste una *velocità di soglia* $\bar{v}$, dipendente dalla natura del liquido, al di sopra della quale una molecola prossima all'interfaccia possiede energia cinetica sufficiente a passare in fase aeriforme. La frazione di molecole in grado di evaporare è pari all'area sottesa alla curva di distribuzione da $\bar{v}$ fino all'infinito:

$$\phi_{\text{evap}} = \int_{\bar{v}}^{\infty} p(v) dv.$$

Osserviamo subito una conseguenza importante: poiché a velocità più alte corrisponde energia cinetica maggiore, le molecole che evaporano sono in media le più energetiche. La loro partenza sottrae energia al liquido rimasto, che di conseguenza si raffredda. È il motivo fisico per cui l'evaporazione è un processo *endotermico* e per cui la traspirazione raffredda il corpo umano.

6.3 L'esperimento ideale e la definizione di tensione di vapore

6.3.1 Descrizione dell'esperimento

Per definire operativamente la tensione di vapore, immaginiamo un esperimento concettuale semplice. Prendiamo un recipiente chiuso – un bicchiere sigillato – e riempiamolo parzialmente di acqua. Facciamo in modo che l'aria al di sopra del liquido sia *aria secca*, cioè priva di qualunque molecola di vapore acqueo. All'interno del recipiente collochiamo uno strumento capace di misurare esclusivamente la *pressione parziale* del vapore acqueo nella fase aeriforme; possiamo immaginarlo come un sensore dotato di membrana selettiva, permeabile alle sole molecole d'acqua allo stato gassoso.

Ricordiamo che la pressione, dal punto di vista microscopico, nasce dalla collisione delle molecole contro le pareti: ogni urto trasferisce quantità di moto e, macroscopicamente, si traduce in una forza per unità di superficie. Se inizialmente non vi è alcuna molecola di vapore, non vi è alcun trasferimento di quantità di moto e lo strumento legge *zero*.

6.3.2 L'evoluzione verso l'equilibrio

Appena l'esperimento ha inizio, le molecole più energetiche del liquido cominciano a passare in fase vapore. Lo strumento comincia allora a registrare una pressione parziale non nulla, che cresce nel tempo: più molecole passano in fase gassosa, più numerosi sono gli urti sul sensore nell'unità di tempo, più alta è la lettura.

Man mano che la fase gassosa si popola, però, diventa sempre più probabile l'evento inverso: alcune molecole di vapore, dotate di componente di velocità diretta verso il basso, *rientrano* nella fase liquida (fenomeno

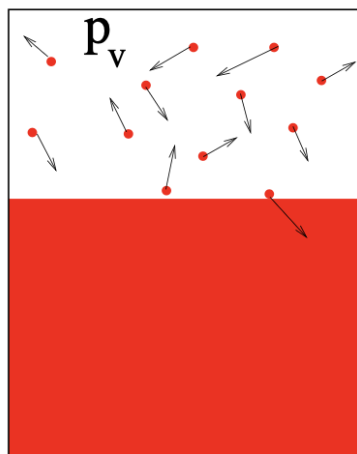


Figura 6.2. Schema dell'esperimento ideale. Un recipiente chiuso contiene liquido (in basso) e aria inizialmente secca (in alto). Il sensore con membrana selettiva misura solo la pressione parziale del vapore. All'inizio la lettura è nulla; a regime lo strumento misura la tensione di vapore p_v .

di condensazione). Si arriva così a un istante in cui, nell'unità di tempo, il numero di molecole che lasciano il liquido eguaglia il numero di molecole che vi rientrano.

Concetto chiave

Quando il flusso di molecole dalla fase liquida a quella gassosa eguaglia il flusso inverso, il sistema raggiunge un *equilibrio dinamico statisticamente stazionario*. Il numero medio di molecole in fase vapore resta costante, ma le singole molecole sono continuamente scambiate tra le due fasi. La pressione parziale letta dallo strumento diventa costante nel tempo: quel valore è la *tensione di vapore* p_v , o *pressione di vapore saturo*.

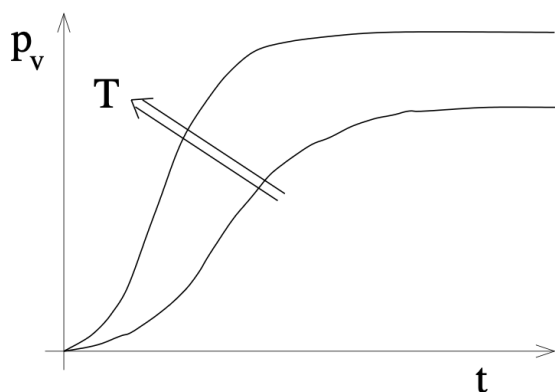


Figura 6.3. Andamento della pressione parziale del vapore in funzione del tempo. Partendo da zero (aria secca), la pressione cresce e satura asintoticamente al valore di equilibrio p_v , corrispondente alla tensione di vapore alla temperatura dell'esperimento.

La tensione di vapore misura dunque l'*attitudine* del liquido a passare in fase aeriforme. Un valore elevato di p_v indica un liquido molto volatile; un valore basso, un liquido poco volatile.

6.4 Dipendenza dal materiale

La tensione di vapore dipende in modo fondamentale dalla natura del liquido, perché la velocità di soglia $\bar{v}$ è determinata dall'intensità delle forze coesive: liquidi con legami intermolecolari deboli hanno soglia bassa e quindi tensione di vapore elevata, e viceversa.

È esperienza comune che esistano liquidi molto volatili, come la benzina o l'alcol, e liquidi poco volatili, come l'olio o il mercurio – quest'ultimo per fortuna, dato che i suoi vapori sono tossici. L'acqua occupa una posizione intermedia. La tabella 6.1 riporta la tensione di vapore di alcuni liquidi a una temperatura fissata di 20 °C ($T = 293,15$ K).

Tabella 6.1. Tensione di vapore di alcuni liquidi a $T = 20$ °C.

Liquido	p_v [Pa]
Acqua	2300
Alcol etilico	5830
Freon 113	37 900
Butano	220 000

Il confronto è istruttivo. Il Freon 113 – un composto della famiglia dei clorofluorocarburi – presenta una tensione di vapore di oltre dieci volte superiore a quella dell'acqua. Ma il caso più notevole è quello del butano.

Il caso del butano: ebollizione a temperatura ambiente

A 20 °C il butano ha una tensione di vapore di circa 220 000 Pa, valore *superiore* alla pressione atmosferica standard ($p_0 = 101\,325$ Pa). Poiché la sua tensione di vapore supera la pressione esterna, il butano non deve attendere che le molecole sfuggano dalla sola interfaccia: è in grado di generare zone di sola fase vapore – vere e proprie bolle – *direttamente all'interno* della massa liquida. In altre parole, il butano liquido a temperatura ambiente e pressione atmosferica è già in *ebollizione*. È questa la ragione per cui deve essere conservato in recipienti in pressione.

Questo esempio anticipa il legame profondo tra tensione di vapore, pressione esterna ed ebollizione, che formalizzeremo nella prossima sezione.

6.5 Dipendenza dalla temperatura

6.5.1 Interpretazione microscopica

Che la tensione di vapore cresca con la temperatura è una conseguenza diretta del modello microscopico. All'aumentare della temperatura, la distribuzione delle velocità molecolari si modifica: il massimo si sposta verso destra (le velocità tipiche aumentano), la curva si appiattisce e – aspetto decisivo – la *coda ad alta velocità si innalza*. Di conseguenza, la frazione di molecole con energia cinetica superiore alla soglia $\bar{v}$ aumenta, e con essa la tensione di vapore.

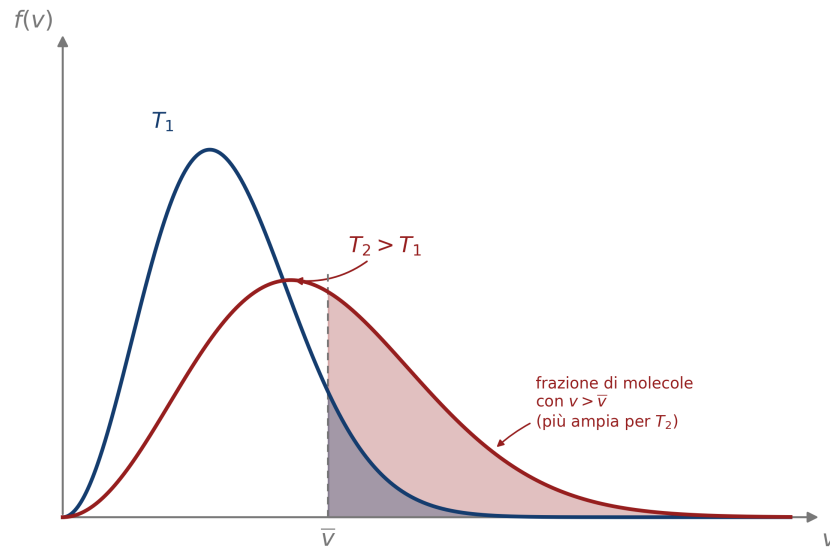


Figura 6.4. Effetto della temperatura sulla distribuzione delle velocità. A temperatura maggiore ($T_2 > T_1$) la curva si abbassa e si allarga, ma la coda oltre la velocità di soglia $\bar{v}$ si innalza: una frazione maggiore di molecole può passare in fase vapore, e la tensione di vapore cresce.

6.5.2 Dati sperimentali per l'acqua

Ripetendo l'esperimento ideale a temperature diverse si ottiene la dipendenza $p_v(T)$. La tabella 6.2 riporta valori misurati per l'acqua.

Tabella 6.2. Tensione di vapore dell'acqua in funzione della temperatura.

T [°C]	p_v [Pa]
10	1228
20	2300
30	4245
50	12340
70	31170
100	101330

La tabella conferma quantitativamente la tendenza prevista qualitativamente: la tensione di vapore cresce in modo marcato e non lineare con la temperatura. Il valore a 100 °C è particolarmente significativo, come vedremo tra poco: esso coincide con la pressione atmosferica standard.

6.5.3 Una formula per la tensione di vapore dell'acqua

Per l'acqua è possibile disporre di una relazione analitica che restituisce la tensione di vapore in funzione della temperatura. Una forma compatta e di uso pratico è la seguente:

$$p_v(T) = 610,8 \exp\left(\frac{17,27(T - 273,15)}{T - 35,85}\right),$$

dove la temperatura T è espressa in K e la pressione risultante p_v in Pa.

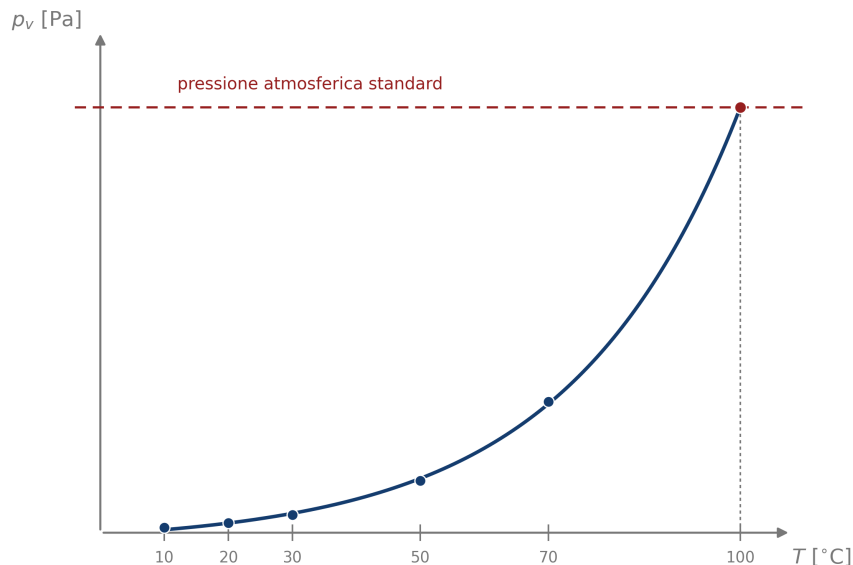


Figura 6.5. Curva della tensione di vapore dell'acqua in funzione della temperatura, costruita sui dati della tabella 6.2. L'andamento è crescente e marcatamente non lineare (di tipo esponenziale). La linea orizzontale tratteggiata indica la pressione atmosferica standard, intersecata a 100 °C.

Approfondimento

La relazione precedente è una particolareggiata, per l'acqua, di una legge più generale nota come *equazione di Antoine*, che fornisce il logaritmo della tensione di vapore in funzione della temperatura attraverso pochi coefficienti da tarare sperimentalmente. Fissati tali coefficienti su un certo numero di punti sperimentali (tipicamente a 10, 30, 50 e 70 °C), la formula riproduce con buona approssimazione i valori a tutte le altre temperature; ad esempio a 100 °C restituisce un valore molto prossimo alla pressione atmosferica standard.

Esempio

Verifichiamo la formula a $T = 20$ °C, cioè $T = 293,15$ K. L'esponente vale

$$\frac{17,27 \cdot (293,15 - 273,15)}{293,15 - 35,85} = \frac{17,27 \cdot 20}{257,30} = \frac{345,4}{257,30} \approx 1,342.$$

Quindi

$$p_v \approx 610,8 \cdot e^{1,342} \approx 610,8 \cdot 3,827 \approx 2338 \text{ Pa},$$

in ottimo accordo con il valore tabulato di circa 2300 Pa.

6.6 Ebollizione: quando la tensione di vapore eguaglia la pressione esterna

Abbiamo distinto finora due modalità con cui un liquido passa in fase gassosa: l'*evaporazione*, che avviene alla sola interfaccia liquido–gas ed è possibile a qualunque temperatura, e l'*ebollizione*, in cui si formano bolle di vapore *all'interno* della massa liquida. La condizione che distingue le due modalità è precisa.

Concetto chiave

Un liquido entra in *ebollizione* quando la sua tensione di vapore $p_v(T)$ eguaglia la pressione esterna p_0 agente sul liquido:

$$p_v(T) = p_0$$

Solo in questa condizione una bolla di vapore che si formi nel seno del liquido può sostenersi contro la pressione circostante e non collassare immediatamente.

Da questa condizione discende un fatto di grande importanza concettuale: la temperatura di ebollizione *non è una costante universale*, ma dipende dalla pressione esterna. L'acqua bolle a 100 °C soltanto perché a quella temperatura la sua tensione di vapore eguaglia la pressione atmosferica standard di 101 325 Pa. Se la pressione esterna cambia, cambia anche la temperatura di ebollizione.

Cucinare in alta montagna

In quota la pressione atmosferica è inferiore a quella al livello del mare. Poiché l'acqua bolle quando $p_v(T) = p_0$, e p_0 è più basso, la tensione di vapore eguaglia la pressione esterna a una temperatura inferiore a 100 °C: a circa 3000 m di quota l'acqua bolle intorno a 90 °C. Cuocere la pasta diventa problematico, perché l'acqua – termostata dall'ebollizione a temperatura più bassa – non fornisce calore sufficiente e la pasta perde consistenza prima di cuocere correttamente.

6.7 Applicazioni tecnologiche del controllo dell'ebollizione

Il legame $p_v(T) = p_0$ apre la strada a numerose applicazioni in cui si *anticipa* o si *ritarda* l'ebollizione agendo sulla pressione.

6.7.1 La pentola a pressione

La pentola a pressione è un recipiente sigillato dotato di una valvola tarata. Quando il liquido raggiunge 100 °C inizierebbe a bollire, ma il vapore prodotto non può sfuggire dal recipiente sigillato: la pressione interna cresce e supera la pressione atmosferica. Poiché ora la pressione esterna agente sul liquido è maggiore, l'ebollizione viene *ritardata* a temperature superiori.

La funzione della valvola

Senza un meccanismo di regolazione, la pressione interna potrebbe crescere fino a valori pericolosi, con rischio di esplosione. La valvola tarata risolve il problema: quando la pressione raggiunge il valore di taratura, la valvola si apre e scarica il vapore in eccesso, stabilizzando la pressione interna. La taratura tipica limita la pressione a circa 2 bar.

A 2 bar la tensione di vapore dell'acqua eguaglia la pressione interna a circa 130 °C. Il vantaggio è che la cottura non avviene più a 100 °C, ma a 130 °C: la maggiore temperatura accelera notevolmente i processi di cottura. I legumi, che in acqua a pressione ambiente richiedono un'ora e mezza o due ore, si cuociono in pentola a pressione in circa venti minuti.

6.7.2 I sistemi di raffreddamento pressurizzati

Un principio analogo si applica ai circuiti di raffreddamento, per esempio nelle vetture da competizione. Siggillando il circuito, il liquido refrigerante può raggiungere temperature superiori a $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ senza entrare in ebollizione, perché la pressione interna elevata alza la temperatura di ebollizione. In alternativa, o in aggiunta, si impiegano additivi che abbassano chimicamente la tensione di vapore del liquido.

Il vantaggio è di natura termica: un liquido più caldo, giunto allo scambiatore di calore, presenta una differenza di temperatura maggiore rispetto all'aria esterna, e quindi cede calore con maggiore intensità per unità di superficie. Ciò consente di ridurre la superficie dello scambiatore – e quindi la resistenza aerodinamica associata – a parità di calore smaltito, aspetto critico in un contesto in cui ogni superficie esposta all'avanzamento genera resistenza.

6.7.3 La liofilizzazione

In altre applicazioni interessa invece *abbassare* la temperatura di ebollizione. È il caso della liofilizzazione degli alimenti. Un cibo liofilizzato è un cibo cotto e preparato a cui è stata sottratta tutta l'acqua, in modo che resti la sola parte solida; per l'uso è sufficiente reidratarlo. La tecnica è impiegata per il caffè e per molti alimenti, in particolare nelle missioni spaziali, dove trasportare acqua sarebbe proibitivo.

L'obiettivo è rimuovere l'acqua per evaporazione senza portare il cibo in ebollizione, per non comprometterne le proprietà organolettiche. A tal fine il cibo viene posto in una camera a vuoto: una pompa aspira l'aria e abbassa la pressione. Poiché il liquido bolle a temperatura tanto più bassa quanto minore è la pressione esterna, si può far evaporare l'acqua a temperature miti. Dai dati della tabella 6.2, portando la pressione a circa 4245 Pa l'acqua bolle già a $30\text{ }^{\circ}\text{C}$; a 1228 Pa bollirebbe a $10\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Approfondimento

Spingendo ulteriormente il processo, il caffè viene prima congelato e poi posto sotto vuoto spinto: in queste condizioni il ghiaccio *sublima*, passando direttamente dalla fase solida a quella aeriforme senza attraversare la fase liquida. Rimossa tutta l'acqua, resta il solo prodotto disidratato, reidratabile al momento dell'uso.

6.8 La cavitazione

6.8.1 Il legame con la fluidodinamica

Arriviamo ora al fenomeno di maggiore interesse per l'ingegneria delle macchine a fluido. Finora abbiamo variato la pressione esterna per via meccanica – con un coperchio, una valvola, una pompa da vuoto. Ma la pressione in un fluido può variare anche *per effetto del moto stesso del fluido*.

Consideriamo un condotto a sezione variabile in cui scorre un liquido. Per la conservazione della portata, dove la sezione si restringe la velocità deve aumentare. E per il teorema di Bernoulli, dove la velocità aumenta la pressione diminuisce. Scriviamo il teorema di Bernoulli tra due sezioni di un condotto orizzontale, trascurando le perdite:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2.$$

Se nella sezione 2 la velocità V_2 è maggiore di V_1 , allora necessariamente $p_2 < p_1$: la pressione statica cala.

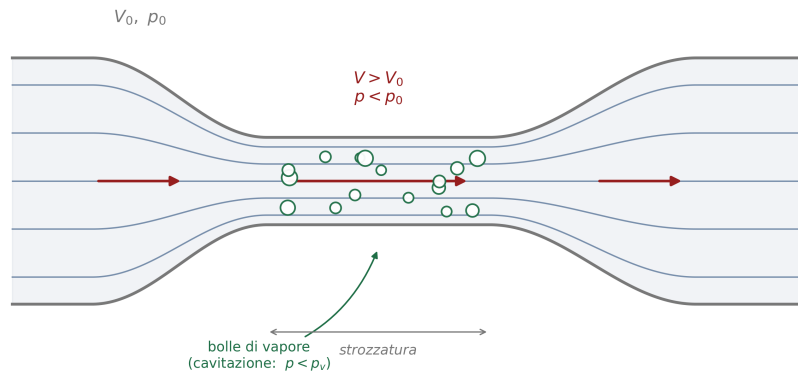


Figura 6.6. Condotto a sezione variabile (tipo Venturi). Nella strozzatura la velocità del fluido aumenta e, per il teorema di Bernoulli, la pressione statica diminuisce. Se la pressione locale scende al di sotto della tensione di vapore p_v , il liquido evapora localmente formando bolle di vapore: è la cavitazione.

6.8.2 Innesco della cavitazione

Tanto più si restringe la sezione, tanto più la velocità cresce e la pressione scende. Si può allora raggiungere una condizione in cui la pressione locale scende *al di sotto* della tensione di vapore del liquido:

$$p_{\text{locale}} < p_v(T).$$

Concetto chiave

Quando in una regione di un liquido in moto la pressione statica scende al di sotto della tensione di vapore alla temperatura del liquido, il liquido *bolle localmente*, formando sacche di vapore. Questo fenomeno di ebollizione indotta dalla depressione dinamica prende il nome di *cavitazione*.

La cavitazione è, in sostanza, un'ebollizione provocata non da un aumento di temperatura ma da una caduta di pressione. Il liquido si muove così rapidamente in certi punti che, localmente, le molecole non riescono più a riempire tutto lo spazio disponibile: si formano cavità occupate da vapore.

6.8.3 Il danno da cavitazione

Dal punto di vista fluidodinamico la cavitazione è un fenomeno affascinante; dal punto di vista tecnologico è invece assai temuto. La sacca di vapore permane soltanto finché la pressione locale resta bassa. Non appena il fluido rallenta – per esempio a valle della strozzatura – e la pressione risale a valori normali, la sacca di vapore non può più sostenersi e *implode* violentemente.

Perché la cavitazione danneggia le strutture

L'implosione delle bolle di vapore avviene con generazione di *onde d'urto*. Queste hanno due effetti dannosi. Il primo è il *rumore*: un organo in cui avviene cavitazione è sorgente di intenso rumore. Il secondo, più grave, è l'*erosione*: le onde di pressione generate dall'implosione martellano ripetutamente le superfici solide adiacenti, asportando materiale. Le eliche delle navi e le palette delle turbine ne sono le vittime classiche: la loro superficie viene erosa e richiede periodica sostituzione.

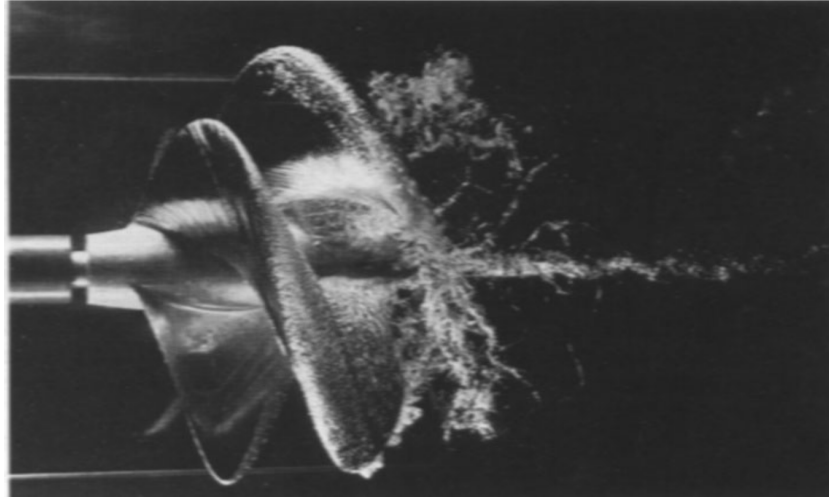


Figura 6.7. Erosione della superficie di una pala di elica navale prodotta dalla cavitazione. L'implosione ripetuta delle bolle di vapore in prossimità della superficie asporta progressivamente materiale.

La cavitazione nelle pompe dei propulsori a razzo

Il fenomeno è particolarmente critico nelle turbopompe che alimentano i motori a razzo a propellente liquido. All'aspirazione della pompa la pressione è inferiore a quella nel serbatoio; applicando Bernoulli tra serbatoio (velocità trascurabile) e sezione di aspirazione si ha

$$p_{\text{asp}} \simeq p_{\text{serb}} - \frac{1}{2} \rho V_{\text{asp}}^2.$$

Se p_{asp} scende al di sotto della tensione di vapore del propellente alla sua temperatura, si formano bolle di vapore che, trascinate verso stadi a pressione più alta, implodono generando forti onde di pressione. Per prevenire la cavitazione si effettua una leggera pressurizzazione dei serbatoi.

6.8.4 Una nota storica: il limite dei dieci metri

La cavitazione, sebbene battezzata con questo nome solo in epoca moderna, era in un certo senso già nota. La prima traccia scritta di un fenomeno a essa riconducibile riguarda un fatto ben noto ai pozzi antichi: nell'aspirare acqua da un pozzo, per quanto efficiente sia la pompa, se la profondità da cui si aspira supera i circa 10 m la pompa cessa di funzionare.

La ragione è comprensibile. Sulla superficie libera dell'acqua nel pozzo agisce la pressione atmosferica p_0 . Perché l'acqua salga nel tubo fino alla pompa, la pressione alla sommità deve ridursi di una quantità pari al peso della colonna d'acqua per unità di sezione:

$$p_{\text{sommità}} = p_0 - \rho g h.$$

Esempio

Calcoliamo la depressione necessaria per sollevare acqua di $h = 10$ m. Con $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ e

$$g \approx 10 \text{ m/s}^2:$$

$$\rho g h = 1000 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000 \text{ Pa},$$

prossima all'intera pressione atmosferica ($\approx 101\,325 \text{ Pa}$). Per sollevare l'acqua oltre i dieci metri (più precisamente circa 10,33 m) la pressione alla sommità dovrebbe scendere quasi a zero, e comunque al di sotto della tensione di vapore dell'acqua: invece di sollevare il liquido, la pompa non fa che farlo *cavitare*.

L'interpretazione classica è tanto semplice quanto efficace: il peso della colonna d'acqua è tale che la colonna stessa si *spezza*. Il fenomeno può essere paragonato a quello di una fune molto lunga lasciata pendere da grande altezza: la fune resiste finché il peso proprio della parte pendente non supera la sua resistenza a rottura. Oltre quel limite, cede.

6.9 Sintesi

Riassumiamo i concetti fondamentali di questo capitolo:

- La **tensione di vapore** (o pressione di vapore saturo) p_v è la pressione parziale del vapore in equilibrio dinamico con il proprio liquido a una data temperatura. Misura la volatilità del liquido.
- Il fenomeno ha origine microscopica nella **coda ad alta velocità** della distribuzione statistica delle velocità molecolari: le molecole più energetiche sfuggono alla fase liquida.
- p_v dipende dalla **natura del liquido** (forze coesive) e cresce in modo marcato con la **temperatura**.
- L'**ebollizione** avviene quando $p_v(T) = p_0$; la temperatura di ebollizione dipende quindi dalla pressione esterna.
- Controllando la pressione si anticipa o si ritarda l'ebollizione: **pentola a pressione**, sistemi di raffreddamento pressurizzati, **liofilizzazione**.
- La **cavitazione** è l'ebollizione indotta dalla caduta di pressione dinamica ($p_{\text{locale}} < p_v$) in un fluido in moto. L'implosione delle bolle genera onde d'urto che erodono eliche, pompe e turbine.

La tensione superficiale

7.1 Introduzione

Questo capitolo chiude la rassegna delle proprietà dei fluidi. Dopo aver studiato la densità, la comprimibilità, la viscosità, la tensione di vapore e l'espansione termica, ci occupiamo qui dell'ultima proprietà: la *tensione superficiale*. Come la tensione di vapore, essa non appartiene a tutti i fluidi, ma è una prerogativa dei soli *liquidi*; e, a differenza delle altre proprietà, si manifesta soltanto là dove esiste un'*interfaccia*.

Il filo conduttore della trattazione è un'idea tanto semplice quanto potente: in prossimità di un'interfaccia il liquido si comporta come se fosse ricoperto da una *membrana elastica* tesa. Da questa immagine, resa quantitativa, discendono la definizione operativa del coefficiente di tensione superficiale, la legge di Laplace per le superfici curve, il fenomeno della capillarità e la statica dei punti di contatto fra più materiali. Vedremo che gli stessi strumenti che descrivono una bolla di sapone permettono di dimensionare un recipiente in pressione, spiegano perché il sapone lava meglio dell'acqua calda, e rendono conto di come la linfa risalga il tronco di un albero.

Convenzioni di notazione

Indicheremo con σ il coefficiente di tensione superficiale (N/m), con Δp una differenza di pressione, con R_1, R_2 i raggi di curvatura principali di una superficie e con R_m il raggio di curvatura medio, con θ l'angolo di contatto, con ρ la densità e con g l'accelerazione di gravità. Il simbolo σ è tradizionale per la tensione superficiale: nel paragrafo sul recipiente in pressione lo sforzo ammissibile del materiale sarà indicato con σ_{amm} e la tensione di membrana per unità di lunghezza con N , per evitare ogni ambiguità.

7.2 Che cos'è la tensione superficiale

Immaginiamo un liquido a contatto con un altro mezzo. Le combinazioni tipiche sono acqua-aria, acqua-olio, mercurio-alcool: la cosa essenziale è che sia presente un'*interfaccia*. Un'interfaccia esiste o fra un liquido e un gas, oppure fra due liquidi *immiscibili* fra loro (l'acqua e l'olio, per esempio, non si mescolano; l'acqua e l'alcool sì, e fra loro non c'è interfaccia).

Ciò che vogliamo spiegare e quantificare è il motivo per cui questa interfaccia non si limita a *separare* due materiali diversi, ma si comporta come una membrana: una pellicola elastica capace di generare forze di tensione. È un'osservazione comune. Se depositiamo con delicatezza una graffetta metallica sulla superficie dell'acqua di un bicchiere, essa può *galleggiare*, nonostante l'acciaio abbia densità molto maggiore dell'acqua e dovrebbe quindi affondare: purché non si laceri la pellicola superficiale, l'oggetto resta adagiato. Sullo stesso principio alcuni insetti camminano sulla superficie degli stagni, come se si muovessero su un tappeto elastico.

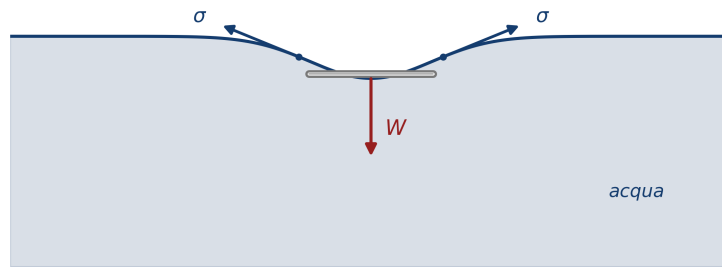


Figura 7.1. Una graffetta d'acciaio adagiata sulla superficie dell'acqua: la "pellicola" superficiale sostiene un corpo più denso del liquido. Lo stesso meccanismo permette ad alcuni insetti di camminare sull'acqua.

Ci proponiamo di rispondere, nell'ordine, a tre domande: *perché* nasce questa membrana (origine microscopica); *come* la si misura (definizione operativa); *quali* conseguenze macroscopiche ne discendono (legge di Laplace, capillarità, statica dei punti tripli).

7.3 Origine microscopica

7.3.1 Richiamo: la distanza di equilibrio molecolare

I liquidi sono costituiti da molecole prive di legami *permanenti*: i legami si rompono e si riformano di continuo. Ciò che conta, ai fini del nostro discorso, è che mediamente le molecole si dispongono a una *distanza di equilibrio* r_0 , quella per cui la forza di interazione mutua si annulla. Questa distanza corrisponde al minimo del potenziale di Lennard-Jones, già incontrato studiando la coesione dei fluidi.

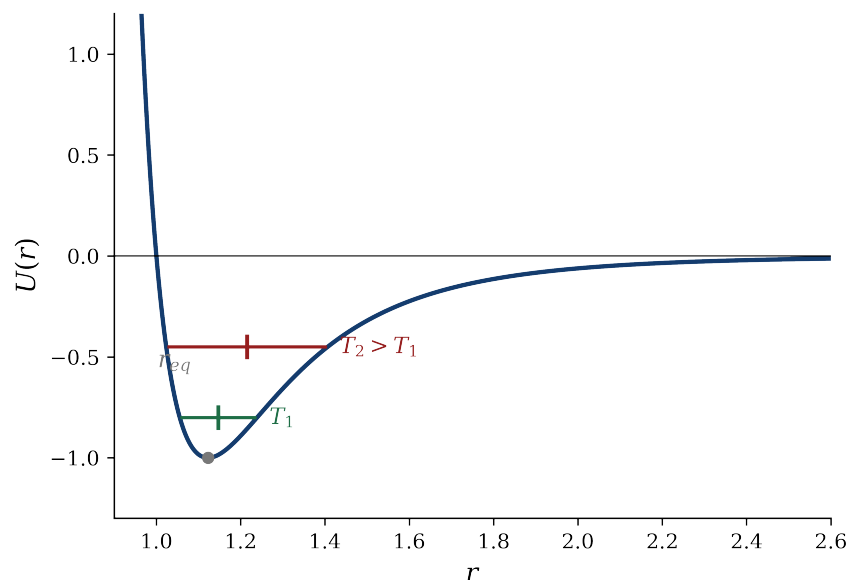


Figura 7.2. Potenziale (o forza) di interazione fra due molecole in funzione della distanza r . Alla distanza di equilibrio r_0 la forza è nulla; per $r > r_0$ nascono forze attrattive, per $r < r_0$ forze repulsive. La configurazione $r = r_0$ è stabile.

La proprietà fondamentale di r_0 è la sua *stabilità*: se allontaniamo due molecole al di là di r_0 nascono forze

attrattive che tendono a riavvicinarle; se le comprimiamo al di sotto di r_0 nascono forze repulsive che tendono a respingerle. È il classico comportamento di una molla attorno alla sua posizione di riposo.

Nota sul simbolo della distanza di equilibrio

Per la distanza di equilibrio intermolecolare adottiamo il simbolo r_0 , coerente con la notazione standard del potenziale di Lennard–Jones. Evitiamo di proposito il simbolo λ , che in questa trattazione è riservato al *libero cammino medio* molecolare (introdotto nel capitolo sull'ipotesi del continuo): mantenere distinti i due simboli previene ogni collisione di notazione.

7.3.2 Molecola interna e molecola all'interfaccia

Consideriamo dapprima una molecola immersa *all'interno* del liquido. Essa è circondata, in media, da molecole tutte alla stessa distanza r_0 : la risultante delle forze di coesione è quindi nulla. Se la spostiamo di poco in una direzione qualunque, passiamo semplicemente da una configurazione a risultante nulla a un'altra configurazione a risultante nulla: le distanze con alcune vicine aumentano, con altre diminuiscono, e gli effetti si compensano. Per questo motivo, *all'interno del liquido le molecole si spostano senza incontrare resistenze apprezzabili* – il che, en passant, è la ragione per cui i liquidi scorrono.

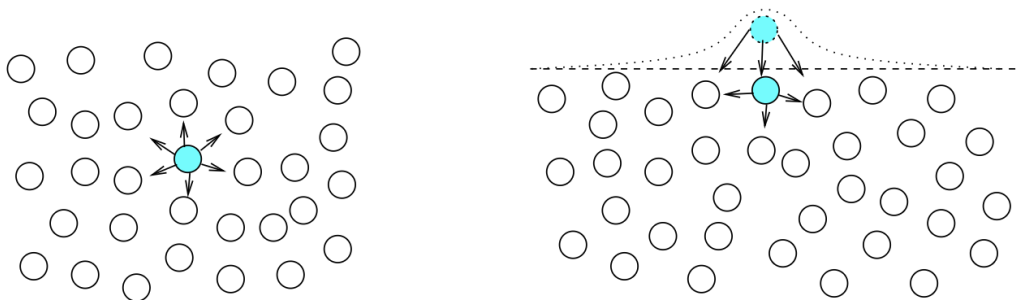


Figura 7.3. Forze di coesione su una molecola interna (risultante nulla, a sinistra) e su una molecola all'interfaccia (risultante non nulla, diretta verso l'interno, a destra). La linea tratteggiata indica la superficie deformata dopo lo spostamento verso l'alto di una molecola.

La situazione cambia radicalmente per una molecola posta *all'interfaccia*. Nella configurazione indisturbata anch'essa si trova a distanza r_0 dalle vicine, e la risultante è nulla. Immaginiamo però – con una ideale pinzetta nanometrica – di afferrare questa singola molecola e di tirarla verso l'alto, verso il gas. La sua distanza da tutte le vicine *aumenta*: passiamo cioè sul ramo $r > r_0$, dove nascono forze *attrattive*. Queste forze richiamano verso l'alto le molecole adiacenti, che a loro volta, essendosi spostate, alterano le distanze con le loro vicine, e così via a catena.

Il risultato è notevole: pur avendo perturbato *una sola* molecola, abbiamo innalzato *un intero tratto di superficie* nell'intorno del punto. Un ragionamento identico, con le distanze che si riducono e forze repulsive che si attivano, vale se tentiamo di spingere la molecola verso il basso. In entrambi i casi la superficie risponde *collettivamente*.

7.3.3 La superficie come membrana

Un comportamento di questo tipo – una perturbazione locale che coinvolge tutta la regione circostante – è esattamente il comportamento di una *membrana*. Se tendiamo la membrana di gomma di un guanto da cucina e la spingiamo con un dito, non deformiamo il solo punto di contatto ma tutta la porzione di membrana attorno ad esso.

Definizione strutturale di membrana

Dal punto di vista della meccanica delle strutture una *membrana* è un elemento capace di esercitare *forze di tensione* nel proprio piano, ma *non* momenti flettenti. Se si accartoccia una membrana o la si piega, essa non oppone reazioni apprezzabili: per attivare una rigidità flessionale occorrerebbe piegarla su un raggio di curvatura dello stesso ordine di grandezza del suo spessore, cosa che di norma non accade. Questa è una nozione familiare a chi studia le *Costruzioni Aeronautiche*: rivestimenti, teli, paracadute e in prima approssimazione i pannelli sottili in pressione lavorano proprio “a membrana”.

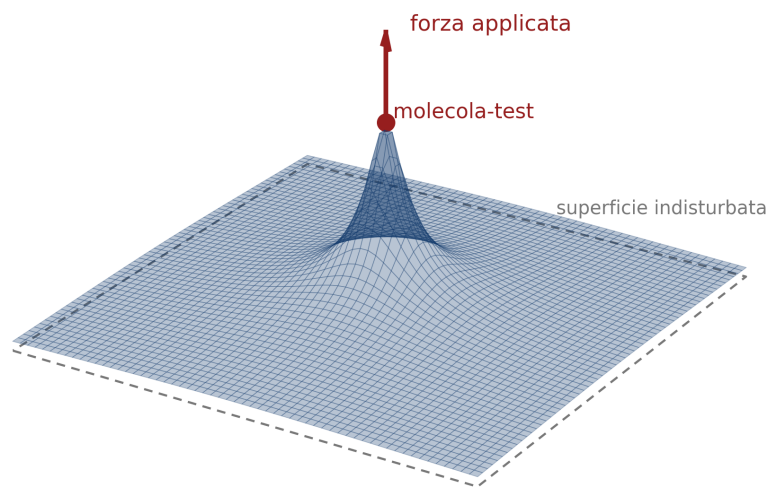


Figura 7.4. Analogia con la membrana: tirando verso l'alto un solo punto (la molecola-test) si solleva l'intera superficie nell'intorno, perché la membrana trasmette le sole forze di tensione.

7.4 Definizione operativa del coefficiente σ

La descrizione fenomenologica va tradotta in una *grandezza fisica*, cioè in una quantità che si possa misurare e a cui si possano attribuire unità di misura. Serve una *definizione operativa*.

Consideriamo una superficie sottoposta a tensione: per fissare le idee, la membrana di un palloncino gonfio. Vogliamo misurare l'intensità della tensione senza alterare lo stato del sistema. Eseguiamo idealmente il seguente esperimento: pratichiamo un *taglio* nella membrana e, man mano che lo apriamo, applichiamo lungo i due lembi una distribuzione di forze elementari, uguali e opposte, tali da tenere i lembi accostati. In questo modo tagliamo la superficie senza che il palloncino si sgonfi.

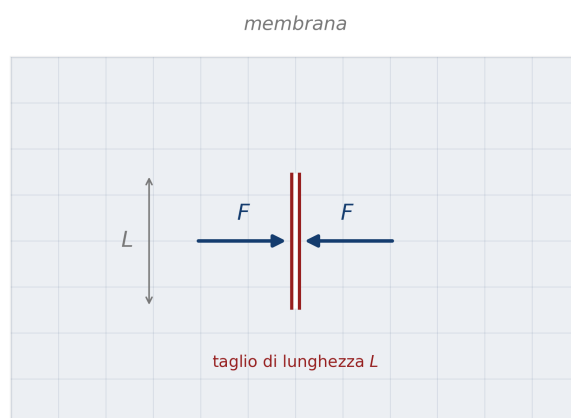


Figura 7.5. Definizione operativa di σ : un taglio di lunghezza L praticato nella membrana viene mantenuto chiuso da due risultanti F , uguali e opposte, tangenti alla superficie. Il rapporto F/L definisce la tensione superficiale.

La somma di tutte le forze elementari dà, da ciascuna parte del taglio, una risultante di modulo F . Se il taglio ha lunghezza L , definiamo la tensione superficiale come il rapporto

$$\sigma = \frac{F}{L}$$

cioè come *forza per unità di lunghezza* del taglio. Nel Sistema Internazionale σ si misura dunque in newton su metro:

$$[\sigma] = \text{N/m}.$$

Una tensione “di linea”, non “di superficie”

Nonostante il nome, la tensione superficiale non è uno sforzo (N/m^2) ma una densità *lineare* di forza (N/m): è la forza che l'interfaccia esercita per ogni metro di linea che la attraversa. Equivalentemente, σ è l'energia necessaria per creare un'unità di area di nuova interfaccia ($\text{J/m}^2 = \text{N/m}$): allargare una superficie significa portare all'interfaccia molecole che prima erano interne, spendendo lavoro. Le due letture – forza per unità di linea ed energia per unità di area – sono numericamente identiche.

Poiché la membrana trasmette solo tensioni, la forza F è *tangente* alla superficie in ogni punto del taglio.

Questa proprietà – la tangenza – è la chiave che utilizzeremo ripetutamente nel seguito per proiettare le forze e ricavare le relazioni di equilibrio.

7.5 La legge di Laplace

Abbiamo visto che spostando una molecola all'interfaccia nasce una forza *normale* alla superficie. Ci aspettiamo quindi che, quando l'interfaccia è *curva*, le tensioni tangenti diano una risultante normale non nulla, e che questa debba essere bilanciata da una differenza di pressione fra i due lati. Rendiamo quantitativa questa intuizione: è il contenuto della *legge di Laplace*.

7.5.1 Un elemento di membrana curva

Isoliamo un elemento infinitesimo di superficie curva, delimitato da due coppie di lati ortogonali. Chiamiamo dl_1 e dl_2 le lunghezze dei lati e R_1, R_2 i corrispondenti raggi di curvatura nelle due direzioni. In generale i due raggi sono diversi: si pensi a un palloncino ovoidale, più curvo in una direzione che nell'altra.

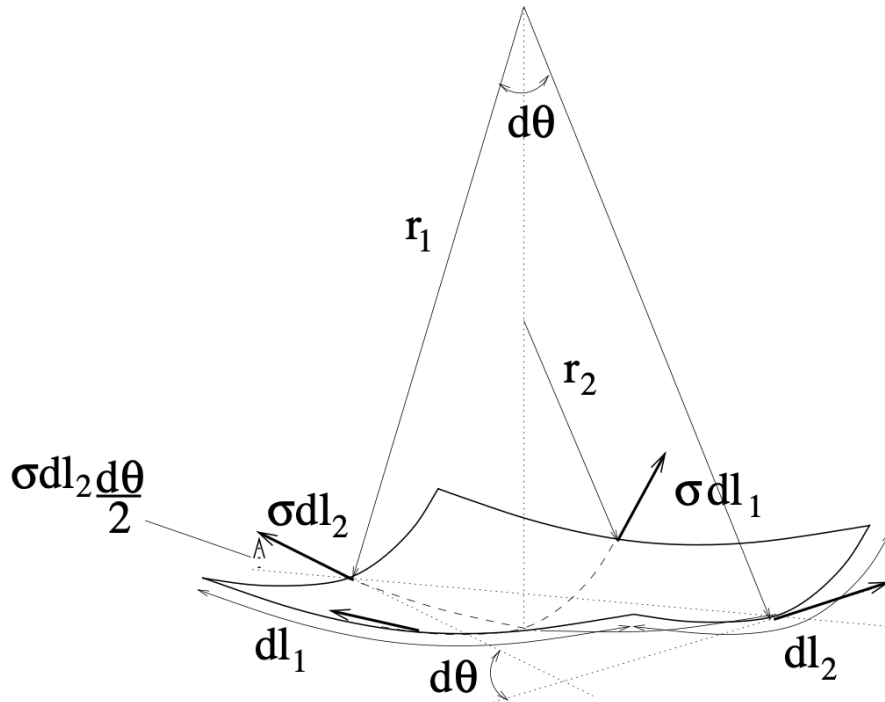


Figura 7.6. Elemento infinitesimo di superficie curva con lati dl_1 , dl_2 e raggi di curvatura R_1, R_2 . Le forze di tensione σdl sono tangenti alla superficie; le loro componenti normali (in verticale) si sommano e puntano verso il centro di curvatura.

Consideriamo i due lati di lunghezza dl_2 , opposti l'uno all'altro nella direzione di curvatura R_1 . Su ciascuno agisce una forza di tensione di modulo

$$dF = \sigma dl_2,$$

tangente alla superficie. Poiché la superficie è curva, questa forza forma con l'orizzontale un piccolo angolo. Detto $2 d\theta$ l'angolo al centro sotteso dall'arco dl_1 , ciascun lato è inclinato di $d\theta$, e la sua *componente normale*

(diretta verso il centro di curvatura) vale

$$dF_{\perp} = \sigma \, dl_2 \sin(d\theta) \simeq \sigma \, dl_2 \, d\theta,$$

avendo usato $\sin(d\theta) \simeq d\theta$ per angoli infinitesimi. Le componenti orizzontali dei due lati opposti sono uguali e contrarie e si elidono; le componenti normali, invece, *si sommano*. Il contributo dei due lati dl_2 è dunque $2\sigma \, dl_2 \, d\theta$. Resta da esprimere $d\theta$. Per definizione di raggio di curvatura, l'arco dl_1 è legato all'angolo al centro da $dl_1 = R_1 (2 \, d\theta)$, da cui $d\theta = dl_1/(2R_1)$. Sostituendo:

$$dF_{\perp,1} = 2\sigma \, dl_2 \cdot \frac{dl_1}{2R_1} = \sigma \frac{dl_1 \, dl_2}{R_1}.$$

Ripetendo il ragionamento per l'altra coppia di lati, quelli di lunghezza dl_1 curvati con raggio R_2 , si ottiene un contributo analogo $dF_{\perp,2} = \sigma \, dl_1 \, dl_2/R_2$. Entrambe le risultanti puntano verso il centro di curvatura. La risultante normale totale delle forze di tensione superficiale sull'elemento è pertanto

$$dF_{\perp} = \sigma \, dl_1 \, dl_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

7.5.2 Il bilancio con la pressione

La seconda legge di Newton incombe su ogni sistema. In condizioni statiche – il palloncino appoggiato sul tavolo non si muove – la risultante normale delle tensioni, che tende a tirare l'elemento verso il centro di curvatura, deve essere equilibrata da una forza uguale e contraria. Questa forza non può che essere fornita da una *differenza di pressione* $\Delta p = p_i - p_0$ fra l'interno e l'esterno, che agisce sull'area $dl_1 \, dl_2$ dell'elemento:

$$\Delta p \, dl_1 \, dl_2 = \sigma \, dl_1 \, dl_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Poiché entrambe le forze sono forze di superficie, la dipendenza dall'area $dl_1 \, dl_2$ è identica e si semplifica. Il risultato è indipendente dalla forma e dalle dimensioni dello specifico elemento scelto, e vale

$$\boxed{\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \quad (\text{legge di Laplace}).$$

La pressione è *maggiore dal lato verso cui la superficie volge la concavità*, cioè dal lato che contiene i centri di curvatura. Per una goccia o una bolla è il lato *interno*: la pressione dentro è maggiore che fuori.

Da quale lato è maggiore la pressione?

La formulazione “la pressione è maggiore dal lato convesso”, che compare in alcune dispense, si presta a equivoci. Il criterio univoco è: *la pressione è maggiore sul lato concavo dell'interfaccia*, ossia dal lato che contiene i centri di curvatura. Per una bolla sferica ciò significa che $p_i > p_0$, come conferma il segno positivo di Δp nella legge di Laplace.

Questa relazione è versatile. Nota la geometria (i due raggi) e la tensione σ , dà la differenza di pressione necessaria all'equilibrio; note Δp e la geometria, dà σ ; note σ e Δp , dà la curvatura di equilibrio.

7.5.3 Il raggio di curvatura medio: un invariante geometrico

La legge di Laplace ha un aspetto in apparenza inquietante: contiene *due* raggi di curvatura, R_1 e R_2 , che dipendono dalle direzioni scelte per misurarli. Consideriamo una superficie a forma di canaletta (il profilo di una grondaia): lungo la direzione della canaletta il raggio di curvatura è finito, lungo la direzione ortogonale la superficie è piana e il raggio è infinito, così che $1/R_2 \rightarrow 0$ e resta $\Delta p = \sigma/R_1$. Ma se scegliessimo due assi ruotati di 45° , troveremmo due curvature diverse da R_1 e da R_2 . Come può un fenomeno fisico dipendere dalla scelta arbitraria del sistema di riferimento?

La preoccupazione è solo apparente. Mentre R_1 e R_2 dipendono dagli assi scelti, la loro combinazione

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R_m}$$

è un *invariante* della superficie: definisce il *raggio di curvatura medio* R_m , che dipende solo dalla forma locale della superficie e non dal riferimento. La legge di Laplace si può quindi riscrivere nella forma compatta $\Delta p = 2\sigma/R_m$, e questo torna con l'intuizione fisica: la differenza di pressione all'interfaccia non può dipendere da come scegliamo di descriverla. Per la sfera la questione non si pone, perché il raggio di curvatura è unico ($R_1 = R_2 = R = R_m$) e si ha semplicemente $\Delta p = 2\sigma/R$.

7.6 Applicazioni della legge di Laplace

7.6.1 Recipiente sferico in pressione

La legge di Laplace non è confinata alla fluidodinamica: descrive l'equilibrio di qualunque membrana tesa da una differenza di pressione. Consideriamo un recipiente in pressione di forma sferica di raggio R , con pressione interna p_i ed esterna p_0 . La parete lavora come una membrana e la "tensione" richiesta al materiale è proprio la tensione di membrana per unità di lunghezza N che compare nella legge di Laplace scritta come $\Delta p = 2N/R$, da cui

$$N = \frac{\Delta p R}{2}.$$

Bombola da sub: tensione di parete

Le bombole per immersione vengono tipicamente caricate a $p_i = 200$ bar. Assumiamo, per semplicità di calcolo, forma sferica di raggio $R = 0,3$ m; la pressione esterna è quella atmosferica, dunque

$$\Delta p = p_i - p_0 \simeq 199 \text{ bar} = 1,99 \times 10^7 \text{ Pa}.$$

La tensione di membrana per unità di lunghezza vale

$$N = \frac{\Delta p R}{2} = \frac{1,99 \times 10^7 \text{ Pa} \cdot 0,3 \text{ m}}{2} \simeq 2,99 \times 10^6 \text{ N/m}.$$

Scelto il materiale (per esempio l'acciaio) e detto σ_{amm} il suo sforzo ammissibile, lo spessore t della parete si dimensiona imponendo che lo sforzo effettivo N/t non superi σ_{amm} :

$$\frac{N}{t} \leq \sigma_{\text{amm}} \quad \Rightarrow \quad t \geq \frac{N}{\sigma_{\text{amm}}} = \frac{\Delta p R}{2 \sigma_{\text{amm}}}.$$

Viceversa, fissato lo spessore per ragioni costruttive, si sceglie il materiale in modo che lo sforzo resti sotto quello ammissibile.

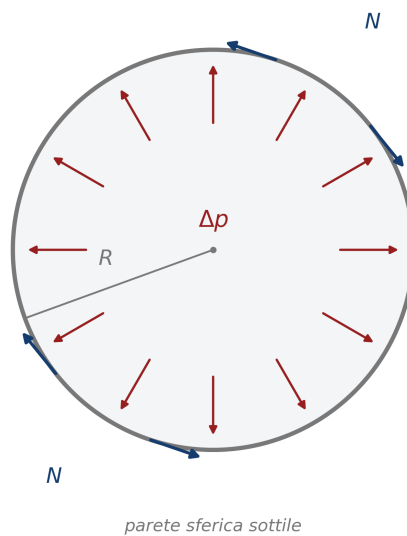


Figura 7.7. Recipiente sferico in pressione: la parete lavora “a membrana”. La sovrappressione interna Δp è equilibrata dalla tensione di parete $N = \Delta p R/2$.

Un ponte con le Costruzioni Aeronautiche

La relazione $N = \Delta p R/2$ è la *formula di Mariotte* per il guscio sferico sottile: la stessa che, nel guscio cilindrico, dà la tensione circonferenziale $N_\varphi = \Delta p R$ e quella longitudinale $N_x = \Delta p R/2$. È lo strumento con cui si stima, in prima approssimazione, lo stato di sforzo della *fusoliera pressurizzata* di un velivolo da trasporto: la cabina è un recipiente in pressione, e la differenza fra pressione di cabina e pressione esterna in quota genera negli elementi del rivestimento proprio tensioni di membrana di questo tipo.

7.6.2 Bolla d'aria in un liquido e bolla di sapone

Applichiamo la legge di Laplace a una *bolla d'aria* sferica immersa in un liquido. L'interfaccia è *una sola* (liquido-gas) e vale $p_i = p_0 + 2\sigma/R$.

La bollicina nel bicchiere di spumante

Per una bolla d'aria in acqua a 20 °C si ha $\sigma \simeq 0,0728 \text{ N/m}$. Per una bolla di raggio $R = 1 \text{ mm} = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$ (dimensione tipica in un bicchiere di spumante o di birra) la sovrappressione interna vale

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2 \cdot 0,0728 \text{ N/m}}{1 \times 10^{-3} \text{ m}} \simeq 146 \text{ Pa}.$$

Possono sembrare pochi, ma è una pressione ragguardevole. Per confronto: il tiraggio di un camino, che impedisce al fumo di rientrare in casa, è dell'ordine di da 7 Pa a 10 Pa; una tensostruttura pressurizzata (i “palloni” per il tennis o il calcetto) si regge con differenze di pressione dell'ordine di 30 Pa. Se la bolla si riduce, la sovrappressione cresce: per $R = 1 \mu\text{m}$ si ottiene $\Delta p \simeq 1,5 \times 10^5 \text{ Pa}$, cioè oltre un'atmosfera.

Bolla d'aria (una interfaccia) e bolla di sapone (due interfacce)

L'esempio numerico precedente si riferisce a una bolla d'aria *immersa in un liquido*, che possiede una *sola* interfaccia liquido–gas: per essa vale $\Delta p = 2\sigma/R$. Una vera *bolla di sapone* in aria è invece un sottile *film* liquido con *due* interfacce (quella interna e quella esterna), ciascuna delle quali contribuisce con $2\sigma/R$: la sovrappressione è quindi il doppio,

$$\Delta p_{\text{bolla di sapone}} = \frac{4\sigma}{R}.$$

Conviene tenere distinti i due schemi, per non confondere il caso a interfaccia singola con quello a doppia interfaccia.

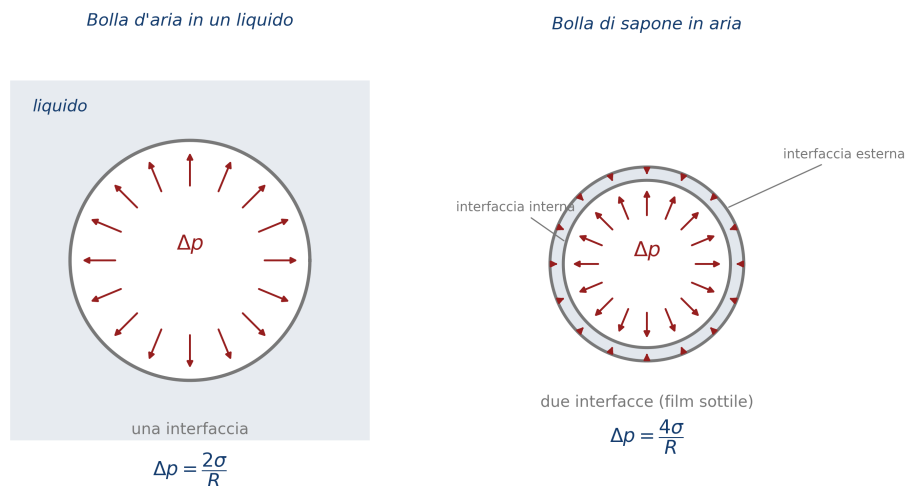


Figura 7.8. A sinistra: bolla d'aria immersa in un liquido, una sola interfaccia, $\Delta p = 2\sigma/R$. A destra: bolla di sapone in aria, film con due interfacce, $\Delta p = 4\sigma/R$.

7.7 Determinazione e valori della tensione superficiale

7.7.1 Come si misura

La misura di σ si fonda proprio sulla legge di Laplace: si generano superfici di curvatura nota e si misura la pressione necessaria a produrle; esistono inoltre strumenti dedicati, i *tensiometri*. In ogni caso il valore ottenuto *dipende dal materiale, dalla temperatura e dal grado di purezza* del liquido: sono le tre variabili da tenere sempre presenti quando si consulta una tabella.

7.7.2 Ordini di grandezza e dipendenza dal materiale

La tabella 7.1 riporta alcuni valori rappresentativi a 20 °C. Si nota subito che quasi tutti i liquidi hanno una tensione superficiale confinata in un intervallo ristretto, dell'ordine di qualche centesimo di N/m; l'acqua e il mercurio ne costituiscono le due vistose eccezioni.

Tabella 7.1. *Tensione superficiale di alcuni liquidi (all'interfaccia con l'aria, a 20 °C). I valori dipendono fortemente dalla purezza e dalla temperatura e vanno intesi come rappresentativi.*

Liquido (interfaccia con aria)	σ [N/m]
Acqua pura	$\approx 0,0728$
Acqua saponata	$\approx 0,025$
Alcool etilico	$\approx 0,022$
Mercurio	$\approx 0,5$

L'acqua, con $\sigma \approx 0,073$ N/m, ha una tensione superficiale circa *tre volte* maggiore di quella dell'alcool ($\approx 0,022$ N/m); il mercurio, con $\sigma \approx 0,5$ N/m, la supera di circa *sette volte*. Queste anomalie hanno una spiegazione microscopica precisa.

7.7.3 Perché l'acqua è anomala: la molecola polare e il legame idrogeno

La molecola d'acqua è *polare*. L'ossigeno è più elettronegativo dell'idrogeno: quando si forma il legame, l'unico elettrone che ciascun idrogeno mette in comune passa mediamente più tempo “dalle parti” dell'ossigeno. Ne risulta uno sbilanciamento del potenziale elettrostatico: negativo verso l'ossigeno, positivo verso gli idrogeni.

Questa polarità fa sì che molecole vicine si orientino testa-coda, stabilendo *legami idrogeno*: legami di natura elettrostatica sensibilmente più intensi delle deboli forze (di van der Waals) che tengono insieme i liquidi non polari. Per portare all'interfaccia una molecola d'acqua occorre dunque spendere più energia, e questo si traduce in una tensione superficiale elevata. È una circostanza fortunata: senza di essa molti insetti non potrebbero camminare sull'acqua.

Il mercurio rappresenta il caso estremo. È un metallo liquido: gli atomi mettono in comune tutti gli elettroni di valenza, e questo “mare” di elettroni condivisi costituisce un collante ancor più forte del legame idrogeno. Ne segue una tensione superficiale elevatissima e la caratteristica tendenza del mercurio a raccogliersi in gocce compatte anziché bagnare le superfici.

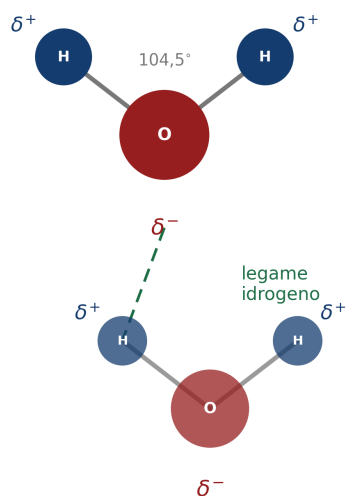


Figura 7.9. La molecola d'acqua è polare: l'ossigeno porta una carica parziale negativa, gli idrogeni una positiva. Le molecole vicine si orientano testa-coda formando legami idrogeno, più intensi delle ordinarie forze fra molecole non polari.

Dal discreto al continuo

Ricondurre una proprietà macroscopica (la tensione superficiale) alle caratteristiche microscopiche del materiale (polarità, legame idrogeno, legame metallico) è più di un esercizio di curiosità. Ogni volta che, in base all'*ipotesi del continuo*, abbandoniamo la descrizione discreta della materia, siamo costretti a introdurre grandezze – σ è una di queste – che “riassumono” al livello continuo un comportamento che nasce alla scala molecolare.

7.7.4 Dipendenza dalla temperatura

Al crescere della temperatura aumenta l'agitazione termica delle molecole, i legami intermolecolari si fanno più labili e la tensione superficiale *diminuisce*. Per l'acqua la diminuzione è, con buona approssimazione, *lineare*: si passa da circa $72,8 \times 10^{-3} \text{ N/m}$ a 20°C a circa $58,9 \times 10^{-3} \text{ N/m}$ in prossimità dell'ebollizione (100°C). Nota la pendenza, la si può usare per stimare σ a temperature intermedie.

7.7.5 I tensioattivi: perché il sapone lava

La diminuzione di σ con la temperatura, pur reale (circa il da 19 % a 25 % dell'intervallo tra ambiente ed ebollizione), è limitata: la temperatura modifica l'agitazione termica ma non la *natura* delle forze intermolecolari. Inoltre non si può scaldare l'acqua a piacere: a 90°C nessuno si laverebbe le mani senza scottarsi, e temperature elevate scoloriscono e logorano i tessuti.

Esiste un'alternativa: abbassare la tensione superficiale *senza* scaldare, agendo direttamente sulle forze intermolecolari. È il compito dei *tensioattivi* (i detersivi): molecole che si insinuano fra le molecole d'acqua attenuandone i legami. L'effetto è cospicuo. A 20°C , aggiungendo del sapone, la tensione superficiale dell'ac-

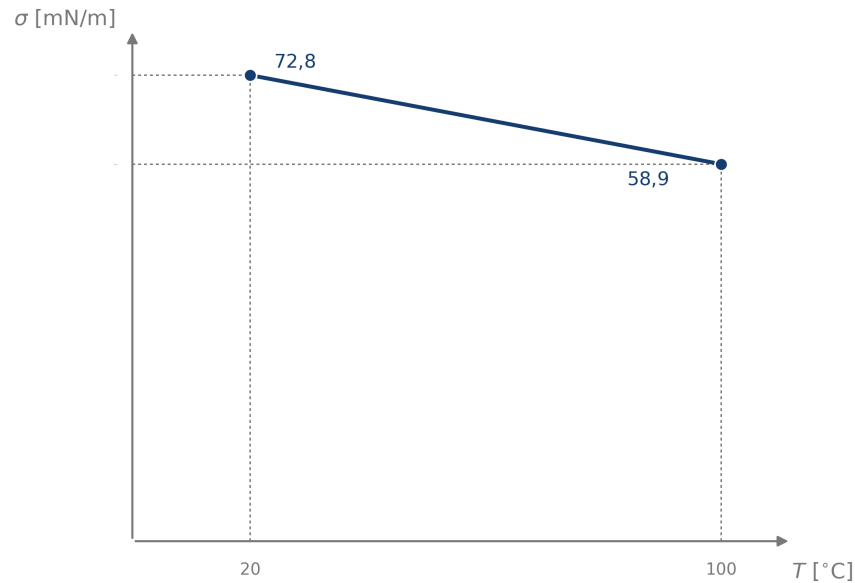


Figura 7.10. Andamento della tensione superficiale dell'acqua in funzione della temperatura: decrescita all'incirca lineare, di poco meno del 20 % fra 20 °C e 100 °C.

qua scende da circa 0,073 N/m a circa 0,025 N/m: una riduzione di quasi due terzi, ottenuta *a temperatura ambiente*, ben superiore a quella che si otterrebbe portando l'acqua all'ebollizione.

Perché tutto ciò conta per il lavaggio? L'azione smacchiante dipende dalla capacità delle goccioline d'acqua di infilarsi *sotto* lo sporco (per esempio il grasso depositato su una fibra) e staccarlo. E qui interviene di nuovo la legge di Laplace. Riscrivendola per una goccia sferica come $\Delta p = 2\sigma/R$, a parità di differenza di pressione disponibile – cioè a parità di “vigore” con cui si strofina o di velocità del cestello di una lavatrice – un valore più piccolo di σ comporta un raggio R più piccolo:

$$R = \frac{2\sigma}{\Delta p} \quad \Rightarrow \quad \sigma \text{ piccolo} \Rightarrow R \text{ piccolo.}$$

Gocce più piccole penetrano più facilmente e staccano meglio lo sporco. In pratica si combinano i due effetti: acqua tiepida e sapone rendono l'azione pulente più efficace di ciascuno dei due da solo.

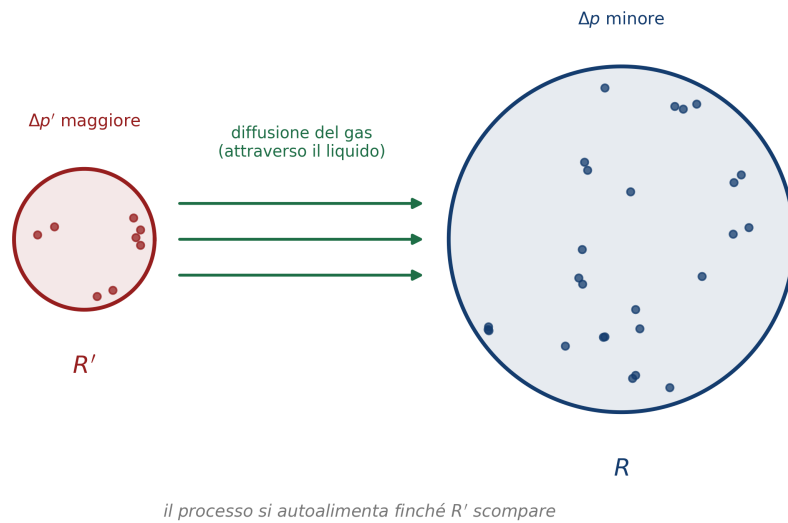


Figura 7.11. Maturazione di Ostwald: la bolla piccola (R'), avendo sovrappressione interna maggiore, cede gas per diffusione alla bolla grande (R). Il processo si autoalimenta finché la bolla piccola scompare.

7.8 La maturazione di Ostwald

La legge di Laplace, nella forma $\Delta p = 2\sigma/R$, ci dice che *a parità di σ , la sovrappressione interna di una bolla è tanto più grande quanto più piccolo è il suo raggio*. Questa semplice osservazione spiega un fenomeno che tutti abbiamo osservato versando una bibita gassata.

Immaginiamo, sul fondo di un bicchiere di spumante, due bolle di dimensioni leggermente diverse, che indichiamo con i raggi R (grande) e R' (piccola), $R' < R$. Le bolle nascono in punti particolari detti *siti di nucleazione* – difetti del materiale, impurità, un residuo di gas intrappolato – e non sono mai perfettamente identiche.

La tensione superficiale è la stessa per entrambe (dipende solo dalla coppia di materiali). Dalla legge di Laplace segue allora che la bolla *piccola* ha pressione interna *maggiore*:

$$p'_i = p_0 + \frac{2\sigma}{R'} > p_i = p_0 + \frac{2\sigma}{R} \quad (R' < R).$$

Ora, la solubilità di un gas in un liquido cresce con la pressione. Il gas contenuto nella bolla piccola, essendo a pressione maggiore, tende quindi a disciogliersi nel liquido più di quanto non faccia il gas della bolla grande. Le molecole di gas migrano, per diffusione attraverso il liquido, dalla bolla ad alta pressione a quella a bassa pressione: *dalla piccola alla grande*.

Il fenomeno ha una *retroazione positiva*. La bolla piccola, perdendo massa, diventa ancora più piccola: il suo raggio cala, la sua sovrappressione aumenta ulteriormente, e il travaso accelera. Simmetricamente la bolla grande, acquistando massa, cresce e vede la propria sovrappressione diminuire. Il processo prosegue finché la bolla grande non ha inglobato completamente quella piccola. Questo meccanismo si chiama *maturazione di Ostwald*.

Osservazione al bicchiere

Versando spumante, birra o una qualunque bibita gassata, si formano dapprima moltissime bollicine minute su tutta la superficie del vetro. Attendendo, le bolle si *diradano*: molte scompaiono, poche crescono, finché le sopravvissute diventano tanto grandi da non restare più attaccate al vetro – la spinta di Archimede prevale e le stacca. Il sito di nucleazione torna libero e il ciclo ricomincia. È la maturazione di Ostwald in azione.

Nomenclatura e portata del fenomeno

La denominazione consolidata in letteratura è *maturazione di Ostwald* (in inglese *Ostwald ripening*). Al di là del nome, la stessa fisica governa l'ingrossamento dei grani nei solidi policristallini, la coalescenza delle emulsioni e delle schiume, e numerosi processi nei materiali e nei tessuti biologici.

7.9 Angolo di contatto e capillarità

Finora abbiamo considerato interfacce fra due soli mezzi: un liquido e un gas, oppure due liquidi immiscibili. La tensione superficiale mostra un'ulteriore classe di fenomeni quando l'interfaccia va a contatto con un *terzo mezzo*, tipicamente un solido. Il caso più familiare è la *capillarità*: la risalita (o la discesa) di un liquido in un tubo sottile immerso in un recipiente più ampio.

7.9.1 Il contatto trifase e l'angolo θ

Si immerga un tubo a sezione circolare di raggio R (ora R è il raggio del *tubo*, non più di una bolla) in un contenitore molto più grande. Sperimentalmente si osserva che il livello del liquido nel tubo *non* coincide con quello nel contenitore: la superficie libera interna si dispone a una quota diversa e assume una forma curva, il *menisco*.

Lungo la linea in cui il liquido tocca la parete del tubo si incontrano tre mezzi – liquido, gas e solido – ed è per questo che si parla di *linea di contatto trifase*. In corrispondenza di essa la superficie liquida forma con la parete un angolo θ , detto *angolo di contatto*, misurato all'interno del liquido. Il valore di θ non dipende dal solo liquido: è una proprietà della *terna* liquido–gas–solido, e risente persino della finitura e della pulizia della superficie.

7.9.2 La legge della risalita capillare

Ricaviamo la quota di equilibrio. La membrana interfacciale, potendo esercitare solo tensione tangente a sé stessa, tira il liquido lungo la direzione individuata dall'angolo di contatto. Lungo la linea di contatto, che è una circonferenza di lunghezza $2\pi R$, ogni elemento $d\ell$ contribuisce con una forza $\sigma d\ell$ tangente all'interfaccia. Le componenti radiali si elidono a coppie diametralmente opposte; sopravvivono le sole componenti *verticali*, ciascuna proporzionale a $\cos \theta$. La risultante verticale verso l'alto è dunque $F_{\uparrow} = 2\pi R \sigma \cos \theta$.

All'equilibrio questa forza sostiene il peso della colonna di liquido sollevata rispetto al pelo libero esterno. Detta h l'altezza (riferita al centroide del menisco) della colonna, il suo peso è $F_{\downarrow} = \rho g V = \rho g (\pi R^2 h)$, dove

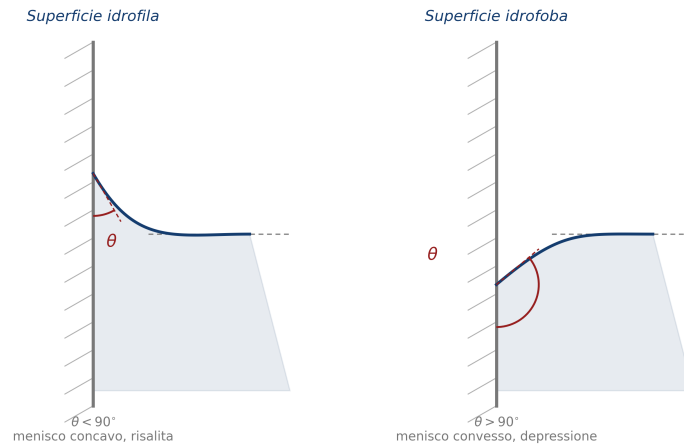


Figura 7.12. Angolo di contatto θ misurato all'interno del liquido. A sinistra una superficie idrofila ($\theta < 90^\circ$, menisco concavo, risalita); a destra una superficie idrofoba ($\theta > 90^\circ$, menisco convesso, depressione).

πR^2 è l'area della sezione del capillare, ρ la densità del liquido e g l'accelerazione di gravità. Imponendo $F_\uparrow = F_\downarrow$,

$$2\pi R \sigma \cos \theta = \rho g \pi R^2 h,$$

si semplificano π e una potenza di R , ottenendo la *legge di Jurin*:

$$h = \frac{2 \sigma \cos \theta}{\rho g R}.$$

L'altezza di risalita cresce al diminuire del raggio: è *inversamente proporzionale* a R . Tensione superficiale, densità, gravità e angolo di contatto sono fissati una volta scelti i materiali e le condizioni; l'unico parametro su cui si può agire è R . Ecco perché il fenomeno si chiama *capillarità*: esiste sempre, ma diventa apprezzabile solo per raggi molto piccoli, dell'ordine di quelli di un capillare.

7.9.3 Alcuni ordini di grandezza

I numeri seguenti usano $\sigma = 0,0728 \text{ N/m}$ (acqua a 20°C), $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ e, per l'acqua sul vetro, $\theta \simeq 0^\circ$ (quindi $\cos \theta \simeq 1$).

Dal tubo largo al capillare sottile

Tubo largo, $R = 2 \text{ m}$. Immergendo in una piscina un tubo di questo raggio, la risalita vale

$$h = \frac{2 \cdot 0,0728 \text{ N/m}}{1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 2 \text{ m}} \simeq 7,4 \times 10^{-6} \text{ m} \approx 7,4 \text{ } \mu\text{m} :$$

del tutto impercettibile, sommersa dal moto ondoso.

Capillare, $R = 0,5 \text{ mm} = 5 \times 10^{-4} \text{ m}$. A parità di tutto il resto,

$$h = \frac{2 \cdot 0,0728 \text{ N/m}}{1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \times 10^{-4} \text{ m}} \simeq 3,0 \times 10^{-2} \text{ m} \approx 3,0 \text{ cm} :$$

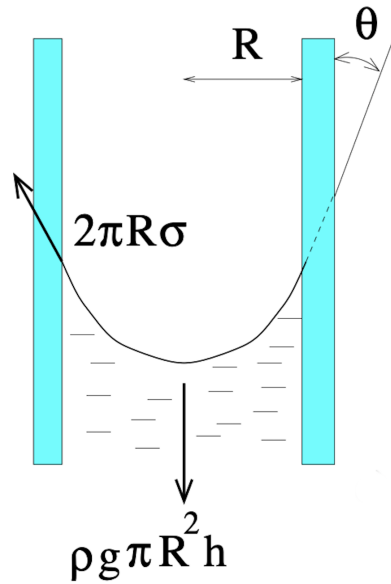


Figura 7.13. Risalita capillare in un tubo di raggio R . La componente verticale della tensione lungo la linea di contatto, $2\pi R \sigma \cos \theta$, sostiene il peso della colonna di altezza h .

ora la risalita è nettamente visibile. Riducendo R di un fattore 4000 rispetto al caso precedente, h è cresciuta dello stesso fattore.

Carta assorbente

La carta assorbente è fabbricata disponendo le fibre in modo da lasciare fra esse canaletti di ampiezza media di qualche decina di micron. Ciascun canaletto si comporta come un capillare: con $R \sim 10 \mu\text{m}$ la legge di Jurin predice quote dell'ordine del metro. Nella pratica l'acqua risale di da 10 cm a 20 cm, valore inferiore a quello ideale a causa dell'evaporazione, della disuniformità dei canaletti e della resistenza al moto; resta comunque una risalita cospicua, che spiega il funzionamento del materiale.

La linfa negli alberi: capillarità e osmosi

Si potrebbe pensare che la sola capillarità spieghi la risalita della linfa dalle radici alle foglie. Proviamo a rovesciare la legge di Jurin per stimare il raggio dei canali necessario a raggiungere $h = 15 \text{ m}$, con $\theta \simeq 0^\circ$ e $\sigma \simeq 7,34 \times 10^{-2} \text{ N/m}$:

$$R = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g h} = \frac{2 \cdot 7,34 \times 10^{-2} \text{ N/m}}{1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 15 \text{ m}} \simeq 9,97 \times 10^{-7} \text{ m} \approx 1 \mu\text{m}.$$

I canali xilematici reali hanno però diametri variabili fra qualche decina e qualche centinaio di nanometri, e la sola capillarità non basta a portare la linfa alle decine di metri d'altezza delle grandi sequoie (oltre 100 m). Il meccanismo dominante è l'*osmosi*: l'acqua evapora dalle foglie (traspirazione), i sali vi si concentrano, e la conseguente differenza di pressione osmotica richiama acqua dalle radici. La capillarità è un contributo, non la causa principale.

7.9.4 Quando il liquido scende: la depressione capillare

Se la terna di materiali è tale che $\theta > 90^\circ$, allora $\cos \theta < 0$ e la legge di Jurin dà $h < 0$: il liquido nel tubo si porta *più in basso* del pelo libero esterno, e il menisco si presenta *convesso* anziché concavo. È il regime della *depressione capillare*.

Mercurio nel vetro

Per la terna mercurio–aria–vetro (il caso dei vecchi termometri a mercurio) l'angolo di contatto è $\theta \simeq 130^\circ$. Essendo $\cos 130^\circ < 0$, il mercurio in un tubo di vetro si abbassa rispetto al livello esterno e forma un menisco convesso, all'opposto di quanto fa l'acqua.

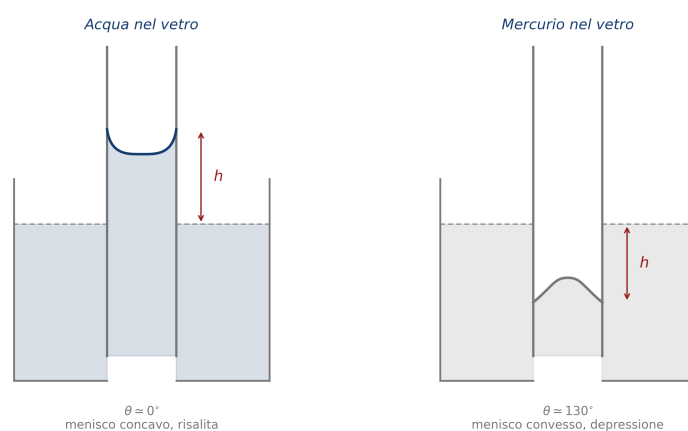


Figura 7.14. Confronto fra risalita e depressione. *Acqua nel vetro* ($\theta \simeq 0^\circ$): menisco concavo, risalita. *Mercurio nel vetro* ($\theta \simeq 130^\circ$): menisco convesso, depressione.

L'angolo di contatto dipende anche dalla natura della superficie solida. L'acqua, che sul vetro pulito dà $\theta \simeq 0^\circ$ (superficie *idrofila*), su una superficie cerata o paraffinata – genericamente *idrofoba* – dà $\theta \simeq 107^\circ$, di poco superiore a 90° : il menisco si inverte appena. Il carattere idrofilo o idrofobo riflette la competizione fra le forze di *coesione* (fra molecole del liquido) e quelle di *adesione* (fra liquido e solido): dove prevale l'adesione il liquido bagna e risale; dove prevale la coesione il liquido si ritrae e scende.

L'effetto loto e la superidrofobicità

L'angolo di contatto non dipende solo dalla chimica dei materiali, ma anche dalla *microtessitura* della superficie. Realizzando micro-scanalature e rilievi – come i minuscoli peli sulla foglia di loto o sulla buccia della pesca – si può rendere *superidrofoba* una superficie che sarebbe idrofila: l'angolo di contatto apparente sale ben oltre 90° , l'acqua non bagna più e rotola via in gocce quasi sferiche trascinando lo sporco. È il principio delle superfici autopulenti e dei rivestimenti idrorepellenti, e mostra come le proprietà interfacciali si possano ingegnerizzare agendo sulla geometria oltre che sulla composizione.

7.10 Il punto triplo e l'equilibrio delle tensioni

L'angolo di contatto non è un dato arbitrario: discende da un *bilancio di tensioni* nel punto in cui si incontrano tre mezzi. Consideriamo il caso generale di un *punto triplo*, in cui coesistono tre materiali che etichettiamo con 1, 2 e 3 (per esempio: solido, liquido e gas, oppure tre fluidi mutuamente immiscibili come mercurio, olio e acqua).

7.10.1 Il bilancio delle tre tensioni

In corrispondenza del punto triplo si incontrano tre interfacce, ciascuna con la propria tensione superficiale, che dipende *solo* dalla coppia di materiali che separa: σ_{12} , σ_{13} , σ_{23} . Ogni tensione agisce tangenzialmente alla rispettiva interfaccia, tirando il punto triplo lungo la propria direzione. Detto θ l'angolo fra le interfacce 1–3 e 2–3, l'equilibrio delle componenti lungo la direzione dell'interfaccia 1–2 fornisce

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} + \sigma_{23} \cos \theta,$$

da cui si ricava l'angolo di contatto in funzione delle sole tensioni:

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{12} - \sigma_{13}}{\sigma_{23}}.$$

Questa è l'*equazione di Young*. Nel caso, importantissimo, di una goccia di liquido su un solido in presenza di gas – ponendo 1 = solido, 2 = gas, 3 = liquido – essa assume la forma consueta $\sigma_{SG} = \sigma_{SL} + \sigma_{LG} \cos \theta$, con θ misurato all'interno del liquido.

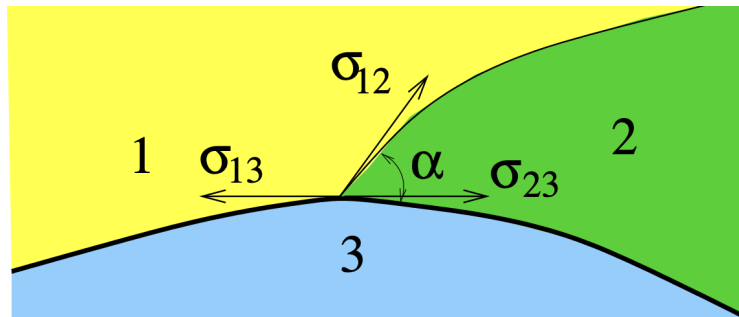


Figura 7.15. Equilibrio delle tensioni al punto triplo fra i mezzi 1, 2, 3. Il bilancio delle componenti lungo l'interfaccia 1–2 dà l'equazione di Young $\sigma_{12} = \sigma_{13} + \sigma_{23} \cos \theta$.

Sulla forma dell'equazione di Young

La stessa relazione compare con etichette diverse a seconda della convenzione: cambia soltanto quale interfaccia si sceglie come direzione di riferimento per la proiezione e come si nomina l'angolo (che risulta misurato da lati diversi). Non si tratta di formule fisicamente distinte, ma della medesima condizione di equilibrio del punto triplo, riscritta cambiando gli indici. Per evitare ambiguità conviene ancorarsi sempre alla forma canonica solido–liquido–gas, $\sigma_{SG} = \sigma_{SL} + \sigma_{LG} \cos \theta$, con θ misurato *attraverso il liquido*.

7.10.2 Quando l'equilibrio non esiste: lo spreading

Le tre tensioni sono fissate dalle coppie di materiali e non possono “aggiustarsi” l’una all’altra. Ma il coseno di un angolo non può superare l’unità in modulo:

$$|\cos \theta| = \left| \frac{\sigma_{12} - \sigma_{13}}{\sigma_{23}} \right| \leq 1.$$

Se la terna di materiali è tale che il secondo membro supera 1 in modulo, *non esiste* alcun angolo θ che soddisfi l’equilibrio: la configurazione a goccia con punto triplo *non può sussistere*. Il sistema evolve allora verso un’altra geometria.

La goccia d’olio che si sparpaglia

Una goccia d’acqua deposta su un tavolo in aria realizza senza difficoltà un punto triplo stabile con un ben definito angolo di contatto. Una goccia d’olio adagiata sull’interfaccia acqua–aria, invece, spesso *non* ammette una soluzione con $|\cos \theta| \leq 1$: l’olio non resta a forma di goccia ma si distende in un *velo* di spessore pressoché uniforme su tutta la superficie dell’acqua. È il fenomeno dello *spreading* (spandimento totale), alla base, per esempio, della formazione delle iridescenti pellicole d’olio sull’acqua.

7.11 Sintesi

Un unico concetto ha attraversato tutta la trattazione: l’interfaccia fra due mezzi immiscibili si comporta come una *membrana* tesa, capace di esercitare forze di tensione ma non momenti flettenti. Da questa immagine, radicata nell’origine microscopica dei legami molecolari, discende una sola grandezza operativa – il coefficiente di tensione superficiale σ , forza per unità di linea o, equivalentemente, energia per unità di area – e da essa un’unica equazione madre, la *legge di Laplace*

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2\sigma}{R_m},$$

che lega la sovrappressione attraverso una superficie curva alla sua curvatura.

Da questa relazione sono derivati, come casi particolari o come conseguenze, tutti i fenomeni esaminati: il dimensionamento dei recipienti in pressione e delle strutture a guscio, la sovrappressione nelle bolle, la maturazione di Ostwald, l’anomalia dell’acqua e l’azione dei tensioattivi. L’introduzione del terzo mezzo ha aggiunto l’angolo di contatto, la risalita capillare e l’equazione di Young, mostrando come la stessa fisica governi fenomeni che spaziano dalla meccanica delle strutture alla biologia dei tessuti, dalla scienza dei materiali alla tecnologia delle superfici funzionali. La tensione superficiale, ultima delle proprietà dei fluidi qui trattate, chiude così il quadro delle proprietà fondamentali dei liquidi con un principio unificante di rara eleganza.

Esercizi svolti

8.1 Scopo del capitolo

I capitoli precedenti hanno introdotto le proprietà fondamentali dei fluidi in forma prevalentemente concettuale. Questo capitolo conclusivo mette alla prova quegli stessi concetti su tre problemi numerici elementari ma istruttivi, scelti in modo da toccare le tre grandezze più caratteristiche: la *comprimibilità*, l'*espansione termica* e la *viscosità*. Il fine non è la complessità del calcolo, ma la costruzione di una sensibilità agli ordini di grandezza e la verifica costante della plausibilità fisica dei risultati. Ogni esercizio confronta sistematicamente il comportamento dei liquidi con quello dei gas, evidenziando l'abisso quantitativo che li separa.

8.2 Comprimibilità: il problema della siringa

8.2.1 Impostazione

Consideriamo il dispositivo di figura 8.1: un cilindro di diametro D chiuso da un pistone, con il forellino terminale otturato. Inizialmente tutto è alla pressione ambiente p_0 e il fluido occupa una lunghezza L . Applicando al pistone una forza F , il fluido interno viene compresso e il pistone avanza di una lunghezza incognita ΔL , che vogliamo calcolare.

All'equilibrio, la pressione interna deve bilanciare l'azione esterna. La forza F è applicata sull'area del pistone $A = \pi D^2/4$, per cui la pressione finale vale

Formula chiave

$$p_f = p_0 + \frac{F}{A} = p_0 + \frac{4F}{\pi D^2}.$$

Dalla definizione di modulo di comprimibilità, supposto E costante nell'intervallo di pressioni considerato, si ha

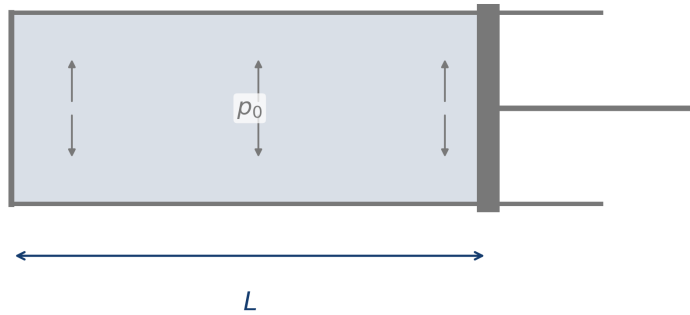
$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{E} \quad \Rightarrow \quad \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = -\frac{1}{E} \int_{p_0}^{p_f} dp,$$

da cui $\ln(V_f/V_i) = -(p_f - p_0)/E$, ossia $V_f = V_i e^{-(p_f - p_0)/E}$. Poiché la sezione A del cilindro è costante, i volumi sono proporzionali alle lunghezze ($V = AL$) e la stessa relazione vale per le lunghezze:

Formula chiave

$$L_f = L_i e^{-\frac{p_f - p_0}{E}}.$$

Configurazione iniziale



Configurazione compressa

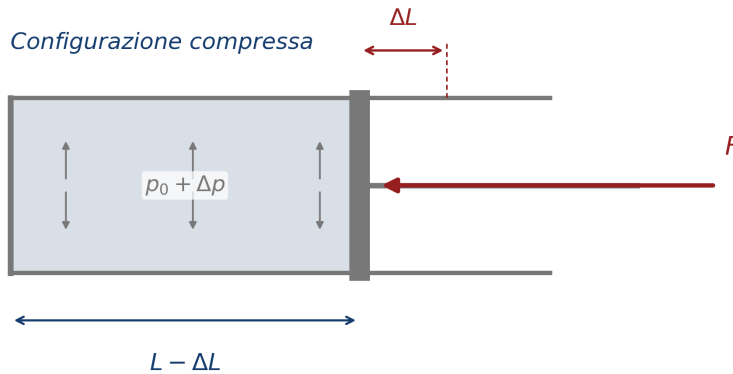


Figura 8.1. Schema del cilindro con pistone (“siringa”): a sinistra la configurazione iniziale a pressione p_0 con fluido di lunghezza L ; a destra la configurazione compressa dopo l’applicazione della forza F , con avanzamento ΔL del pistone.

Per i gas, in cui $E = k p$ non è costante, l’integrazione va rifatta esplicitamente e conduce a una legge diversa, che ricaveremo tra poco.

8.2.2 Dati numerici comuni

Adottiamo i seguenti valori, comuni a tutti i casi:

$$p_0 = 101\,325 \text{ Pa}, \quad F = 100 \text{ N}, \quad D = 2 \text{ cm}, \quad L_i = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}.$$

Il valore $F = 100 \text{ N}$ rappresenta, con buona approssimazione, la forza che si riesce a esercitare spingendo con il pollice. Calcoliamo l’area del pistone e la pressione finale:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (0,02 \text{ m})^2}{4} \approx 3,14 \times 10^{-4} \text{ m}^2,$$

$$p_f = p_0 + \frac{F}{A} = 101\,325 \text{ Pa} + \frac{100 \text{ N}}{3,14 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \approx 419\,634 \text{ Pa},$$

per cui la differenza di pressione applicata è $\Delta p = p_f - p_0 \approx 318 \text{ kPa}$.

8.2.3 Caso 1: siringa piena d'acqua

Esempio

Con $E_{\text{acqua}} \approx 2,2 \times 10^9 \text{ Pa}$, l'esponente vale

$$\frac{\Delta p}{E} = \frac{3,18 \times 10^5 \text{ Pa}}{2,2 \times 10^9 \text{ Pa}} \approx 1,45 \times 10^{-4},$$

un numero piccolissimo. Ne segue

$$L_f = L_i e^{-1,45 \times 10^{-4}} = 0,1 \text{ m} \times 0,999\,85 = 0,099\,985 \text{ m},$$

e quindi

$$\Delta L = L_i - L_f = 0,1 \text{ m} - 0,099\,985 \text{ m} \approx 14 \mu\text{m}.$$

Quattordici *micron*: alla vista, il moto del pistone sarebbe del tutto inapprezzabile. Questo torna con l'esperienza quotidiana: se riempiamo d'acqua una siringa e spingiamo con tutta la forza del pollice, il pistone semplicemente non si muove. È la conferma tangibile dell'enorme modulo di comprimibilità dell'acqua.

8.2.4 Caso 2: siringa piena d'aria

Se lo stesso cilindro è pieno d'aria, la trattazione cambia perché E non è più costante. Il rapporto tra le pressioni assolute vale

$$\frac{p_f}{p_i} = \frac{419\,634 \text{ Pa}}{101\,325 \text{ Pa}} \approx 4,14.$$

Compressione isoterma ($k = 1$)

Mantenendo costante la temperatura, la politropica diventa $pV = \text{cost.}$ (legge di Boyle). Poiché $V \propto L$, si ha $p_i L_i = p_f L_f$, da cui

$$L_f = L_i \frac{p_i}{p_f} = \frac{0,1 \text{ m}}{4,14} \approx 0,024\,14 \text{ m},$$

e lo spostamento del pistone è

$$\Delta L = L_i - L_f \approx 0,075\,86 \text{ m} \approx 7,6 \text{ cm}.$$

Con una forza di 100 N riusciamo a ridurre la colonna di gas di quasi il 76 %. Il contrasto con l'acqua è impressionante: dai 14 μm dell'acqua ai quasi 8 cm dell'aria.

Compressione isentropica ($k = \gamma = 1,4$)

Comprime rapidamente, senza lasciare al gas il tempo di scambiare calore con l'esterno, la trasformazione è isentropica e vale $p/\rho^\gamma = \text{cost.}$ Poiché $p \propto 1/L$, si ottiene $p L^\gamma = \text{cost.}$, da cui

$$L_f = L_i \left(\frac{p_f}{p_i} \right)^{-1/\gamma} = 0,1 \text{ m} \times (4,14)^{-1/1,4}.$$

Con esponente $-1/1,4 \approx -0,714$ si ha $L_f \approx 0,03625 \text{ m}$, per cui

$$\Delta L = L_i - L_f \approx 0,06375 \text{ m} \approx 6,4 \text{ cm}.$$

Lo spostamento è *minore* rispetto al caso isoterma: a parità di forza, riusciamo a comprimere di meno. La ragione è che, comprimendo senza dissipare calore, il gas si scalda e diventa più rigido alla compressione.

Confronto sintetico

A parità di forza $F = 100 \text{ N}$ e lunghezza iniziale $L_i = 10 \text{ cm}$:

Fluido / trasformazione	ΔL	Riduzione relativa
Acqua (incomprimibile)	$\approx 14 \mu\text{m}$	$\approx 0,015 \%$
Aria, isoterma ($k = 1$)	$\approx 7,6 \text{ cm}$	$\approx 76 \%$
Aria, isentropica ($\gamma = 1,4$)	$\approx 6,4 \text{ cm}$	$\approx 64 \%$

8.3 Espansione termica**8.3.1 Impostazione**

Un fluido riscaldato si espande e diminuisce di densità. Per piccole variazioni di temperatura vale la relazione lineare

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \alpha \Delta T,$$

con α coefficiente di espansione termica, generalmente *negativo*. Per i liquidi α è una costante tabulata; per i gas perfetti $\alpha = -1/T$, con T temperatura *assoluta* in kelvin.

Vogliamo portare il sistema, inizialmente a ρ_i , T_i , V_i , a una temperatura finale T_f tale che il volume cresca dell'1%, cioè $V_f = 1,01 V_i$. Poiché la massa $m = \rho V$ si conserva, $\Delta \rho / \rho = -\Delta V / V$: richiedere +1% di volume equivale a richiedere -1% di densità, ossia $\rho_f / \rho_i = 0,99$. Integrando la forma differenziale $d\rho / \rho = \alpha dT$,

$$\ln \frac{\rho_f}{\rho_i} = \int_{T_i}^{T_f} \alpha dT,$$

e qui le strade di liquidi e gas si separano.

8.3.2 Caso dei liquidi (acqua)

Esempio

Per i liquidi α è costante ed esce dall'integrale: $\ln(\rho_f/\rho_i) = \alpha(T_f - T_i)$. Con lo sviluppo $\ln(1+x) \approx x$ si ha $\ln(0,99) \approx -0,01$. Adottando per l'acqua a $T_i = 293$ K il valore $\alpha_{\text{acqua}} \approx -2 \times 10^{-4}/\text{K}$:

$$-0,01 = (-2 \times 10^{-4}/\text{K})(T_f - T_i) \Rightarrow T_f - T_i = 50 \text{ K},$$

dunque

$$T_f = 293 \text{ K} + 50 \text{ K} = 343 \text{ K} (\approx 70^\circ \text{C}).$$

Il risultato non dipende dal volume iniziale: goccia o metro cubo, per aumentare il volume dell'1% partendo da 20°C occorre alzare la temperatura di 50°C .

Attenzione

Due insidie si nascondono in questo risultato. *Primo*: una variazione di 50°C è già ampia, e non è scontato che α resti costante su tutto l'intervallo. *Secondo*, e ben più grave: se avessimo chiesto un aumento di volume del 4%, il conto avrebbe dato $T_f - T_i = 0,04/2 \times 10^{-4} = 200 \text{ K}$, cioè $T_f = 493 \text{ K}$. Assurdo: superati i 100°C l'acqua bolle e il problema perde di significato. Le formule si applicano a sistemi fisici reali, e non valgono indefinitamente.

8.3.3 Caso dei gas (aria)

Esempio

Per i gas $\alpha = -1/T$ non è costante e resta dentro l'integrale:

$$\ln \frac{\rho_f}{\rho_i} = \int_{T_i}^{T_f} \left(-\frac{1}{T} \right) dT = \ln \frac{T_i}{T_f},$$

da cui $\rho_f/\rho_i = T_i/T_f$, ossia $T_f = T_i \rho_i/\rho_f$. Questo non è altro che la legge di stato dei gas perfetti a pressione costante ($p = \text{cost.}$). Con $\rho_i/\rho_f = 1/0,99 \approx 1,01$ e $T_i = 293 \text{ K}$:

$$T_f = 293 \text{ K} \times 1,01 = 295,93 \text{ K}.$$

Per aumentare il volume dell'1% basta dunque aumentare la temperatura di appena $\Delta T \approx 2,93 \text{ K}$.

Confronto liquido–gas

Fluido	α	ΔT per +1% di volume
Acqua (liquido)	$\approx -2 \times 10^{-4}/\text{K}$ (costante)	$\approx 50 \text{ K}$
Aria (gas)	$-1/T$	$\approx 2,93 \text{ K}$

Il gas è enormemente più espandibile del liquido: bastano circa 3 K per l'aria contro i 50 K dell'acqua. È

proprio questa proprietà a mettere in moto i grandi fenomeni convettivi dell'atmosfera e degli oceani.

8.4 Viscosità: il calcolo di lubrificazione

8.4.1 Impostazione

Poggiamo un volume di fluido su una base fissa e applichiamo alla faccia superiore uno sforzo di taglio τ : la superficie libera superiore si muove con velocità u . Se h è lo spessore dello strato, la velocità di deformazione angolare vale $\dot{\gamma} = u/h$, e per un fluido newtoniano

Formula chiave

$$\tau = \mu \dot{\gamma} = \mu \frac{u}{h},$$

con μ viscosità dinamica del fluido.

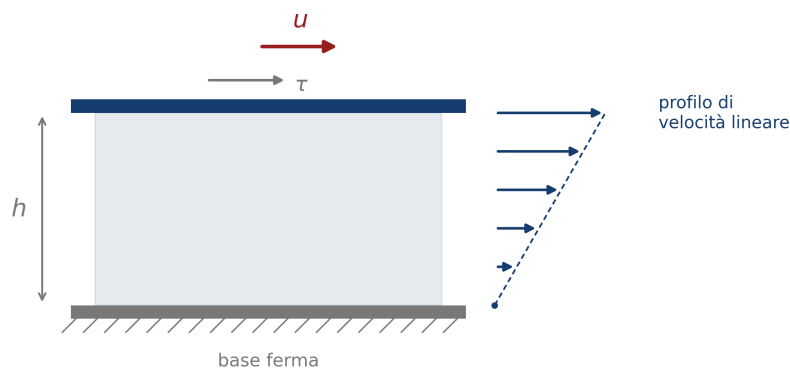


Figura 8.2. Deformazione di uno strato di fluido di spessore h sotto l'azione di uno sforzo di taglio τ : la superficie superiore trasla con velocità u , mentre la base resta ferma. Il profilo di velocità risultante è lineare tra le due superfici.

Il problema tipico della lubrificazione è: dato uno strato di spessore h , quale sforzo di taglio occorre per far scorrere la superficie superiore a velocità u ? Basta la relazione costitutiva $\tau = \mu u/h$ e il valore tabulato di μ . Adottiamo i dati comuni $h = 2 \text{ mm} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$ e $u = 0,8 \text{ m/s}$.

8.4.2 Un caso e un confronto

Lo strato d'olio

Per l'olio, $\mu_{\text{olio}} = 8 \times 10^{-2} \text{ Pa s}$. Sostituendo,

$$\tau = \mu \frac{u}{h} = 8 \times 10^{-2} \text{ Pa s} \times \frac{0,8 \text{ m/s}}{2 \times 10^{-3} \text{ m}} = 32 \text{ N/m}^2.$$

Servono dunque 32 N/m^2 per far scorrere lo strato d'olio a $0,8 \text{ m/s}$.

Ripetendo il calcolo (stessi h e u) per altri fluidi si apprezza l'enorme variabilità della viscosità con il materiale:

Fluido	μ [Pa s]	$\tau = \mu u/h$ [N/m ²]	Note
Aria	$\approx 1,86 \times 10^{-5}$	$\approx 7,4 \times 10^{-3}$	gas, pochissimo viscoso
Acqua	$\approx 1,2 \times 10^{-3}$	$\approx 0,48$	liquido poco viscoso
Olio	$\approx 8 \times 10^{-2}$	≈ 32	liquido viscoso
Pece	$\approx 2 \times 10^8$	$\approx 8 \times 10^{10}$	“solido” apparente

La pece: un caso estremo

La pece ha viscosità talmente elevata da apparire, nella percezione quotidiana, un solido – è uno dei componenti dell'asfalto. In realtà è “solida” solo perché non siamo abbastanza pazienti: sollecitata tangenzialmente per giorni, si deforma con continuità. Con $\mu_{\text{pece}} \approx 2 \times 10^8$ Pa s, lo sforzo necessario a farla fluire a 0,8 m/s sarebbe $\tau = 8 \times 10^{10}$ N/m²: un numero strabiliante, forse inattuabile con dispositivi umani, ma del tutto ordinario per le forze geofisiche che muovono, su tempi geologici, il mantello terrestre come se fosse un fluido.

Origine microscopica della variabilità

Nell'aria le molecole non hanno legami permanenti: farle scorrere è “quasi gratis”, e l'unico meccanismo viscoso è l'agitazione termica che trasferisce quantità di moto tra gli strati; ecco perché μ è bassissima. Nei liquidi esistono legami che si formano e si rompono di continuo, e gli strati che scorrono li stirano contro le intense forze del potenziale di Lennard–Jones: la viscosità sale di due o tre ordini di grandezza. Nella pece, fatta di molecole lunghe che si incastrano, tirarne una significa sbrogliare l'intera matassa – l'immagine efficace è quella del piatto di spaghetti. La viscosità dipende inoltre in modo determinante dalla temperatura, e in verso opposto tra gas (cresce) e liquidi (diminuisce): ogni valore tabulato va sempre riferito alla temperatura di misura.

8.5 Conclusioni

I tre esercizi, pur elementari sul piano numerico, illustrano tre lezioni fisiche di fondo:

1. la **comprimibilità** distingue nettamente liquidi e gas: l'acqua è praticamente incompressibile (14 μm contro i 7,6 cm dell'aria), e per i gas la rigidità dipende dalla trasformazione (isoterma o isentropica);
2. l'**espansione termica** mostra ancora l'abisso tra le due fasi: 50 K per dilatare l'acqua dell'1 %, contro appena 3 K per l'aria – con l'avvertenza di non applicare le formule oltre i limiti fisici del sistema (l'ebollizione);
3. la **viscosità** varia di oltre dieci ordini di grandezza tra aria e pece, e la sua origine microscopica spiega tanto la variabilità quanto la dipendenza dalla temperatura.

Il filo conduttore è uno solo: le formule non sono simboli astratti, ma descrizioni di sistemi fisici reali. Verificarne sempre la plausibilità – un pistone che si sposta di micron, un'acqua che non può superare i 100 °C, una pece che scorre come roccia nel mantello – è la vera sensibilità fluidodinamica che questi esercizi vogliono costruire.

Strumenti di calcolo

Per verifiche numeriche rapide dei conti svolti in questo capitolo – rapporti di pressione, integrali di compressione, conversioni di unità – è possibile utilizzare gli strumenti di calcolo disponibili su

<https://raucci.net>.

Notazione e simboli

Si raccoglie in questa appendice l'elenco ragionato dei simboli adoperati nel testo, con l'indicazione della grandezza fisica rappresentata e della relativa unità di misura nel Sistema Internazionale. La tabella funge da riferimento rapido durante la lettura e rende esplicite le convenzioni adottate, così da evitare ogni ambiguità fra grandezze che, in contesti diversi, condividono per tradizione lo stesso simbolo.

A.1 Grandezze fisiche fondamentali

Simbolo	Grandezza	Unità SI
ρ	densità	kg/m ³
p	pressione	Pa
p_v	tensione (o pressione) di vapore	Pa
T	temperatura	K (o °C)
V	volume	m ³
m	massa	kg
n	numero di particelle / densità numerica	varie
λ	libero cammino medio	m
Kn	numero di Knudsen	adimensionale
d	diametro molecolare efficace	m
L	lunghezza caratteristica del problema	m
α	coefficiente di dilatazione termica	1/K
E	modulo di comprimibilità	Pa
β	coefficiente di comprimibilità	1/Pa
k	esponente della trasformazione politropica	adimensionale
γ	rapporto dei calori specifici c_p/c_v	adimensionale
τ	sforzo di taglio	Pa
$\dot{\gamma}$	velocità di deformazione angolare	1/s
μ	viscosità dinamica	Pa s
ν	viscosità cinematica	m ² /s
U	velocità caratteristica	m/s
σ	tensione superficiale	N/m
θ	angolo di contatto	°
r_1, r_2	raggi di curvatura principali	m
h	altezza di risalita capillare	m
g	accelerazione di gravità	m/s ²
R	costante specifica del gas	J/(kg K)
R_u	costante universale dei gas	J/(mol K)
k_B	costante di Boltzmann	J/K

A.2 Convenzioni tipografiche e simboliche

Convenzioni adottate nel testo

- Il **marcatore decimale** è la virgola, secondo l'uso italiano: si scrive dunque $9,81 \text{ m/s}^2$ e non 9.81.
- I **differenziali** sono composti in carattere tondo mediante la macro dedicata, così da distinguerli otticamente dalle variabili in corsivo: si scrive dx , dV , dT .
- Il simbolo $O(\cdot)$ denota l'**ordine di grandezza** della quantità racchiusa fra parentesi.
- La notazione $\langle \cdot \rangle$ indica un **valor medio**, tipicamente una media d'insieme su un gran numero di molecole.
- Il valore assoluto è reso con $|\cdot|$; le grandezze vettoriali, ove necessario, sono poste in grassetto con $\cdot$.

Sul simbolo della temperatura

Nella trattazione qui svolta la lettera T indica sempre e soltanto la *temperatura*. Si presti attenzione a non confonderla con altri usi tradizionali della medesima lettera che si incontrano in altri ambiti della fisica tecnica — per esempio il periodo di un fenomeno oscillatorio o una forza di trazione — e che qui non ricorrono. Analogamente, la lettera R è riservata alla costante specifica del gas o, dove esplicitamente indicato, a un raggio: il contesto ne rende univoco il significato.

Laddove una medesima lettera assuma significati distinti in capitoli diversi — come nel caso di R per la costante del gas e per un raggio geometrico — il significato pertinente è sempre precisato in loco, all'atto della prima occorrenza nel capitolo. Questa scelta privilegia l'aderenza alla notazione consolidata nella letteratura tecnica rispetto a un'artificiosa unicità dei simboli, che finirebbe per allontanare il lettore dalle convenzioni che ritroverà nei testi specialistici e nella pratica professionale.