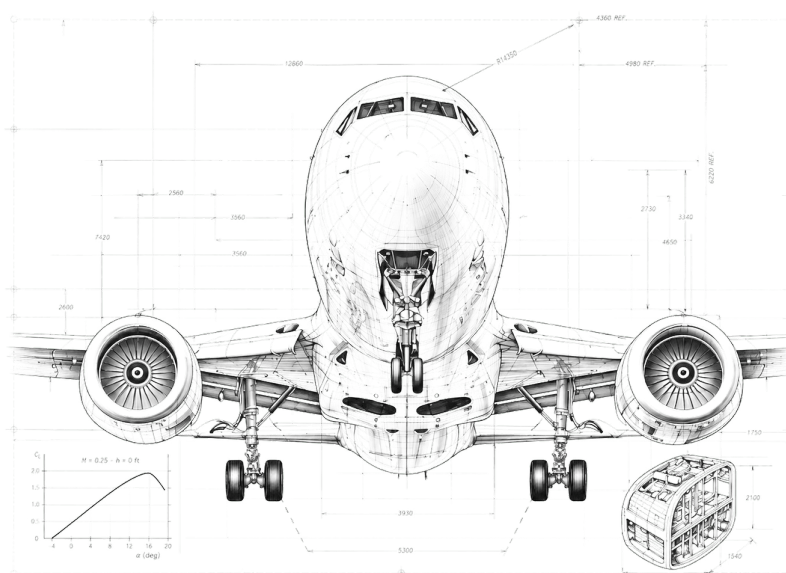

Costruzioni Aeronautiche

Struttura, Costruzione, Sistemi e Impianti del Mezzo Aeronautico

La virata

Teoria ed esercizi svolti



Monografia didattica per la preparazione all'Esame di Stato

Meccanica del volo: virata corretta, virata piatta,
raccordi virata-salita, potenze e spinte necessarie

Prof. Ing. Biagio Raucci

ITIS «E. Majorana»

Indice

I	La teoria della virata	2
I.1	Il problema fisico: perché virare “costa”	2
I.2	La virata corretta: equilibrio e fattore di carico	2
I.3	Raggio di virata, velocità angolare, tempo di inversione	3
I.4	La velocità in virata ad assetto costante	4
I.5	Aerodinamica: la polare parabolica	4
I.6	Spinta e potenza necessarie in virata	5
I.7	La virata piatta	5
I.8	Raccordo virata–salita: il bilancio di potenza	6
I.9	L’atmosfera standard alle quote di lavoro	7
I.10	Formulario della virata	8
2	Esercizi svolti	9
A	Unità di misura e note di calcolo	23
A.1	Dalle unità tecniche al Sistema Internazionale	23
A.2	Verifica numerica indipendente	23
A.3	Limiti di validità del modello	23

La teoria della virata

Dove stiamo andando

In questo capitolo costruiamo, pezzo per pezzo, tutto ciò che serve per risolvere qualunque esercizio sulla virata: l'equilibrio delle forze nella virata corretta, il legame fra angolo di sbandamento e fattore di carico, il raggio e la velocità angolare, il costo aerodinamico della manovra in termini di portanza, resistenza, spinta e potenza, la virata piatta e infine il raccordo fra virata e salita a potenza costante. Alla fine del capitolo un formulario riassume tutte le relazioni: gli esercizi del capitolo 2 non useranno *nulla* che non sia stato dimostrato qui.

1.1 Il problema fisico: perché virare “costa”

In volo rettilineo orizzontale uniforme l'ala deve produrre una portanza L esattamente pari al peso W : né più né meno. Quando il pilota vuole curvare, la traiettoria diventa un arco di circonferenza e compare una richiesta in più: serve una *forza centripeta*, diretta verso il centro della curva, capace di deviare continuamente il vettore velocità. Un'automobile se la fa “regalare” dall'attrito dei pneumatici; un velivolo non ha nulla su cui appoggiarsi, e l'unica forza aerodinamica di grande intensità di cui dispone è la portanza. La soluzione è tanto elegante quanto obbligata: *inclinare* il velivolo attorno all'asse di rollio, così che la portanza — sempre ortogonale alle ali — si pieghi verso il centro della virata. La sua componente orizzontale fa da forza centripeta; quella verticale continua a sostenere il peso.

Questa semplice osservazione ha una conseguenza importante: se una parte della portanza va “spesa” in orizzontale, la componente verticale da sola non basta più a equilibrare il peso, e l'ala deve produrre *complessivamente più portanza di quanta ne servisse in volo rettilineo*. Più portanza significa maggiore resistenza indotta, quindi maggiore spinta o potenza necessaria: ecco perché virare costa. Tutto il capitolo non è che la quantificazione rigorosa di questa frase.

1.2 La virata corretta: equilibrio e fattore di carico

Definizione

Si dice *virata corretta* (o *coordinata*) la virata compiuta a quota costante, a velocità costante in modulo, senza derapata: il piano di simmetria del velivolo contiene in ogni istante il vettore velocità, e la risultante di peso e forza centrifuga apparente giace nel piano di simmetria. Il pilota la riconosce perché la pallina dello sbandometro resta al centro.

Sia ϕ l'angolo di sbandamento (*bank angle*), V il modulo della velocità, R il raggio della traiettoria circolare e $m = W/g$ la massa del velivolo. Proiettando l'equilibrio dinamico lungo la verticale e lungo la direzione radiale (dove scriviamo la forza centripeta $F_c = mV^2/R$) otteniamo il sistema fondamentale:

$$\begin{cases} L \cos \phi = W & \text{(equilibrio verticale)} \\ L \sin \phi = \frac{W}{g} \frac{V^2}{R} & \text{(equilibrio radiale)} \end{cases} \quad (1.1)$$

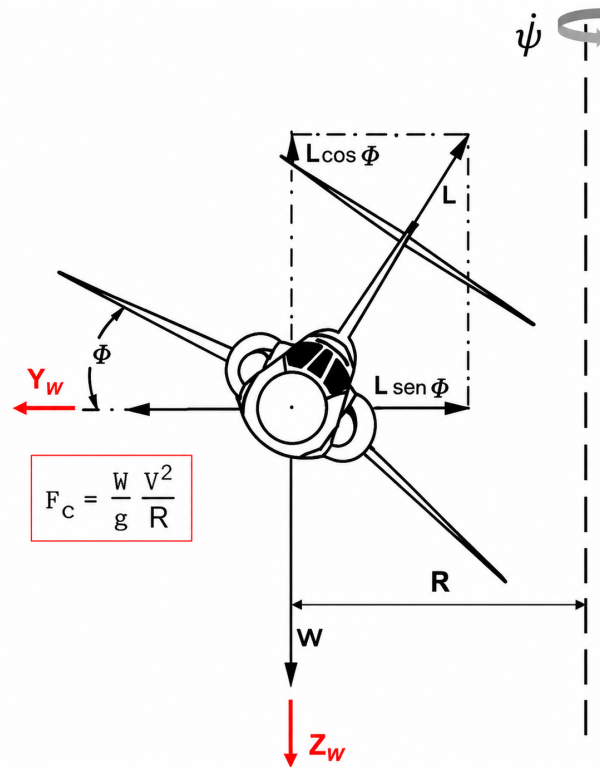


Figura 1.1. Equilibrio delle forze nella virata corretta: la portanza L , inclinata dell'angolo di sbandamento φ , ha una componente verticale $L \cos \varphi$ che equilibra il peso W e una componente orizzontale $L \sin \varphi$ che funge da forza centripeta.

Dalla prima equazione discende immediatamente il legame fra sbandamento e *fattore di carico* (o fattore di contingenza) $n = L/W$:

Formula chiave

$$n = \frac{L}{W} = \frac{1}{\cos \varphi} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = \arccos \frac{1}{n} \quad (1.2)$$

Il fattore di carico in virata corretta dipende *solo* dall'angolo di sbandamento: non dal peso, non dalla velocità, non dalla quota.

Osservazione

La (1.2) merita qualche ordine di grandezza. A $\varphi = 30^\circ$ si ha $n = 1,15$: la struttura “pesa” il 15 % in più e i passeggeri quasi non se ne accorgono. A 60° si ha $n = 2$: ognuno sente il proprio peso raddoppiato, ed è il limite tipico delle manovre in linea. A 76° (che incontreremo in un esercizio) si ha già $n = 4,13$: territorio da velivoli acrobatici o militari, con strutture verificate per questi carichi. La crescita di $1/\cos \varphi$ è rapidissima oltre i 70° : a 84° servirebbe $n \simeq 9,6$.

1.3 Raggio di virata, velocità angolare, tempo di inversione

Dividendo membro a membro le due equazioni del sistema (1.1) la portanza scompare e resta la relazione puramente cinematica

$$\tan \varphi = \frac{V^2}{g R}, \quad (1.3)$$

che lega sbandamento, velocità e raggio. Risolvendo rispetto a R e usando l'identità $\tan \varphi = \sqrt{n^2 - 1}$ (immediata dalla (1.2) pensando al triangolo rettangolo di ipotenusa n e cateto 1):

Formula chiave

$$R = \frac{V^2}{g \tan \varphi} = \frac{V^2}{g \sqrt{n^2 - 1}} \quad (1.4)$$

La velocità angolare della virata e il tempo per invertire la rotta (mezzo giro, π radianti) seguono dalla cinematica del moto circolare:

$$\Omega = \frac{V}{R} = \frac{g \tan \varphi}{V}, \quad t_{180^\circ} = \frac{\pi}{\Omega}. \quad (1.5)$$

Osservazione

La (1.4) contiene una lezione operativa: a parità di sbandamento il raggio cresce con il *quadrato* della velocità. Un caccia che virasse a 850 km/h con $\varphi = 60^\circ$ descriverebbe un cerchio di oltre 3 km di raggio; un alianti a 90 km/h con lo stesso sbandamento gira in appena 37 m. Per virare stretto conviene rallentare, ben più che aumentare lo sbandamento.

1.4 La velocità in virata ad assetto costante

Negli esercizi ricorre di continuo l'ipotesi “mantenendo costante l'assetto”, cioè lo stesso angolo d'incidenza e dunque lo stesso coefficiente di portanza C_L del volo rettilineo. Scriviamo la portanza nelle due condizioni. In volo rettilineo $L = W$:

$$W = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho C_L}}. \quad (1.6)$$

In virata $L = nW$; se C_L è lo stesso deve essere la velocità a farsi carico dell'aumento di portanza:

$$nW = \frac{1}{2} \rho S V_v^2 C_L \quad \Rightarrow \quad V_v = V \sqrt{n} = \frac{V}{\sqrt{\cos \varphi}} \quad (1.7)$$

La velocità in virata ad assetto costante è quella di volo rettilineo moltiplicata per $\sqrt{n}$: per virare a 60° ($n = 2$) mantenendo la stessa incidenza occorre volare il 41 % più veloci.

Se invece la virata avviene a *velocità costante* (stessa V del volo rettilineo), è il coefficiente di portanza a doversi adeguare:

$$C_{L_v} = \frac{2n(W/S)}{\rho V^2} = n C_L = \frac{C_L}{\cos \varphi}. \quad (1.8)$$

Le due strade — adeguare la velocità o adeguare l'incidenza — sono i due binari su cui corrono tutti gli esercizi: la prima cosa da fare, leggendo un testo, è capire quale delle due grandezze il pilota mantiene costante.

Attenzione

La (1.8) nasconde il pericolo aeronautico della virata: se il velivolo è già lento e vicino al $C_{L_{\max}}$, l'aumento di C_L richiesto dalla virata può portarlo allo stallo. La velocità di stallo in virata cresce infatti come $V_{s,v} = V_s \sqrt{n}$: a 60° di sbandamento lo stallo arriva il 41 % prima. È il meccanismo del classico, fatale “stallo in virata base” in circuito di atterraggio.

1.5 Aerodinamica: la polare parabolica

Per passare dalle portanze alle resistenze usiamo la polare parabolica di Prandtl, che per un velivolo di allungamento alare $AR = b^2/S$ scriviamo nella forma ideale (fattore di Oswald unitario):

Formula chiave

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi AR} \quad (1.9)$$

C_{D_0} è il coefficiente di resistenza a portanza nulla (attrito e forma); il secondo termine è la resistenza indotta, il “prezzo aerodinamico” della portanza.

L'efficienza aerodinamica è $E = C_L/C_D = L/D$: negli esercizi sui turbogetti è spesso assegnata direttamente e permette di calcolare la resistenza come $D = W/E$ senza passare per la polare.

1.6 Spinta e potenza necessarie in virata

Ecco il cuore energetico del problema. In volo rettilineo orizzontale la spinta necessaria è $T = D = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_D$ e la potenza necessaria è $\Pi_n = D V = \frac{1}{2}\rho S V^3 C_D$. Vediamo come cambiano in virata *ad assetto costante* (C_L , e quindi C_D ed E , invariati).

Spinta. Poiché $D = L/E$ e in virata $L = nW$:

$$T_v = \frac{nW}{E} = nT. \quad (1.10)$$

La spinta necessaria cresce linearmente con il fattore di carico.

Potenza. La potenza necessaria è $\Pi_{n,v} = T_v V_v$, con $T_v = nT$ e $V_v = V\sqrt{n}$:

Formula chiave

$$\frac{\Pi_{n,v}}{\Pi_n} = n \cdot \sqrt{n} = n^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{\cos^3 \varphi}} \quad (1.11)$$

In virata ad assetto costante la potenza necessaria cresce come $n^{3/2}$: a 60° di sbandamento serve $2^{1,5} \simeq 2,83$ volte la potenza del volo rettilineo. Se il rendimento dell'elica η resta costante, lo stesso rapporto vale per le potenze al motore: $\Pi_{m,v}/\Pi_m = n^{3/2}$, essendo $\Pi_m = \Pi_n/\eta$.

Osservazione

Da dove escono i due fattori? Il fattore n viene dalla resistenza (più portanza $\Rightarrow$ più resistenza, a pari efficienza); il fattore $\sqrt{n}$ viene dalla velocità maggiore a cui bisogna volare per generare quella portanza allo stesso assetto. La potenza, prodotto di forza e velocità, li raccoglie entrambi. È lo stesso motivo per cui in bicicletta una salita ripida presa “di slancio” costa molta più potenza che presa piano: forza e velocità si moltiplicano.

Se invece la virata è a *velocità costante*, i coefficienti aerodinamici cambiano ($C_{L,v} = nC_L$) e i rapporti eleganti si perdono: si ricalcola la polare con $C_{L,v}$, si ottiene $C_{D,v}$ e si scrive direttamente

$$\Pi_{n,v} = \frac{1}{2}\rho S V^3 C_{D,v}, \quad T_v = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{D,v}. \quad (1.12)$$

1.7 La virata piatta

Nella virata piatta il velivolo non si inclina: resta con le ali orizzontali e si mette in derapata, cioè avanza con la fusoliera ruotata di un *angolo di deriva* δ rispetto al vettore velocità. Il vento relativo investe la fusoliera e i piani

verticali di fianco e genera una forza aerodinamica laterale, detta *devianza*, che possiamo scrivere in analogia con portanza e resistenza:

$$F_y = \frac{1}{2} \rho S V^2 C'_D \delta, \quad (1.13)$$

con δ in radianti e C'_D *coefficiente angolare di devianza* (la pendenza della retta devianza–deriva, riferita alla superficie alare S). È la devianza a fare da forza centripeta:

$$\frac{W}{g} \frac{V^2}{R} = \frac{1}{2} \rho S V^2 C'_D \delta \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2(W/S)}{g \rho C'_D \delta} = \frac{2m}{\rho S C'_D \delta}. \quad (1.14)$$

La velocità è scomparsa: il raggio della virata piatta non dipende dalla velocità ma solo dal carico alare, dalla quota e dall'entità della derapata. Sul piano verticale l'equilibrio resta quello del volo rettilineo, $L = W$, perché le ali sono orizzontali: la velocità si calcola dalla (1.6) con il C_L dell'assetto assegnato.

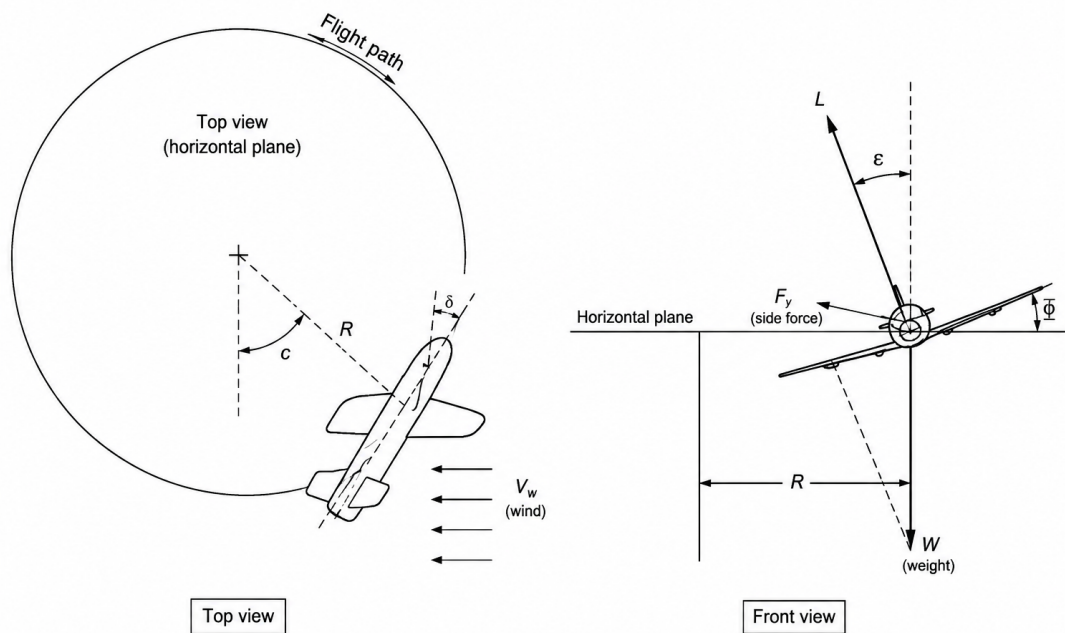


Figura 1.2. Virata piatta: il velivolo, ad ali orizzontali, avanza con un angolo di deriva δ ; la devianza F_y generata dal vento laterale sulla fusoliera fornisce la forza centripeta.

Osservazione

Confrontiamo gli ordini di grandezza: la devianza di una fusoliera è piccola rispetto alla portanza di un'ala, quindi i raggi delle virate piatte sono enormi — chilometri, contro le centinaia di metri di una virata corretta. La virata piatta è scomoda (accelerazione laterale in cabina) e inefficiente: si usa per piccole correzioni di rotta, per esempio in fase di mira dei vecchi bombardieri o nei ritocchi finali dell'allineamento pista.

1.8 Raccordo virata–salita: il bilancio di potenza

Molti esercizi d'esame concatenano una virata e una salita (o discesa) “mantenendo costanti l'assetto e la potenza del motore”. Lo strumento risolutivo è il bilancio di potenza in salita. Detto β l'angolo di rampa, l'equilibrio lungo la traiettoria e ortogonalmente ad essa dà

$$T = D + W \sin \beta, \quad L = W \cos \beta, \quad (1.15)$$

e moltiplicando la prima per V si ottiene il bilancio delle potenze:

Formula chiave

$$\Pi_d = D V + W V_z, \quad V_z = V \sin \beta. \quad (1.16)$$

La potenza disponibile si spende in due voci: vincere la resistenza ($D V$) e sollevare il peso ($W V_z$). Il rateo di salita è dunque $V_z = (\Pi_d - D V)/W$: l'*esubero di potenza* diviso per il peso.

Il “ponte” fra le due fasi è sempre lo stesso: la potenza necessaria in virata, calcolata con la (1.12), coincide con la potenza disponibile nella successiva salita (motore e rendimento invariati); l'assetto costante trascina con sé C_L , C_D ed E .

Nota metodologica

Attenzione a un punto delicato che negli esercizi ripidi fa la differenza. Nella salita ad assetto costante la velocità *non* è quella del volo orizzontale: da $L = W \cos \beta$ segue

$$V(\beta) = \sqrt{\frac{2 W \cos \beta}{\rho S C_L}} = V_0 \sqrt{\cos \beta},$$

con V_0 velocità di volo rettilineo allo stesso assetto. Ma β è proprio l'incognita! Il problema è quindi implicito e si risolve per *approssimazioni successive*: si parte da $\beta = 0$ (quindi $V = V_0$ e $D = D_0$), si ricava un primo β dal bilancio di potenza (1.16), si aggiornano V , L e D con quel β , e si itera fino a convergenza. Per angoli di rampa piccoli (sotto i 5°) la prima approssimazione è già eccellente, perché $\cos \beta \simeq 1$; per angoli grandi le iterazioni sono indispensabili e — lo vedremo nell'esercizio 6 — è essenziale aggiornare a ogni passo *tutte* le grandezze, rateo di salita compreso.

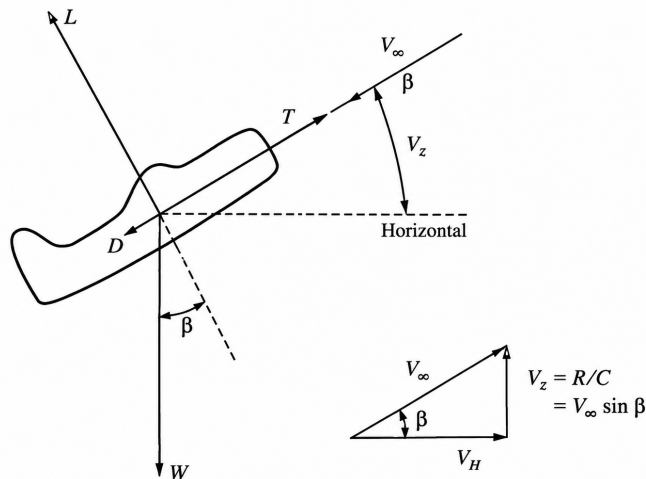


Figura 1.3. Il triangolo delle velocità in salita: la velocità V lungo la traiettoria, la sua componente orizzontale e il rateo di salita $V_z = V \sin \beta$.

1.9 L'atmosfera standard alle quote di lavoro

Tutti gli esercizi si svolgono in aria tipo internazionale (ISA). La tabella 1.1 raccoglie, in unità SI, i valori usati nel capitolo 2; $\sigma = \rho/\rho_0$ è la densità relativa ($\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$).

Tabella 1.1. Aria tipo ISA alle quote degli esercizi.

z [m]	ρ [kg/m ³]	σ	$1/\sqrt{\sigma}$
0	1,2250	1,0000	1,0000
3000	0,9091	0,7421	1,1608
4000	0,8191	0,6687	1,2229
4500	0,7768	0,6341	1,2558
4700	0,7603	0,6206	1,2694
5000	0,7361	0,6009	1,2900
6500	0,6238	0,5092	1,4014

1.10 Formulario della virata

Formulario — tutto ciò che serve per il capitolo 2

Virata corretta

$$n = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad \tan \varphi = \frac{V^2}{gR}, \quad R = \frac{V^2}{g\sqrt{n^2 - 1}}, \quad \Omega = \frac{V}{R}, \quad t_{180^\circ} = \frac{\pi}{\Omega}$$

Portanza e velocità

$$V = \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho C_L}}, \quad V_v = V\sqrt{n} \quad (C_L \text{ cost.}), \quad C_{L,v} = n C_L \quad (V \text{ cost.})$$

Aerodinamica

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi AR}, \quad E = \frac{C_L}{C_D}, \quad D = \frac{L}{E}$$

Spinta e potenza

$$T = D, \quad T_v = nT \quad (C_L \text{ cost.}), \quad \Pi_n = \frac{1}{2}\rho S V^3 C_D, \quad \frac{\Pi_{n,v}}{\Pi_n} = n^{3/2}, \quad \Pi_m = \frac{\Pi_n}{\eta}$$

Virata piatta

$$R = \frac{2m}{\rho S C_D' \delta}, \quad L = W$$

Salita/discesa ad assetto costante

$$\Pi_d = DV + WV_z, \quad V_z = V \sin \beta, \quad L = W \cos \beta, \quad V(\beta) = V_0 \sqrt{\cos \beta}$$

Il senso di tutto questo

La virata è il banco di prova perfetto della meccanica del volo: in una sola manovra convivono l'equilibrio delle forze (statica), il moto circolare (cinematica), la polare (aerodinamica) e il bilancio di potenza (energetica). Il filo conduttore è uno solo: *la portanza è una risorsa finita che va ripartita fra sostentamento e manovra*, e ogni scelta del pilota — inclinare di più, rallentare, tirare di più — sposta il costo da una voce all'altra del bilancio. Chi padroneggia questo bilancio ha in mano non solo gli esercizi d'esame, ma il modo di ragionare di chi i velivoli li progetta e li verifica a fattore di carico.

Esercizi svolti

Dove stiamo andando

Quindici esercizi, in ordine di difficoltà crescente: prima le virate corrette “pure” (sbandamento, raggio, coefficienti, potenze e spinte), poi la virata piatta, infine i raccordi virata–salita e virata–discesa, dove il bilancio di potenza va risolto per approssimazioni successive. Ogni esercizio segue lo stesso schema: *dati* (con conversione in unità SI), *strategia* (perché si procede in quel modo), *svolgimento* passo passo, *verifica* finale. I pesi assegnati in kg_f sono convertiti in newton con $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; le potenze sono espresse in kW, con il valore in cavalli ($1 \text{ CV} = 735,5 \text{ W}$) fra parentesi dove utile al confronto con la tradizione motoristica.

Esercizio 1 — virata corretta di un motoelica: il quadro completo

Testo. Un velivolo ad elica di massa $m = 5400 \text{ kg}$ e carico alare $W/S = 2158 \text{ N/m}^2$ (pari a $220 \text{ kg}_f/\text{m}^2$) vola in volo rettilineo orizzontale alla quota $z = 3000 \text{ m}$ alla velocità $V = 470 \text{ km/h}$. Mantenendo costante la velocità, il velivolo compie una virata corretta con fattore di carico $n = 1,6$. Sapendo che l'allungamento alare è $AR = 5,9$, che il coefficiente di resistenza a portanza nulla è $C_{D_0} = 0,022$ e che il rendimento dell'elica è $\eta = 0,82$, calcolare: a) l'angolo di sbandamento; b) il raggio di virata; c) il coefficiente di portanza in volo rettilineo e in virata; d) la potenza che il motore deve fornire nelle due condizioni; e) la velocità angolare di virata.

Dati (SI). $W = mg = 52\,958 \text{ N}$; $W/S = 2158 \text{ N/m}^2 \Rightarrow S = W/(W/S) = 24,55 \text{ m}^2$; $\rho(3000 \text{ m}) = 0,9091 \text{ kg/m}^3$; $V = 470/3,6 = 130,6 \text{ m/s}$.

Strategia. È l'esercizio “manifesto” della virata a *velocità costante*: lo sbandamento discende da n tramite la (1.2), il raggio dalla (1.4); poiché V non cambia, il costo della virata si scarica tutto sui coefficienti ((1.8)) e quindi, attraverso la polare, sulla potenza ((1.12)).

a) Angolo di sbandamento. Dalla (1.2):

$$\varphi = \arccos \frac{1}{n} = \arccos \frac{1}{1,6} = 51,32^\circ (= 51^\circ 19' 4'').$$

b) Raggio di virata. Con $\sqrt{n^2 - 1} = \sqrt{1,56} = 1,249$, dalla (1.4):

$$R = \frac{V^2}{g\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{130,6^2}{9,81 \cdot 1,249} \simeq 1392 \text{ m}.$$

c) Coefficienti di portanza. In volo rettilineo, dalla (1.6) risolta rispetto a C_L :

$$C_L = \frac{2(W/S)}{\rho V^2} = \frac{2 \cdot 2158}{0,9091 \cdot 130,6^2} = 0,279.$$

In virata a velocità costante, dalla (1.8): $C_{L_v} = n C_L = 1,6 \cdot 0,279 = 0,446$. Il pilota, per non perdere quota, deve “tirare”: l'incidenza aumenta finché il coefficiente di portanza non cresce del fattore n .

d) Potenze al motore. Con la polare (1.9) ($\pi AR = 18,54$):

$$C_D = 0,022 + \frac{0,279^2}{18,54} = 0,0262, \quad C_{D_v} = 0,022 + \frac{0,446^2}{18,54} = 0,0327.$$

Le potenze necessarie, con $\frac{1}{2}\rho S V^3 = 0,5 \cdot 0,9091 \cdot 24,55 \cdot 130,6^3 = 24,83 \text{ MW}$:

$$\Pi_n = \frac{1}{2}\rho S V^3 C_D = 650 \text{ kW}, \quad \Pi_{n,v} = \frac{1}{2}\rho S V^3 C_{D,v} = 812 \text{ kW}.$$

Le potenze al motore si ottengono dividendo per il rendimento:

$$\Pi_m = \frac{\Pi_n}{\eta} = \frac{650}{0,82} \simeq 793 \text{ kW (1078 CV)}, \quad \Pi_{m,v} = \frac{812}{0,82} \simeq 990 \text{ kW (1347 CV)}.$$

La virata a $n = 1,6$ costa circa il 25 % di potenza in più.

e) Velocità angolare. Dalla (1.5): $\Omega = V/R = 130,6/1392 = 0,0938 \text{ rad/s}$, cioè un giro completo in $2\pi/\Omega \simeq 67 \text{ s}$.

Verifica. Il rapporto $\Pi_{n,v}/\Pi_n = 812/650 = 1,25$ coincide con $C_{D,v}/C_D = 0,0327/0,0262$, come deve essere a V costante; l'angolo $\varphi = 51,3^\circ$ è coerente col raggio: $\tan \varphi = V^2/(gR) = 130,6^2/(9,81 \cdot 1392) = 1,249 = \tan 51,3^\circ$. ■

Esercizio 2 — turbogetto in virata: spinte e tempo di inversione

Testo. Un turbogetto di massa $m = 7300 \text{ kg}$ e carico alare $W/S = 2747 \text{ N/m}^2$ ($280 \text{ kg}_f/\text{m}^2$) vola in volo rettilineo orizzontale a $z = 5000 \text{ m}$ all'assetto $C_L = 0,8$, cui corrisponde un'efficienza $E = 11$. Mantenendo costante l'assetto, il pilota compie una virata corretta con sbandamento $\varphi = 42^\circ$. Calcolare: a) la velocità in volo rettilineo; b) la velocità in virata; c) il fattore di carico; d) il raggio di virata; e) la spinta necessaria nelle due condizioni; f) la velocità angolare; g) il tempo per invertire la rotta.

Dati (SI). $W = 71\,599 \text{ N}$; $S = 26,07 \text{ m}^2$; $\rho(5000 \text{ m}) = 0,7361 \text{ kg/m}^3$.

Strategia. Qui l'assetto è costante: la velocità si adegua ((1.7)) e la spinta cresce come n ((1.10)). L'efficienza assegnata ci risparmia la polare: $D = W/E$ in rettilineo, $D_v = nW/E$ in virata.

a) Velocità in rettilineo. Dalla (1.6):

$$V = \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho C_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2747}{0,7361 \cdot 0,8}} = 96,6 \text{ m/s} = 348 \text{ km/h}.$$

b–c) Velocità in virata e fattore di carico. $n = 1/\cos 42^\circ = 1,346$; dalla (1.7):

$$V_v = \frac{V}{\sqrt{\cos \varphi}} = \frac{96,6}{\sqrt{0,743}} = 112,0 \text{ m/s} = 403 \text{ km/h}.$$

d) Raggio. $R = V_v^2/(g \tan 42^\circ) = 112,0^2/(9,81 \cdot 0,9004) = 1421 \text{ m}$.

e) Spinte. In volo rettilineo $T = D = W/E = 71599/11 = 6510 \text{ N}$ (circa 664 kg_f). In virata, per la (1.10): $T_v = nT = 1,346 \cdot 6510 = 8760 \text{ N}$ (893 kg_f). In alternativa: $T_v = \frac{1}{2}\rho S V_v^2 C_D$ con $C_D = C_L/E$, che restituisce lo stesso valore — utile come controllo incrociato.

f–g) Velocità angolare e inversione di rotta. $\Omega = V_v/R = 112,0/1421 = 0,0788 \text{ rad/s}$; per ruotare la prua di 180° (π radianti):

$$t_{180^\circ} = \frac{\pi}{\Omega} = \frac{3,1416}{0,0788} \simeq 39,9 \text{ s}.$$

Verifica. $V_v/V = 1,160 = \sqrt{1,346} = \sqrt{n} \checkmark$; $T_v/T = 1,346 = n \checkmark$. Un turbogetto leggero impiega dunque circa 40 s e un corridoio largo quasi 3 km per tornare sui propri passi a 42° di banco: numeri da tenere a mente quando si parla di spazi di manovra. ■

Esercizio 3 — dalla virata alla rampa di salita (angoli piccoli)

Testo. Un velivolo ad elica compie una virata corretta di raggio $R = 850$ m alla quota $z = 3000$ m e alla velocità $V = 110$ m/s. Uscendo dalla virata, il pilota pone il velivolo su una rampa di salita conservando la velocità e la potenza del motore. Calcolare l'angolo di rampa, note le caratteristiche: $m = 12\,500$ kg; $W/S = 2649$ N/m² (270 kgf/m²); $C_{D0} = 0,022$; $AR = 7,5$.

Dati (SI). $W = 122\,625$ N; $S = 46,3$ m²; $\rho = 0,9091$ kg/m³.

Strategia. Il rendimento non è assegnato ma è dichiarato costante: se Π_m e η non cambiano, non cambia neppure $\Pi_d = \eta \Pi_m$. Il piano è quindi: (1) ricostruire la virata (φ dal raggio, poi $C_{L,v}$, $C_{D,v}$) per calcolare la potenza necessaria in virata, che è anche la potenza *disponibile* della successiva salita; (2) alla stessa velocità, calcolare la potenza necessaria del volo rettilineo; (3) l'esubero, diviso per il peso, dà il rateo di salita (1.16) e quindi β .

Passo 1 — La virata. Dalla (1.3):

$$\tan \varphi = \frac{V^2}{gR} = \frac{110^2}{9,81 \cdot 850} = 1,451 \Rightarrow \varphi = 55,44^\circ, \quad n = \frac{1}{\cos \varphi} = 1,763.$$

Il coefficiente di portanza in virata (equilibrio $L = nW$ alla velocità V):

$$C_{L,v} = \frac{2n(W/S)}{\rho V^2} = \frac{2 \cdot 1,763 \cdot 2649}{0,9091 \cdot 110^2} = 0,849, \quad C_{D,v} = 0,022 + \frac{0,849^2}{\pi \cdot 7,5} = 0,0526.$$

Potenza necessaria in virata (= Π_d della salita):

$$\Pi_{d,v} = \frac{1}{2} \rho S V^3 C_{D,v} = 0,5 \cdot 0,9091 \cdot 46,3 \cdot 110^3 \cdot 0,0526 \simeq 1472 \text{ kW (2002 CV)}.$$

Passo 2 — Il volo rettilineo alla stessa velocità. Uscito dalla virata il velivolo torna a $L \simeq W$, dunque l'assetto si *alleggerisce*:

$$C_L = \frac{C_{L,v}}{n} = 0,481, \quad C_D = 0,022 + \frac{0,481^2}{\pi \cdot 7,5} = 0,0318,$$

$$\Pi_n = \frac{1}{2} \rho S V^3 C_D \simeq 892 \text{ kW}.$$

Passo 3 — Il bilancio di potenza. Dalla (1.16):

$$V_z = \frac{\Pi_d - \Pi_n}{W} = \frac{(1472 - 892) \cdot 10^3}{122625} = 4,74 \text{ m/s}, \quad \sin \beta = \frac{V_z}{V} = \frac{4,74}{110} = 0,0431,$$

$$\boxed{\beta = 2,47^\circ \simeq 2^\circ 28'}$$

Verifica. β è piccolo: $\cos \beta = 0,9991$, quindi l'approssimazione implicita $L \simeq W$ e $V(\beta) \simeq V$ nel passo 2 è pienamente giustificata (errore sotto lo 0,1%) e non servono iterazioni. La grande potenza “liberata” uscendo da una virata a $n = 1,76$ compra comunque solo $2,5^\circ$ di rampa: la salita è energeticamente costosa. ■

Esercizio 4 — potenza in virata per via adimensionale

Testo. Un velivolo ad elica di massa $m = 15\,000$ kg compie una virata corretta con sbandamento $\varphi = 52^\circ$ mantenendo l'assetto del volo rettilineo. Supponendo costante il rendimento dell'elica, calcolare la potenza del motore in virata, sapendo che in volo rettilineo orizzontale, alla stessa quota e allo stesso assetto, è $\Pi_m = 1324$ kW (1800 CV).

Strategia. Nessuna quota, nessuna superficie, nessuna polare: il testo ci sta dicendo che la risposta non dipende da questi dati. È il caso ideale per il metodo *adimensionale*: costruire il rapporto $\Pi_{m,v}/\Pi_m$ e osservare che tutto si semplifica tranne l'effetto del fattore di carico. Dimostriamo la (1.11) ripercorrendo la catena.

Svolgimento. A rendimento costante il rapporto fra le potenze al motore coincide con quello fra le potenze necessarie:

$$\frac{\Pi_{m,v}}{\Pi_m} = \frac{\Pi_{n,v}/\eta}{\Pi_n/\eta} = \frac{\Pi_{n,v}}{\Pi_n} = \frac{\frac{1}{2}\rho S V_v^3 C_D}{\frac{1}{2}\rho S V^3 C_D} = \left(\frac{V_v}{V}\right)^3,$$

dove C_D si semplifica perché l'assetto (quindi C_L e la polare) è lo stesso. Il rapporto fra le velocità viene dall'equilibrio verticale: in rettilineo $L = W$, in virata $L_v \cos \varphi = W$, e con lo stesso C_L :

$$\frac{V_v}{V} = \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Pi_{m,v}}{\Pi_m} = \frac{1}{\sqrt{\cos^3 \varphi}} = n^{3/2}.$$

Con $\varphi = 52^\circ$: $\cos \varphi = 0,6157$, $\cos^3 \varphi = 0,2334$, $1/\sqrt{0,2334} = 2,07$:

$$\Pi_{m,v} = 2,07 \cdot 1324 \text{ kW} \simeq 2741 \text{ kW (3726 CV)}.$$

Verifica. $n = 1/\cos 52^\circ = 1,624$ e $n^{3/2} = 1,624^{1,5} = 2,07 \checkmark$. Si noti che la massa del velivolo, pur assegnata, non entra mai nel calcolo: nei rapporti adimensionali i dati ridondanti servono solo a mettere alla prova la lucidità dello studente. ■

Esercizio 5 — virata corretta e virata piatta a confronto

Testo. Un motoelica di massa $m = 15\,000 \text{ kg}$ e carico alare $W/S = 2354 \text{ N/m}^2$ (240 kgf/m^2) vola a $z = 5000 \text{ m}$ all'assetto $C_L = 0,6$ in volo rettilineo orizzontale. 1) Mantenendo l'assetto, compie una virata corretta con $\varphi = 35^\circ$: calcolare velocità e raggio di virata. 2) Determinare raggio e velocità della *virata piatta* che si avrebbe se il velivolo, sempre alla stessa incidenza, assumesse un angolo di deriva $\delta = 15^\circ$, con coefficiente angolare di devianza $C'_D = 0,4$.

Dati (SI). $W = 147\,150 \text{ N}$; $S = 62,5 \text{ m}^2$; $\rho(5000 \text{ m}) = 0,7361 \text{ kg/m}^3$; $\delta = 15^\circ = 0,2618 \text{ rad}$.

Strategia. Due mondi a confronto con gli stessi dati: nella virata corretta l'equilibrio verticale "sente" lo sbandamento ($L \cos \varphi = W$) e la forza centripeta è la componente orizzontale della portanza; nella virata piatta l'equilibrio verticale è quello del volo rettilineo ($L = W$) e la forza centripeta è la devianza (1.13).

1) Virata corretta. Dall'equilibrio verticale con C_L fissato:

$$V_v = \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho C_L \cos \varphi}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2354}{0,7361 \cdot 0,6 \cdot \cos 35^\circ}} = 114,1 \text{ m/s} = 411 \text{ km/h},$$

$$R = \frac{V_v^2}{g \tan \varphi} = \frac{114,1^2}{9,81 \cdot 0,7002} = 1895 \text{ m}.$$

2) Virata piatta. Dalla (1.14), dove la velocità non compare:

$$R_p = \frac{2m}{\rho S C'_D \delta} = \frac{2 \cdot 15000}{0,7361 \cdot 62,5 \cdot 0,4 \cdot 0,2618} \simeq 6230 \text{ m}.$$

La velocità discende dall'equilibrio verticale ordinario (1.6):

$$V = \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho C_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2354}{0,7361 \cdot 0,6}} = 103,2 \text{ m/s} = 372 \text{ km/h}.$$

Verifica e confronto. A parità di velivolo, assetto e quota, la virata corretta a soli 35° di banco chiude il cerchio in 1895 m; la virata piatta, pur con una deriva vistosa di 15° , ne richiede 6230 m: più del triplo. È la conferma quantitativa di quanto detto in teoria: la fusoliera è un pessimo generatore di forza laterale, e la virata piatta resta una manovra correttiva, non una manovra di rotta. ■

Esercizio 6 — virata acrobatica e rampa ripida: quando l'iterazione è d'obbligo

Testo. Un velivolo ad elica con $m = 8700$ kg, $S = 31$ m², $AR = 6,3$, $C_{D_0} = 0,022$ compie una virata corretta a $z = 4000$ m con sbandamento $\varphi = 76^\circ$, all'assetto $C_L = 0,82$. Determinare: a) il fattore di carico; b) la velocità di virata; c) il raggio. Determinare inoltre con quale angolo di rampa può salire il velivolo se, uscito dalla virata, si pone su traiettoria rettilinea mantenendo costanti assetto e potenza del motore.

Dati (SI). $W = 85\,319$ N; $\rho(4000 \text{ m}) = 0,8191$ kg/m³.

Strategia. La prima parte è routine (virata ad assetto costante). La seconda è il caso più istruttivo dell'intera monografia: la potenza liberata uscendo da una virata a $n > 4$ è enorme e l'angolo di rampa risultante è *grande*, quindi le formule per angoli piccoli falliscono e il bilancio di potenza (1.16) va risolto iterativamente aggiornando a ogni passo velocità, portanza e resistenza.

a–c) La virata.

$$n = \frac{1}{\cos 76^\circ} = 4,13;$$

$$V_v = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L \cos \varphi}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 85319}{0,8191 \cdot 31 \cdot 0,82 \cdot 0,2419}} = 184,1 \text{ m/s (663 km/h)};$$

$$R = \frac{V_v^2}{g \tan 76^\circ} = \frac{184,1^2}{9,81 \cdot 4,011} = 861 \text{ m}.$$

Un dato per riflettere: a $n = 4,13$ ogni longherone, ogni ordinata, ogni occupante “pesa” più di quattro volte il normale.

La potenza disponibile. Con la polare: $C_D = 0,022 + 0,82^2/(\pi \cdot 6,3) = 0,0560$, e

$$\Pi_d = \Pi_{n,v} = \frac{1}{2} \rho S V_v^3 C_D = 0,5 \cdot 0,8191 \cdot 31 \cdot 184,1^3 \cdot 0,0560 \simeq 4431 \text{ kW (6024 CV)}.$$

La rampa: impostazione. In salita ad assetto costante ((1.15)):

$$L = W \cos \beta, \quad V(\beta) = \sqrt{\frac{2W \cos \beta}{\rho S C_L}} = V_0 \sqrt{\cos \beta}, \quad D = \frac{L}{E} = W \cos \beta \frac{C_D}{C_L},$$

con $V_0 = \sqrt{2W/(\rho S C_L)} = 90,5$ m/s (volo rettilineo allo stesso assetto) e $C_D/C_L = 0,0683$. Il bilancio $\Pi_d = DV + WV \sin \beta$ dà

$$\sin \beta = \frac{1}{W} \left(\frac{\Pi_d}{V(\beta)} - D(\beta) \right).$$

Prima approssimazione ($\beta = 0$: $V = V_0$, $D_0 = W C_D/C_L = 5828$ N):

$$\sin \beta_1 = \frac{1}{85319} \left(\frac{4431 \cdot 10^3}{90,5} - 5828 \right) = 0,505 \Rightarrow \beta_1 \simeq 30,3^\circ.$$

Angolo enorme: le ipotesi “ $\cos \beta \simeq 1$ ” sono già saltate. **Iterazioni** (a ogni passo si aggiornano V , D e si ricava il nuovo β):

iterazione	β [°]	V [m/s]	V_z [m/s]
1	30,33	90,53	—
2	33,96	84,10	46,98
3	34,97	82,45	46,05
4	35,30	81,95	47,35
⋮			
convergenza	35,45	81,71	47,39

$$\beta \simeq 35,4^\circ (35^\circ 27'), \quad V \simeq 81,7 \text{ m/s}, \quad V_z \simeq 47,4 \text{ m/s}.$$

Nota metodologica

Nella tradizione manualistica questo problema viene spesso risolto congelando il rateo di salita al valore della prima approssimazione ($V_z \simeq 45,7 \text{ m/s}$ nel nostro caso) e iterando solo su portanza e velocità: si converge così verso $\beta \simeq 33,6^\circ$. È uno schema incompleto: il rateo di salita $V_z = (\Pi_d - DV)/W$ dipende da V e D , che cambiano a ogni iterazione, e va aggiornato anch'esso. La soluzione autoconsistente — verificata numericamente risolvendo il punto fisso completo — è $\beta \simeq 35,4^\circ$. A questi angoli, peraltro, l'intero modello quasi-stazionario va preso come stima di prima approssimazione: un velivolo reale in rampa a 35° è in condizioni tutt'altro che stazionarie.

Verifica. Bilancio di potenza al punto di convergenza: $DV + WV_z = 4761 \cdot 81,7 + 85319 \cdot 47,39 \simeq 4432 \text{ kW} = \Pi_d \checkmark$. ■

Esercizio 7 — dalla salita alla virata: il percorso inverso

Testo. Un velivolo di massa $m = 9200 \text{ kg}$ e superficie alare $S = 33,6 \text{ m}^2$ sale su una traiettoria inclinata di $\beta = 12^\circ$ alla velocità $V = 450 \text{ km/h}$, a un assetto cui corrisponde un'efficienza $E = 9,5$. Alla quota $z = 4000 \text{ m}$ compie una virata corretta mantenendo costanti potenza del motore e assetto. Con rendimento dell'elica $\eta = 0,85$, determinare: a) il rateo di salita; b) i coefficienti di portanza e resistenza; c) l'esubero di potenza al motore rispetto al volo orizzontale alla stessa quota e assetto; d) sbandamento e raggio della virata.

Dati (SI). $W = 90\,221 \text{ N}$; $V = 125 \text{ m/s}$; $\rho(4000 \text{ m}) = 0,8191 \text{ kg/m}^3$.

Strategia. È l'esercizio 3 percorso al contrario: stavolta conosciamo la salita e dobbiamo dedurne la virata. La salita fissa la potenza necessaria $\Pi_{n,s}$; a potenza e assetto costanti, in virata sarà $\Pi_{n,v} = \Pi_{n,s}$, da cui la velocità di virata e, a cascata, portanza, sbandamento e raggio.

a) Rateo di salita. Dal triangolo delle velocità: $V_z = V \sin \beta = 125 \cdot \sin 12^\circ = 26,0 \text{ m/s}$.

b) Coefficienti. In salita $L = W \cos \beta = 90221 \cdot 0,9781 = 88\,250 \text{ N}$, quindi

$$C_L = \frac{2L}{\rho S V^2} = \frac{2 \cdot 88250}{0,8191 \cdot 33,6 \cdot 125^2} = 0,410, \quad C_D = \frac{C_L}{E} = \frac{0,410}{9,5} = 0,0432.$$

c) Esubero di potenza. Potenza necessaria in salita ((1.15) moltiplicata per V):

$$\Pi_{n,s} = \left(\frac{L}{E} + W \sin \beta \right) V = \left(\frac{88250}{9,5} + 90221 \cdot 0,2079 \right) \cdot 125 \simeq 3506 \text{ kW}.$$

In volo orizzontale allo stesso assetto la velocità è $V_0 = \sqrt{2W/(\rho S C_L)} = 126,4 \text{ m/s}$ e

$$\Pi_n = \frac{W}{E} V_0 = \frac{90221}{9,5} \cdot 126,4 \simeq 1200 \text{ kW}.$$

L'esubero di potenza necessaria e, dividendo per η , quello al motore:

$$\Delta \Pi_n = 3506 - 1200 = 2306 \text{ kW},$$

$$\Delta \Pi_m = \frac{\Delta \Pi_n}{\eta} = \frac{2306}{0,85} \simeq 2713 \text{ kW (3688 CV)}.$$

d) La virata. A potenza e assetto costanti, $\Pi_{n,v} = \Pi_{n,s}$, e dalla (1.12):

$$V_v = \sqrt[3]{\frac{2 \Pi_{n,s}}{\rho S C_D}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3506 \cdot 10^3}{0,8191 \cdot 33,6 \cdot 0,0432}} = 180,7 \text{ m/s}.$$

La portanza in virata a questo assetto e velocità:

$$L_v = \frac{1}{2} \rho S V_v^2 C_L = 0,5 \cdot 0,8191 \cdot 33,6 \cdot 180,7^2 \cdot 0,410 \simeq 184,4 \text{ kN},$$

da cui sbandamento e raggio:

$$\cos \varphi = \frac{W}{L_v} = \frac{90,2}{184,4} = 0,489 \Rightarrow \varphi \simeq 60,7^\circ (60^\circ 42'), \quad R = \frac{V_v^2}{g \tan \varphi} \simeq 1868 \text{ m}.$$

Verifica. $n = 1/\cos \varphi = 2,04$; controlliamo la potenza: $\frac{1}{2} \rho S V_v^3 C_D = 3506 \text{ kW} = \Pi_{n,s} \checkmark$. Il velivolo “converte” i 12° di rampa in una virata a più di 60° di banco: potenza e sbandamento sono due valute dello stesso bilancio. ■

Esercizio 8 — virata a velocità costante di un grosso motoelica

Testo. Un motoelica di massa $m = 19\,600 \text{ kg}$, superficie alare $S = 70 \text{ m}^2$ e apertura $b = 29 \text{ m}$ compie una virata corretta con sbandamento $\varphi = 55^\circ$ alla quota $z = 4000 \text{ m}$. La virata è effettuata a velocità costante, pari a quella del volo rettilineo orizzontale corrispondente all'assetto $C_L = 0,35$. Con $C_{D_0} = 0,019$ e rendimento delle eliche $\eta = 0,85$, calcolare: a) il fattore di carico; b) il raggio di virata; c) il coefficiente di portanza in virata; d) la velocità angolare; e) la potenza al motore in volo rettilineo e in virata.

Dati (SI). $W = mg = 192\,240 \text{ N}$; $AR = b^2/S = 29^2/70 = 12,0$; $\rho(4000 \text{ m}) = 0,8191 \text{ kg/m}^3$.

Strategia. Gemello “in grande” dell'esercizio 1: virata a V costante, quindi $C_{L,v} = n C_L$ e potenze dalla (1.12). L'unica novità è che l'allungamento va ricavato da apertura e superficie.

a) Fattore di carico. $n = 1/\cos 55^\circ = 1,743$.

b) Raggio. Prima la velocità del volo rettilineo ((1.6)):

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 192240}{0,8191 \cdot 70 \cdot 0,35}} = 138,4 \text{ m/s} = 498 \text{ km/h},$$

poi, dalla (1.4) con $\tan 55^\circ = 1,428$:

$$R = \frac{V^2}{g \tan \varphi} = \frac{138,4^2}{9,81 \cdot 1,428} \simeq 1368 \text{ m}.$$

c) Coefficiente di portanza in virata. A velocità costante, dalla (1.8): $C_{L,v} = n C_L = 1,743 \cdot 0,35 = 0,610$.

d) Velocità angolare. $\Omega = V/R = 138,4/1368 = 0,101 \text{ rad/s}$: un'inversione di rotta in $\pi/\Omega \simeq 31 \text{ s}$.

e) Potenze al motore. Polare con $\pi AR = 37,7$:

$$C_D = 0,019 + \frac{0,35^2}{37,7} = 0,0222, \quad C_{D,v} = 0,019 + \frac{0,610^2}{37,7} = 0,0289.$$

Con $\frac{1}{2}\rho SV^3 = 0,5 \cdot 0,8191 \cdot 70 \cdot 138,4^3 = 76,0 \text{ MW}$:

$$\Pi_m = \frac{\frac{1}{2}\rho SV^3 C_D}{\eta} = \frac{1691}{0,85} \simeq 1989 \text{ kW (2705 CV)},$$

$$\Pi_{m,v} = \frac{\frac{1}{2}\rho SV^3 C_{D,v}}{\eta} = \frac{2194}{0,85} \simeq 2581 \text{ kW (3509 CV)}.$$

Verifica. $\Pi_{m,v}/\Pi_m = C_{D,v}/C_D = 1,30$: a V costante il sovraccosto della virata è tutto e solo nell'aumento della resistenza indotta ($C_{L,v}^2/C_L^2 = n^2 = 3,04$ sul termine indotto). L'allungamento generoso ($AR = 12$) contiene il danno: con $AR = 6$ lo stesso $C_{L,v}$ sarebbe costato quasi il doppio di resistenza indotta. ■

Esercizio 9 — un bireattore di linea in virata di crociera

Testo. Un velivolo a reazione da trasporto di massa $m = 40\,000 \text{ kg}$, apertura $b = 33,7 \text{ m}$, superficie $S = 146 \text{ m}^2$, $C_{D_0} = 0,012$, compie una virata corretta a $z = 6500 \text{ m}$ mantenendo costante l'assetto e raggiungendo un fattore di carico $n = 1,25$. Sapendo che prima della virata volava in volo rettilineo orizzontale a $V = 756 \text{ km/h}$, calcolare: a) lo sbandamento; b) la velocità di virata; c) il raggio; d) la spinta necessaria in virata.

Dati (SI). $W = 392\,266 \text{ N}$; $V = 210 \text{ m/s}$; $AR = 33,7^2/146 = 7,78$; $\rho(6500 \text{ m}) = 0,6238 \text{ kg/m}^3$.

Strategia. Assetto costante $\Rightarrow$ la velocità si adegua ($V_v = V\sqrt{n}$) e la spinta scala con n . Per la spinta serve l'efficienza, che il testo non regala: la ricaviamo dalla polare all'assetto di crociera.

a) Sbandamento. $\varphi = \arccos(1/1,25) = 36,87^\circ (36^\circ 52' 12'')$: il classico “triangolo 3-4-5”, $\cos \varphi = 0,8$, $\sin \varphi = 0,6$, $\tan \varphi = 0,75$.

b) Velocità di virata. Dalla (1.7): $V_v = V\sqrt{n} = 210 \cdot \sqrt{1,25} = 234,8 \text{ m/s} = 845 \text{ km/h}$.

c) Raggio. Dalla (1.4) con $\sqrt{n^2 - 1} = \sqrt{0,5625} = 0,75$:

$$R = \frac{V_v^2}{g \cdot 0,75} = \frac{234,8^2}{7,358} \simeq 7495 \text{ m}.$$

Quasi otto chilometri di raggio: le virate dei liner di crociera sono curve dolcissime disegnate su decine di chilometri di cielo.

d) Spinta in virata. Assetto di crociera:

$$C_L = \frac{2W}{\rho SV^2} = \frac{2 \cdot 392266}{0,6238 \cdot 146 \cdot 210^2} = 0,195, \quad C_D = 0,012 + \frac{0,195^2}{\pi \cdot 7,78} = 0,0136,$$

$$E = \frac{C_L}{C_D} = 14,4 \Rightarrow T = \frac{W}{E} = 27,2 \text{ kN},$$

$$T_v = n T = 1,25 \cdot 27,2 \simeq 34,0 \text{ kN (circa } 3470 \text{ kgf)}.$$

Verifica. Controllo incrociato: $T_v = \frac{1}{2}\rho SV_v^2 C_D = 0,5 \cdot 0,6238 \cdot 146 \cdot 234,8^2 \cdot 0,0136 = 34,1 \text{ kN}$ ✓ (la piccola differenza è solo di arrotondamento). ■

Esercizio 10 — virata assegnata per raggio e fattore di carico, poi rampa

Testo. Un motoelica di massa $m = 26\,500$ kg, apertura $b = 26,7$ m, superficie $S = 82$ m², $C_{D_0} = 0,022$, compie una virata corretta di raggio $R = 1800$ m a velocità costante alla quota $z = 4000$ m, raggiungendo un fattore di carico $n = 1,5$. Al termine della virata si pone su una rampa di salita alla stessa velocità e con la stessa potenza. Calcolare: a) il coefficiente di portanza in virata; b) la potenza necessaria in virata; c) il rateo di salita e l'angolo di rampa.

Dati (SI). $W = 259\,876$ N; $AR = 26,7^2/82 = 8,69$; $\rho(4000\text{ m}) = 0,8191$ kg/m³.

Strategia. Raggio e fattore di carico insieme determinano la velocità di virata (dalla (1.4) letta al contrario); da lì la catena è quella dell'esercizio 3: $C_{L,v}$, $C_{D,v}$, potenza in virata = potenza disponibile in salita, esubero, rateo.

a) Velocità e coefficiente di portanza in virata. Da $n = 1,5$: $\tan \varphi = \sqrt{n^2 - 1} = 1,118$ ($\varphi = 48,19^\circ$). Dalla (1.4):

$$V_v = \sqrt{g R \tan \varphi} = \sqrt{9,81 \cdot 1800 \cdot 1,118} = 140,5 \text{ m/s} = 506 \text{ km/h.}$$

Equilibrio $L = nW$ a questa velocità:

$$C_{L,v} = \frac{2 n W}{\rho S V_v^2} = \frac{2 \cdot 1,5 \cdot 259876}{0,8191 \cdot 82 \cdot 140,5^2} = 0,588.$$

b) Potenza necessaria in virata. Polare con $\pi AR = 27,3$: $C_{D,v} = 0,022 + 0,588^2/27,3 = 0,0347$, quindi

$$\Pi_{n,v} = \frac{1}{2} \rho S V_v^3 C_{D,v} = 0,5 \cdot 0,8191 \cdot 82 \cdot 140,5^3 \cdot 0,0347 \simeq 3228 \text{ kW (4388 CV)}.$$

Nota metodologica

Il rendimento dell'elica non è tra i dati: possiamo quindi spingerci fino alla potenza *necessaria* (che, essendo la potenza costante, coincide con la potenza disponibile della salita), ma non fino alla potenza al motore. Se il rendimento fosse noto, sarebbe semplicemente $\Pi_{m,v} = \Pi_{n,v}/\eta$; con la formulazione data, l'ipotesi «stessa potenza» a rendimento invariato rende comunque il problema chiuso, perché nel bilancio della salita entra solo $\Pi_d = \Pi_{n,v}$.

c) La rampa. Alla stessa velocità, uscito dalla virata, l'assetto si alleggerisce di un fattore n :

$$C_L = \frac{C_{L,v}}{n} = 0,392, \quad C_D = 0,022 + \frac{0,392^2}{27,3} = 0,0276,$$

$$\Pi_n = \frac{1}{2} \rho S V_v^3 C_D \simeq 2573 \text{ kW.}$$

Bilancio di potenza (1.16):

$$V_z = \frac{\Pi_d - \Pi_n}{W} = \frac{(3228 - 2573) \cdot 10^3}{259876} = 2,52 \text{ m/s,}$$

$$\sin \beta = \frac{2,52}{140,5} = 0,0179 \Rightarrow \beta \simeq 1,03^\circ (1^\circ 2').$$

Verifica. β è minuscolo: $\cos \beta = 0,99984$, nessuna iterazione necessaria. Si noti il contrasto con l'esercizio 6: lì una virata a $n = 4,13$ liberava potenza per 35° di rampa, qui una virata a $n = 1,5$ ne libera appena per 1° : l'esubero cresce ferocemente con il fattore di carico, come $n^{3/2} - 1$ suggerisce. ■

Esercizio 11 — potenza in virata con rendimento variabile

Testo. Un motoelica da ricognizione di massa $m = 11\,000$ kg compie una virata corretta ad assetto costante raggiungendo un fattore di carico $n = 1,8$. Il rendimento delle eliche passa da $\eta_1 = 0,85$ (volo orizzontale) a $\eta_2 = 0,80$ (virata). Sapendo che la potenza al motore in volo rettilineo orizzontale, alla stessa quota e assetto, è $\Pi_m = 1471$ kW (2000 CV), calcolare la potenza al motore in virata.

Strategia. Variante “con trappola” dell’esercizio 4: il rapporto $n^{3/2}$ vale per le potenze *necessarie*; il passaggio alle potenze al motore ora non si semplifica più, perché il rendimento cambia. La catena corretta è: $\Pi_{m,v} = \Pi_{n,v}/\eta_2$ e $\Pi_n = \eta_1 \Pi_m$.

Svolgimento. Dalle definizioni:

$$\frac{\Pi_{m,v}}{\Pi_m} = \frac{\Pi_{n,v}/\eta_2}{\Pi_n/\eta_1} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{\Pi_{n,v}}{\Pi_n} = \frac{\eta_1}{\eta_2} n^{3/2} = \frac{0,85}{0,80} \cdot 1,8^{3/2} = 1,0625 \cdot 2,415 = 2,566,$$

$$\Pi_{m,v} = 2,566 \cdot 1471 \text{ kW} \simeq 3774 \text{ kW (5132 CV)}.$$

Verifica. Senza il calo di rendimento sarebbe stato $\Pi_{m,v} = n^{3/2} \Pi_m = 3553$ kW: i cinque punti di rendimento persi in virata costano altri 221 kW al motore. Fisicamente è plausibile: in virata l’elica lavora a velocità maggiore e fuori dal punto di progetto, e il suo rendimento cala. ■

Esercizio 12 — virata piatta: identificare il coefficiente di devianza

Testo. Un motoelica di massa $m = 22\,000$ kg, apertura $b = 22$ m e allungamento $AR = 6,5$, con $C_{D0} = 0,022$ e $C_{L,max} = 1,2$, compie una virata piatta alla quota $z = 4500$ m con angolo di deriva $\delta = 12^\circ$. La virata avviene allo stesso assetto del volo rettilineo orizzontale, corrispondente a un’efficienza $E = 12$; il raggio di virata è $R = 7500$ m. Calcolare il coefficiente angolare di devianza C'_D e la velocità di virata.

Dati (SI). $S = b^2/AR = 22^2/6,5 = 74,5$ m²; $\rho(4500 \text{ m}) = 0,7768$ kg/m³; $\delta = 12^\circ = 0,2094$ rad.

Strategia. Problema *inverso* sulla virata piatta: nella (1.14) il raggio è noto e l’incognita è C'_D . Per la velocità serve il C_L dell’assetto, che il testo assegna indirettamente tramite l’efficienza: lo estraiamo dalla polare risolvendo un’equazione di secondo grado.

Il coefficiente di devianza. Dalla (1.14):

$$C'_D = \frac{2m}{\rho S \delta R} = \frac{2 \cdot 22000}{0,7768 \cdot 74,5 \cdot 0,2094 \cdot 7500} \simeq 0,484.$$

Il coefficiente di portanza dall’efficienza. Imponiamo $E = C_L/C_D$ con la polare (1.9) ($\pi AR = 20,42$):

$$\frac{C_L}{0,022 + C_L^2/20,42} = 12 \implies \frac{12}{20,42} C_L^2 - C_L + 12 \cdot 0,022 = 0,$$

$$0,5876 C_L^2 - C_L + 0,264 = 0 \implies C_L = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0,5876 \cdot 0,264}}{2 \cdot 0,5876} = \{0,327; 1,375\}.$$

La radice 1,375 supera $C_{L,max} = 1,2$ (ecco a cosa serviva quel dato!) e va scartata: ogni efficienza inferiore alla massima è infatti realizzata da *due* assetti, uno veloce e uno lento, e qui solo quello veloce è fisicamente ammissibile. Dunque $C_L = 0,327$.

La velocità. Nella virata piatta l’equilibrio verticale è $L = W$ ((1.6)):

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 215746}{0,7768 \cdot 74,5 \cdot 0,327}} = 151,1 \text{ m/s} \simeq 544 \text{ km/h}.$$

Verifica. $C'_D = 0,484$ contro $C_L = 0,327$: la pendenza della devianza è dello stesso ordine dei coefficienti alari, ma agisce su un angolo di deriva piccolo ($0,21$ rad), da cui l'enorme raggio. Controllo dimensionale della (1.14): $[\text{kg}]/([\text{kg}/\text{m}^3][\text{m}^2][-][\text{m}]) = [\text{m}] \checkmark$. ■

Esercizio 13 — bimotore in virata stretta, poi in rampa: iterazione

Testo. Un bimotore da trasporto di massa $m = 14\,000$ kg, apertura $b = 29$ m, superficie $S = 90$ m², $C_{D_0} = 0,021$, esce da una virata corretta con sbandamento $\varphi = 70^\circ$ alla quota $z = 4700$ m e si pone su una traiettoria rettilinea in salita mantenendo costanti la potenza del motore e l'assetto, pari a $C_L = 0,76$. Calcolare con quale angolo di rampa può salire.

Dati (SI). $W = 137\,293$ N; $AR = 29^2/90 = 9,34$; $\rho(4700 \text{ m}) = 0,7603$ kg/m³.

Strategia. Stessa architettura dell'esercizio 6, con un'incognita sola ma tutta la fatica dell'iterazione: (1) dalla virata a $\varphi = 70^\circ$ ($n = 2,92$!) ricaviamo la potenza necessaria, che è la Π_d della salita; (2) risolviamo il bilancio di potenza per approssimazioni successive, aggiornando a ogni passo velocità, portanza e resistenza.

Passo 1 — La virata. $n = 1/\cos 70^\circ = 2,924$. Velocità di virata ad assetto assegnato ($L = nW$):

$$V_v = \sqrt{\frac{2nW}{\rho S C_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,924 \cdot 137\,293}{0,7603 \cdot 90 \cdot 0,76}} = 124,3 \text{ m/s.}$$

Polare: $C_D = 0,021 + 0,76^2/(\pi \cdot 9,34) = 0,0407$ ($E = C_L/C_D = 18,7$), quindi

$$\Pi_d = \Pi_{n,v} = \frac{1}{2}\rho S V_v^3 C_D = 0,5 \cdot 0,7603 \cdot 90 \cdot 124,3^3 \cdot 0,0407 \simeq 2669 \text{ kW.}$$

Passo 2 — La rampa, per approssimazioni successive. Volo rettilineo allo stesso assetto: $V_0 = \sqrt{2W/(\rho S C_L)} = 72,7$ m/s; $D_0 = W C_D/C_L = W/E = 7346$ N. Prima approssimazione ($\cos \beta \simeq 1$):

$$\sin \beta_1 = \frac{1}{W} \left(\frac{\Pi_d}{V_0} - D_0 \right) = \frac{1}{137\,293} \left(\frac{2669 \cdot 10^3}{72,7} - 7346 \right) = 0,2140 \Rightarrow \beta_1 = 12,36^\circ.$$

L'angolo non è trascurabile: iteriamo con $V = V_0 \sqrt{\cos \beta}$, $D = D_0 \cos \beta$:

iterazione	β [°]	V [m/s]
1	12,36	72,66
2	12,57	71,81
3	12,62	71,79
convergenza	12,63	71,78

$$\beta \simeq 12,6^\circ (12^\circ 38'), \quad V_z = V \sin \beta \simeq 15,7 \text{ m/s.}$$

Nota metodologica

La prima approssimazione, spesso l'unica riportata dagli eserciziari, sottostima qui l'angolo di circa un quarto di grado: quando β si avvicina ai 13° , la correzione $\sqrt{\cos \beta}$ sulla velocità vale ormai il 2 % della velocità stessa e si fa sentire sul bilancio. La regola pratica è semplice: sotto i 5° basta la prima approssimazione, al di sopra servono almeno due iterazioni.

Verifica. Al punto di convergenza: $DV + WV_z = 7168 \cdot 71,8 + 137\,293 \cdot 15,69 = 2669 \text{ kW} = \Pi_d \checkmark$. ■

Esercizio 14 — turbogetto: virata a raggio assegnato e discesa a spinta ridotta

Testo. Un turbogetto di massa $m = 5200$ kg e superficie alare $S = 18,6$ m² vola in orizzontale a $z = 3000$ m alla velocità $V = 390$ km/h. Alla stessa quota compie una virata corretta di raggio $R = 1400$ m mantenendo costante l'assetto. Con $C_{D_0} = 0,018$ e $AR = 5,9$, calcolare la spinta necessaria nel volo rettilineo e in virata. Supponendo poi che il pilota, uscito dalla virata, mantenga l'assetto e riduca la spinta a 1/10 di quella di virata, calcolare l'angolo della traiettoria di discesa e la componente verticale della velocità.

Dati (SI). $W = 51\,012$ N; $V = 108,3$ m/s; $\rho(3000 \text{ m}) = 0,9091$ kg/m³.

Strategia. Tre atti. (1) Volo rettilineo: C_L , polare, spinta. (2) Virata ad assetto costante ma con *raggio* assegnato: qui né φ né V_v sono noti singolarmente; li lega però la (1.3), e insieme all'equilibrio verticale si chiude un sistema di due equazioni che risolviamo per sostituzione iterativa. (3) Discesa: stesso bilancio della salita, con l'esubero di potenza negativo.

Atto 1 — Volo rettilineo.

$$C_L = \frac{2W}{\rho S V^2} = \frac{2 \cdot 51012}{0,9091 \cdot 18,6 \cdot 108,3^2} = 0,514, \quad C_D = 0,018 + \frac{0,514^2}{\pi \cdot 5,9} = 0,0322,$$

$$T = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_D = 0,5 \cdot 0,9091 \cdot 18,6 \cdot 108,3^2 \cdot 0,0322 \simeq 3200 \text{ N (326 kgf)}.$$

Atto 2 — La virata a raggio assegnato. Il sistema è

$$\frac{1}{2} \rho S V_v^2 C_L = \frac{W}{\cos \varphi}, \quad \tan \varphi = \frac{V_v^2}{gR}.$$

Sostituendo la seconda nella prima (con $1/\cos \varphi = \sqrt{1 + \tan^2 \varphi}$) si ottiene un'equazione nella sola V_v^2 , che si risolve in poche iterazioni partendo da $V_v = V$: la successione converge rapidamente a

$$V_v = 150,4 \text{ m/s}, \quad \tan \varphi = \frac{150,4^2}{9,81 \cdot 1400} = 1,647 \Rightarrow \varphi = 58,7^\circ, \quad n = 1,927.$$

La spinta in virata, ad assetto (quindi C_D) costante:

$$T_v = \frac{1}{2} \rho S V_v^2 C_D = n T = 1,927 \cdot 3200 \simeq 6170 \text{ N (629 kgf)}.$$

Atto 3 — La discesa a spinta ridotta. Ora $T' = T_v/10 = 617$ N, molto minore della resistenza: il velivolo scende. L'equilibrio lungo la traiettoria, ad assetto costante, è $T' = D + W \sin \beta$ con $\beta < 0$; alla prima approssimazione ($D \simeq D_0 = W C_D/C_L = 3196$ N alla velocità di volo orizzontale):

$$\sin \beta = \frac{T' - D_0}{W} = \frac{617 - 3196}{51012} = -0,0506 \Rightarrow \beta \simeq -2,90^\circ (2^\circ 54' \text{ in discesa}).$$

L'angolo è piccolo ($\cos \beta = 0,9987$): l'iterazione conferma il valore alla terza cifra. La componente verticale della velocità:

$$V_z = V |\sin \beta| = 108,3 \cdot 0,0506 \simeq 5,5 \text{ m/s (verso il basso)}.$$

Verifica. Il controllo $T_v = nT$ è già incorporato nell'atto 2; per la discesa: $D + W \sin \beta = 3192 - 2579 = 613 \text{ N} \simeq T' \checkmark$. Notare la “firma” del turbogetto: negli esercizi a getto si ragiona di spinte ed equilibri di forze, in quelli a elica di potenze ed equilibri energetici. ■

Esercizio 15 — salita assegnata, virata a potenza costante: il gran finale

Testo. Un velivolo di massa $m = 21\,000$ kg, superficie $S = 90$ m², allungamento $AR = 7,2$, $C_{D0} = 0,019$, sale a $z = 3000$ m su traiettoria inclinata alla velocità $V = 490$ km/h con rateo di salita $V_z = 9,5$ m/s. Al termine della salita compie una virata corretta mantenendo costante la potenza e portandosi all'assetto $C_L = 0,5$. Determinare: a) l'angolo di rampa; b) l'esubero di potenza rispetto al volo orizzontale alla stessa quota e allo stesso assetto della salita; c) sbandamento, fattore di carico e raggio della virata.

Dati (SI). $W = 205\,940$ N; $V = 136,1$ m/s; $\rho(3000\text{ m}) = 0,9091$ kg/m³; $\pi AR = 22,6$.

Strategia. L'esercizio cuce insieme tutti i fili della monografia: triangolo delle velocità, polare, bilancio di potenza, virata a potenza assegnata. Attenzione a un punto: l'assetto della *salita* va ricavato dai dati (non è $C_L = 0,5$, che è l'assetto della successiva *virata*).

a) Angolo di rampa. Dal triangolo delle velocità:

$$\sin \beta = \frac{V_z}{V} = \frac{9,5}{136,1} = 0,0698 \Rightarrow \boxed{\beta \simeq 4,0^\circ}.$$

b) Esubero di potenza. Assetto di salita ($L = W \cos \beta = 205\,436$ N):

$$C_L = \frac{2L}{\rho S V^2} = \frac{2 \cdot 205\,436}{0,9091 \cdot 90 \cdot 136,1^2} = 0,271, \quad C_D = 0,019 + \frac{0,271^2}{22,6} = 0,0223.$$

Potenza necessaria in salita:

$$\Pi_{n,s} = (D + W \sin \beta) V = (16\,862 + 205\,940 \cdot 0,0698) \cdot 136,1 \simeq 4252 \text{ kW},$$

con $D = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_D = 16\,862$ N. In volo orizzontale allo stesso assetto ($V_0 = V / \sqrt{\cos \beta} = 136,3$ m/s):

$$\Pi_n = \frac{W}{E} V_0 = \frac{205\,940}{12,18} \cdot 136,3 \simeq 2304 \text{ kW},$$

essendo $E = C_L / C_D = 12,2$. L'esubero di potenza necessaria:

$$\boxed{\Delta \Pi_n = 4252 - 2304 \simeq 1948 \text{ kW (2649 CV)}}.$$

Nota metodologica

Come nell'esercizio 10, il rendimento dell'elica non è assegnato: l'esubero *al motore* sarebbe $\Delta \Pi_m = \Delta \Pi_n / \eta$ (ad esempio 2292 kW con $\eta = 0,85$). La verifica numerica indipendente in Python conferma i valori qui riportati; segnaliamo che per questo esercizio, di tradizione d'esame, circolano soluzioni con risultati non riproducibili dai dati del testo (in particolare per l'esubero e per la virata del punto c): la catena presentata è quella internamente coerente con le ipotesi dichiarate.

c) La virata a potenza costante. La potenza necessaria in virata eguaglia quella della salita: $\Pi_{n,v} = \Pi_{n,s} = 4252$ kW. Al nuovo assetto $C_L = 0,5$:

$$C_D = 0,019 + \frac{0,5^2}{22,6} = 0,0301, \quad V_v = \sqrt[3]{\frac{2 \Pi_{n,v}}{\rho S C_D}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 4252 \cdot 10^3}{0,9091 \cdot 90 \cdot 0,0301}} = 151,2 \text{ m/s}.$$

Portanza, sbandamento, fattore di carico, raggio:

$$L_v = \frac{1}{2} \rho S V_v^2 C_L = 467,8 \text{ kN}, \quad \cos \varphi = \frac{W}{L_v} = 0,440,$$

$$\varphi \simeq 63,9^\circ, \quad n = 2,27, \quad R = \frac{V_v^2}{g \tan \varphi} \simeq 1143 \text{ m.}$$

Verifica. Chiudiamo il cerchio: $\frac{1}{2}\rho S V_v^3 C_D = 4252 \text{ kW} = \Pi_{n,s} \checkmark$; $n = 1/\cos \varphi = 1/0,440 = 2,27 \checkmark$. Quattro gradi di rampa a 490 km/h “valgono”, a potenza costante, una virata a quasi 64° di banco: chi ha seguito tutta la monografia riconosce qui, in un solo esercizio, ogni formula del capitolo 1. ■

Il senso di tutto questo

Quindici esercizi, quattro famiglie: virate a velocità costante (dove il costo va sui coefficienti), virate ad assetto costante (dove va sulla velocità e su $n^{3/2}$), virate piatte (dove la fusoliera fa un lavoro che non è il suo), raccordi con salite e discese (dove comanda il bilancio di potenza). La domanda da porsi davanti a ogni testo d'esame resta sempre la stessa: *che cosa tiene costante il pilota?* Da quella risposta discende tutta la strategia risolutiva.

Unità di misura e note di calcolo

A.1 Dalle unità tecniche al Sistema Internazionale

La letteratura aeronautica italiana del secolo scorso usa il sistema tecnico: pesi e forze in chilogrammi-forza, densità in $\text{kg}_f \text{ s}^2/\text{m}^4$, potenze in cavalli. In questa monografia tutto è in unità SI; la tabella A.1 raccoglie le conversioni utili per leggere in parallelo i vecchi testi.

Tabella A.1. Conversioni fra sistema tecnico e SI.

Grandezza	Sistema tecnico	Equivalente SI
Forza, peso	1 kg_f	$9,806\,65 \text{ N}$
Carico alare	$1 \text{ kg}_f/\text{m}^2$	$9,806\,65 \text{ N}/\text{m}^2$
Densità	$1 \text{ kg}_f \text{ s}^2/\text{m}^4$	$9,806\,65 \text{ kg}/\text{m}^3$
Potenza	1 CV	$735,5 \text{ W}$
Potenza	$1 \text{ kg}_f \text{ m}/\text{s}$	$9,806\,65 \text{ W}$
Velocità	$1 \text{ km}/\text{h}$	$1/3,6 \text{ m}/\text{s}$

Un promemoria pratico: nei testi in unità tecniche la “massa” che compare nella forza centrifuga è Q/g con Q peso in kg_f ; in SI la massa m in kg ha lo stesso valore numerico di Q , e il peso è $W = mg$ in newton. È questa coincidenza numerica (m in kg = Q in kg_f) a rendere indolore la transizione.

A.2 Verifica numerica indipendente

Ogni valore numerico di questa monografia è stato ricalcolato con uno script Python indipendente (`verifica_virata.py`, allegato al progetto Overleaf), che implementa l’atmosfera standard ISA in unità SI e l’intera catena risolutiva di ciascun esercizio, comprese le iterazioni dei raccordi virata–salita, risolte come problemi di punto fisso. Le piccole differenze sull’ultima cifra fra i passaggi intermedi arrotondati nel testo e i valori finali sono dovute al fatto che lo script lavora sempre in precisione piena: in caso di dubbio, fa fede il valore finale riquadrato.

A.3 Limiti di validità del modello

Le formule di questa monografia valgono per virate *stazionarie* in aria calma, con polare parabolica ideale (fattore di Oswald unitario), spinta allineata alla traiettoria e quota costante durante la virata. Restano fuori: gli effetti di comprimibilità (tutte le velocità in gioco sono ben sotto $M = 0,5$ alle quote considerate), il transitorio di ingresso e uscita dalla virata, la potenza spesa per il rollio e la variazione di rendimento dell’elica con la velocità (salvo dove esplicitamente assegnata, come nell’esercizio 11). Per i raccordi con rampe ripide (esercizi 6 e 13) il modello quasi-stazionario fornisce stime di prima approssimazione, come discusso nelle note metodologiche.