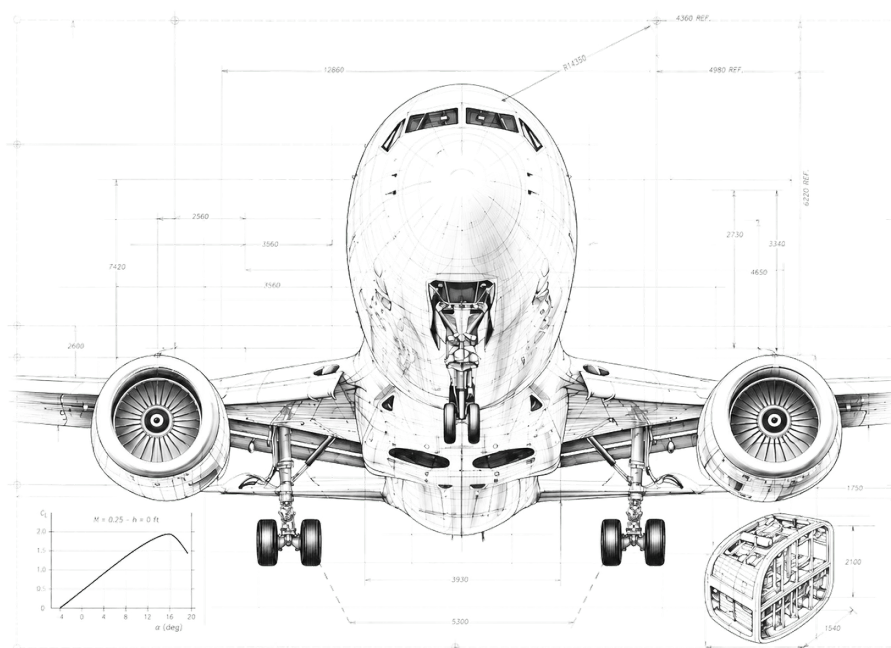


Metodi semiempirici per la distribuzione del carico alare

Schrenk e Anderson — dalla linea portante
di Prandtl al longherone



Prof. Ing. Biagio Raucci

Costruzioni Aeronautiche

Indice

Perché questa monografia	I
Le fonti originali	I
1 Il minimo di teoria: la linea portante di Prandtl	2
1.1 Dal profilo all'ala finita	2
1.2 La circolazione e il teorema di Kutta–Joukowski	2
1.3 Il caso ellittico e i tre risultati fondamentali	3
1.4 Carico addizionale e carico basico	4
2 Il metodo di Schrenk	5
2.1 La formula di Schrenk	5
2.2 Esercizio 1 — Ala trapezia, flap retratti	6
2.3 Esercizio 2 — Ala trapezia, flap deflessi	8
3 Il metodo di Anderson	10
3.1 Origine del metodo e formule	10
3.2 Esercizio 3 — Ala rettangolare: dal c_ℓ al momento flettente	10
4 L'ala ellittica: quando teoria e metodo coincidono	14
4.1 Perché l'ellisse è speciale	14
4.2 Esercizio 4 — Ala ellittica completa	14
4.3 Tabella riassuntiva dei tre casi	17
5 Sintesi e appendici	18
5.1 Quando usare quale metodo	18
5.2 Formulario essenziale	18
A Tabelle di Anderson	19
A.1 Tabelle per il carico addizionale L_a	19
A.2 Tabelle per il carico basico L_b	23
B Riferimenti	26

Perché questa monografia

Quando progettiamo un'ala, la prima domanda strutturale è sempre la stessa: *quanto carico agisce, e dove?* La portanza non si distribuisce in modo uniforme lungo l'apertura — si concentra verso la radice e svanisce alle estremità — e conoscere questa distribuzione è il presupposto per dimensionare il longherone, verificare il rivestimento, stimare il momento flettente alla radice.

Il calcolo rigoroso di quella distribuzione richiederebbe la teoria della linea portante di Prandtl (con la sua equazione integro-differenziale) oppure, oggi, una simulazione CFD. Ma nelle fasi iniziali del progetto — e in aula, per capire la fisica — disponiamo di due **metodi semiempirici** che danno risposte rapide e sorprendentemente accurate:

- il **metodo di Schrenk** (1940), che stima il carico come media fra la pianta reale dell'ala e un'ellisse equivalente;
- il **metodo di Anderson**, basato sulle tabelle della teoria della linea portante, adatto ad ali rastremate con svergolamento lineare.

Nota

Questa monografia è pensata per essere *autoconsistente*. Nel Capitolo 1 ricostruiamo il minimo di teoria di Prandtl che serve a capire *perché* i due metodi funzionano; nei Capitoli 2 e 3 li applichiamo passo passo; nel Capitolo 4 studiamo l'ala ellittica, che è il caso in cui teoria e metodi semiempirici coincidono esattamente — il modo migliore per “vedere” la teoria di Prandtl al lavoro.

Le fonti originali

I metodi che studieremo non nascono dal nulla: hanno una paternità precisa, documentata in report tecnici che è bene citare.

- **O. Schrenk**, *A Simple Approximation Method for Obtaining the Spanwise Lift Distribution*, NACA Technical Memorandum n. 948, 1940 (traduzione del lavoro tedesco del 1938 apparso su *Luftwissen*). È il report che introduce l'idea della media con l'ellisse.
- **J. D. Anderson**, *Fundamentals of Aerodynamics*, e la trattazione classica della *lifting-line theory* che risale a **L. Prandtl**, *Tragflügeltheorie* (1918–1919), Göttingen. Le tabelle dei coefficienti L_a e L_b derivano dallo sviluppo in serie di Fourier della circolazione.
- **L. Prandtl**, *Applications of Modern Hydrodynamics to Aeronautics*, NACA Report n. 116, 1921: il testo (di pubblico dominio) in cui compaiono i risultati fondamentali sull'ala di allungamento finito, downwash e resistenza indotta.
- Per la parte normativa sui carichi (fattore di carico, diagramma di manovra) il riferimento è la **FAR/CS-23**.

Osservazione

I report NACA sono di pubblico dominio e liberamente consultabili sul portale NTRS della NASA (ntrs.nasa.gov). Consiglio di scaricare l'originale di Schrenk: sono poche pagine, molto leggibili, e vedere la formula “nella sua lingua madre” aiuta a fissarla.

Il minimo di teoria: la linea portante di Prandtl

Dove stiamo andando. Prima di applicare le ricette di Schrenk e Anderson, capiamo da dove vengono. Bastano quattro risultati della teoria di Prandtl: la circolazione, il downwash, la resistenza indotta e — soprattutto — il fatto che la distribuzione ellittica è “ottima”. Sono le fondamenta su cui poggia tutto il resto.

1.1 Dal profilo all’ala finita

Un profilo alare bidimensionale, investito da una corrente a velocità V_∞ con angolo d’attacco α , genera portanza per unità di apertura proporzionale al coefficiente di portanza di profilo c_ℓ . In regime lineare vale

$$c_\ell = c_{\ell_\infty} (\alpha - \alpha_{0\ell}), \quad (1.1)$$

dove c_{ℓ_∞} è la *pendenza della retta di portanza del profilo* (in teoria dei profili sottili $c_{\ell_\infty} = 2\pi$ per radiante) e $\alpha_{0\ell}$ l’angolo di portanza nulla.

Quando passiamo a un’**ala di apertura finita**, alle estremità l’aria sfugge dal ventre (in sovrappressione) verso il dorso (in depressione), generando i **vortici di estremità**. Questi inducono lungo tutta l’apertura una piccola velocità verso il basso, il **downwash** w , che riduce l’angolo d’attacco effettivamente “visto” da ogni profilo.

Angolo d’attacco indotto

Il downwash w ruota all’indietro la corrente locale di un angolo

$$\alpha_i = \arctan \frac{w}{V_\infty} \approx \frac{w}{V_\infty},$$

detto *angolo d’attacco indotto*. L’angolo effettivo che sperimenta il profilo diventa $\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i$.

Osservazione

È qui la differenza cruciale fra profilo e ala: sull’ala finita la pendenza della retta di portanza **diminuisce**, perché parte dell’incidenza geometrica viene “mangiata” dall’angolo indotto. Con la notazione della nostra collana, la pendenza del profilo (2D) è c_{ℓ_∞} , quella dell’ala finita (3D) è c_{ℓ_α} , e vale $c_{\ell_\alpha} < c_{\ell_\infty}$.

1.2 La circolazione e il teorema di Kutta–Joukowski

Prandtl modella l’ala come una linea di vortici (la *linea portante*) posta lungo l’apertura, di intensità variabile $\Gamma(y)$. Per il teorema di Kutta–Joukowski, la portanza per unità di apertura in ogni stazione y è

$$\ell(y) = \rho V_\infty \Gamma(y). \quad (1.2)$$

La portanza totale dell'ala si ottiene integrando lungo l'apertura:

$$L = \int_{-b/2}^{+b/2} \rho V_{\infty} \Gamma(y) dy. \quad (1.3)$$

Nota

La distribuzione $\Gamma(y)$ e la distribuzione di carico $\ell(y)$ hanno la *stessa forma*: sono proporzionali. Studiare l'una significa conoscere l'altra. Tutto il problema dell'aerodinamica dell'ala si riduce quindi a trovare $\Gamma(y)$.

1.3 Il caso ellittico e i tre risultati fondamentali

Prandtl dimostra che se la circolazione ha andamento **ellittico**

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}, \quad (1.4)$$

allora accadono tre cose notevoli.

I tre risultati dell'ala ellittica

Per un'ala con distribuzione di circolazione ellittica valgono:

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR} = \text{costante lungo l'apertura}, \quad (1.5)$$

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi AR} \quad (\text{minima resistenza indotta}), \quad (1.6)$$

$$c_{\ell_\alpha} = \frac{c_{\ell_\infty}}{1 + \frac{c_{\ell_\infty}}{\pi AR}}. \quad (1.7)$$

Qui $AR = b^2/S$ è l'allungamento alare.

Il primo risultato dice che il downwash è *uniforme*: ogni profilo lavora nelle stesse condizioni. Il secondo dice che, a parità di portanza e allungamento, **nessun'altra pianta fa meglio**: l'ellisse minimizza la resistenza indotta. Il terzo lega la pendenza 3D a quella 2D.

Osservazione

Per un'ala non ellittica la resistenza indotta si scrive introducendo il *fattore di Oswald* $e \leq 1$:

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi AR e}.$$

L'ellisse è il riferimento ideale, $e = 1$. Un'ala rettangolare ha tipicamente $e \approx 0,90$; una trapezia ben rastremata (rapporto di rastremazione $\lambda \approx 0,4$) si avvicina molto all'ottimo ellittico pur essendo molto più semplice da costruire. È il motivo per cui quasi tutti gli aerei hanno ali trapezie.

Perché Schrenk “media con l'ellisse”

Adesso l'idea di Schrenk non sembrerà più arbitraria. Poiché l'ellisse è la distribuzione ideale verso cui la natura del flusso tende (downwash uniforme, carico “dolce”), Schrenk propone di stimare il carico reale come *media aritmetica* fra la distribuzione geometrica delle corde (che governa la portanza “vicino” al

profilo) e la distribuzione ellittica (che rappresenta l'effetto regolarizzante del flusso 3D). Vedremo nel Capitolo 4 che per l'ala ellittica questa media è addirittura *esatta*.

1.4 Carico addizionale e carico basico

C'è un ultimo mattone teorico. Grazie alla *linearità* del problema (in regime di piccoli angoli), il coefficiente di portanza di profilo in ogni stazione si scompone in due contributi indipendenti:

$$c_\ell(y) = \underbrace{c_{\ell a}(y)}_{\text{addizionale}} C_L + \underbrace{c_{\ell b}(y)}_{\text{basico}}. \quad (1.8)$$

Carico addizionale e basico

Il **carico addizionale** $c_{\ell a}$ è la parte di carico proporzionale al C_L globale dell'ala: dipende solo dalla *geometria in pianta* (allungamento e rastremazione) e descrive come si ripartisce la portanza quando l'ala nel suo insieme produce un dato C_L .

Il **carico basico** $c_{\ell b}$ è la parte dovuta allo *svergolamento* (geometrico o aerodinamico, ad esempio per deflessione dei flap): esiste anche a C_L globale nullo e ha, per definizione, risultante di portanza nulla.

Nota

Questa scomposizione è il cuore comune di Schrenk e Anderson. Cambia solo *come* i due metodi stimano $c_{\ell a}$ e $c_{\ell b}$: Schrenk con la media geometrica-ellisse, Anderson con le tabelle della serie di Fourier della circolazione.

Il senso di tutto questo. Abbiamo quattro strumenti in mano: la circolazione $\Gamma(y)$ che dà il carico, il downwash che spiega perché l'ala "perde" pendenza, l'ellisse come distribuzione ideale, e la scomposizione addizionale+basico. Con questi possiamo leggere Schrenk e Anderson non come ricette, ma come approssimazioni ragionate di una teoria che conosciamo.

Il metodo di Schrenk

Dove stiamo andando. Impariamo la ricetta di Schrenk nel suo ambito naturale: ali di grande allungamento, non a freccia, con svergolamento lieve. La applicheremo a un'ala trapezia, prima a flap retratti (solo carico addizionale) e poi a flap deflessi (compare il carico basico).

2.1 La formula di Schrenk

Il metodo di Schrenk stima il prodotto $c_{\ell a}$ — corda per coefficiente di portanza addizionale — come **media aritmetica** fra la corda reale $c(y)$ e la corda di un'ala ellittica $c_{\text{ell}}(y)$ di *uguale area e uguale apertura*:

Carico addizionale secondo Schrenk

$$c(y) c_{\ell a}(y) = \frac{c(y) + c_{\text{ell}}(y)}{2}, \quad c_{\text{ell}}(y) = \frac{4S}{\pi b} \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}. \quad (2.1)$$

Da cui il coefficiente di portanza addizionale:

$$c_{\ell a}(y) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{c_{\text{ell}}(y)}{c(y)} \right]. \quad (2.2)$$

Osservazione

La corda ellittica alla radice vale $c_{\text{ell}}(0) = \frac{4S}{\pi b}$: è il semiasse dell'ellisse equivalente. Verifichiamolo geometricamente — l'area di una semiellisse di semiasse $b/2$ e $c_{\text{ell}}(0)$ è $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c_{\text{ell}}(0)}{1} \cdot \frac{1}{2} \dots$ in effetti l'area totale della pianta ellittica è $\frac{\pi}{4} b c_{\text{ell}}(0) = S$, da cui $c_{\text{ell}}(0) = 4S/(\pi b)$. Tutto torna.

Per il carico basico dovuto a uno svergolamento (o alla deflessione dei flap che introduce una variazione locale di incidenza ε_y):

$$c(y) c_{\ell b}(y) = \frac{1}{2} c_{\ell \infty} c(y) (\varepsilon_y - \alpha_0), \quad \alpha_0 = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} c(y) \varepsilon_y dy, \quad (2.3)$$

dove α_0 è l'angolo di portanza nulla dell'intera ala, determinato imponendo che il carico basico abbia risultante nulla.

Attenzione

Il metodo di Schrenk è affidabile per ali **diritte, di grande allungamento** ($AR \gtrsim 5$) e con svergolamento contenuto. Per ali a forte freccia o basso allungamento sovrastima il carico verso l'estremità: lì occorre Anderson o, meglio, un metodo a pannelli.

2.2 Esercizio 1 — Ala trapezia, flap retratti

Esercizio 1 — Distribuzione addizionale su ala trapezia

Si consideri un'ala trapezia dritta con: corda alla radice $c_r = 2$ m, corda all'estremità $c_e = 1$ m, apertura $b = 12$ m, superficie $S = 18$ m². Determinare la distribuzione del coefficiente di portanza addizionale $c_{\ell a}(y)$ lungo la semiapertura, con il metodo di Schrenk, in sette stazioni equidistanti.

Passo 1 — Dati e modello

Verifichiamo la coerenza geometrica. L'allungamento:

$$AR = \frac{b^2}{S} = \frac{12^2}{18} = 8.$$

Il rapporto di rastremazione $\lambda = c_e/c_r = 0,5$. La legge della corda è lineare fra radice ed estremità:

$$c(y) = c_r + (c_e - c_r) \frac{y}{b/2} = 2 - \frac{1}{6}y \quad [\text{m}], \quad y \in [0, 6].$$

Passo 2 — Corda ellittica equivalente

$$c_{\text{ell}}(0) = \frac{4S}{\pi b} = \frac{4 \cdot 18}{\pi \cdot 12} = 1,910 \text{ m}.$$

Quindi $c_{\text{ell}}(y) = 1,910 \sqrt{1 - (y/6)^2}$.

Passo 3 — Media di Schrenk stazione per stazione

Per ciascuna stazione calcoliamo $c(y)$, $c_{\text{ell}}(y)$, la media $\frac{1}{2}(c + c_{\text{ell}})$ e infine $c_{\ell a} = \text{media}/c$.

Tabella 2.1. Metodo di Schrenk: carico addizionale su ala trapezia (flap retratti).

y [m]	$c(y)$ [m]	$c_{\text{ell}}(y)$ [m]	$\frac{1}{2}(c + c_{\text{ell}})$	$c_{\ell a}$
0	2,000	1,910	1,955	0,977
1	1,833	1,883	1,858	1,014
2	1,667	1,801	1,734	1,040
3	1,500	1,654	1,577	1,051
4	1,333	1,424	1,378	1,034
5	1,167	1,056	1,111	0,952
6	1,000	0,000	—	0,000

Osservazione

All'estremità ($y = 6$) la corda ellittica si annulla e imponiamo $c_{\ell a} = 0$: il carico deve andare a zero al tip, coerentemente con la fisica (lì la differenza di pressione dorso/ventre si annulla). Notiamo che il valore massimo di $c_{\ell a}$ non è alla radice ma a circa il 50% della semiapertura: l'ala trapezia “carica” un po' verso il centro-esterno, ed è proprio ciò che vogliamo controllare per lo stallo.

Passo 4 — Lettura del risultato

La Figura 2.1 mostra le due corde e la loro media; la Figura 2.2 il coefficiente addizionale risultante.

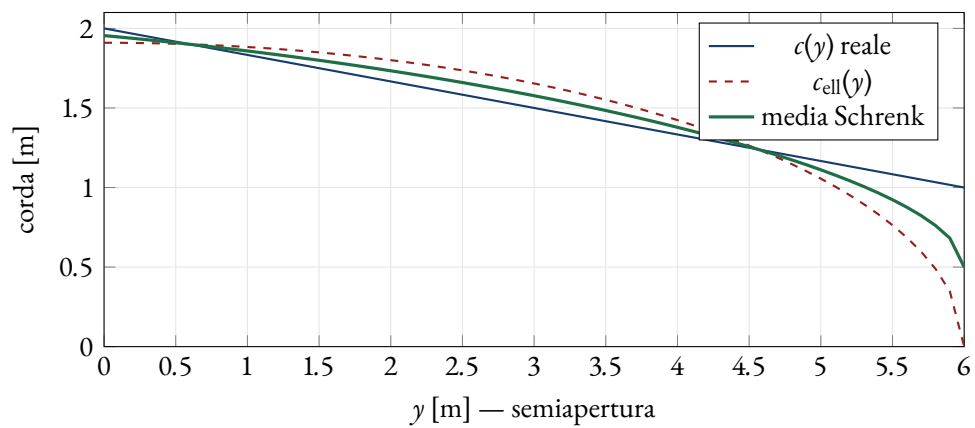


Figura 2.1. Corda reale, ellittica equivalente e loro media (Schrenk).

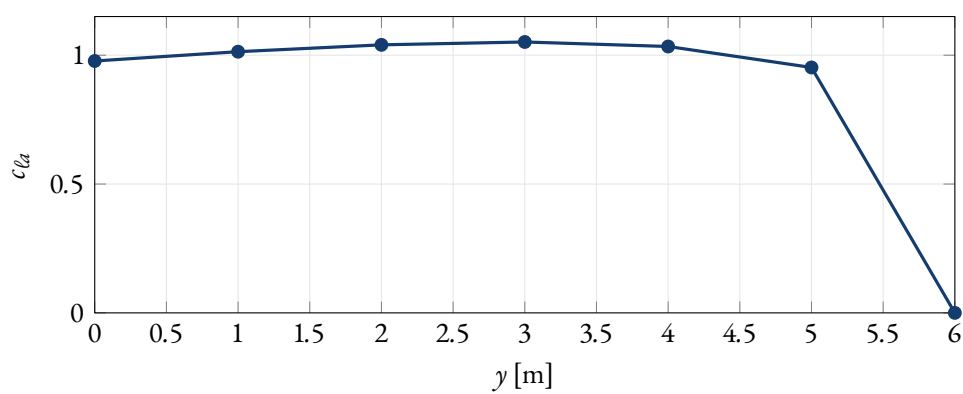


Figura 2.2. Coefficiente di portanza addizionale $c_{la}(y)$.

2.3 Esercizio 2 — Ala trapezia, flap deflessi

Esercizio 2 — Carico basico da deflessione flap

Sulla stessa ala dell'Esercizio 1 vengono deflessi i flap (posti fra radice e $y = 2$ m) di 30° , il che produce un incremento locale di incidenza equivalente $\varepsilon_y = -6,8^\circ$ nella zona flappata. La pendenza di profilo vale $c_{\ell_\infty} = 0,1^\circ$ e il coefficiente di portanza globale è $C_L = 1$. Determinare il c_ℓ totale in ogni stazione.

Passo 1 — Angolo di portanza nulla dell'ala

Integriamo numericamente (regola dei trapezi) $c(y) \varepsilon_y$ sulla semiapertura. Poiché ε_y è non nulla solo fra 0 e 2 m:

$$\alpha_0 = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} c \varepsilon_y dy \approx -4,030^\circ.$$

Nota

La stazione a $y = 2$ m (fine del flap) va *duplicata*: a sinistra $\varepsilon_y = -6,8^\circ$ (flap), a destra $\varepsilon_y = 0$ (ala pulita). È una discontinuità reale del carico basico, e trattarla con due righe della tabella è il modo corretto di gestirla.

Passo 2 — Carico basico e carico totale

Con $c_{\ell b} = \frac{1}{2} c_{\ell_\infty} (\varepsilon_y - \alpha_0)$ e la scomposizione (1.8), si ottiene:

Tabella 2.2. Metodo di Schrenk con flap deflessi: carico basico e totale.

staz.	y [m]	ε_y [°]	$c_{\ell a}$	$c_{\ell b}$	$c_\ell = c_{\ell a} C_L + c_{\ell b}$
1 (radice)	0	0,0	0,977	0,201	1,179
2	1	0,0	1,014	0,201	1,215
3 ⁻	2	0,0	1,040	0,201	1,242
3 ⁺	2	-6,8	1,040	-0,139	0,902
4	3	-6,8	1,051	-0,139	0,913
5	4	-6,8	1,034	-0,139	0,895
6	5	-6,8	0,952	-0,139	0,814
7 (estr.)	6	-6,8	0,000	0,000	0,000

Osservazione

Il salto a $y = 2$ m è la firma del flap: dentro la zona flappata il carico basico è positivo (il flap “aggiunge” portanza locale), fuori diventa negativo (per compensare, dato che la risultante basica è nulla). Questo gradino di carico è ciò che, strutturalmente, sollecita la zona di attacco del flap — un’informazione preziosa per chi dimensiona.

Il senso di tutto questo. Con due passaggi — media con l'ellisse per l'addizionale, integrale dello svergolamento per il basico — Schrenk ci ha dato l'intera distribuzione di carico senza risolvere una sola equazione differenziale. È il potere dei metodi semiempirici ben fondati.

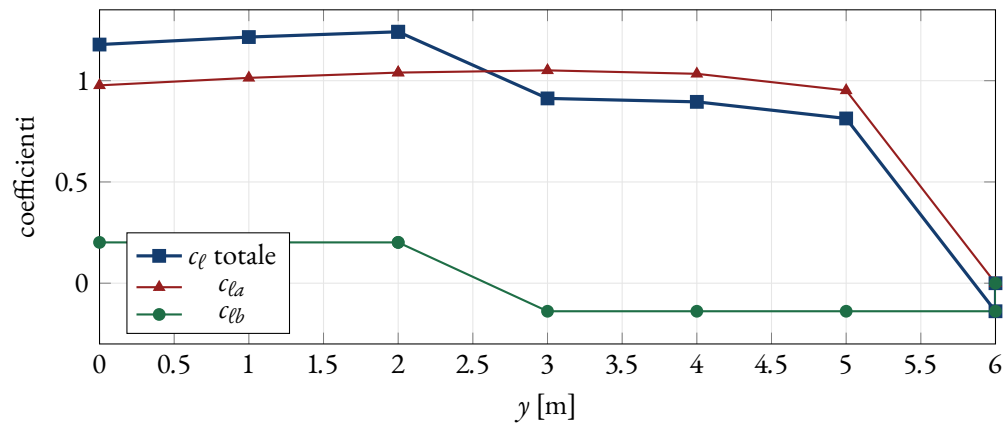


Figura 2.3. Distribuzioni c_l , $c_{l\alpha}$, c_{lb} con flap deflessi di 30° .

Il metodo di Anderson

Dove stiamo andando. Passiamo al metodo di Anderson, più raffinato di Schrenk perché attinge direttamente alle tabelle della teoria della linea portante. Lo applichiamo a un'ala rettangolare e poi — ed è il vero obiettivo del corso di Costruzioni — seguiamo fino a taglio e momento flettente, cioè fino al carico che il longherone deve reggere.

3.1 Origine del metodo e formule

Mentre Schrenk “inventa” una media plausibile, Anderson ricava i coefficienti $c_{\ell a}$ e $c_{\ell b}$ dallo sviluppo in serie di Fourier della circolazione (la soluzione di Prandtl). I risultati sono tabulati in funzione dell'allungamento AR e del rapporto di rastremazione λ , attraverso due coefficienti L_a e L_b :

Carico secondo Anderson

$$c_{\ell a}(\gamma) = \frac{S}{c(\gamma)b} L_a(\eta; \text{AR}, \lambda), \quad (3.1)$$

$$c_{\ell b}(\gamma) = \frac{\varepsilon_y \overline{c_{\ell \infty}} S}{c(\gamma)b} L_b(\eta; \text{AR}, \lambda), \quad (3.2)$$

con $\eta = y/(b/2)$ stazione adimensionale, e $\overline{c_{\ell \infty}}$ pendenza media di profilo corretta col fattore di Jones E :

$$\overline{c_{\ell \infty}} = \frac{c_{\ell \infty}}{E}, \quad E = \frac{\text{perimetro alare}}{b}. \quad (3.3)$$

Nota

I valori di L_a e L_b si leggono nelle *tabelle di Anderson* (riprodotte in Appendice A), incrociando la riga dell'AR con la colonna del λ , per ciascuna stazione η . Sono il condensato tabellare della soluzione di Fourier: usarle equivale a risolvere la linea portante, ma con una lettura di tabella.

3.2 Esercizio 3 — Ala rettangolare: dal c_ℓ al momento flettente

Esercizio 3 — Carico, taglio e momento su ala rettangolare

Ala rettangolare non svergolata: $c_r = c_e = 0,29$ m, $b = 1,75$ m, $S = 0,51$ m², quindi $\text{AR} = 6$ e $\lambda = 1$. Condizioni di volo (da un punto del diagramma di manovra): $V = 48,1$ m/s, fattore di carico $n = 2,5$, coefficiente di portanza $C_L = 1,23$. Peso dell'ala $W_{\text{ala}} = 11$ kgf. Si determinino la distribuzione di c_ℓ , il carico per unità di apertura, e le caratteristiche interne di taglio T e momento M .

Passo 1 — Coefficiente di portanza lungo l'apertura

Essendo l'ala rettangolare e non svergolata, il carico base è nullo ($c_{\ell b} = 0$): agisce solo l'addizionale. Leggiamo L_a dalle tabelle di Anderson per $AR = 6$, $\lambda = 1$, e calcoliamo $c_{\ell a} = \frac{S}{c_b} L_a$ e $c_\ell = c_{\ell a} C_L$.

Tabella di Anderson — coefficiente L_a
Spanwise station $y/(b/2) = 0$

2) scendi con $\lambda = 1$

1) entra con $AR = 6$

3) $L_a = 1,163$

AR \ λ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
2	1,439	1,400	1,367	1,339	1,316	1,301	1,298	1,292	1,290	1,287	1,282
3	1,489	1,430	1,385	1,350	1,322	1,302	1,288	1,275	1,263	1,253	1,246
4	1,527	1,452	1,400	1,360	1,329	1,302	1,279	1,260	1,242	1,226	1,211
5	1,559	1,473	1,414	1,369	1,333	1,301	1,272	1,248	1,225	1,204	1,186
6	1,585	1,492	1,428	1,378	1,338	1,300	1,267	1,237	1,211	1,187	1,163
7	1,609	1,510	1,440	1,386	1,340	1,300	1,264	1,232	1,203	1,176	1,149

Figura 3.1. Come si legge la tabella di Anderson. Per la prima stazione ($y = 0$) si entra con l'allungamento $AR = 6$ (riga blu), si scende sulla colonna del rapporto di rastremazione $\lambda = 1$ (colonna rossa) e all'incrocio si legge il valore $L_a = 1,163$.

La Figura 3.1 mostra graficamente la procedura di lettura per la prima stazione; le tabelle complete, per tutte le stazioni, sono raccolte in Appendice A.

Tabella 3.1. Anderson: coefficiente di portanza su ala rettangolare.

staz.	$\eta = y/(b/2)$	y [m]	L_a	$c_{\ell a}$	c_ℓ
1 (radice)	0,000	0,000	1,163	1,169	1,438
2	0,200	0,175	1,151	1,157	1,423
3	0,400	0,350	1,125	1,131	1,391
4	0,600	0,525	1,055	1,060	1,304
5	0,800	0,700	0,862	0,866	1,065
6	0,900	0,788	0,650	0,653	0,803
7	0,950	0,831	0,496	0,498	0,613
8	0,975	0,853	0,361	0,363	0,446
9 (estr.)	1,000	0,875	—	—	0,000

Attenzione

Le stazioni di Anderson **non sono equidistanti**: si infittiscono verso l'estremità (0,9; 0,95; 0,975) proprio dove il carico cambia rapidamente. È una scelta furba delle tabelle, che concentra i punti dove servono.

Passo 2 — Carico per unità di apertura

La pressione dinamica in unità tecniche:

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 48,1^2 \approx 1417 \text{ Pa} \approx 144,6 \text{ kgf/m}^2.$$

Il carico per unità di apertura in ogni stazione:

$$p_i = c_{\ell i} q c_i.$$

Alla radice: $p_1 = 1,438 \cdot 144,6 \cdot 0,29 = 60,28 \text{ kgf/m}$.

Passo 3 — Carico effettivo e carico agente

Al carico aerodinamico si sottrae il peso proprio dell'ala (inerzia da fattore di carico) e si applica il coefficiente di sicurezza 1,5:

$$w_i = \frac{W_{\text{ala}}}{b} n = \frac{11}{1,75} \cdot 2,5 = 15,71 \text{ kgf/m}, \quad p_{\text{eff}} = p_i - w_i, \quad f = 1,5 p_{\text{eff}}.$$

Attenzione

Verso l'estremità p_i tende a zero mentre w_i resta costante: il carico effettivo p_{eff} diventerebbe *negativo*. Fisicamente significa che al tip domina l'inerzia del peso alare, non la portanza. Nel calcolo classico si impone comunque $p_{\text{eff}} = 0$ al tip (come facciamo qui) per non "inventare" un carico verso il basso concentrato; è un'approssimazione conservativa accettabile perché al tip il braccio è nullo e l'effetto su taglio e momento alla radice è trascurabile.

Tabella 3.2. Carico effettivo e carico agente $f = 1,5 p_{\text{eff}}$.

staz.	y [m]	p_i	p_{eff}	f	[kgf/m]
1	0,000	60,28	44,57	66,85	
2	0,175	59,66	43,94	65,92	
3	0,350	58,31	42,60	63,90	
4	0,525	54,68	38,97	58,45	
5	0,700	44,68	28,97	43,45	
6	0,788	33,69	17,98	26,97	
7	0,831	25,71	9,99	14,99	
8	0,853	18,71	3,00	4,50	
9	0,875	0,00	0,00	0,00	

Passo 4 — Taglio e momento per integrazione a ritroso

Le equazioni indefinite della trave valgono anche per l'ala:

$$\frac{dT}{dy} = -f(y), \quad \frac{dM}{dy} = T(y). \quad (3.4)$$

Integrando numericamente (trapezi) *dall'estremità verso la radice*, con condizioni al contorno $T_n = 0, M_n = 0$ al tip:

$$T_i = T_{i+1} + \frac{f_i + f_{i+1}}{2} (y_{i+1} - y_i), \quad (3.5)$$

$$M_i = M_{i+1} + \frac{T_i + T_{i+1}}{2} (y_{i+1} - y_i). \quad (3.6)$$

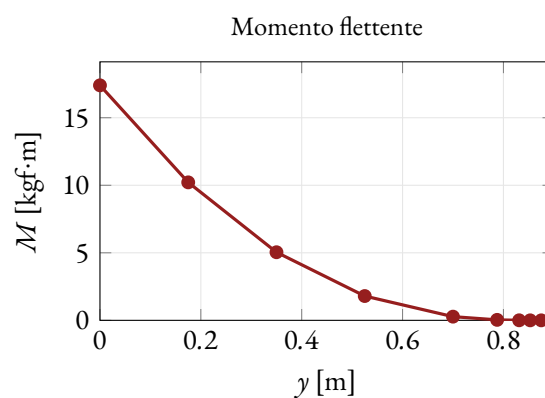
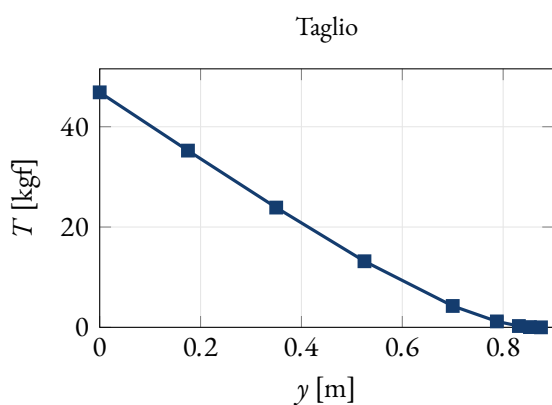
Osservazione

Il momento flettente è massimo alla radice — ed è esattamente ciò che detta il dimensionamento del longerone. Il valore $M_{\text{radice}} \approx 17,4 \text{ kgf m}$ è il carico di riferimento su cui, in un corso di Costruzioni, si calcolerebbe poi la tensione sul corrente e lo spessore dell'anima. Abbiamo chiuso il cerchio: dall'aerodinamica (Prandtl/Anderson) alla struttura.

Il senso di tutto questo. Anderson ci ha portati oltre Schrenk: partendo dalle tabelle della linea portante siamo arrivati, con sole integrazioni per trapezi, al taglio e al momento alla radice. È il percorso che ogni progettista compie per dimensionare l'ala.

Tabella 3.3. Caratteristiche interne di taglio e momento.

staz.	y [m]	f [kgf/m]	T [kgf]	M [kgf m]
1 (radice)	0,000	66,85	46,86	17,399
2	0,175	65,92	35,24	10,216
3	0,350	63,90	23,88	5,042
4	0,525	58,45	13,18	1,799
5	0,700	43,45	4,26	0,274
6	0,788	26,97	1,18	0,035
7	0,831	14,99	0,26	0,004
8	0,853	4,50	0,05	0,001
9 (estr.)	0,875	0,00	0,00	0,000

**Figura 3.2.** Caratteristiche interne dell'ala rettangolare (metodo di Anderson).

L'ala ellittica: quando teoria e metodo coincidono

Dove stiamo andando. Studiamo l'ala ellittica come nuovo esercizio completo. È il caso più istruttivo di tutti: qui il metodo di Schrenk diventa esatto, il carico è quello ideale di Prandtl, e ricaviamo in forma chiusa downwash, resistenza indotta, taglio e momento. Un laboratorio teorico perfetto.

4.1 Perché l'ellisse è speciale

Nel Capitolo 1 abbiamo enunciato i tre risultati dell'ala ellittica. Qui li mettiamo al lavoro su un'ala concreta e mostriamo l'aggancio più elegante:

Schrenk è esatto per l'ala ellittica

Se l'ala è già ellittica, $c(y) = c_{\text{ell}}(y)$, la media di Schrenk dà

$$c(y) c_{\ell a}(y) = \frac{c(y) + c_{\text{ell}}(y)}{2} = c(y) \Rightarrow c_{\ell a}(y) = 1 \quad \forall y,$$

cioè $c_{\ell}(y) = C_L = \text{costante}$ lungo tutta l'apertura. Il carico per unità di apertura risulta perciò ellittico. Questo è *esattamente* il risultato della teoria di Prandtl per la circolazione ellittica.

Osservazione

È un fatto profondo: il metodo semiempirico e la teoria rigorosa danno lo stesso identico risultato. Non è un caso — Schrenk aveva costruito la sua media proprio perché fosse esatta nel caso ideale. L'ellisse è la “pietra di paragone” di tutti i metodi.

4.2 Esercizio 4 — Ala ellittica completa

Esercizio 4 — Ala ellittica: aerodinamica e struttura

Si consideri un'ala a pianta ellittica non svergolata con apertura $b = 10$ m e superficie $S = 15$ m². In una condizione di crociera il coefficiente di portanza globale è $C_L = 0,5$, alla velocità $V = 52$ m/s (aria a $\rho = 1,225$ kg/m³). Si determinino: (a) l'allungamento e la corda; (b) il downwash e la resistenza indotta; (c) la pendenza della retta di portanza 3D; (d) la circolazione e la distribuzione di carico; (e) taglio e momento flettente alla radice.

(a) Geometria

$$AR = \frac{b^2}{S} = \frac{100}{15} = 6,667, \quad c_0 = c_{\text{ell}}(0) = \frac{4S}{\pi b} = \frac{60}{10\pi} = 1,910 \text{ m}.$$

La corda varia come $c(y) = 1,910 \sqrt{1 - (2y/b)^2}$, con $c(y) = 0$ al tip.

(b) Downwash e resistenza indotta

Per l'ala ellittica il downwash è *uniforme*:

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR} = \frac{0,5}{\pi \cdot 6,667} = 0,02387 \text{ rad} = 1,37^\circ.$$

La resistenza indotta (con $e = 1$):

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi AR} = \frac{0,25}{\pi \cdot 6,667} = 0,01194.$$

Osservazione

Confrontiamo con una pianta non ideale. Con lo stesso AR ma $e = 0,9$ (rettangolare) si avrebbe $C_{Di} = 0,01326$, cioè circa l'11% in più di resistenza indotta. Ecco, in un numero, il “premio” aerodinamico dell'ala ellittica — e il motivo per cui lo Spitfire la adottò, pagandola in complessità costruttiva.

(c) Pendenza della retta di portanza 3D

Con $c_{\ell_\infty} = 2\pi$ [1/rad]:

$$c_{\ell_\alpha} = \frac{c_{\ell_\infty}}{1 + c_{\ell_\infty}/(\pi AR)} = \frac{2\pi}{1 + 2\pi/(\pi \cdot 6,667)} = 4,833/\text{rad} = 0,0844^\circ.$$

Nota

La pendenza 3D $c_{\ell_\alpha} = 4,83/\text{rad}$ è sensibilmente minore di quella del profilo $c_{\ell_\infty} = 2\pi = 6,28/\text{rad}$: l'ala finita ha bisogno di più incidenza per ottenere lo stesso c_ℓ . È la “tassa” del downwash, e diminuisce all'aumentare dell'allungamento.

(d) Circolazione e distribuzione di carico

La portanza totale:

$$q = \frac{1}{2}\rho V^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 52^2 = 1656,2 \text{ Pa}, \quad L = C_L q S = 0,5 \cdot 1656,2 \cdot 15 = 12\,421,5 \text{ N}.$$

La circolazione ellittica $\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - (2y/b)^2}$ si trova imponendo che l'integrale dia L ; ricordando che $\int_{-b/2}^{b/2} \sqrt{1 - (2y/b)^2} dy = \frac{\pi b}{4}$:

$$L = \rho V \Gamma_0 \frac{\pi b}{4} \Rightarrow \Gamma_0 = \frac{4L}{\rho V \pi b} = 24,83 \text{ m}^2/\text{s}.$$

Il carico per unità di apertura è allora $\ell(y) = \rho V \Gamma(y) = \ell_0 \sqrt{1 - (2y/b)^2}$ con $\ell_0 = \rho V \Gamma_0 = 1581,6 \text{ N/m}$ alla radice.

(e) Taglio e momento alla radice — in forma chiusa

Il taglio alla radice è metà della portanza totale (una semiala):

$$T(0) = \frac{L}{2} = 6210,8 \text{ N}.$$

Per il momento flettente serve il *centro di spinta* della semiala ellittica, che ha una posizione notevole:

$$y_{cp} = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{b}{2} = \frac{4}{3\pi} \cdot 5 = 2,122 \text{ m}. \quad (4.1)$$

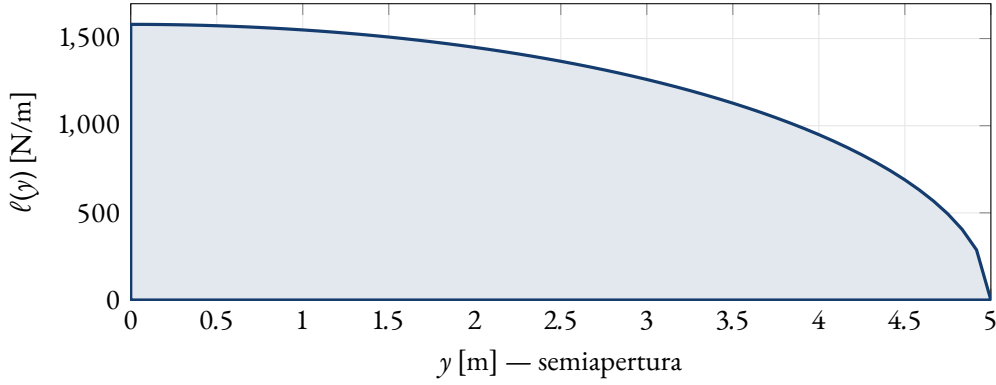


Figura 4.1. Distribuzione ellittica del carico per unità di apertura.

Da cui il momento flettente alla radice:

$$M(0) = \frac{L}{2} y_{cp} = 6210,8 \cdot 2,122 = 13\,180 \text{ N m.}$$

Da dove viene $y_{cp} = \frac{4}{3\pi} \frac{b}{2}$

Il centro di spinta della semiala è il baricentro della distribuzione $\ell(y)$:

$$y_{cp} = \frac{\int_0^{b/2} y \ell(y) dy}{\int_0^{b/2} \ell(y) dy}.$$

Con la sostituzione $y = \frac{b}{2} \sin \theta$, l'integrale al numeratore dà $\ell_0 \frac{b^2}{12}$ e quello al denominatore $\ell_0 \frac{b}{2} \cdot \frac{\pi}{4}$; il rapporto è $\frac{4}{3\pi} \cdot \frac{b}{2}$. La stessa costante $4/(3\pi)$ compare nel baricentro di un semicerchio — non è una coincidenza: l'ellisse è un cerchio “schiacciato”, e il baricentro si conserva in proporzione.

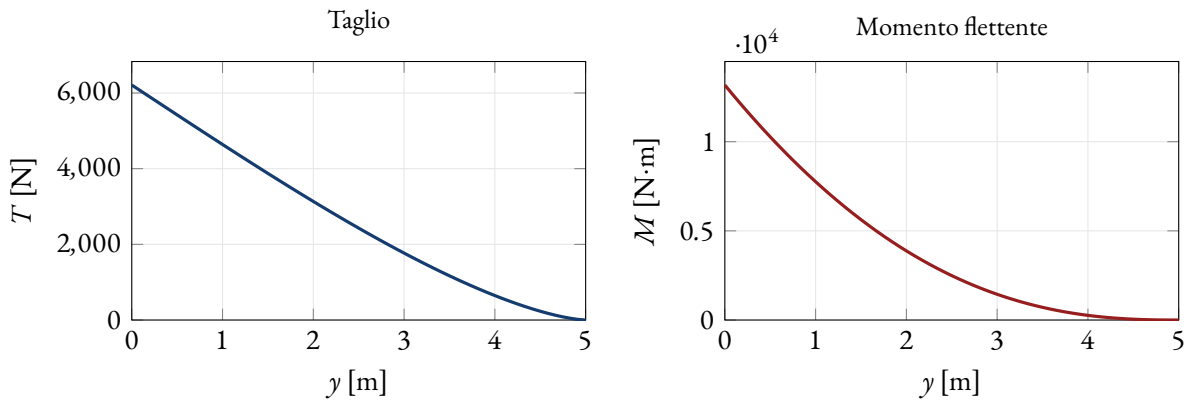


Figura 4.2. Caratteristiche interne dell'ala ellittica (forma analitica).

Osservazione

A differenza del caso Anderson, qui non abbiamo letto nessuna tabella e non abbiamo integrato numericamente: la geometria ellittica permette formule chiuse per ogni grandezza. È la ricompensa della simmetria. Per un'ala reale (trapezia) questi stessi passaggi si fanno per via numerica, ma la struttura del

ragionamento — carico, taglio, momento — è identica.

4.3 Tabella riassuntiva dei tre casi

Tabella 4.1. Confronto sinottico dei tre esercizi.

	Schrenk (trapezia)	Anderson (rettang.)	Ellittica
AR	8	6	6,67
λ	0,5	1,0	—
c_{la}	$\frac{1}{2}(1 + c_{ell}/c)$	$\frac{S}{c_b} L_a$	= 1 (costante)
carico basico	flap $\Rightarrow$ sì	no	no
metodo T,M	—	trapezi numerici	forma chiusa
e (Oswald)	$\approx 0,97$	$\approx 0,90$	1 (ideale)

Il senso di tutto questo. L'ala ellittica non è (solo) una curiosità storica: è il metro con cui misuriamo ogni altra ala. Quando un metodo semiempirico dà, per l'ellisse, esattamente il risultato di Prandtl, sappiamo di poterci fidare anche nei casi in cui la teoria esatta non è a portata di mano.

Sintesi e appendici

5.1 Quando usare quale metodo

Tabella 5.1. Guida rapida alla scelta del metodo.

Situazione	Metodo consigliato
Ala dritta, grande AR, svergolamento lieve, stima rapida	Schrenk: pochi calcoli, buona accuratezza.
Ala rastremata/trapezia, svergolamento lineare, serve precisione	Anderson: usa le tabelle della linea portante.
Verifica concettuale, ala ideale, aggancio teorico	Ellittica in forma chiusa: risultati esatti.
Ala a freccia, basso AR, effetti 3D forti	Nessuno dei due: servono metodi a pannelli o CFD.

Osservazione

Un flusso di lavoro tipico in fase preliminare: (1) Schrenk per una prima stima; (2) Anderson per raffinare su ala rastremata; (3) integrazione a trapezi per taglio e momento; (4) dimensionamento del longherone sul momento alla radice; (5) infine CFD/pannelli per la verifica finale. I metodi di questa monografia coprono i punti da 1 a 4 — cioè gran parte del lavoro concettuale.

5.2 Formulario essenziale

Le formule da ricordare

$$\begin{aligned}
 \text{AR} &= \frac{b^2}{S}, & c_{\text{ell}}(0) &= \frac{4S}{\pi b}, \\
 \text{Schrenk: } c_{\ell a} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c_{\ell}}{c} \right), & \text{Anderson: } c_{\ell a} &= \frac{S}{cb} L_a, \\
 \alpha_i &= \frac{C_L}{\pi \text{AR}}, & C_{Di} &= \frac{C_L^2}{\pi \text{AR} e}, \\
 c_{\ell a} &= \frac{c_{\ell \infty}}{1 + c_{\ell \infty}/(\pi \text{AR})}, & \ell(y) &= \rho VT(y), \\
 \frac{dT}{dy} &= -f(y), & \frac{dM}{dy} &= T(y), \\
 \text{ellittica: } \gamma_{cp} &= \frac{4}{3\pi} \frac{b}{2}, & M(0) &= \frac{L}{2} \gamma_{cp}.
 \end{aligned}$$

Tabelle di Anderson

Le tabelle di Anderson forniscono i coefficienti L_a (carico addizionale) e L_b (carico basico) in funzione dell'allungamento AR (righe) e del rapporto di rastremazione λ (colonne), per ciascuna stazione adimensionale $\eta = y/(b/2)$. Sono la tabulazione della soluzione in serie di Fourier della teoria della linea portante di Prandtl.

Nota

Riproduciamo qui le tabelle *complete* — otto stazioni ($\eta = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 0,9; 0,95; 0,975$), tredici valori di AR e undici di λ — sia per L_a sia per L_b . Nella prima tabella di L_a sono evidenziate riga e colonna usate nell'Esercizio 3, con la stessa logica di lettura della Figura 3.1.

Attenzione

Per valori di AR o λ non tabulati si interpola linearmente fra righe e colonne adiacenti: la regolarità dei coefficienti rende l'errore trascurabile. Alcune celle delle fonti originali contenevano evidenti refusi di stampa (cifre fuori scala): qui sono state ricondotte al valore coerente con l'andamento locale della tabella.

A.1 Tabelle per il carico addizionale L_a

Le tabelle seguenti forniscono il coefficiente L_a in funzione dell'allungamento AR (righe) e del rapporto di rastremazione λ (colonne), per ciascuna delle otto stazioni adimensionali $\eta = y/(b/2)$. Nel primo blocco ($\eta = 0$) sono evidenziate la riga AR = 6 e la colonna $\lambda = 1$ usate nell'Esercizio 3.

Tabella A.1. Coefficiente L_a — stazione $\eta = y/(b/2) = 0$.

AR \ λ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	1,439	1,400	1,367	1,339	1,316	1,301	1,298	1,292	1,290	1,287	1,282
3	1,489	1,430	1,385	1,350	1,322	1,302	1,288	1,275	1,263	1,253	1,246
4	1,527	1,452	1,400	1,360	1,329	1,302	1,279	1,260	1,242	1,226	1,211
5	1,559	1,473	1,414	1,369	1,333	1,301	1,272	1,248	1,225	1,204	1,186
6	1,585	1,492	1,428	1,378	1,338	1,300	1,267	1,237	1,211	1,187	1,163
7	1,609	1,510	1,440	1,386	1,340	1,300	1,264	1,232	1,203	1,176	1,149
8	1,629	1,534	1,456	1,392	1,344	1,300	1,264	1,229	1,198	1,165	1,135
10	1,661	1,558	1,473	1,409	1,355	1,306	1,264	1,222	1,187	1,152	1,120
12	1,686	1,578	1,490	1,420	1,361	1,308	1,261	1,219	1,180	1,143	1,109
14	1,708	1,592	1,502	1,429	1,366	1,309	1,260	1,214	1,172	1,136	1,100
16	1,726	1,610	1,513	1,433	1,368	1,309	1,255	1,208	1,165	1,127	1,090
18	1,741	1,623	1,525	1,441	1,370	1,308	1,252	1,203	1,160	1,118	1,080
20	1,755	1,632	1,531	1,446	1,372	1,307	1,250	1,199	1,152	1,109	1,070

Tabella A.2. Coefficiente L_a — stazione $\eta = y/(b/2) = 0, 2$.

$\lambda \backslash$ AR	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	1,369	1,329	1,300	1,279	1,267	1,260	1,258	1,256	1,253	1,250	1,248
3	1,405	1,346	1,308	1,279	1,260	1,248	1,241	1,234	1,228	1,221	1,214
4	1,434	1,363	1,318	1,284	1,260	1,243	1,232	1,220	1,209	1,198	1,186
5	1,459	1,377	1,324	1,288	1,260	1,240	1,223	1,208	1,194	1,181	1,168
6	1,477	1,388	1,329	1,290	1,259	1,236	1,218	1,200	1,184	1,169	1,151
7	1,491	1,393	1,332	1,291	1,259	1,236	1,214	1,193	1,174	1,157	1,138
8	1,502	1,401	1,338	1,294	1,261	1,236	1,212	1,189	1,168	1,148	1,129
10	1,513	1,411	1,347	1,299	1,265	1,236	1,209	1,182	1,158	1,137	1,114
12	1,520	1,417	1,349	1,302	1,265	1,233	1,202	1,172	1,148	1,126	1,102
14	1,527	1,423	1,354	1,307	1,268	1,232	1,201	1,170	1,144	1,119	1,094
16	1,532	1,428	1,358	1,308	1,269	1,232	1,199	1,164	1,135	1,110	1,087
18	1,539	1,429	1,359	1,309	1,270	1,231	1,195	1,160	1,130	1,103	1,078
20	1,547	1,431	1,360	1,311	1,271	1,230	1,190	1,155	1,123	1,098	1,069

Tabella A.3. Coefficiente L_a — stazione $\eta = y/(b/2) = 0, 4$.

$\lambda \backslash$ AR	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	1,217	1,190	1,178	1,172	1,172	1,171	1,170	1,169	1,169	1,168	1,168
3	1,220	1,191	1,176	1,166	1,161	1,160	1,159	1,158	1,157	1,156	1,155
4	1,223	1,192	1,173	1,162	1,156	1,151	1,149	1,148	1,147	1,146	1,145
5	1,226	1,193	1,172	1,159	1,149	1,142	1,140	1,138	1,136	1,134	1,133
6	1,229	1,193	1,171	1,155	1,145	1,138	1,132	1,128	1,127	1,126	1,125
7	1,229	1,193	1,170	1,152	1,140	1,131	1,124	1,121	1,120	1,119	1,118
8	1,229	1,192	1,168	1,150	1,138	1,128	1,120	1,116	1,113	1,111	1,110
10	1,228	1,192	1,167	1,148	1,132	1,121	1,113	1,108	1,104	1,102	1,100
12	1,228	1,192	1,166	1,145	1,125	1,111	1,107	1,102	1,099	1,094	1,090
14	1,228	1,191	1,161	1,136	1,116	1,104	1,100	1,096	1,090	1,087	1,082
16	1,228	1,189	1,158	1,131	1,112	1,101	1,097	1,091	1,086	1,081	1,075
18	1,228	1,186	1,152	1,129	1,111	1,100	1,092	1,087	1,080	1,076	1,070
20	1,228	1,182	1,149	1,127	1,110	1,098	1,089	1,083	1,078	1,071	1,065

Tabella A.4. Coefficiente L_a — stazione $\eta = y/(b/2) = 0, 6$.

$\lambda \backslash$ AR	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	0,970	0,976	0,984	0,992	1,003	1,010	1,012	1,014	1,016	1,018	1,019
3	0,950	0,962	0,975	0,985	0,996	1,004	1,011	1,018	1,023	1,030	1,038
4	0,932	0,948	0,962	0,978	0,992	1,002	1,008	1,014	1,023	1,035	1,050
5	0,920	0,938	0,953	0,971	0,988	1,000	1,008	1,015	1,024	1,038	1,053
6	0,909	0,930	0,949	0,966	0,981	0,993	1,002	1,013	1,024	1,039	1,055
7	0,900	0,920	0,940	0,959	0,975	0,989	1,000	1,012	1,024	1,039	1,054
8	0,891	0,916	0,938	0,956	0,972	0,988	0,999	1,011	1,024	1,039	1,053
10	0,881	0,907	0,929	0,947	0,961	0,976	0,992	1,008	1,023	1,039	1,052
12	0,872	0,901	0,923	0,941	0,958	0,972	0,989	1,006	1,022	1,038	1,051
14	0,868	0,895	0,918	0,937	0,953	0,969	0,986	1,003	1,019	1,035	1,049
16	0,861	0,888	0,912	0,931	0,948	0,966	0,983	1,000	1,017	1,033	1,048
18	0,858	0,883	0,906	0,925	0,944	0,963	0,981	0,998	1,015	1,032	1,047
20	0,851	0,876	0,898	0,920	0,940	0,959	0,978	0,995	1,012	1,028	1,046

Tabella A.5. Coefficiente L_a — stazione $\eta = y/(b/2) = 0,8$.

λ AR	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	0,615	0,678	0,712	0,731	0,740	0,745	0,746	0,746	0,747	0,747	0,748
3	0,589	0,659	0,700	0,726	0,743	0,754	0,764	0,772	0,782	0,796	0,799
4	0,568	0,644	0,691	0,723	0,746	0,764	0,781	0,795	0,806	0,816	0,824
5	0,548	0,632	0,685	0,720	0,748	0,769	0,790	0,808	0,822	0,834	0,848
6	0,531	0,619	0,675	0,717	0,748	0,775	0,800	0,820	0,838	0,851	0,862
7	0,517	0,609	0,670	0,713	0,748	0,778	0,802	0,827	0,845	0,861	0,875
8	0,504	0,600	0,663	0,710	0,748	0,779	0,808	0,834	0,854	0,872	0,886
10	0,486	0,585	0,653	0,704	0,748	0,783	0,815	0,842	0,868	0,887	0,905
12	0,472	0,576	0,648	0,702	0,748	0,788	0,821	0,850	0,877	0,899	0,919
14	0,462	0,569	0,641	0,699	0,748	0,789	0,825	0,858	0,887	0,911	0,933
16	0,456	0,564	0,638	0,698	0,748	0,791	0,830	0,862	0,894	0,921	0,944
18	0,450	0,559	0,636	0,698	0,750	0,796	0,835	0,870	0,901	0,930	0,953
20	0,444	0,545	0,629	0,698	0,753	0,801	0,842	0,878	0,909	0,937	0,962

Tabella A.6. Coefficiente L_a — stazione $\eta = y/(b/2) = 0,9$.

λ AR	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	0,378	0,465	0,508	0,525	0,531	0,534	0,535	0,536	0,537	0,538	0,539
3	0,352	0,447	0,500	0,528	0,543	0,552	0,559	0,564	0,568	0,571	0,575
4	0,331	0,435	0,495	0,532	0,554	0,569	0,581	0,590	0,598	0,603	0,609
5	0,314	0,424	0,490	0,531	0,560	0,583	0,600	0,613	0,622	0,630	0,636
6	0,300	0,416	0,487	0,531	0,565	0,595	0,615	0,631	0,643	0,652	0,650
7	0,290	0,410	0,484	0,535	0,572	0,603	0,628	0,646	0,660	0,671	0,678
8	0,282	0,403	0,481	0,536	0,579	0,612	0,638	0,658	0,673	0,686	0,696
10	0,266	0,383	0,472	0,541	0,590	0,628	0,656	0,679	0,698	0,712	0,723
12	0,253	0,376	0,469	0,542	0,597	0,639	0,669	0,698	0,718	0,736	0,751
14	0,245	0,370	0,468	0,545	0,602	0,648	0,684	0,715	0,739	0,759	0,776
16	0,239	0,366	0,468	0,547	0,609	0,659	0,698	0,729	0,756	0,780	0,801
18	0,234	0,367	0,470	0,552	0,618	0,669	0,710	0,743	0,773	0,800	0,822
20	0,231	0,368	0,473	0,560	0,625	0,679	0,722	0,759	0,791	0,819	0,846

Tabella A.7. Coefficiente L_a — stazione $\eta = y/(b/2) = 0,95$.

λ AR	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	0,231	0,296	0,334	0,358	0,370	0,379	0,381	0,383	0,386	0,388	0,390
3	0,209	0,290	0,339	0,369	0,389	0,401	0,407	0,412	0,416	0,418	0,420
4	0,191	0,286	0,342	0,378	0,402	0,420	0,428	0,434	0,440	0,444	0,446
5	0,176	0,281	0,344	0,384	0,415	0,436	0,449	0,458	0,463	0,469	0,471
6	0,166	0,278	0,346	0,392	0,428	0,451	0,466	0,475	0,482	0,490	0,496
7	0,155	0,272	0,346	0,398	0,438	0,464	0,481	0,494	0,502	0,510	0,515
8	0,148	0,261	0,346	0,403	0,446	0,475	0,495	0,510	0,521	0,529	0,534
10	0,138	0,255	0,346	0,410	0,460	0,495	0,520	0,538	0,553	0,566	0,578
12	0,132	0,254	0,348	0,419	0,473	0,511	0,542	0,566	0,583	0,598	0,608
14	0,129	0,252	0,349	0,423	0,482	0,529	0,562	0,588	0,609	0,628	0,640
16	0,126	0,252	0,351	0,432	0,495	0,545	0,581	0,610	0,635	0,655	0,671
18	0,122	0,254	0,357	0,439	0,503	0,558	0,598	0,629	0,658	0,682	0,702
20	0,121	0,258	0,364	0,449	0,516	0,569	0,613	0,648	0,680	0,707	0,730

Tabella A.8. Coefficiente L_a — stazione $\eta = y/(b/2) = 0,975$.

AR \ λ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	0,132	0,172	0,207	0,239	0,263	0,272	0,274	0,277	0,279	0,281	0,282
3	0,119	0,166	0,210	0,250	0,278	0,289	0,291	0,294	0,298	0,300	0,301
4	0,107	0,163	0,214	0,258	0,288	0,304	0,308	0,311	0,315	0,319	0,322
5	0,098	0,158	0,217	0,269	0,304	0,320	0,322	0,328	0,333	0,338	0,342
6	0,089	0,158	0,219	0,272	0,314	0,332	0,340	0,344	0,350	0,357	0,361
7	0,081	0,158	0,222	0,278	0,320	0,342	0,351	0,359	0,366	0,373	0,381
8	0,077	0,158	0,228	0,283	0,328	0,352	0,363	0,374	0,383	0,391	0,400
10	0,069	0,158	0,233	0,295	0,343	0,373	0,390	0,403	0,415	0,428	0,438
12	0,068	0,161	0,242	0,308	0,360	0,395	0,413	0,430	0,448	0,461	0,473
14	0,066	0,163	0,248	0,320	0,376	0,413	0,438	0,458	0,478	0,495	0,510
16	0,064	0,166	0,255	0,331	0,394	0,435	0,463	0,488	0,510	0,529	0,546
18	0,063	0,169	0,263	0,346	0,412	0,461	0,492	0,518	0,539	0,560	0,580
20	0,062	0,171	0,271	0,363	0,435	0,483	0,515	0,544	0,570	0,593	0,615

A.2 Tabelle per il carico basico L_b

Analogamente, il coefficiente L_b governa il carico basico dovuto allo svergolamento. Per un'ala non svergolata (come quella dell'Esercizio 3) questo contributo è nullo, ma le tabelle sono indispensabili non appena compaiono svergolamento geometrico o deflessione dei flap.

Tabella A.9. Coefficiente L_b — stazione $\eta = y/(b/2) = 0$.

$\lambda \backslash AR$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	-0,118	-0,121	-0,122	-0,122	-0,122	-0,121	-0,121	-0,121	-0,120	-0,120	-0,120
3	-0,153	-0,160	-0,162	-0,163	-0,165	-0,164	-0,164	-0,163	-0,162	-0,161	-0,160
4	-0,183	-0,192	-0,197	-0,199	-0,199	-0,199	-0,198	-0,197	-0,196	-0,194	-0,192
5	-0,211	-0,221	-0,224	-0,226	-0,225	-0,225	-0,224	-0,224	-0,221	-0,219	-0,218
6	-0,235	-0,248	-0,253	-0,253	-0,252	-0,252	-0,250	-0,247	-0,244	-0,243	-0,242
7	-0,256	-0,269	-0,275	-0,276	-0,274	-0,272	-0,270	-0,268	-0,264	-0,261	-0,258
8	-0,274	-0,288	-0,293	-0,293	-0,291	-0,290	-0,288	-0,285	-0,282	-0,279	-0,276
10	-0,304	-0,318	-0,322	-0,323	-0,321	-0,320	-0,318	-0,315	-0,311	-0,305	-0,299
12	-0,329	-0,342	-0,350	-0,349	-0,348	-0,345	-0,341	-0,337	-0,331	-0,323	-0,317
14	-0,350	-0,364	-0,370	-0,370	-0,368	-0,365	-0,360	-0,355	-0,350	-0,342	-0,334
16	-0,367	-0,380	-0,386	-0,385	-0,382	-0,379	-0,375	-0,370	-0,362	-0,358	-0,348
18	-0,384	-0,399	-0,405	-0,403	-0,400	-0,393	-0,387	-0,380	-0,376	-0,368	-0,360
20	-0,398	-0,411	-0,417	-0,415	-0,410	-0,404	-0,399	-0,392	-0,386	-0,378	-0,369

Tabella A.10. Coefficiente L_b — stazione $\eta = y/(b/2) = 0, 2$.

$\lambda \backslash AR$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	-0,076	-0,080	-0,082	-0,085	-0,086	-0,086	-0,086	-0,085	-0,085	-0,084	-0,083
3	-0,098	-0,108	-0,111	-0,112	-0,113	-0,113	-0,113	-0,113	-0,112	-0,110	-0,108
4	-0,117	-0,130	-0,135	-0,138	-0,137	-0,137	-0,137	-0,137	-0,137	-0,135	-0,132
5	-0,131	-0,148	-0,156	-0,159	-0,159	-0,158	-0,158	-0,158	-0,157	-0,156	-0,152
6	-0,145	-0,162	-0,173	-0,176	-0,176	-0,176	-0,176	-0,176	-0,175	-0,172	-0,170
7	-0,156	-0,178	-0,189	-0,192	-0,192	-0,192	-0,191	-0,191	-0,190	-0,190	-0,189
8	-0,168	-0,189	-0,200	-0,204	-0,204	-0,205	-0,205	-0,206	-0,205	-0,204	-0,204
10	-0,182	-0,207	-0,220	-0,224	-0,225	-0,225	-0,226	-0,226	-0,225	-0,225	-0,225
12	-0,197	-0,226	-0,239	-0,240	-0,239	-0,238	-0,238	-0,238	-0,237	-0,237	-0,237
14	-0,206	-0,234	-0,248	-0,249	-0,248	-0,248	-0,248	-0,248	-0,248	-0,248	-0,248
16	-0,212	-0,242	-0,256	-0,258	-0,257	-0,256	-0,256	-0,256	-0,256	-0,256	-0,255
18	-0,219	-0,247	-0,260	-0,264	-0,265	-0,265	-0,265	-0,265	-0,265	-0,264	-0,262
20	-0,222	-0,255	-0,269	-0,271	-0,271	-0,271	-0,272	-0,272	-0,272	-0,272	-0,270

Tabella A.11. Coefficiente L_b — stazione $\eta = y/(b/2) = 0, 4$.

$\lambda \backslash$ AR	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	-0,006	-0,011	-0,013	-0,015	-0,016	-0,016	-0,016	-0,016	-0,016	-0,016	-0,015
3	-0,002	-0,010	-0,012	-0,015	-0,016	-0,016	-0,016	-0,016	-0,017	-0,018	-0,018
4	0,000	-0,006	-0,011	-0,012	-0,016	-0,016	-0,018	-0,019	-0,020	-0,020	-0,021
5	0,004	-0,004	-0,010	-0,012	-0,016	-0,018	-0,020	-0,021	-0,021	-0,022	-0,023
6	0,009	-0,002	-0,008	-0,012	-0,016	-0,018	-0,020	-0,021	-0,022	-0,024	-0,026
7	0,012	-0,001	-0,010	-0,013	-0,017	-0,018	-0,020	-0,022	-0,025	-0,027	-0,029
8	0,014	0,000	-0,008	-0,012	-0,017	-0,019	-0,021	-0,025	-0,029	-0,030	-0,030
10	0,021	0,007	-0,002	-0,010	-0,017	-0,020	-0,022	-0,027	-0,030	-0,032	-0,032
12	0,028	0,009	-0,001	-0,010	-0,017	-0,021	-0,025	-0,029	-0,032	-0,036	-0,038
14	0,036	0,013	0,000	-0,010	-0,017	-0,021	-0,028	-0,031	-0,035	-0,040	-0,042
16	0,043	0,019	0,002	-0,008	-0,016	-0,022	-0,029	-0,034	-0,038	-0,041	-0,045
18	0,049	0,022	0,004	-0,008	-0,015	-0,022	-0,031	-0,038	-0,041	-0,043	-0,046
20	0,050	0,023	0,006	-0,006	-0,014	-0,022	-0,031	-0,038	-0,041	-0,046	-0,049

Tabella A.12. Coefficiente L_b — stazione $\eta = y/(b/2) = 0, 6$.

$\lambda \backslash$ AR	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	0,052	0,052	0,051	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,049	0,049	0,048
3	0,070	0,069	0,068	0,068	0,068	0,068	0,068	0,068	0,068	0,068	0,068
4	0,085	0,082	0,081	0,080	0,080	0,080	0,080	0,080	0,080	0,080	0,080
5	0,099	0,095	0,092	0,091	0,091	0,091	0,091	0,091	0,090	0,090	0,090
6	0,109	0,107	0,104	0,102	0,101	0,101	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
7	0,119	0,117	0,114	0,112	0,111	0,110	0,110	0,110	0,110	0,109	0,108
8	0,128	0,122	0,121	0,120	0,120	0,119	0,119	0,118	0,118	0,117	0,116
10	0,139	0,138	0,135	0,132	0,131	0,130	0,130	0,129	0,128	0,126	0,124
12	0,148	0,145	0,141	0,140	0,140	0,139	0,137	0,135	0,134	0,132	0,130
14	0,155	0,152	0,150	0,148	0,145	0,142	0,141	0,140	0,139	0,138	0,135
16	0,160	0,158	0,154	0,151	0,149	0,146	0,143	0,141	0,140	0,139	0,136
18	0,165	0,162	0,160	0,158	0,152	0,148	0,145	0,142	0,140	0,139	0,138
20	0,170	0,169	0,165	0,159	0,152	0,148	0,147	0,143	0,141	0,140	0,140

Tabella A.13. Coefficiente L_b — stazione $\eta = y/(b/2) = 0, 8$.

$\lambda \backslash$ AR	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	0,072	0,079	0,080	0,082	0,083	0,085	0,085	0,086	0,086	0,084	0,081
3	0,088	0,098	0,101	0,102	0,104	0,108	0,109	0,110	0,110	0,108	0,106
4	0,100	0,113	0,120	0,123	0,125	0,128	0,128	0,130	0,130	0,130	0,129
5	0,109	0,125	0,135	0,138	0,140	0,143	0,147	0,148	0,143	0,148	0,149
6	0,115	0,135	0,148	0,152	0,156	0,160	0,160	0,162	0,163	0,164	0,165
7	0,121	0,142	0,158	0,163	0,169	0,172	0,173	0,173	0,174	0,174	0,175
8	0,126	0,149	0,164	0,174	0,180	0,182	0,182	0,183	0,183	0,184	0,184
10	0,136	0,160	0,178	0,188	0,195	0,200	0,201	0,202	0,203	0,201	0,198
12	0,145	0,170	0,188	0,200	0,208	0,212	0,214	0,216	0,216	0,214	0,210
14	0,152	0,182	0,200	0,210	0,216	0,221	0,223	0,227	0,228	0,225	0,220
16	0,159	0,186	0,205	0,216	0,222	0,229	0,232	0,233	0,236	0,232	0,229
18	0,161	0,197	0,215	0,224	0,230	0,235	0,239	0,242	0,243	0,242	0,238
20	0,166	0,201	0,220	0,232	0,237	0,241	0,245	0,248	0,248	0,248	0,247

Tabella A.14. Coefficiente L_b — stazione $\eta = \gamma/(b/2) = 0,9$.

$\lambda \backslash$ AR	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	0,059	0,068	0,072	0,073	0,075	0,076	0,075	0,075	0,075	0,075	0,075
3	0,068	0,083	0,092	0,098	0,099	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
4	0,074	0,098	0,111	0,118	0,121	0,122	0,123	0,123	0,123	0,123	0,123
5	0,081	0,107	0,122	0,131	0,138	0,140	0,141	0,141	0,142	0,142	0,142
6	0,087	0,117	0,136	0,148	0,154	0,159	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160
7	0,090	0,123	0,146	0,160	0,167	0,171	0,171	0,172	0,172	0,172	0,172
8	0,092	0,131	0,153	0,170	0,179	0,182	0,183	0,184	0,185	0,186	0,187
10	0,098	0,139	0,166	0,184	0,197	0,201	0,203	0,205	0,207	0,209	0,210
12	0,100	0,147	0,178	0,198	0,210	0,218	0,221	0,225	0,228	0,229	0,230
14	0,102	0,156	0,188	0,208	0,220	0,231	0,238	0,241	0,243	0,245	0,246
16	0,103	0,161	0,197	0,219	0,231	0,241	0,249	0,253	0,258	0,259	0,260
18	0,105	0,166	0,202	0,228	0,243	0,252	0,260	0,263	0,269	0,271	0,275
20	0,107	0,172	0,211	0,233	0,248	0,260	0,268	0,273	0,279	0,282	0,285

Tabella A.15. Coefficiente L_b — stazione $\eta = \gamma/(b/2) = 0,95$.

$\lambda \backslash$ AR	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	0,038	0,051	0,058	0,059	0,060	0,060	0,060	0,060	0,059	0,059	0,058
3	0,044	0,063	0,073	0,078	0,079	0,080	0,080	0,080	0,080	0,079	0,078
4	0,050	0,072	0,076	0,092	0,095	0,097	0,099	0,100	0,100	0,100	0,099
5	0,052	0,083	0,100	0,107	0,110	0,112	0,113	0,114	0,116	0,117	0,116
6	0,054	0,088	0,109	0,119	0,122	0,128	0,130	0,132	0,132	0,131	0,130
7	0,056	0,093	0,116	0,130	0,135	0,140	0,144	0,148	0,150	0,149	0,145
8	0,057	0,100	0,125	0,140	0,146	0,152	0,158	0,160	0,161	0,160	0,159
10	0,058	0,107	0,138	0,152	0,162	0,171	0,178	0,182	0,186	0,187	0,183
12	0,059	0,112	0,143	0,165	0,179	0,189	0,198	0,200	0,202	0,205	0,204
14	0,060	0,116	0,151	0,174	0,190	0,202	0,211	0,215	0,218	0,221	0,222
16	0,061	0,121	0,159	0,184	0,203	0,218	0,222	0,229	0,233	0,236	0,238
18	0,061	0,126	0,166	0,194	0,213	0,229	0,236	0,241	0,248	0,251	0,255
20	0,061	0,128	0,173	0,203	0,225	0,239	0,245	0,251	0,259	0,265	0,271

Tabella A.16. Coefficiente L_b — stazione $\eta = \gamma/(b/2) = 0,975$.

$\lambda \backslash$ AR	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	0,019	0,030	0,035	0,037	0,037	0,037	0,037	0,036	0,036	0,035	0,034
3	0,022	0,039	0,045	0,049	0,050	0,051	0,052	0,054	0,053	0,052	0,051
4	0,026	0,043	0,054	0,060	0,062	0,064	0,068	0,069	0,069	0,068	0,067
5	0,029	0,051	0,065	0,070	0,071	0,075	0,078	0,081	0,082	0,083	0,083
6	0,030	0,055	0,071	0,079	0,082	0,088	0,091	0,094	0,097	0,097	0,097
7	0,030	0,060	0,078	0,087	0,091	0,098	0,101	0,107	0,110	0,110	0,110
8	0,030	0,062	0,081	0,091	0,100	0,107	0,112	0,120	0,121	0,121	0,121
10	0,031	0,067	0,090	0,105	0,115	0,124	0,132	0,138	0,141	0,142	0,143
12	0,031	0,069	0,095	0,115	0,131	0,141	0,149	0,153	0,160	0,161	0,162
14	0,031	0,071	0,102	0,127	0,143	0,155	0,163	0,171	0,175	0,177	0,178
16	0,031	0,077	0,111	0,138	0,156	0,169	0,178	0,182	0,188	0,190	0,191
18	0,032	0,083	0,121	0,150	0,169	0,182	0,191	0,197	0,200	0,201	0,202
20	0,032	0,086	0,128	0,158	0,178	0,193	0,202	0,208	0,210	0,212	0,213

Riferimenti

- O. Schrenk, *A Simple Approximation Method for Obtaining the Spanwise Lift Distribution*, NACA TM 948, 1940.
- L. Prandtl, *Applications of Modern Hydrodynamics to Aeronautics*, NACA Report 116, 1921.
- L. Prandtl, *Tragflügeltheorie*, Göttingen, 1918–1919.
- J. D. Anderson Jr., *Fundamentals of Aerodynamics*, McGraw-Hill (capitolo sulla *finite-wing theory*).
- Normativa **FAR/CS-23** per fattore di carico e carichi di manovra.

Nota

I due report NACA (Schrenk TM 948 e Prandtl Report 116) sono di pubblico dominio e scaricabili da ntrs.nasa.gov. Consiglio di tenerli come riferimento primario: le formule di questa monografia ne sono la rielaborazione didattica in notazione moderna.