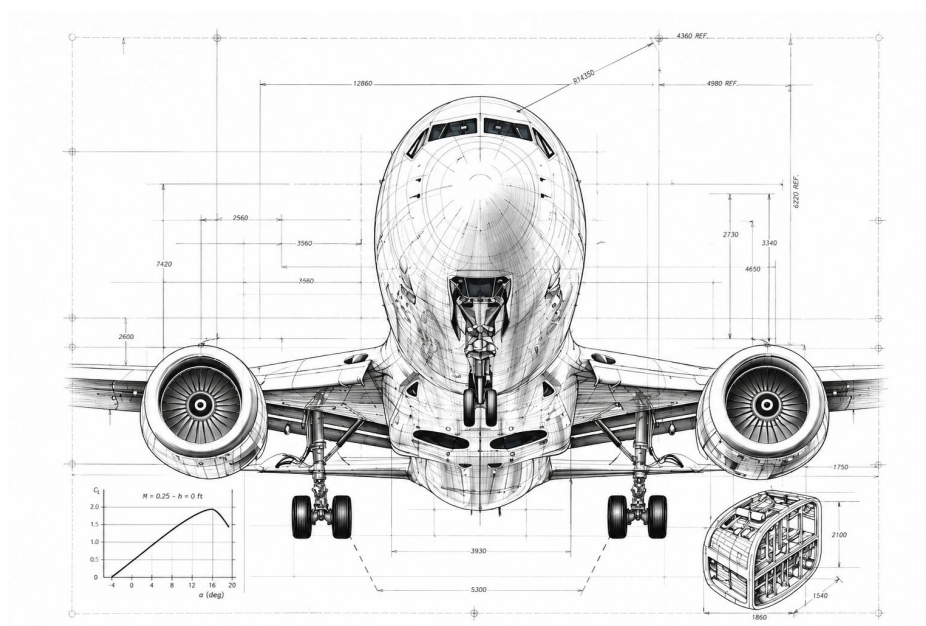


Punti caratteristici e Polari tecnici

Monografia didattica di Aerodinamica e Meccanica del volo



Appunti per gli studenti dell'Istituto Tecnico — indirizzo Aeronautico

Prof. Biagio Raucci

25 giugno 2026

Sommario

Questa monografia affronta uno degli argomenti centrali della meccanica del volo: lo studio della *polare* di un velivolo e dei suoi *punti caratteristici*. A partire dalla rappresentazione analitica della polare parabolica, vengono dedotte in modo organico le equazioni del moto in volo livellato, le curve di *spinta necessaria* e di *potenza necessaria* (le cosiddette *polari tecniche*) e i tre assetti notevoli che governano le prestazioni: il punto *E* di massima efficienza, il punto *P* di minima potenza necessaria e il punto *A* di minimo rapporto D/V . Ogni risultato viene introdotto progressivamente — significato fisico, formulazione matematica, interpretazione tecnica — e corredato di esempi numerici svolti. L'obiettivo è fornire allo studente non un semplice formulario, ma una comprensione profonda del perché ogni velivolo possieda delle velocità “privilegiate” di volo, dipendenti unicamente dalla sua forma aerodinamica.

Indice

1	Introduzione: la polare come carta d'identità aerodinamica	3
2	La polare parabolica	3
2.1	Dalla resistenza totale all'equazione della polare	3
2.2	La polare ad asse spostato	5
2.3	Limiti di validità e campo di impiego	5
3	Le equazioni del moto in volo livellato	6
3.1	Il caso generale: traiettoria curvilinea	6
3.2	I casi particolari	7
4	La spinta necessaria al volo livellato	10
4.1	Definizione e significato fisico	10
4.2	Approccio grafico: costruzione punto per punto	11
4.3	Perché la curva ha un minimo: i due contributi della resistenza	13
4.4	La regione di instabilità di velocità	14
5	Efficienza aerodinamica e punto E di massima efficienza	15
5.1	Il rapporto portanza-resistenza	15
5.2	L'efficienza al variare dell'assetto e della velocità	15
5.3	Velocità di massima efficienza	18
5.4	Interpretazione grafica sulla polare	19
6	Influenza di peso e quota sulla spinta necessaria	19
7	La potenza necessaria al volo livellato	21
7.1	Definizione e legame con la resistenza	21
7.2	Approccio analitico	22
7.3	Il punto P di minima potenza	22
7.4	Lettura del punto P sulla curva di potenza e legame con E/V	23
7.5	Effetto di quota, peso e C_{D0} sulla potenza	24

8	Il punto A: minimo del rapporto D/V	25
8.1	Significato grafico	25
8.2	Determinazione analitica	27
9	Relazioni analitiche generali dei punti caratteristici	27
9.1	Punto E: massimo di C_L/C_D	28
9.2	Punto P: massimo di $C_L^{3/2}/C_D$	28
9.3	Punto A: massimo di $C_L^{1/2}/C_D$	29
9.4	Ordinamento delle velocità	29
10	Riepilogo dei punti caratteristici	29
10.1	Localizzazione sui tre diagrammi	29
10.2	Tabella riepilogativa dei coefficienti	29
10.3	Relazioni fondamentali da ricordare	31
11	Esercizio svolto: velivolo bimotore a elica	31
	Conclusioni	33

I Introduzione: la polare come carta d'identità aerodinamica

Quando si studiano le prestazioni di un velivolo, ci si imbatte inevitabilmente in una domanda apparentemente semplice ma in realtà ricchissima di conseguenze: *quanta forza occorre per tenere in volo l'aeroplano, e a quale velocità conviene farlo?* La risposta a questa domanda non dipende soltanto dal motore, ma in primo luogo dalla *forma aerodinamica* del velivolo, cioè dal modo in cui esso genera portanza e, come inevitabile contropartita, resistenza.

Lo strumento che sintetizza questo comportamento è la *polare*: la curva che lega il coefficiente di resistenza C_D al coefficiente di portanza C_L . La polare è, in un certo senso, la carta d'identità aerodinamica del velivolo. Una volta nota la polare, e note alcune grandezze di massa e di geometria (il peso W , la superficie alare S , l'allungamento AR), è possibile costruire le curve che descrivono la resistenza, la spinta e la potenza necessarie al volo a qualunque velocità e a qualunque quota. Queste curve prendono il nome di *polari tecniche* e costituiscono il vero ponte tra l'aerodinamica del velivolo e lo studio delle sue prestazioni.

L'idea-guida di tutta la trattazione è la seguente: *esistono alcuni assetti di volo "privilegiati"*, ai quali corrispondono condizioni di ottimo. Volare alla minima resistenza, alla minima potenza, o nella condizione che renderà massima l'autonomia, significa volare in tre punti diversi della polare. Questi punti — che chiameremo E , P e A — sono i *punti caratteristici della polare*. Capire dove si trovano, perché si trovano là, e quali velocità vi corrispondono, è l'obiettivo formativo di questa monografia.

Nota

Nella trattazione che segue useremo costantemente la notazione propria delle grandezze tridimensionali del velivolo completo: C_L , C_D , C_M con *lettere maiuscole*. Le minuscole c_ℓ , c_d , c_m restano riservate ai coefficienti bidimensionali di profilo. Il peso sarà W , la spinta T , la portanza L e la resistenza D . Le potenze saranno indicate con Π .

2 La polare parabolica

2.1 Dalla resistenza totale all'equazione della polare

La resistenza aerodinamica complessiva di un velivolo può essere sempre decomposta, ai fini dello studio delle prestazioni, in due grandi contributi. Il primo è la resistenza che il velivolo offre anche quando non sta producendo portanza: è la cosiddetta *resistenza a portanza nulla*, o *resistenza parassita*, dovuta all'attrito viscoso sulle superfici, alla resistenza di forma della fusoliera, delle gondole motore, del carrello, delle antenne e di tutti gli elementi non portanti. Il secondo contributo è quello che nasce *a causa della portanza*: ogni volta che l'ala genera portanza, si forma a valle un sistema di vortici (i vortici di estremità) che induce una deflessione verso il basso del flusso e una conseguente componente di resistenza, detta *resistenza indotta*.

In forma adimensionale, sintetizzando questi due contributi, si scrive l'equazione della *polare parabolica*:

$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR e} = C_{D0} + K C_L^2, \quad (1)$$

dove abbiamo posto, per compattezza,

$$K = \frac{1}{\pi AR e}. \quad (2)$$

Analizziamo il significato fisico di ciascun termine.

- C_{D0} è il *coefficiente di resistenza a portanza nulla*. È un numero che dipende dalla geometria e dalla finitura superficiale del velivolo, ma non dall'assetto: rappresenta la “zavorra” aerodinamica che il velivolo si porta dietro in ogni condizione di volo.
- Il termine $K C_L^2$ è la *resistenza dipendente dalla portanza*. Cresce con il *quadrato* del coefficiente di portanza: raddoppiando C_L , questo contributo quadruplica.
- $AR = b^2/S$ è l'*allungamento alare (aspect ratio)*; e è il *fattore di Oswald*, un coefficiente correttivo (compreso tipicamente tra 0,75 e 0,90) che tiene conto del fatto che la distribuzione di portanza reale non è perfettamente ellittica.

Si osservi immediatamente una conseguenza geometrica notevole: maggiore è l'allungamento alare, minore è K e quindi minore è la resistenza indotta a parità di C_L . È questa la ragione aerodinamica profonda per cui gli alianti, che devono volare con la minima resistenza possibile, hanno ali lunghe e sottili (allungamenti anche superiori a 25), mentre un caccia, che privilegia la manovrabilità e le alte velocità, ha ali tozze a basso allungamento.

Definizione

La *polare parabolica* è la rappresentazione analitica della resistenza di un velivolo nella forma $C_D = C_{D0} + K C_L^2$. Essa descrive una parabola nel piano (C_D, C_L) con asse coincidente con l'asse C_L e vertice in $(C_{D0}, 0)$.

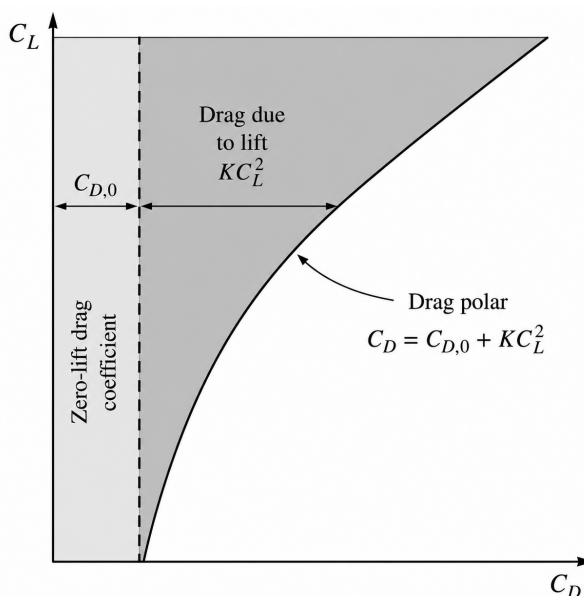


Figura 1 – Polare parabolica: il coefficiente di resistenza C_D è somma del termine a portanza nulla C_{D0} (indipendente da C_L) e del termine indotto $K C_L^2$ (proporzionale a C_L^2).

2.2 La polare ad asse spostato

L'equazione (1) prevede che la resistenza minima si ottenga esattamente a $C_L = 0$. In realtà, le prove in galleria del vento mostrano che la resistenza minima di un velivolo reale si ottiene non a portanza nulla, bensì a valori di C_L *leggermente positivi*. La ragione è che i profili alari sono *curvi* (dotati cioè di curvatura, *camber*), e un profilo curvo offre la sua minima resistenza non quando non produce portanza, ma in corrispondenza di un piccolo angolo d'attacco positivo.

Per descrivere fedelmente questo comportamento si introduce la *polare ad asse spostato*:

$$C_D = C_{D,\min} + K (C_L - C_{L,\min \text{ drag}})^2, \quad (3)$$

in cui $C_{D,\min}$ è il valore minimo della resistenza e $C_{L,\min \text{ drag}}$ è il (piccolo) coefficiente di portanza al quale tale minimo si verifica. Geometricamente, la parabola viene traslata verso l'alto lungo l'asse C_L , in modo che il suo vertice non giaccia più sull'asse delle ascisse.

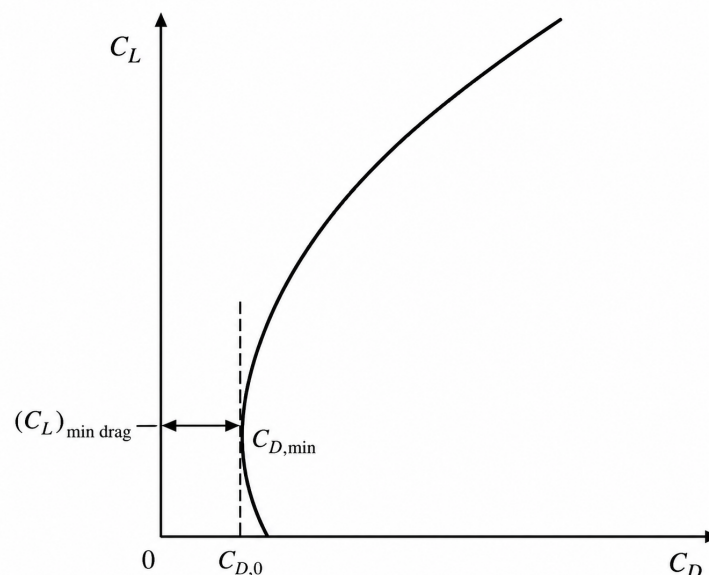


Figura 2 – Polare ad asse spostato: il vertice della parabola si colloca a un valore $C_{L,\min \text{ drag}} > 0$, in accordo con il comportamento dei profili curvi reali.

2.3 Limiti di validità e campo di impiego

È importante essere onesti su quanto la polare parabolica sia un'*approssimazione*. Essa si discosta dalla polare effettiva del velivolo in due regioni:

- **agli assetti molto bassi** (cioè a C_L prossimi a zero o negativi), per via dell'effetto della curvatura dei profili appena descritto;
- **agli assetti molto elevati** (velivolo prossimo allo stallo), dove la resistenza parassita non cresce più con il semplice quadrato di C_L ma segue leggi più complesse, legate al distacco progressivo dello strato limite.

A prima vista questo potrebbe sembrare un difetto grave. In realtà *non lo è affatto*, e il motivo è profondamente fisico. Le due regioni in cui l'approssimazione è meno fedele sono proprio quelle che *non interessano* ai fini della stima delle prestazioni:

- a $C_L \approx 0$ il velivolo non potrebbe nemmeno sostenersi in volo livellato (sarebbe in picchiata), perché la portanza deve sempre eguagliare il peso, e dunque C_L deve essere positivo;
- agli assetti prossimi allo stallo il velivolo non opera in crociera né in salita stabilizzata, e quindi la precisione della resistenza in quella regione è poco rilevante.

Nell'intervallo di reale impiego operativo — C_L compreso indicativamente tra 0,20 e 1,20 — la polare parabolica è una rappresentazione *eccellente*, e in più ha l'enorme vantaggio di essere maneggevole analiticamente: ci permetterà di *derivare* le espressioni e di trovare i punti di ottimo con la sola matematica, senza bisogno di tabelle sperimentali punto per punto.

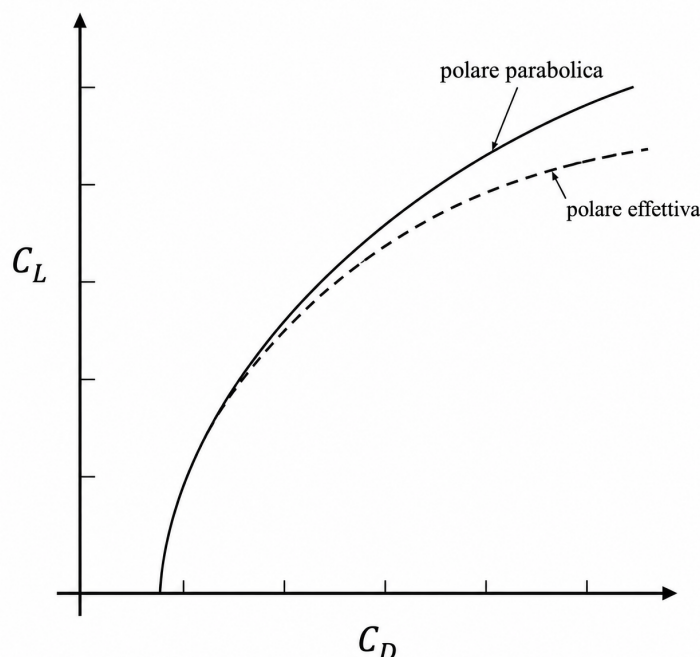


Figura 3 – Confronto tra polare parabolica (linea continua) e polare effettiva di un velivolo (linea tratteggiata). Le differenze si concentrano agli assetti molto bassi e molto alti; nell'intervallo operativo le due curve sono praticamente coincidenti.

Attenzione

La polare parabolica con C_{D0} costante *non tiene conto* della resistenza d'onda che insorge alle alte velocità. Quando il numero di Mach di volo supera il *Mach di divergenza della resistenza* M_{DD} (per un velivolo a getto tipicamente compreso tra 0,82 e 0,86), il C_{D0} aumenta bruscamente e la legge parabolica con coefficienti costanti perde validità. Tutte le considerazioni di questa monografia vanno quindi intese in regime di flusso incompressibile o comunque per $M < M_{DD}$.

3 Le equazioni del moto in volo livellato

3.1 Il caso generale: traiettoria curvilinea

Prima di specializzarci al volo livellato, conviene scrivere le equazioni del moto nella loro forma più generale, perché ciò ci permetterà di riconoscere il volo livellato come un *caso particolare* e ci preparerà allo studio della

salita (capitolo sulle prestazioni di salita) e della virata.

Consideriamo un velivolo che percorre una traiettoria curvilinea nello spazio. Sul baricentro agiscono quattro forze: la portanza L (perpendicolare alla velocità), la resistenza D (parallela e opposta alla velocità), il peso W (verticale, verso il basso) e la spinta T , inclinata di un piccolo angolo ε rispetto alla direzione della velocità. Introduciamo inoltre l'*angolo di rampa* (o di salita) θ e l'*angolo di rollio* (o di bank) Φ , che misura l'inclinazione del piano alare rispetto all'orizzontale.

Scrivendo l'equilibrio dinamico (cioè includendo le forze d'inerzia, secondo il principio $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$) nelle tre direzioni naturali si ottiene il sistema seguente.

Direzione parallela alla velocità.

$$m \frac{dV}{dt} = T \cos \varepsilon - D - W \sin \theta. \quad (4)$$

Direzione perpendicolare, nel piano verticale. Detta r_1 il raggio di curvatura locale della traiettoria nel piano verticale, l'accelerazione centripeta vale V^2/r_1 , dunque

$$m \frac{V^2}{r_1} = L \cos \Phi + T \sin \varepsilon \cos \Phi - W \cos \theta. \quad (5)$$

Direzione perpendicolare, nel piano orizzontale. Detta r_2 il raggio di curvatura della proiezione della traiettoria sul piano orizzontale, e tenuto conto che la componente di velocità in tale piano è $V \cos \theta$, si ha

$$m \frac{(V \cos \theta)^2}{r_2} = L \sin \Phi + T \sin \varepsilon \sin \Phi. \quad (6)$$

Queste tre equazioni descrivono il caso più generale di moto accelerato del velivolo. Da esse, imponendo opportune condizioni, discendono tutti i casi particolari di interesse.

3.2 I casi particolari

Volo livellato uniforme. È la condizione di riferimento di tutta la trattazione: volo *rettilineo, orizzontale* e a *velocità costante*. Conviene distinguere con cura il significato dei due attributi. “Livellato” riguarda la geometria della traiettoria: questa giace in un piano orizzontale, dunque l'angolo di rampa è nullo ($\theta = 0$), e le ali sono orizzontali, dunque l'angolo di bank è nullo ($\Phi = 0$). “Uniforme” (o stazionario) riguarda invece la cinematica: la velocità non varia nel tempo, dunque l'accelerazione tangenziale è nulla ($dV/dt = 0$); essendo poi la traiettoria rettilinea, sono infiniti entrambi i raggi di curvatura ($r_1 = r_2 = \infty$) e con essi si annullano le accelerazioni centripete.

Imponendo queste condizioni nelle tre equazioni generali (4)–(6), la terza si riduce all'identità $0 = 0$ (essendo $\Phi = 0$ e $r_2 = \infty$), mentre le prime due forniscono il sistema *esatto*

$$T \cos \varepsilon = D, \quad (7)$$

$$L + T \sin \varepsilon = W. \quad (8)$$

Vale la pena soffermarsi su questo passaggio, troppo spesso dato per scontato. La spinta non è, in generale, allineata con la direzione di volo: l'asse del propulsore forma con il vettore velocità un piccolo angolo ε , dovuto al

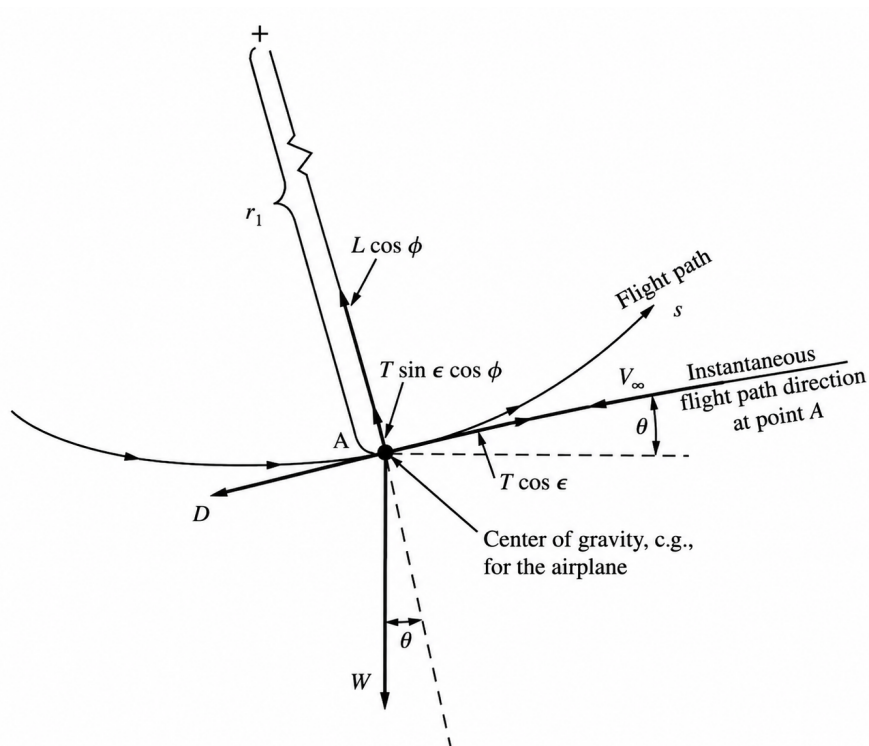
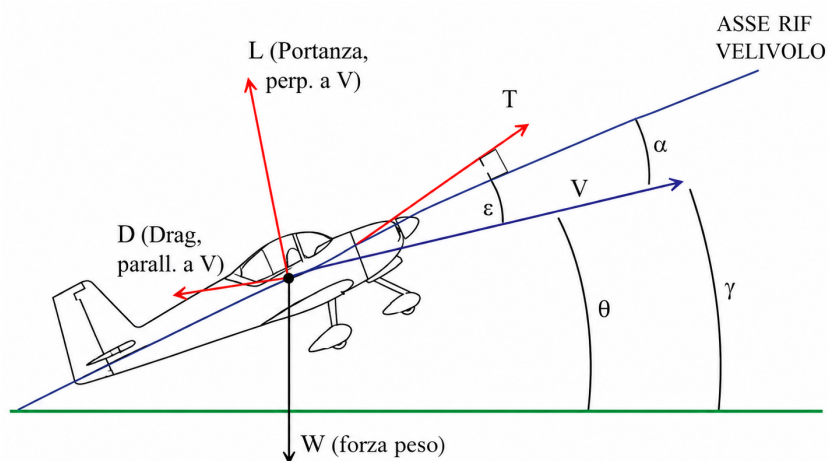


Figura 4 – Assetto del velivolo e sistema di riferimento del moto. La portanza L è per definizione perpendicolare alla velocità V , la resistenza D le è parallela e opposta; la spinta T è inclinata del piccolo angolo ϵ rispetto all'asse vento (la direzione di V). Sono evidenziati l'angolo di rampa θ (tra l'orizzonte e la velocità), l'angolo d'assetto α (tra la velocità e l'asse di riferimento del velivolo) e la loro somma $\gamma = \theta + \alpha$.



θ Angolo di salita (o di volta)

$$\gamma = \theta + \alpha$$

γ Angolo di assetto del velivolo

Si noti come la componenti di spinta T diretta secondo l'asse vento (asse direzione velocità) è $\epsilon = T \cos \epsilon$

Figura 5 – Diagramma di corpo libero nel piano verticale per una traiettoria curvilinea. Il baricentro percorre un arco di raggio r_1 ; la velocità V è tangente alla traiettoria e inclinata di θ sull'orizzonte. Si riconoscono le due componenti del peso lungo la traiettoria ($W \sin \theta$) e a essa normale ($W \cos \theta$), la componente utile della spinta $T \cos \epsilon$ e la resistenza D : sono i termini che compaiono nelle (4) e (5).

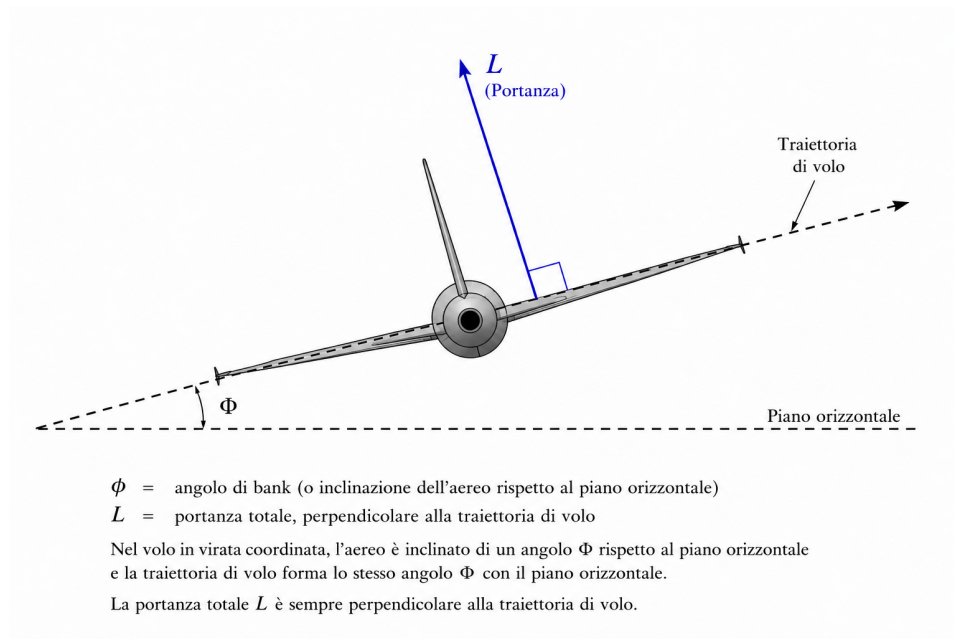


Figura 6 – Velivolo visto da dietro nella condizione generica di traiettoria curvilinea. Il piano alare è inclinato dell'angolo di bank Φ rispetto all'orizzontale: la portanza L , perpendicolare alle ali, acquista così una componente orizzontale $L \sin \Phi$ disponibile a curvare la traiettoria, e una verticale $L \cos \Phi$ che equilibra il peso.

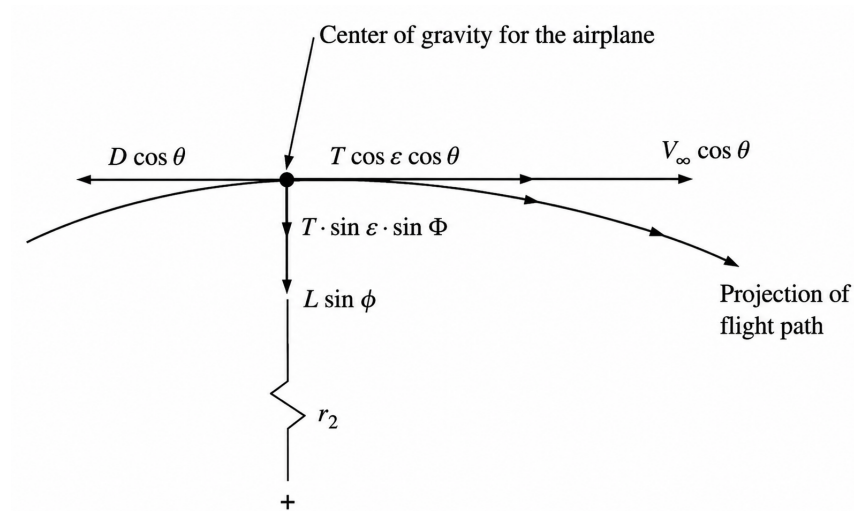


Figura 7 – Proiezione della traiettoria sul piano orizzontale durante una virata. La curvatura ha raggio r_2 e l'accelerazione centripeta vale $(V \cos \theta)^2 / r_2$. Compaiono le proiezioni della resistenza ($D \cos \theta$) e della spinta ($T \cos \varepsilon \cos \theta$) lungo la traiettoria, e le componenti $L \sin \phi$ e $T \sin \varepsilon \sin \Phi$ che ne sostengono la curvatura, come nella (6).

calettamento del motore e all'assetto assunto dal velivolo. Di conseguenza, solo la proiezione della spinta lungo l'asse vento — pari a $T \cos \varepsilon$ — partecipa a vincere la resistenza, mentre la componente ortogonale $T \sin \varepsilon$, diretta verso l'alto, alleggerisce l'ala scaricandola di una parte del peso. In volo livellato, in altre parole, la portanza non deve sostenere l'intero peso, ma soltanto la quota $W - T \sin \varepsilon$.

Per gli aeroplani convenzionali, tuttavia, l'angolo ε è di pochi gradi ed entrambe le correzioni risultano trascurabili. A titolo illustrativo, se fosse $\varepsilon = 5^\circ$ si avrebbe $\cos \varepsilon \approx 0,996$: la spinta richiesta supererebbe la resistenza di appena lo 0,4%, dato che $T = D / \cos \varepsilon$. Inoltre, ipotizzando un'efficienza dell'ordine di $E \approx 15$ (cosicché $T \approx D \approx W/15$), la componente verticale di spinta varrebbe $T \sin \varepsilon \approx 0,087 \cdot W/15 \approx 0,006 W$, cioè meno dell'1% del peso. Si è dunque pienamente giustificati nel porre $\varepsilon \approx 0$, da cui $\cos \varepsilon \rightarrow 1$ e $\sin \varepsilon \rightarrow 0$. Le (7)–(8) collassano allora nelle due celeberrime relazioni del volo livellato uniforme:

$$T = D, \quad (9)$$

$$L = W. \quad (10)$$

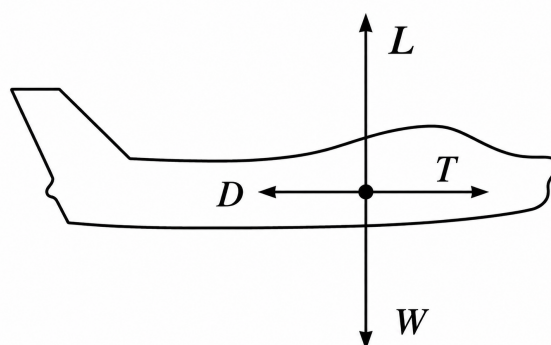


Figura 8 – Equilibrio delle forze in volo livellato uniforme: la portanza L equilibra il peso W , la spinta T equilibra la resistenza D . È il caso particolare delle Fig. 4 e 5 con $\theta = 0$, $\Phi = 0$ e $\varepsilon \approx 0$.

Convienne tenere a mente che $T = D$ e $L = W$ non sono leggi indipendenti, ma il limite a piccola incidenza dell'asse di spinta del bilancio esatto (7)–(8): è questa la ragione per cui, pur usandole sempre nella forma semplificata, sappiamo con precisione quale approssimazione stiamo introducendo.

4 La spinta necessaria al volo livellato

4.1 Definizione e significato fisico

Immaginiamo un aeroplano in volo livellato stazionario a una data velocità e a una data quota. Per mantenere quella velocità e quella quota, il motore deve generare una spinta sufficiente a vincere la resistenza aerodinamica. Questa è la *spinta necessaria* (o *spinta richiesta*) al volo orizzontale, che indicheremo con T_n .

Definizione

La *spinta necessaria* T_n è la spinta che il sistema propulsivo deve fornire per mantenere il velivolo in volo livellato stazionario a una data velocità e quota. In forza dell'equilibrio $T = D$, essa coincide con la

resistenza aerodinamica del velivolo:

$$T_n = D. \quad (11)$$

È fondamentale capire un punto: la spinta necessaria è una caratteristica del *velivolo* (della sua forma aerodinamica, della sua superficie alare, del suo peso), *non* del motore. Il motore fornisce la *spinta disponibile*; il confronto tra spinta necessaria e spinta disponibile determinerà quali velocità sono effettivamente raggiungibili — ma questo è un argomento successivo. Qui ci concentriamo solo sulla domanda: *di quanta spinta ha bisogno il velivolo, in funzione della velocità?*

La curva che riporta T_n in funzione della velocità V è detta *curva di spinta necessaria*, ed è una delle polari tecniche fondamentali. Poiché $T_n = D$, essa coincide con la curva di resistenza in funzione della velocità, per un dato velivolo a una data quota.

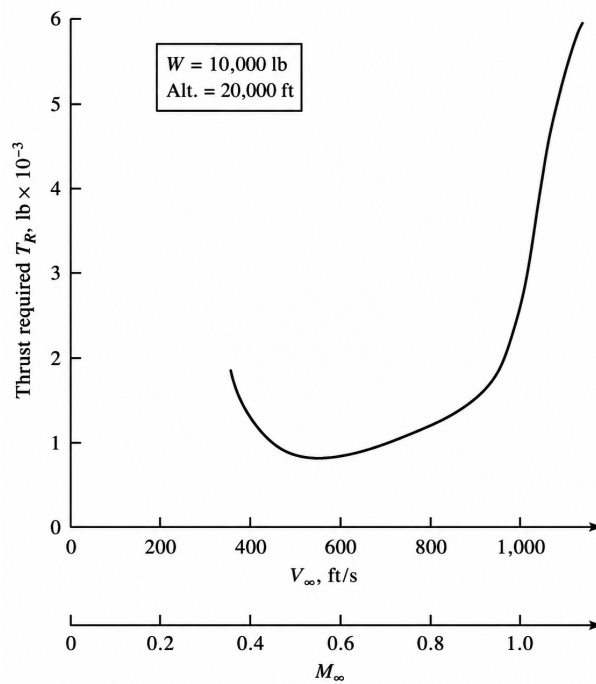


Figura 9 – Andamento tipico della curva di spinta necessaria $T_n(V)$ a quota fissata: decresce alle basse velocità, raggiunge un minimo, e poi risale alle alte velocità.

4.2 Approccio grafico: costruzione punto per punto

Supponiamo di conoscere, per un dato velivolo, le sue caratteristiche fisiche — il peso W , l'allungamento AR , la superficie alare S — e la sua polare $C_D = C_{D0} + K C_L^2$, con C_{D0} e K noti. La curva di spinta necessaria si costruisce con la seguente procedura iterativa.

1. **Si sceglie un valore di velocità V .** La velocità minima ammissibile è la velocità di stallo a quella quota, $V_S = V_{S0}/\sqrt{\sigma}$, dove V_{S0} è la velocità di stallo a quota zero e $\sigma = \rho/\rho_0$ il rapporto di densità.
2. **Si calcola il C_L necessario** a sostenere il peso, dalla condizione $L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$:

$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}. \quad (12)$$

3. Si calcola il C_D dalla polare: $C_D = C_{D0} + K C_L^2$.

4. Si calcola la spinta necessaria:

$$T_n = D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D. \quad (13)$$

La coppia (V, T_n) è un punto della curva.

5. Si ripetono i passi da 1 a 4 per altri valori di V , fino a tracciare l'intera curva.

Esempio

Velivolo a getto Gulfstream IV. Calcoliamo un punto della curva di spinta necessaria alla quota di 9 000 m, con peso $W = 33\,112,8$ kgf, superficie $S = 88,255$ m² e polare $C_D = 0,015 + 0,08 C_L^2$. Alla quota di 9 000 m la densità è $\rho \approx 0,459$ kg/m³.

Scegliamo $V = 550$ km/h = 153 m/s.

$$C_L = \frac{2Wg}{\rho V^2 S} = \frac{2 \cdot 33112,8 \cdot 9,81}{0,459 \cdot 153^2 \cdot 88,255} \approx 0,687,$$

$$C_D = 0,015 + 0,08 \cdot 0,687^2 \approx 0,053,$$

$$T_n = D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D = \frac{1}{2} \cdot 0,459 \cdot 153^2 \cdot 88,255 \cdot 0,053 \\ \approx 25\,000 \text{ N} \approx 2\,542 \text{ kgf}.$$

Dunque, per mantenere il volo livellato a 550 km/h alla quota di 9 000 m, l'aeroplano richiede circa 2 542 kgf di spinta. Ripetendo il calcolo per altre velocità si ottiene la Tab. 1 e la curva di Fig. 10.

Tabella 1 – Curva di spinta necessaria del Gulfstream IV a 9 000 m (valori a scopo didattico).

V [km/h]	C_L	C_D	$T_n = D$ [kgf]
350	1,696	0,245	4784
450	1,026	0,099	3201
550	0,687	0,053	2542
650	0,492	0,034	2312
750	0,369	0,026	2322
850	0,288	0,022	2488
950	0,230	0,019	2766
1050	0,188	0,018	3133
1150	0,157	0,017	3576
1250	0,133	0,016	4085
1350	0,114	0,016	4656

Nota

La polare del Gulfstream IV qui adottata è da intendersi a puro scopo didattico: le polari reali dei velivoli sono spesso coperte da segreto industriale. I valori utilizzati sono rappresentativi della categoria. Inoltre la curva calcolata oltre $M \approx 0,85$ non ha riscontro fisico reale, perché a quei numeri di Mach

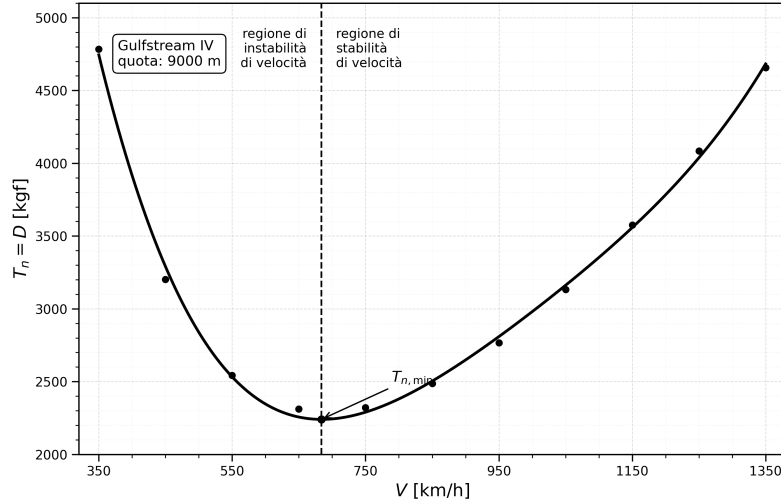


Figura 10 – Curva di spinta necessaria del Gulfstream IV a 9000 m, ottenuta dai valori di Tab. 1. La linea tratteggiata verticale separa la regione di instabilità di velocità (a sinistra) dalla regione di stabilità (a destra).

interverrebbe la resistenza d'onda non contemplata dalla polare a C_{D0} costante.

4.3 Perché la curva ha un minimo: i due contributi della resistenza

L'andamento “a U” della curva di spinta necessaria non è casuale, ed è bene comprenderlo a fondo. Riscriviamo la resistenza esplicitando i due contributi:

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} + \frac{1}{2}\rho V^2 S K C_L^2. \quad (14)$$

Il primo termine è la *resistenza parassita* (o a portanza nulla); il secondo è la *resistenza indotta* (dipendente dalla portanza).

Ricordiamo ora che, in volo livellato, $C_L = 2W/(\rho V^2 S)$ decresce rapidamente all'aumentare di V . Vediamo cosa accade ai due termini:

- **Alle basse velocità**, C_L è molto grande, e poiché la resistenza indotta dipende da C_L^2 , essa *domina*. Al crescere di V , C_L cala rapidamente e con esso la resistenza indotta: ecco perché a sinistra del minimo la curva *decresce*.
- **Alle alte velocità**, C_L è piccolo e la resistenza indotta è trascurabile, mentre la resistenza parassita cresce con il quadrato di V e *domina*. Ecco perché a destra del minimo la curva *cresce*.

Esiste dunque una velocità intermedia in corrispondenza della quale i due contributi si *eguagliano*: è la velocità di minima resistenza, e quindi di minima spinta necessaria.

Questa condizione di uguaglianza,

$$C_{D0} = K C_L^2, \quad (15)$$

sarà la chiave di volta per individuare il primo punto caratteristico della polare, come vedremo tra poco.

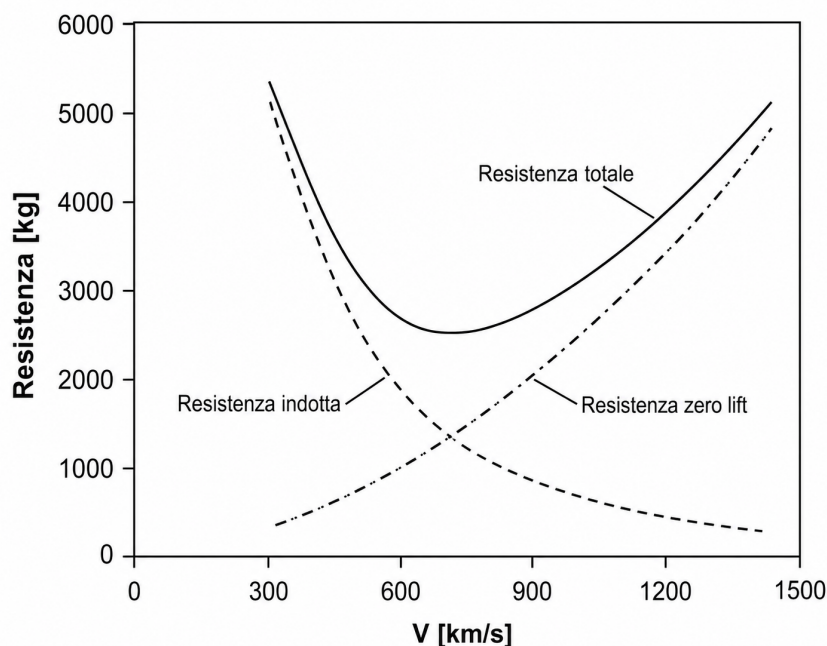


Figura 11 – Scomposizione della resistenza nei due contributi: resistenza indotta (decrescente con V) e resistenza parassita (crescente con V). La resistenza totale è minima dove i due contributi si eguagliano.

4.4 La regione di instabilità di velocità

Un aspetto di grande importanza pratica riguarda il comportamento del velivolo a sinistra del minimo della curva di spinta necessaria. Questa zona è detta *regione di instabilità di velocità*, e conviene capirne bene la natura.

Consideriamo un velivolo che voli a una velocità V_1 minore di quella di minima resistenza (a sinistra del minimo). Supponiamo che una perturbazione — per esempio una raffica — riduca la velocità a $V_2 < V_1$. In questa regione, al diminuire della velocità la spinta necessaria *aumenta*: $T_{n2} > T_{n1}$. Se il pilota non aumenta la manetta, la spinta disponibile resta quella iniziale, ora *insufficiente* a vincere la resistenza accresciuta; il velivolo continua quindi a rallentare, allontanandosi sempre di più dalla condizione iniziale. La condizione V_1 è dunque *instabile*.

Nella regione a destra del minimo accade invece l'opposto: una diminuzione di velocità comporta una *riduzione* della spinta necessaria, quindi un eccesso di spinta disponibile che riaccelera il velivolo riportandolo alla condizione di partenza. La condizione è *stabile*. Per questo motivo i velivoli operano normalmente sul ramo destro (stabile) della curva di spinta necessaria.

Attenzione

La regione di instabilità di velocità è detta anche, suggestivamente, “*rovescio della polare*” o “*back side of the power curve*”. Volare in questa regione (per esempio in avvicinamento a bassissima velocità) richiede particolare attenzione del pilota, perché la risposta del velivolo alle perturbazioni è divergente: occorre agire sulla manetta in modo controintuitivo per controllare la velocità.

5 Efficienza aerodinamica e punto E di massima efficienza

5.1 Il rapporto portanza-resistenza

Riprendiamo l'equilibrio del volo livellato. Da $T_n = D$ e $L = W$ possiamo scrivere

$$T_n = D = \frac{D}{L} L = \frac{D}{L} W = \frac{W}{L/D}. \quad (16)$$

Compare un rapporto di importanza capitale: L/D , il *rapporto portanza-resistenza*, detto anche *efficienza aerodinamica* e indicato con E :

$$E = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D}. \quad (17)$$

L'uguaglianza con C_L/C_D è immediata: il fattore $\frac{1}{2}\rho V^2 S$ compare sia al numeratore (in L) sia al denominatore (in D) e si semplifica.

Definizione

L'*efficienza aerodinamica* $E = C_L/C_D$ è una misura diretta della "bontà" aerodinamica del velivolo: rappresenta i metri percorsi in planata per ogni metro di quota perduta, ed è il numero di chilogrammi di portanza ottenuti per ogni chilogrammo di resistenza generata.

Dall'equazione (16) discende una conclusione semplice e potente: *a peso fissato, la spinta necessaria è minima quando l'efficienza è massima*. Il punto di minima spinta necessaria coincide dunque con il punto di massima efficienza aerodinamica.

5.2 L'efficienza al variare dell'assetto e della velocità

Prima di individuare analiticamente il punto di massima efficienza, conviene capire *come* l'efficienza vari lungo la curva di spinta necessaria, perché ciò chiarisce il legame profondo fra le grandezze aerodinamiche e quelle cinematiche del volo.

Dipendenza dall'assetto. Poiché C_L e C_D sono entrambi funzioni dell'angolo d'attacco α , lo è anche il loro rapporto $E = C_L/C_D$. La curva $E(\alpha)$ parte da valori bassi agli assetti picchiati, *cresce* all'aumentare di α , raggiunge un *massimo* a un certo angolo α_E (l'assetto di massima efficienza) e poi *decresce* avvicinandosi allo stallo. Esiste dunque un unico assetto privilegiato al quale l'efficienza è massima.

Il legame fra assetto e velocità. In volo livellato l'assetto non è libero: a ogni velocità corrisponde un ben preciso C_L , imposto dall'equilibrio $L = W$. Dalla (12),

$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S} \quad \Rightarrow \quad C_L \propto \frac{1}{V^2}, \quad V \propto \frac{1}{\sqrt{C_L}}. \quad (18)$$

A quota fissata, dunque, all'aumentare della velocità il C_L necessario *diminuisce* con il quadrato di V : volare veloci significa volare ad assetti picchiati (piccolo α), volare lenti significa volare a forte incidenza (grande α).

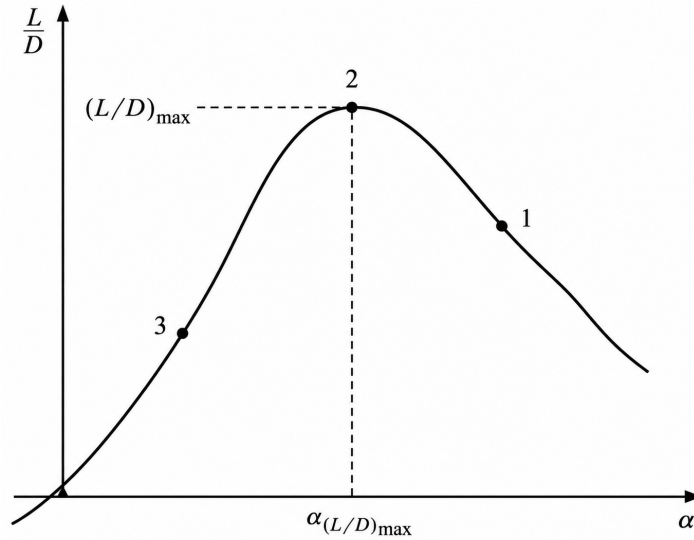


Figura 12 – Efficienza aerodinamica $E = C_L/C_D$ in funzione dell'angolo d'attacco α (a parità di configurazione): cresce dagli assetti picchiati, raggiunge il massimo $E_{\max}$ all'assetto α_E e poi decresce avvicinandosi allo stallo. È la curva da cui dipende, punto per punto, la spinta necessaria al volo.

Esplicitando la densità tramite il rapporto $\sigma = \rho/\rho_0$,

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho_0 \sigma S} \frac{1}{C_L}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sqrt{\frac{2W}{\rho_0 S} \frac{1}{C_L}}, \quad (19)$$

da cui si vede che, a parità di assetto (C_L fissato), *tutte* le velocità di volo crescono salendo di quota come $1/\sqrt{\sigma}$. È la ragione per cui, più avanti, tutte le velocità caratteristiche (V_E , V_P , V_A) si sposteranno verso destra all'aumentare della quota.

La dualità fra le due curve. Mettendo insieme le due osservazioni si comprende un fatto importante: *ogni punto della curva di spinta necessaria corrisponde a un diverso angolo d'attacco e quindi a un diverso valore di E* . Immaginiamo di partire da un'alta velocità (assetto picchiato, α piccolo, efficienza modesta) e di rallentare progressivamente: l'angolo d'attacco *aumenta* in modo monotono, mentre l'efficienza prima *cresce* fino al suo massimo — raggiunto alla velocità V_E — e poi *decresce*. Specularmente, la spinta necessaria $T_n = W/E$ prima *cala* fino al minimo (in V_E) e poi *risale*. Le due curve, E in funzione della velocità e T_n in funzione della velocità, sono dunque l'una l'immagine “rovesciata” dell'altra: dove una ha il massimo, l'altra ha il minimo, e ciò accade alla medesima velocità V_E .

Chiamiamo *punto E* (da *efficienza*) l'assetto di massima efficienza, ovvero — per la (16) — di minima resistenza e di minima spinta necessaria. Ne ricaviamo adesso analiticamente tutte le caratteristiche, anziché fermarci all'argomento qualitativo del paragrafo precedente.

Il punto di partenza è l'espressione della resistenza in funzione della velocità. Riprendiamo i due contributi della (14) e sostituiamo nel termine indotto il coefficiente di portanza necessario al volo livellato, dato dalla (12),

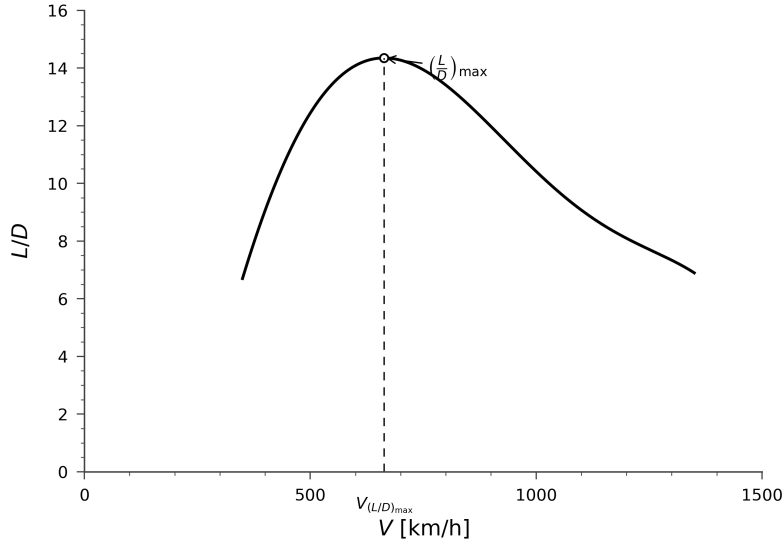


Figura 13 – Andamento dell'efficienza aerodinamica $E = C_L/C_D$ in funzione della velocità (a quota e peso fissati). L'efficienza cresce al diminuire della velocità, raggiunge il massimo $E_{\max}$ alla velocità V_E e poi torna a calare. Poiché $T_n = W/E$, il massimo di questa curva coincide con il minimo della curva di spinta necessaria: ogni punto corrisponde a un diverso assetto.

$$C_L = 2W/(\rho V^2 S):$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} + \frac{1}{2}\rho V^2 S K \left(\frac{2W}{\rho V^2 S} \right)^2 = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} + \frac{2K}{\rho} \frac{W^2}{S} \frac{1}{V^2}. \quad (20)$$

La resistenza assume così una forma compatta e molto istruttiva,

$$D = a V^2 + \frac{b}{V^2}, \quad (21)$$

in cui i due coefficienti a e b raccolgono l'intera dipendenza da quota, geometria e peso:

$$a = \frac{1}{2}\rho S C_{D0} = \frac{1}{2}\rho f, \quad b = \frac{2K}{\rho} \frac{W^2}{S} = \frac{2}{\rho} \frac{W^2}{S} \frac{1}{\pi A R e}, \quad (22)$$

avendo introdotto l'area parassita equivalente $f = C_{D0} S$ e ricordato che $K = 1/(\pi A R e)$. Il primo termine, $a V^2$, è la resistenza parassita e cresce con il quadrato della velocità; il secondo, b/V^2 , è la resistenza indotta e decresce con l'inverso del quadrato della velocità. (I simboli a e b denotano qui i coefficienti della legge di resistenza e non vanno confusi con l'apertura alare.)

Per individuare l'assetto di minima resistenza imponiamo l'annullamento della derivata della (21) rispetto alla velocità:

$$\frac{dD}{dV} = 2a V - \frac{2b}{V^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad a V^4 = b \quad \Rightarrow \quad a V^2 = \frac{b}{V^2}. \quad (23)$$

L'ultima uguaglianza possiede un significato fisico preciso: *nel punto di minima resistenza i due termini $a V^2$ e b/V^2 sono uguali*, ossia la resistenza parassita eguaglia la resistenza indotta. È la conferma analitica di quanto avevamo anticipato per via qualitativa nel paragrafo precedente. Riportando infatti l'uguaglianza $a V^2 = b/V^2$

alla forma in coefficienti — basta dividere entrambi i membri per $qS = \frac{1}{2}\rho V^2 S$, osservando che $aV^2 = qS C_{D0}$ e $b/V^2 = qS K C_L^2$ — si riottiene esattamente la condizione (15):

$$C_{D0} = K C_L^2 \quad \Rightarrow \quad C_{D,i} = C_{D0}. \quad (24)$$

Da questa condizione ricaviamo il coefficiente di portanza al punto E:

$$C_{L,E} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}} = \sqrt{\pi AR e C_{D0}} \quad (25)$$

e il corrispondente coefficiente di resistenza:

$$C_{D,E} = C_{D0} + K C_{L,E}^2 = 2 C_{D0} \quad (26)$$

cioè *al punto di massima efficienza la resistenza totale è esattamente il doppio della resistenza a portanza nulla*.

L'efficienza massima vale quindi

$$E_{\max} = \frac{C_{L,E}}{C_{D,E}} = \frac{\sqrt{\pi AR e C_{D0}}}{2 C_{D0}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi AR e}{C_{D0}}} = \sqrt{\frac{\pi AR e}{4 C_{D0}}} \quad (27)$$

Convieni leggere la (27) in chiave progettuale. Poiché $f = C_{D0} S$ è l'area parassita equivalente, l'efficienza massima

$$E_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi AR e}{C_{D0}}} \quad (28)$$

cresce con la radice dell'allungamento alare AR e del fattore di Oswald e , e diminuisce con la radice del coefficiente di resistenza parassita C_{D0} (cioè dell'area parassita f , a parità di superficie). È la sintesi di tutta la filosofia di progetto di un aliante: ali lunghe e sottili (alto AR , distribuzione di portanza il più possibile ellittica, ossia $e \rightarrow 1$) e grande pulizia aerodinamica (basso C_{D0}).

Nota

$E_{\max}$ dipende *solo* dall'aerodinamica del velivolo (C_{D0} , AR , e): è un *parametro di progetto*, costante nel tempo, indipendente dalla quota, dalla velocità e dal peso. È un fatto di enorme portata: vedremo che il minimo della curva di resistenza non cambia con la quota proprio perché $E_{\max}$ è invariante.

5.3 Velocità di massima efficienza

La velocità alla quale, a una data quota, si vola al punto E si ricava dalla (12) imponendo $C_L = C_{L,E}$:

$$V_E = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{C_{L,E}}} \quad (29)$$

Si osservi che V_E dipende dalla quota (attraverso ρ) e dal carico alare W/S : a differenza dell'efficienza, la velocità di minima resistenza non è un invariante. A quote più alte, ρ diminuisce e V_E cresce come $1/\sqrt{\sigma}$.

5.4 Interpretazione grafica sulla polare

Esiste una bella lettura geometrica del punto E direttamente sulla polare. Congiungiamo un generico punto della polare con l'origine degli assi e chiamiamo χ l'angolo che tale retta forma con l'asse C_D . Si ha $C_L = C_D \tan \chi$, ossia

$$\tan \chi = \frac{C_L}{C_D} = E. \quad (30)$$

La pendenza della retta dall'origine è dunque l'efficienza. Ne segue che il punto di massima efficienza è quello in cui la retta uscente dall'origine è *tangente* alla polare: è l'inclinazione massima possibile, e quindi l'efficienza massima.

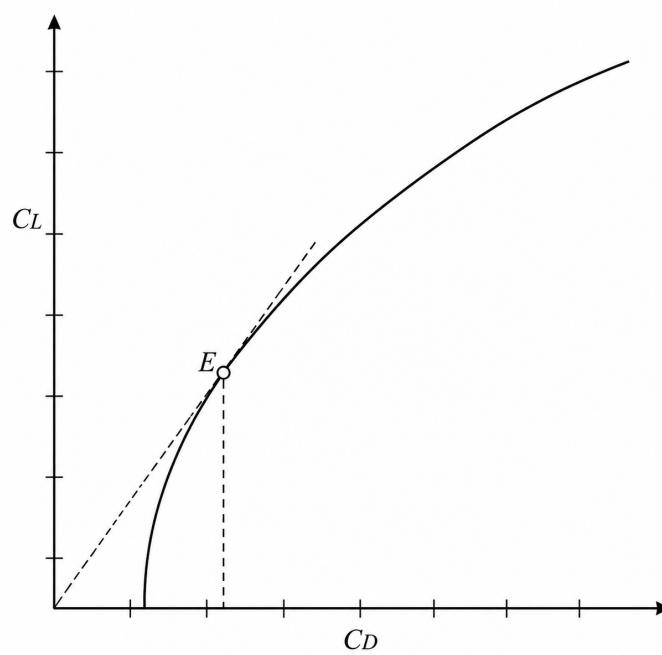


Figura 14 – Il punto E sulla polare: si trova nel punto di tangenza della retta condotta dall'origine. In tale punto $C_{D,E} = 2 C_{D0}$.

6 Influenza di peso e quota sulla spinta necessaria

Possiamo ora esprimere la resistenza in forma compatta che ne evidenzia la dipendenza dai parametri fondamentali. Sostituendo $C_L = 2W/(\rho V^2 S)$ nella (14) si ottiene

$$D = T_n = \underbrace{\frac{1}{2} \rho S C_{D0} V^2}_{\text{parassita}} + \underbrace{\frac{2K}{\rho S} \left(\frac{W^2}{V^2} \right)}_{\text{indotta}}. \quad (31)$$

Ponendo

$$a = \frac{1}{2} \rho S C_{D0} = \frac{1}{2} \rho f, \quad b = \frac{2K}{\rho S} W^2 = \frac{2}{\rho \pi AR e S} W^2, \quad (32)$$

la resistenza assume la forma elegante

$$D = T_n = a V^2 + \frac{b}{V^2}. \quad (33)$$

Il primo termine è la resistenza parassita (cresce con V^2), il secondo è la resistenza indotta (decresce con $1/V^2$).

Posizione del minimo. Annullando la derivata $dD/dV = 0$:

$$2aV - \frac{2b}{V^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad aV^2 = \frac{b}{V^2}, \quad (34)$$

cioè i due contributi si eguagliano — ritroviamo per via analitica la condizione $C_{D0} = KC_L^2$ già vista. La minima resistenza è dunque

$$D_{\min} = T_{n,\min} = \frac{W}{E_{\max}} \quad (35)$$

e si ottiene all'assetto $C_L = C_{L,E}$, alla velocità V_E .

Effetto della quota. Poiché $E_{\max}$ non dipende dalla quota, *il minimo della curva di resistenza non cambia con la quota*: vale sempre $W/E_{\max}$. Ciò che cambia è la *velocità* a cui tale minimo si verifica: salendo di quota, ρ diminuisce e tutte le velocità caratteristiche si spostano verso destra come $1/\sqrt{\sigma}$. La curva quindi non trasla rigidamente: si sposta a destra e si “distende”.

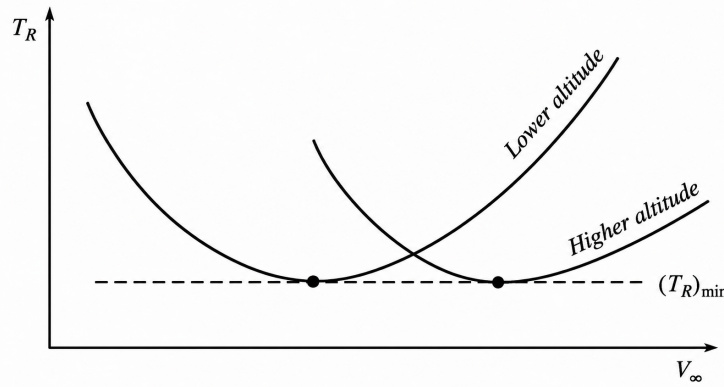


Figura 15 – Effetto della quota sulla curva di spinta necessaria: il minimo $T_{n,\min} = W/E_{\max}$ resta invariato, ma si sposta verso velocità maggiori al crescere della quota.

Effetto del peso. Dalla (35) si vede che il minimo della curva *sale* proporzionalmente al peso W . Inoltre, dalla (29), le velocità caratteristiche aumentano come $\sqrt{W}$. Aumentare il peso, dunque, sposta il minimo verso l'alto e verso destra.

Effetto del C_{D0} . Dalla (31) si vede che il C_{D0} compare *solo* nel termine parassita (quello in V^2): un suo aumento solleva il ramo *destro* della curva — quello delle alte velocità — lasciando pressoché inalterato il ramo sinistro, governato dalla resistenza indotta. L'effetto si fa quindi sentire soprattutto alle alte velocità. Il minimo della curva *sale*, perché $T_{n,\min} = W/E_{\max}$ e $E_{\max} = \sqrt{\pi AR e / (4C_{D0})}$ diminuisce all'aumentare del C_{D0} . Le velocità caratteristiche, invece, si spostano di poco, e verso *sinistra*: essendo $C_{L,E} = \sqrt{\pi AR e C_{D0}} \propto \sqrt{C_{D0}}$ e $V_E \propto 1/\sqrt{C_{L,E}}$, si ha $V_E \propto 1/\sqrt[4]{C_{D0}}$. Per esempio, un aumento del C_{D0} del 10 % riduce V_E di un fattore $\sqrt[4]{1,1} \approx 1,024$, cioè a circa il 97,6 % del valore originario: uno spostamento minimo, in netto contrasto con il forte innalzamento del ramo di alta velocità.

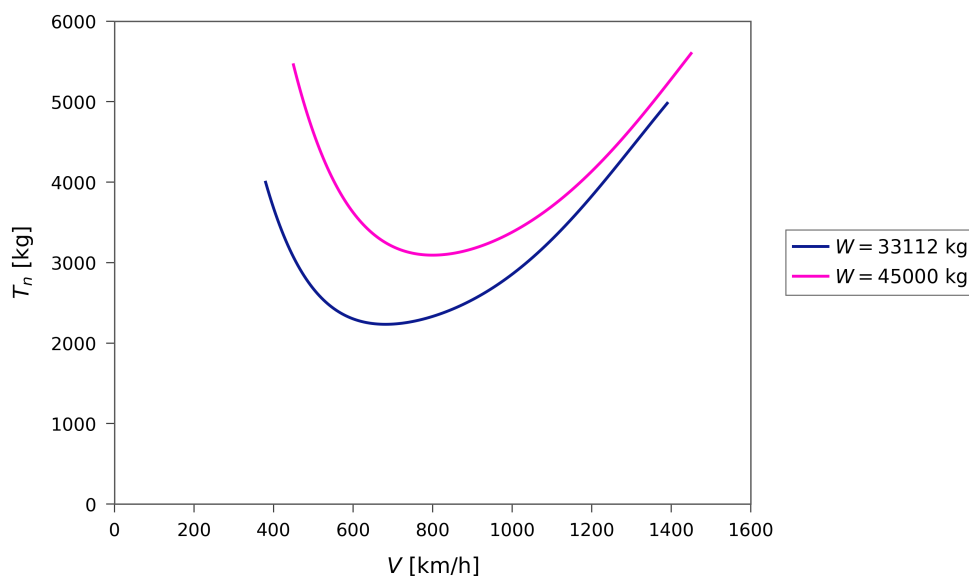


Figura 16 – Effetto del peso sulla curva di spinta necessaria: all'aumentare di W il minimo sale (come W) e si sposta a destra (come $\sqrt{W}$).

Nota

È utile fissare la distinzione tra *parametri di progetto* e *parametri di volo*. Sono parametri di progetto, costanti nella vita operativa del velivolo: $E_{\max}$, S , C_{D0} , AR , il fattore di Oswald ϵ . Sono invece parametri di volo, dipendenti dalla condizione istantanea: la velocità V , la quota, i coefficienti C_L e C_D , l'efficienza E e la resistenza D .

7 La potenza necessaria al volo livellato

7.1 Definizione e legame con la resistenza

La potenza, in senso meccanico, è il lavoro compiuto nell'unità di tempo, ovvero il prodotto di una forza per la velocità con cui il suo punto di applicazione si sposta. Per muovere il velivolo alla velocità V contro la resistenza D occorre quindi una *potenza necessaria*

$$\Pi_n = T_n \cdot V = D \cdot V \quad (36)$$

È essenziale comprendere subito che la potenza necessaria *non* ha lo stesso minimo della spinta necessaria. La spinta necessaria è minima dove D è minima; ma la potenza è il prodotto $D \cdot V$, e quindi il suo minimo si colloca a una velocità *diversa* (più bassa). Questo è uno dei concetti più importanti, e talvolta meno intuitivi, di tutto l'argomento.

Attenzione

Volare alla minima resistenza (punto E) *non* è volare alla minima potenza. Il velivolo che vuole consumare meno carburante per unità di tempo (per esempio per massimizzare la durata in volo di un'elica) deve volare a una velocità *minore* di quella di minima resistenza. Ne nasce un nuovo punto caratteristico, il punto P.

7.2 Approccio analitico

Esplicitiamo la potenza necessaria moltiplicando la resistenza per la velocità:

$$\Pi_n = D \cdot V = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2) \cdot V = \frac{1}{2}\rho S C_{D0} V^3 + \frac{1}{2}\rho S K C_L^2 V^3. \quad (37)$$

Sostituendo $C_L = 2W/(\rho V^2 S)$ nel secondo termine si ottiene l'espressione della potenza necessaria in funzione della sola velocità:

$$\Pi_n = \frac{1}{2}\rho S C_{D0} V^3 + \frac{2K}{\rho S} W^2 \frac{1}{V}. \quad (38)$$

Equivalentemente, ricordando la (33):

$$\Pi_n = D \cdot V = \left(a V^2 + \frac{b}{V^2} \right) V = a V^3 + \frac{b}{V}. \quad (39)$$

La potenza necessaria è dunque la somma di un termine *cubico* in V (la *potenza parassita*) e di un termine che decresce come $1/V$ (la *potenza indotta*, o dipendente dalla portanza).

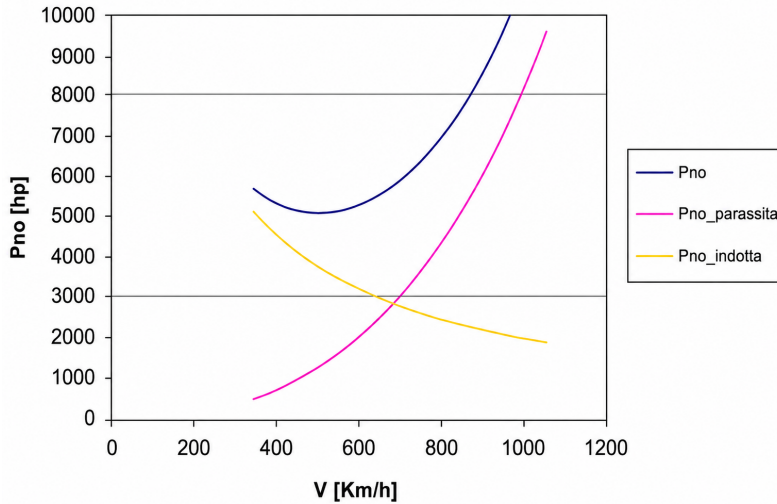


Figura 17 – Potenza necessaria e suoi due contributi: potenza parassita (cresce con V^3) e potenza indotta (decresce con $1/V$). Il minimo si colloca a velocità inferiore a quella di minima resistenza.

7.3 Il punto P di minima potenza

Cerchiamo la velocità di minima potenza annullando la derivata della (39):

$$\frac{d\Pi_n}{dV} = 3aV^2 - \frac{b}{V^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3aV^2 = \frac{b}{V^2}. \quad (40)$$

Ricordando che aV^2 è la resistenza parassita (D_0) e b/V^2 è la resistenza indotta (D_i), questa condizione si legge:

$$\boxed{D_i = 3 D_0} \quad (41)$$

ossia *al punto di minima potenza la resistenza indotta è tre volte la resistenza parassita*. In termini di coefficienti:

$$C_{D,i} = K C_L^2 = 3 C_{D0}, \quad C_{D,P} = C_{D0} + 3 C_{D0} = 4 C_{D0}. \quad (42)$$

Chiamiamo *punto P* (da *potenza*) questo assetto. Il suo coefficiente di portanza si ricava da $K C_L^2 = 3 C_{D0}$:

$$C_{L,P} = \sqrt{3 \frac{C_{D0}}{K}} = \sqrt{3} C_{L,E} = 1,732 C_{L,E} \quad (43)$$

e l'efficienza al punto P:

$$E_P = \frac{C_{L,P}}{C_{D,P}} = \frac{\sqrt{3} C_{L,E}}{4 C_{D0}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{C_{L,E}}{2 C_{D0}} = \frac{\sqrt{3}}{2} E_{\max} = 0,866 E_{\max}. \quad (44)$$

La velocità al punto P si ottiene da $C_{L,P} = \sqrt{3} C_{L,E}$ e dal legame $V \propto 1/\sqrt{C_L}$:

$$V_P = \frac{V_E}{\sqrt[4]{3}} = \frac{V_E}{1,32} \quad (45)$$

Il velivolo al punto P vola dunque più lentamente che al punto E, di un fattore $1/\sqrt[4]{3} \approx 0,76$.

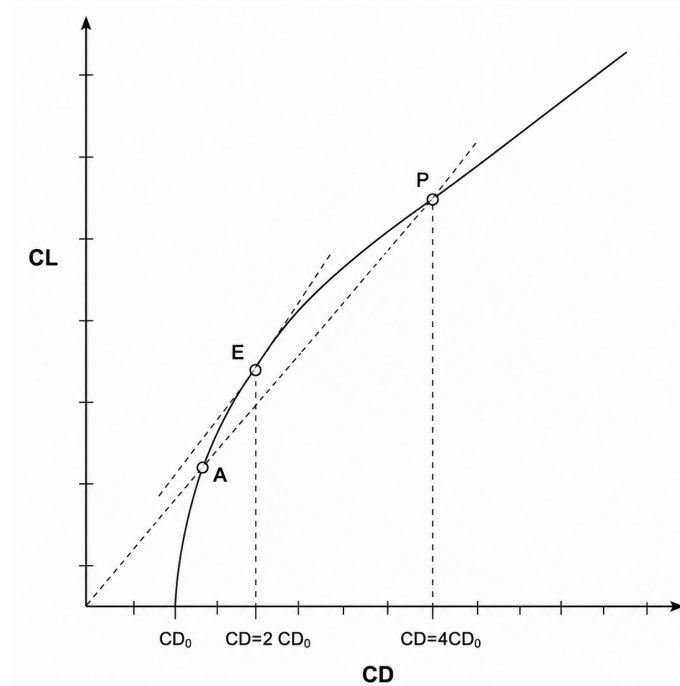


Figura 18 – Il punto P sulla polare: si colloca a $C_{D,P} = 4 C_{D0}$ e $C_{L,P} = \sqrt{3} C_{L,E}$, dunque a C_L più alto (assetto più “lento”) rispetto al punto E.

7.4 Lettura del punto P sulla curva di potenza e legame con E/V

Ricordando $\Pi_n = W/(E/V)$, dalla (16) si ha

$$\Pi_n = T_n V = \frac{W}{E} V = \frac{W}{E/V}. \quad (46)$$

La minima potenza corrisponde dunque al *massimo* del rapporto E/V . Sulla curva di potenza, $\Pi_n = V \tan \psi$ dove ψ è l'angolo della retta dall'origine: il punto E (minima resistenza) si ritrova come punto di *tangenza* della retta dall'origine alla curva di potenza, mentre il minimo della curva è il punto P.

Si può anche esprimere la potenza in funzione esplicita dell'assetto. Da $\Pi_n = \frac{1}{2}\rho S C_D V^3$ e $V \propto 1/\sqrt{C_L}$ segue

$$\Pi_n = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 \sigma}} \left(\frac{W}{S} \right)^{1/2} \frac{W}{C_L^{3/2}/C_D}. \quad (47)$$

Dunque la potenza necessaria è minima quando è *massimo* il rapporto $C_L^{3/2}/C_D$. Questo rapporto giocherà un ruolo centrale nello studio dell'autonomia di durata dei velivoli a elica.

Nota

La (47) mette in evidenza che la potenza necessaria dipende dal peso con esponente 3/2 (mentre la resistenza dipendeva da W con esponente 1), dipende dalla superficie alare S (la spinta necessaria non vi dipendeva) e dipende dalla quota tramite $1/\sqrt{\sigma}$ (la resistenza minima non dipendeva dalla quota). La potenza è quindi una grandezza “più sensibile” della resistenza a peso e quota.

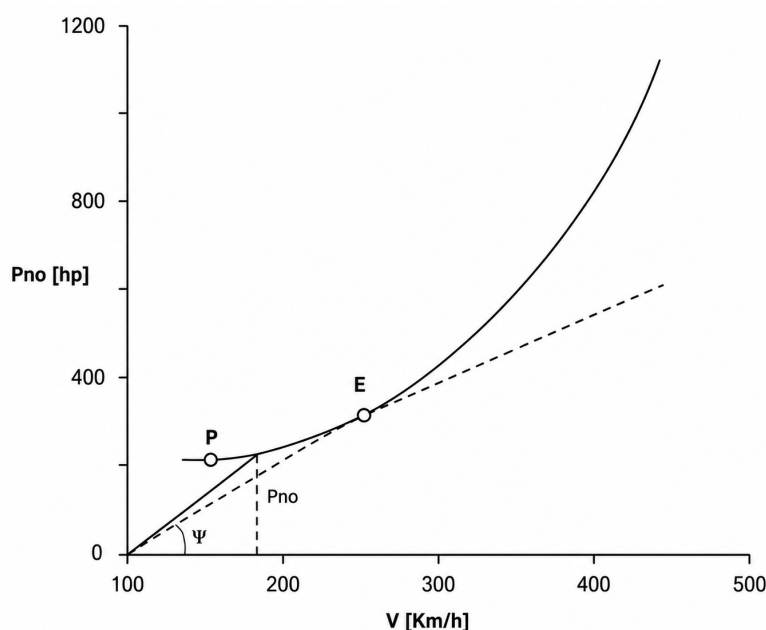


Figura 19 – Curva di potenza necessaria del Gulfstream IV a 9 000 m. Sono indicati il punto P (minimo della curva) e il punto E (tangenza della retta dall'origine).

7.5 Effetto di quota, peso e C_{D0} sulla potenza

Quota. Passando dal livello del mare a quota elevata, la curva di potenza necessaria si sposta verso destra (tutte le velocità crescono come $1/\sqrt{\sigma}$) e verso l'alto (la potenza minima cresce come $1/\sqrt{\sigma}$, dalla (47)).

Peso. Le velocità caratteristiche si spostano a destra come $\sqrt{W}$; la potenza minima cresce come $W^{3/2}$, dunque più rapidamente della resistenza. Tuttavia, a parità di potenza disponibile (per esempio in un velivolo a

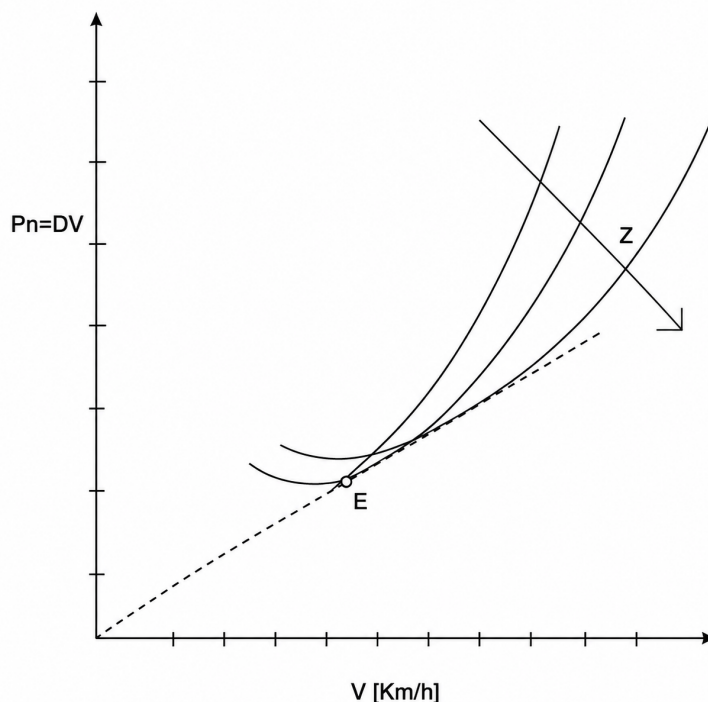


Figura 20 – Effetto della quota sulla curva di potenza necessaria: spostamento verso destra e verso l'alto al crescere della quota.

elica), un aumento di peso non compromette fortemente la velocità massima: l'effetto più marcato si ha alle basse velocità, dove si riduce sensibilmente il rateo di salita.

Coefficiente di resistenza a portanza nulla C_{D0} . Un aumento del C_{D0} agisce soltanto sul termine cubico (potenza parassita) e si fa sentire soprattutto alle alte velocità. Per data potenza disponibile, un incremento del C_{D0} comporta una riduzione *drammatica* della velocità massima ottenibile, ben più marcata di quella dovuta a un aumento di peso. Le velocità dei punti caratteristici, invece, variano poco: poiché $C_{L,E} = \sqrt{\pi AR e C_{D0}}$ e $V_E \propto 1/\sqrt{C_{L,E}}$, esse si riducono soltanto come $1/\sqrt[4]{C_{D0}}$. Per esempio, un aumento del C_{D0} del 10 % riduce la velocità di minima resistenza di un fattore $\sqrt[4]{1,1} \approx 1,024$, cioè a circa il 97,6 % del valore originario.

8 Il punto A: minimo del rapporto D/V

Abbiamo individuato finora due punti caratteristici: il punto E (minima resistenza, massima efficienza) e il punto P (minima potenza). Per simmetria, dopo aver studiato il punto in cui $E\sqrt{C_L}$ è massimo (il punto P, legato a E/V), è naturale chiedersi dove sia massimo il prodotto $E \cdot V$, ovvero — come vedremo — dove sia minimo il rapporto D/V . Questo terzo punto, che chiameremo *punto A*, acquisterà pieno significato fisico nello studio dell'*autonomia chilometrica dei velivoli a getto*: di qui il nome.

8.1 Significato grafico

Sulla curva di spinta necessaria, il punto in cui la retta condotta dall'origine è *tangente* alla curva di resistenza è il punto in cui il rapporto D/V è minimo. Infatti la pendenza della retta dall'origine è proprio D/V , e la tangenza individua la pendenza minima.

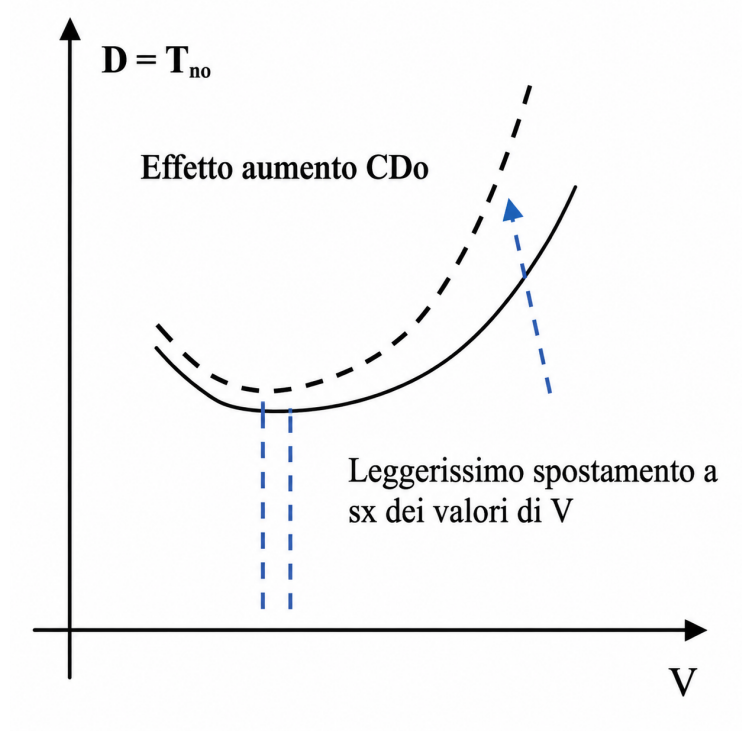


Figura 21 – Effetto di un aumento del C_{D0} sulla curva di potenza necessaria: incremento marcato alle alte velocità, lieve spostamento a sinistra delle velocità caratteristiche.

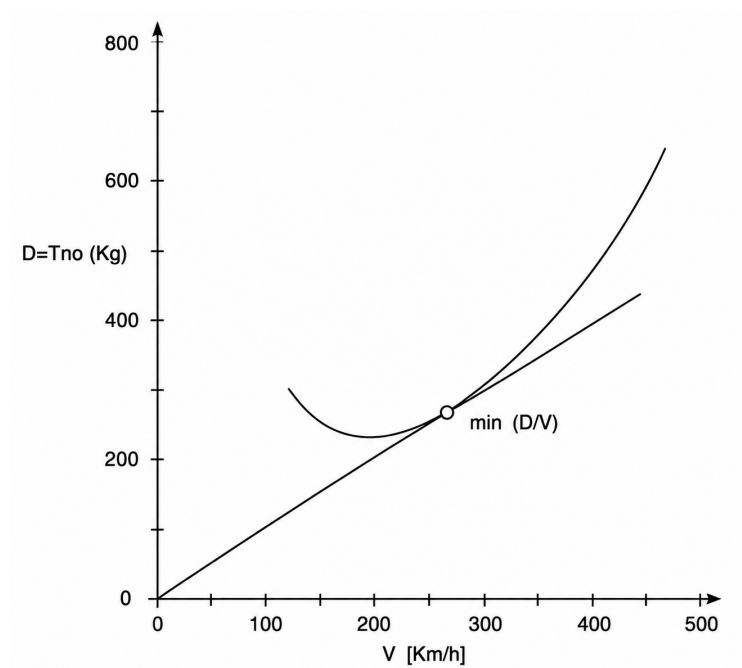


Figura 22 – Il punto A sulla curva di spinta necessaria: è il punto di tangenza della retta dall'origine, dove il rapporto D/V è minimo.

8.2 Determinazione analitica

Partiamo dalla (33), $D = aV^2 + b/V^2$, e formiamo il rapporto

$$\frac{D}{V} = aV + \frac{b}{V^3}. \quad (48)$$

Annullando la derivata rispetto a V :

$$\frac{d}{dV} \left(\frac{D}{V} \right) = a - \frac{3b}{V^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3b}{V^4}, \quad \text{ossia} \quad aV^2 = 3 \frac{b}{V^2}. \quad (49)$$

Questa volta è la resistenza parassita a essere tripla di quella indotta:

$$\boxed{D_0 = 3 D_i} \quad (50)$$

ovvero, in coefficienti,

$$C_{D0} = 3 K C_L^2, \quad C_{D,i} = \frac{1}{3} C_{D0}, \quad C_{D,A} = C_{D0} + \frac{1}{3} C_{D0} = \frac{4}{3} C_{D0}. \quad (51)$$

Il coefficiente di portanza al punto A è

$$\boxed{C_{L,A} = \sqrt{\frac{1}{3} \frac{C_{D0}}{K}} = \frac{C_{L,E}}{\sqrt{3}} = 0,577 C_{L,E}} \quad (52)$$

L'efficienza al punto A vale

$$E_A = \frac{C_{L,A}}{C_{D,A}} = \frac{C_{L,E}/\sqrt{3}}{\frac{4}{3} C_{D0}} = \frac{\sqrt{3}}{2} E_{\max} = 0,866 E_{\max}, \quad (53)$$

identica all'efficienza del punto P. Questo non è un caso: punto A e punto P giacciono sulla *stessa retta* dall'origine nel piano della polare, perché caratterizzati dalla medesima efficienza.

Infine, la velocità al punto A:

$$\boxed{V_A = \sqrt[4]{3} V_E = 1,32 V_E} \quad (54)$$

Si noti la bella simmetria: per passare da E a P si *divide* la velocità per $\sqrt[4]{3}$; per passare da E ad A si *moltiplica* per $\sqrt[4]{3}$. Il punto A è dunque un assetto più veloce del punto E.

9 Relazioni analitiche generali dei punti caratteristici

I tre punti A, E, P sono stati finora ricavati tramite considerazioni *fisiche* sul volo livellato (minima resistenza, minima potenza, minimo D/V), coinvolgendo peso e geometria. È istruttivo mostrare che le *caratteristiche aerodinamiche* di ciascun punto (i valori di C_L , C_D , E) si possono ottenere in modo del tutto *generale*, operando direttamente sull'espressione della polare parabolica, senza alcuna ipotesi sul volo livellato. I risultati saranno quindi validi anche in salita, in virata, ecc.; solo le *velocità* dipendono dalla particolare condizione di volo.

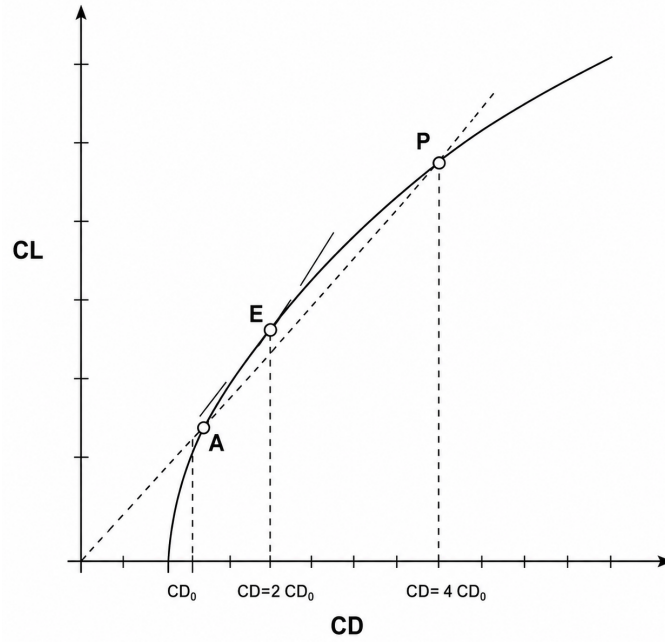


Figura 23 – I tre punti caratteristici A, E, P sulla polare. A e P giacciono sulla stessa retta dall'origine (stessa efficienza $0,866 E_{\max}$); E è il punto di tangenza (efficienza massima).

9.1 Punto E: massimo di C_L/C_D

Massimizziamo direttamente $E = C_L/C_D = C_L/(C_{D0} + KC_L^2)$ rispetto a C_L :

$$\frac{d}{dC_L} \left(\frac{C_L}{C_{D0} + KC_L^2} \right) = \frac{(C_{D0} + KC_L^2) - C_L(2KC_L)}{(C_{D0} + KC_L^2)^2} = 0, \quad (55)$$

da cui $C_{D0} - KC_L^2 = 0$, ossia $C_{D0} = KC_L^2$, e quindi $C_{L,E} = \sqrt{C_{D0}/K}$, $C_{D,E} = 2C_{D0}$ e

$$E_{\max} = \left(\frac{C_L}{C_D} \right)_{\max} = \frac{\sqrt{C_{D0}/K}}{2C_{D0}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{K C_{D0}}} = \sqrt{\frac{1}{4K C_{D0}}} = \sqrt{\frac{\pi AR e}{4 C_{D0}}}. \quad (56)$$

Si ritrova la (27), ma ora senza alcuna ipotesi sul volo stazionario: è un risultato puramente aerodinamico.

9.2 Punto P: massimo di $C_L^{3/2}/C_D$

Deriviamo $C_L^{3/2}/C_D = C_L^{3/2}/(C_{D0} + KC_L^2)$ rispetto a C_L e annulliamo la derivata:

$$\frac{d}{dC_L} \left(\frac{C_L^{3/2}}{C_{D0} + KC_L^2} \right) = \frac{\frac{3}{2} C_L^{1/2} (C_{D0} + KC_L^2) - C_L^{3/2} (2KC_L)}{(C_{D0} + KC_L^2)^2} = 0. \quad (57)$$

Annullando il numeratore e raccogliendo $C_L^{1/2}$,

$$\frac{3}{2} (C_{D0} + KC_L^2) - 2KC_L^2 = 0 \implies \frac{3}{2} C_{D0} - \frac{1}{2} KC_L^2 = 0 \implies KC_L^2 = 3 C_{D0}. \quad (58)$$

Al massimo di $C_L^{3/2}/C_D$ la resistenza indotta vale dunque tre volte la parassita ($C_{D,i} = 3 C_{D0}$): è esattamente la condizione del punto P già trovata minimizzando la potenza. Ne seguono $C_{L,P} = \sqrt{3 C_{D0}/K} = \sqrt{3} C_{L,E}$ e $C_{D,P} = C_{D0} + 3C_{D0} = 4 C_{D0}$.

9.3 Punto A: massimo di $C_L^{1/2}/C_D$

Con lo stesso procedimento, derivando $C_L^{1/2}/C_D$:

$$\frac{d}{dC_L} \left(\frac{C_L^{1/2}}{C_{D0} + KC_L^2} \right) = \frac{\frac{1}{2} C_L^{-1/2} (C_{D0} + KC_L^2) - C_L^{1/2} (2KC_L)}{(C_{D0} + KC_L^2)^2} = 0. \quad (59)$$

Moltiplicando il numeratore per $C_L^{1/2}$ e annullandolo,

$$\frac{1}{2} (C_{D0} + KC_L^2) - 2KC_L^2 = 0 \implies \frac{1}{2} C_{D0} - \frac{3}{2} KC_L^2 = 0 \implies C_{D0} = 3 KC_L^2. \quad (60)$$

Qui è la *parassita* a valere tre volte l'indotta ($C_{D0} = 3 C_{D,i}$): è la condizione del punto A. Ne seguono $C_{L,A} = \sqrt{C_{D0}/(3K)} = C_{L,E}/\sqrt{3}$ e $C_{D,A} = C_{D0} + \frac{1}{3} C_{D0} = \frac{4}{3} C_{D0}$. Si noti la simmetria: passando da E a P si *moltiplica* C_L per $\sqrt{3}$, passando da E ad A lo si *divide* per $\sqrt{3}$.

Il rapporto $C_L^{1/2}/C_D$ governa l'autonomia chilometrica dei velivoli a getto, mentre $C_L^{3/2}/C_D$ governa l'autonomia di durata dei velivoli a elica: ecco perché questi rapporti, all'apparenza artificiosi, sono in realtà di grande importanza pratica.

9.4 Ordinamento delle velocità

Mettendo a confronto le velocità si ottiene la relazione di ordine

$$\boxed{V_P < V_E < V_A} \quad (61)$$

con i rapporti $V_P = V_E/\sqrt[4]{3}$ e $V_A = \sqrt[4]{3} V_E$. In parole: *si vola più lentamente alla minima potenza (P), intermedio alla minima resistenza (E), più velocemente nell'assetto di massima autonomia a getto (A)*.

10 Riepilogo dei punti caratteristici

Raccogliamo in modo organico tutti i risultati. Ai tre punti A, E, P si aggiunge naturalmente, come quarto riferimento, lo *stallo*, che corrisponde al massimo coefficiente di portanza $C_{L,max}$ e quindi alla minima velocità di volo $V_S = V_{min}$.

10.1 Localizzazione sui tre diagrammi

Ciascun punto caratteristico può essere individuato simultaneamente su tre diagrammi: la *polare* (C_D, C_L), la curva di *spinta necessaria* $T_n(V)$ e la curva di *potenza necessaria* $\Pi_n(V)$. Queste ultime due sono le *polari tecniche*.

10.2 Tabella riepilogativa dei coefficienti

La tabella seguente raccoglie i rapporti notevoli di ciascun punto rispetto al punto E. È uno strumento di lavoro prezioso: una volta note C_{D0} , AR ed e , da essa si ricava tutto.

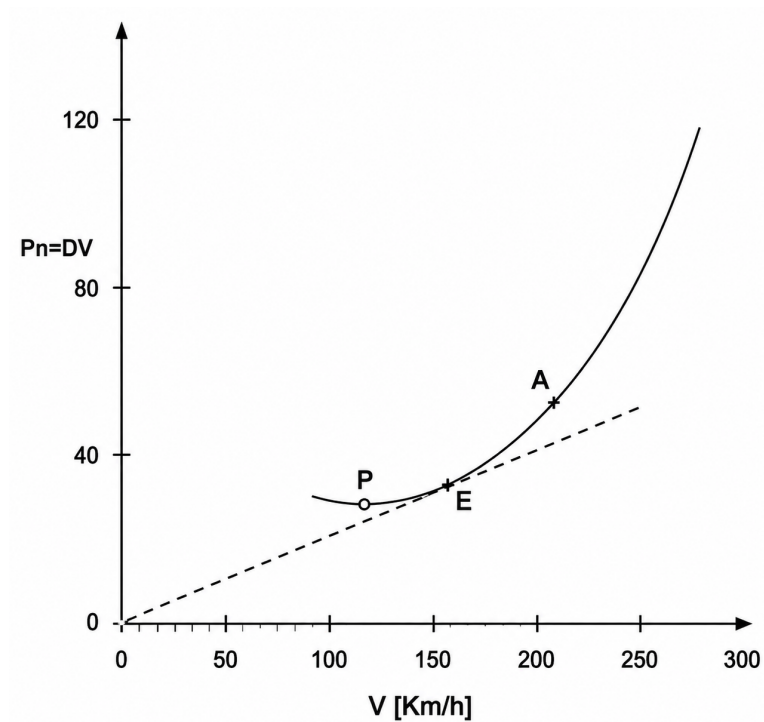


Figura 24 – Localizzazione dei tre punti P, E, A sulla curva di potenza necessaria, con l'ordinamento $V_P < V_E < V_A$.

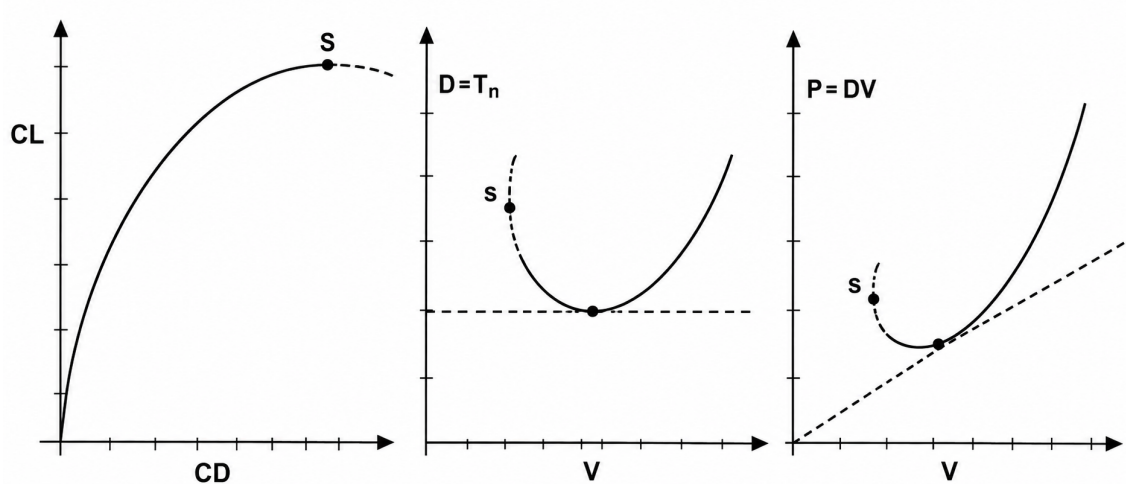


Figura 25 – Riepilogo grafico dei punti caratteristici A, E, P (e dello stallo S) sui tre diagrammi: polare, spinta necessaria e potenza necessaria.

Tabella 2 – Punti caratteristici della polare parabolica: rapporti rispetto al punto E.

Punto	C_D/C_{D0}	$C_L/C_{L,E}$	$E/E_{\max}$	V/V_E	T/T_E	Π/Π_P
P	4	$\sqrt{3} = 1,732$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$	$1/\sqrt[4]{3} = 0,76$	$2/\sqrt{3} = 1,155$	1
E	2	1	1	1	1	$\sqrt[4]{27}/2 = 1,14$
A	$4/3$	$1/\sqrt{3} = 0,577$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$	$\sqrt[4]{3} = 1,32$	$2/\sqrt{3} = 1,155$	$\sqrt{3} = 1,73$

10.3 Relazioni fondamentali da ricordare

$$V_P = \frac{V_E}{\sqrt[4]{3}} = \frac{V_E}{1,32}, \quad V_A = \sqrt[4]{3} V_E = 1,32 V_E, \quad (62)$$

$$D_{\min} = D_E = \frac{W}{E_{\max}}, \quad D_A = D_P = \frac{2}{\sqrt{3}} D_E = 1,155 D_E, \quad (63)$$

$$\Pi_P = \Pi_{\min} = \frac{W}{E_P} V_P, \quad \Pi_E = 1,14 \Pi_P, \quad (64)$$

$$\Pi_A = \sqrt{3} \Pi_P = 1,73 \Pi_P. \quad (65)$$

Nota

Significato sintetico dei tre punti.

- **Punto E** — minima resistenza in volo orizzontale, massima efficienza aerodinamica:
 $(C_L/C_D)_{\max} = E_{\max}$.
- **Punto P** — minima potenza necessaria al volo orizzontale: massimo di E/V , equivalentemente massimo di $C_L^{3/2}/C_D$ (e di $E\sqrt{C_L}$).
- **Punto A** — minimo del rapporto D/V : massimo di $E \cdot V$, equivalentemente massimo di $C_L^{1/2}/C_D$ (e di $E/\sqrt{C_L}$). È l'assetto di massima autonomia chilometrica a getto.

Nota

Valori tipici dei coefficienti (utili come ordine di grandezza): $C_{L,E}$ assume valori mediamente compresi tra 0,60 e 0,85; $C_{L,P}$ è usualmente maggiore di 1,0 (circa 1,15–1,30); $C_{L,A}$ assume valori piccoli (tra 0,25 e 0,45).

II Esercizio svolto: velivolo bimotore a elica

Esempio

Dati del velivolo. $W_{TO} = 4\,000$ kgf, $S = 25$ m², $b = 15$ m, $C_{D0} = 0,025$, $e = 0,80$, $C_{L,\max} = 1,5$.
 Calcolare i coefficienti aerodinamici dei punti caratteristici e le velocità, resistenze e potenze a quota zero e alla quota di crociera di 12 000 ft ($\approx 3\,660$ m).

Grandezze geometriche e di progetto.

$$AR = \frac{b^2}{S} = \frac{15^2}{25} = 9, \quad AR e = 9 \cdot 0,80 = 7,2,$$

$$E_{\max} = \sqrt{\frac{\pi AR e}{4 C_{D0}}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot 7,2}{4 \cdot 0,025}} \approx 15,04.$$

Coefficienti dei punti caratteristici.

$$C_{L,E} = \sqrt{\pi AR e C_{D0}} = \sqrt{\pi \cdot 7,2 \cdot 0,025} \approx 0,75,$$

$$C_{L,P} = \sqrt{3} C_{L,E} \approx 1,30, \quad C_{L,A} = C_{L,E}/\sqrt{3} \approx 0,43,$$

$$C_{D,E} = 2 C_{D0} = 0,050, \quad C_{D,P} = 4 C_{D0} = 0,100,$$

$$C_{D,A} = \frac{4}{3} C_{D0} \approx 0,033.$$

L'efficienza nei punti A e P vale $E_A = E_P = 0,866 E_{\max} \approx 13,0$.

Velocità a quota zero (livello del mare, $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$).

$$V_E = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{Wg}{S} \frac{1}{C_{L,E}}} = \sqrt{\frac{2}{1,225} \cdot \frac{4000 \cdot 9,81}{25} \cdot \frac{1}{0,75}} \approx 58,4 \text{ m/s} \approx 210 \text{ km/h},$$

$$V_P = V_E/1,32 \approx 160 \text{ km/h} (\approx 44,4 \text{ m/s}),$$

$$V_A = 1,32 V_E \approx 277 \text{ km/h},$$

$$V_S = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{Wg}{S} \frac{1}{C_{L,\max}}} \approx 41,4 \text{ m/s} \approx 149 \text{ km/h}.$$

Resistenze a quota zero.

$$D_E = D_{\min} = \frac{W}{E_{\max}} = \frac{4000}{15,04} \approx 266 \text{ kgf},$$

$$D_A = D_P = 1,155 D_E \approx 307 \text{ kgf}.$$

Potenze a quota zero.

$$\Pi_P = D_P V_P = 307 \cdot 9,81 \cdot 44,36 \approx 133,6 \text{ kW} \approx 179 \text{ hp},$$

$$\Pi_E = 1,14 \Pi_P \approx 204 \text{ hp},$$

$$\Pi_A = \sqrt{3} \Pi_P \approx 310 \text{ hp}.$$

Si vede che al livello del mare il velivolo necessita di almeno circa 180 hp (potenza minima, al punto P), ma per volare alla velocità del punto A (circa 277 km/h) richiede circa 310 hp.

Caratteristiche alla quota di crociera (12 000 ft). A 3 660 m si ha $\rho \approx 0,85 \text{ kg/m}^3$ e $\sigma \approx 0,69$. Le resistenze *non cambiano*, perché $D = W/E$ dipende solo dall'efficienza: $D_E \approx 266 \text{ kgf}$, $D_A = D_P \approx 307 \text{ kgf}$.

Le velocità (vere, TAS) si scalano invece come $1/\sqrt{\sigma}$:

$$V_E = \frac{210}{\sqrt{0,69}} \approx 253 \text{ km/h}, \quad V_P \approx 192 \text{ km/h}, \quad V_A \approx 332 \text{ km/h},$$

$$V_S = \frac{149}{\sqrt{0,69}} \approx 179 \text{ km/h}.$$

Le potenze si ricalcolano con le nuove velocità; per esempio

$$\Pi_E = D_E V_E = 266 \cdot 9,81 \cdot \frac{253}{3,6} \approx 183 \text{ kW} \approx 246 \text{ hp}.$$

Attenzione

Nei calcoli di potenza, usare *sempre* unità coerenti del Sistema Internazionale prima di convertire: forze in newton (moltiplicare i kgf per 9,81) e velocità in m/s (dividere i km/h per 3,6). La potenza risulta in watt; per convertire in cavalli si usa $1 \text{ hp} = 0,746 \text{ kW}$.

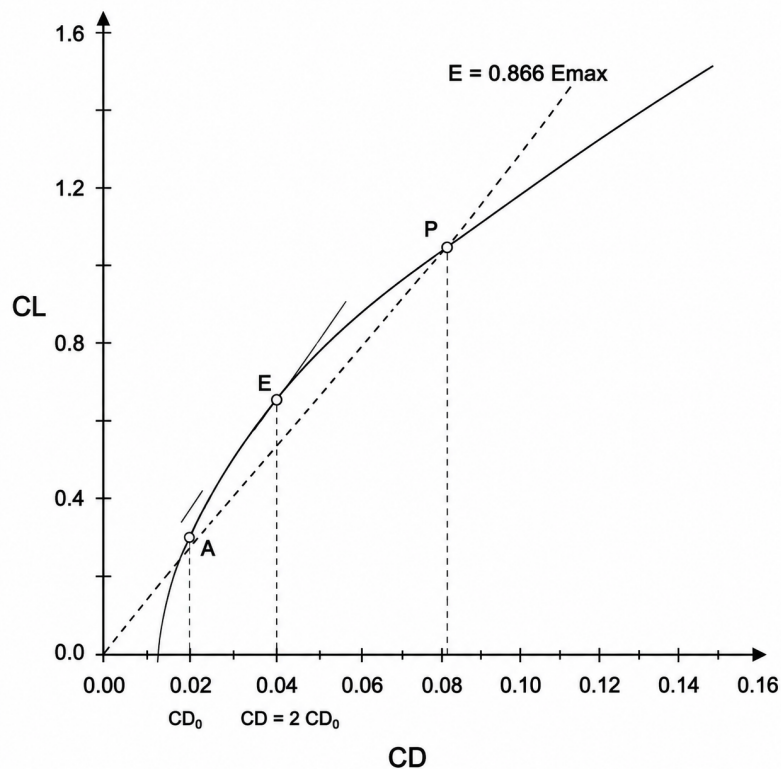


Figura 26 – Polare parabolica del velivolo bimotore dell'esercizio ($C_{D0} = 0,025$, $AR = 9$, $e = 0,80$), con la localizzazione dei punti A, E, P.

Conclusioni

Lo studio condotto in questa monografia mostra come, a partire dalla sola polare parabolica $C_D = C_{D0} + KC_L^2$ e dall'equilibrio del volo livellato $T = D$, $L = W$, sia possibile dedurre l'intera "geografia" delle prestazioni di un velivolo. I tre punti caratteristici A, E, P non sono formule da memorizzare, ma *condizioni fisiche di ottimo*:

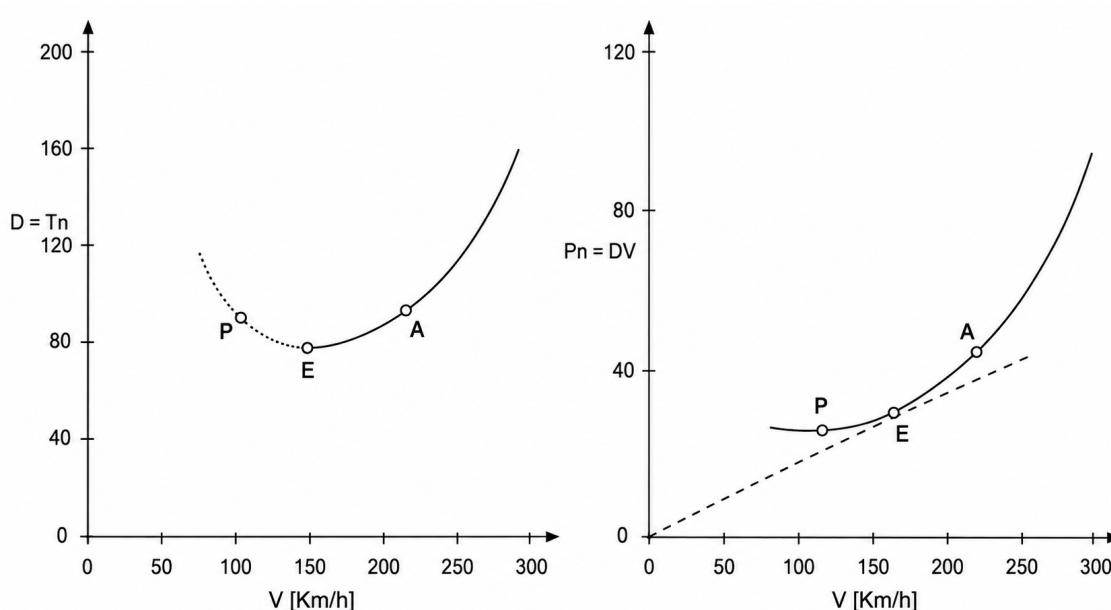


Figura 27 – Curve di spinta necessaria e di potenza necessaria del velivolo bimotore a quota zero e a 12 000 ft, con i punti caratteristici.

minima resistenza, minima potenza, minimo D/V . Ciascuno corrisponde a un preciso rapporto tra resistenza parassita e resistenza indotta ($C_{D0} = KC_L^2$ per E, $KC_L^2 = 3C_{D0}$ per P, $C_{D0} = 3KC_L^2$ per A) e a una velocità precisa, legate tra loro dalla semplice radice quarta di tre.

La lezione di metodo è altrettanto importante del risultato: la stessa condizione di ottimo si può raggiungere per via fisica (minimizzando resistenza o potenza) o per via puramente aerodinamica (massimizzando C_L/C_D , $C_L^{3/2}/C_D$, $C_L^{1/2}/C_D$). La coincidenza dei due percorsi è la conferma della coerenza interna della teoria, e prepara il terreno allo studio dell'autonomia, della salita e della virata, dove questi stessi punti torneranno con ruoli sempre più concreti.