

MONOGRAFIE DI COSTRUZIONI AERONAUTICHE

Applicazioni dell'idrodinamica moderna all'aeronautica

Ludwig Prandtl
Università di Göttinga

NACA Report No. 116 (1921)

REPORT No. 116

APPLICATIONS OF MODERN HYDRODYNAMICS TO AERONAUTICS

IN TWO PARTS

By L. PRANDTL
Göttingen University

Translated by the Staff of the National Advisory Committee for Aeronautics

Traduzione italiana integrale, note didattiche,
appendice di autoconsistenza ed esercizi svolti

a cura del

Prof. Ing. Biagio Raucci

ITIS «E. Majorana» — Somma Vesuviana (NA)
Articolazione Costruzione del Mezzo Aeronautico — Classe quinta

Il testo originale, opera del governo federale degli Stati Uniti, è di pubblico dominio ed è liberamente consultabile presso il NASA Technical Reports Server (NTRS), documento 19930091180. La presente traduzione e l'apparato didattico sono rilasciati agli studenti della classe per uso di studio.

Indice

Presentazione del curatore	3
Prefazione dell'autore	5
1 Parte I — Concetti fondamentali e teoremi più importanti	6
1.1 La viscosità e lo strato limite	6
1.2 La comprimibilità	7
1.3 Il fluido ideale e la descrizione del moto	7
1.4 L'equazione di Bernoulli e la pressione dinamica	8
1.5 La circolazione e il teorema di Kelvin	9
1.6 La rotazione	10
1.7 I teoremi di Helmholtz sui vortici	11
1.8 Il teorema di Stokes e la legge di Biot–Savart	12
1.9 Sorgenti e pozzi	14
1.10 Il moto piano e le funzioni complesse	14
1.11 Il teorema della quantità di moto	17
2 Parte II — Applicazioni	19
A. Distribuzione della pressione sui corpi dei dirigibili	19
2.0.1 Il metodo di Fuhrmann	19
B. Teoria della portanza	24
2.0.2 Il flusso piano attorno all'ala e il teorema di Kutta–Žukovskij	24
2.0.3 Il metodo delle trasformazioni conformi: i profili di Joukowski	26
2.0.4 La nascita della circolazione	28
C. L'ala finita	33
2.0.5 I vortici liberi dell'ala finita	33
2.0.6 L'effetto suolo	34
2.0.7 Il campo di velocità dietro l'ala; azione mutua fra le ali	35
2.0.8 Il biplano senza scalamento: la resistenza mutua	37
D. Teoria del monoplano	40
2.0.9 L'ala di riferimento e il nastro vorticoso	40
2.0.10 Il problema linearizzato e la linea portante	41
2.0.11 Il primo problema: la distribuzione ellittica	43
2.0.12 Secondo e terzo problema	49
E. Teoria perfezionata degli aeroplani a più ali	51
2.0.13 Il teorema di reciprocità di Munk	51
2.0.14 Sistemi scalati: il teorema dello scalamento	53
2.0.15 La ripartizione ottima della portanza	55
2.0.16 La trasformazione a monoplano equivalente	57
2.0.17 Il flusso piano equivalente e la superficie F'	58
2.0.18 Applicazioni: biplano e ala con fessura	61
F. Profili alari in una galleria o in un getto libero	62
2.0.19 Le condizioni al contorno	62
2.0.20 Le formule di correzione	64

G. Applicazione della teoria dei profili all'elica	65
2.o.21 I teoremi di Betz sull'elica	65
2.o.22 La distribuzione ottima di circolazione sull'elica	67
Osservazioni conclusive dell'autore	72
Simboli più importanti e letteratura	73
A Strumenti per leggere Prandtl	75
A.1 Campi di velocità e derivate parziali	75
A.2 Circolazione, rotazione, potenziale	76
A.3 L'equazione di Bernoulli	77
A.4 Numeri complessi e trasformazioni conformi	77
A.5 Il teorema della quantità di moto	78
B Esercizi svolti calati nel testo	79

Presentazione del curatore

Dove stiamo andando

Stiamo per leggere, in italiano, uno dei documenti fondativi dell'aerodinamica moderna: il rapporto che Ludwig Prandtl scrisse nel 1921, su richiesta del NACA americano, per raccogliere in forma organica la teoria della portanza e della resistenza indotta sviluppata a Gottinga fra il 1904 e il 1920. Quasi tutto ciò che studiate nel corso di quinta — circolazione, teorema di Kutta-Žukovskij, vortici d'estremità, resistenza indotta, ala ellittica, effetto suolo, correzioni di galleria, teoria dell'elica — nasce *qui*, in queste pagine. Leggerle significa vedere le formule del vostro corso nel momento esatto in cui vengono al mondo.

Perché leggere Prandtl in quinta

Il programma di quinta vi chiede di padroneggiare la meccanica del volo e l'aerodinamica dell'ala finita. I manuali moderni presentano questi risultati già confezionati; Prandtl, invece, li *costruisce* davanti ai vostri occhi, con un linguaggio sorprendentemente piano e con una costante attenzione all'intuizione fisica prima del formalismo. È lo stesso metodo che seguiamo in classe: prima il fenomeno, poi il modello, poi la formula, infine la verifica sperimentale. Non a caso Prandtl chiude quasi ogni sezione confrontando la teoria con le misure in galleria del vento di Gottinga.

Che cosa contiene questa monografia

1. la **traduzione italiana integrale** del Report No. 116, fedele al testo del 1921 in ogni sua parte: prefazione, Parte I (fondamenti di idrodinamica, §§ 1–11), Parte II (applicazioni aeronautiche, §§ 12–33), tavola dei simboli e bibliografia originale;
2. le **note del curatore**, riquadri grigi ben distinti dal testo di Prandtl, che collegano il rapporto al programma del nostro corso e alla notazione moderna;
3. una **appendice di autoconsistenza** (Appendice A) che richiama, con il livello di dettaglio necessario a un diplomando, gli strumenti matematici e fisici usati da Prandtl: campi di velocità, circolazione, potenziale, funzioni di variabile complessa, teorema della quantità di moto;
4. quattro **esercizi svolti** (Appendice B) con il metodo dei cinque passi, tutti *calati nel testo*: ogni esercizio applica una formula numerata del rapporto.

Come è fatta la notazione di Prandtl

Per fedeltà storica la traduzione conserva i simboli originali di Gottinga, che Prandtl stesso difende nella prefazione. La tabella che segue è il vostro «dizionario» verso la notazione americana che usiamo nel corso.

Attenzione

Il simbolo W è il più insidioso: in Prandtl indica la *resistenza* (dal tedesco *Widerstand*), mentre nella notazione americana del corso indica il *peso*. Ogni volta che incontrate W in queste pagine, leggete «resistenza». Analogamente A non è un'area ma la *portanza*.

Tabella 1. Corrispondenza fra la notazione di Prandtl (1921) e quella del nostro corso.

Grandezza	Prandtl	Corso (Serie Raucci)
Portanza (<i>Auftrieb</i>)	A	L
Resistenza (<i>Widerstand</i>)	W	D
Peso	—	W
Coefficiente di portanza	c_a	C_L (ala), c_ℓ (profilo)
Coefficiente di resistenza	c_w	C_D (ala), c_d (profilo)
Superficie alare (<i>Fläche</i>)	F	S
Apertura (<i>Breite</i>)	b	b
Corda (<i>Tiefe</i>)	t	c
Pressione dinamica	$q = \frac{\rho}{2} V^2$	q
Allungamento	b^2/F	AR
Circolazione	Γ	Γ

Come leggere il rapporto

La Parte I è un corso accelerato di idrodinamica del fluido ideale: Prandtl stesso invita il lettore che non conosce la materia «a credere ai teoremi enunciati» finché non avrà tempo di studiarli su un trattato. Voi avete un vantaggio: l'Appendice A vi fornisce esattamente quei richiami. Suggerisco quindi due percorsi:

Percorso diretto — leggete il rapporto dall'inizio alla fine, saltando all'appendice ogni volta che uno strumento vi è ignoto (i rimandi sono indicati nelle note del curatore);

Percorso preparato — studiate prima l'appendice, poi affrontate Prandtl di seguito, senza interruzioni: è il percorso che consiglio in vista dell'Esame di Stato.

Le figure originali del rapporto (62 tavole) sono richiamate con la numerazione di Prandtl; nel progetto sono predisposti i segnaposti intelligenti della collana, che si sostituiranno automaticamente con le immagini caricate nella cartella `immagini/`.

Il senso di tutto questo

Un documento del 1921 potrebbe sembrare archeologia. Non lo è: la teoria della linea portante è ancora oggi il primo modello che ogni progettista applica a un'ala nuova, ed è il cuore dei metodi a pannelli e dei codici di dimensionamento preliminare. Capire Prandtl alla fonte significa capire *perché* le formule del corso hanno la forma che hanno — e questo, all'orale dell'Esame di Stato, fa la differenza fra chi recita e chi sa.

Prefazione dell'autore

Il Comitato Consultivo Nazionale per l'Aeronautica degli Stati Uniti mi ha chiesto di preparare, per i rapporti del Comitato, una trattazione dettagliata sullo stato attuale di quelle applicazioni dell'idrodinamica che conducono al calcolo delle forze agenti sulle ali degli aeroplani e sui corpi dei dirigibili. Ho accolto la richiesta del Comitato tanto più volentieri in quanto le teorie in questione hanno ormai raggiunto una certa conclusione, ed è dunque opportuno mostrare in maniera organica le idee direttrici e i risultati di tali teorie, indicando quali conferme i risultati teorici abbiano ricevuto dalle prove sperimentali.

Il rapporto fornirà, in una Parte I piuttosto breve, un'introduzione all'idrodinamica concepita per dare, a chi non si sia ancora occupato attivamente di questa scienza, una padronanza dei principi teorici sufficiente a seguire gli sviluppi successivi. Nella Parte II seguono le trattazioni separate delle diverse questioni da considerare, nelle quali la teoria dei profili alari reclama la porzione maggiore dello spazio. L'ultima parte è dedicata all'applicazione della teoria dell'ala all'elica.

Per espresso desiderio del Comitato ho impiegato nelle formule gli stessi simboli dei miei lavori scritti in tedesco, già in gran parte noti ai lettori dei *Technische Berichte*. Una tavola con le grandezze più importanti si trova alla fine del rapporto, insieme a un breve elenco della letteratura sull'argomento e a un indice.

L. Prandtl, Università di Gottinga

Nota del curatore

La «certa conclusione» di cui parla Prandtl è la sistemazione della teoria della linea portante (1918–1919), oggi nota semplicemente come *teoria dell'ala di Prandtl*. I *Technische Berichte* erano i rapporti tecnici riservati dell'aviazione tedesca durante la Grande Guerra: molti risultati qui esposti circolarono prima in quelle pagine.

Parte I — Concetti fondamentali e teoremi più importanti

Dove stiamo andando

In questa prima parte Prandtl prepara gli attrezzi: spiega perché si può trascurare la viscosità (§1.1) e la comprimibilità (§1.2), introduce il fluido ideale e la descrizione euleriana del moto (§1.3), l'equazione di Bernoulli (§1.4), la circolazione e il teorema di Kelvin (§1.5), la rotazione e i teoremi di Helmholtz sui vortici (§§1.6–1.8), sorgenti e pozzi (§1.9), il moto piano e le funzioni complesse (§1.10) e infine il teorema della quantità di moto (§1.11). Sono esattamente gli strumenti che serviranno nella Parte II per costruire la teoria dell'ala. Chi vuole un richiamo più disteso su questi argomenti trovi l'Appendice A.

1.1 La viscosità e lo strato limite

1. Tutti i fluidi reali presentano attrito interno (viscosità); tuttavia le forze dovute alla viscosità, con le dimensioni e le velocità che ricorrono ordinariamente nella pratica, sono così piccole rispetto alle forze d'inerzia — per l'acqua come per l'aria — che appare giustificato, in prima approssimazione, trascurare del tutto la viscosità. Poiché la considerazione della viscosità nel trattamento matematico del problema introduce difficoltà finora superate soltanto in pochi casi particolarmente semplici, siamo costretti a trascurare interamente l'attrito interno, a meno di rinunciare del tutto al trattamento matematico.

Dobbiamo ora chiederci fino a che punto ciò sia lecito per i fluidi reali, e fino a che punto non lo sia. Un esame più attento ci mostra che per l'*interno* del fluido possiamo applicare immediatamente le nostre conoscenze sul moto di un fluido non viscoso, ma che occorre cautela nel considerare gli strati di fluido nell'immediata vicinanza dei corpi solidi. L'attrito fra fluido e corpo solido non entra mai in gioco nei campi di applicazione che tratteremo, perché esperimenti affidabili hanno stabilito che fluidi come l'acqua e l'aria non scorrono mai sulla superficie del corpo: ciò che accade è che l'ultimo strato di fluido immediatamente a contatto con il corpo vi resta aderente (è in quiete rispetto ad esso), sicché tutto l'attrito dei fluidi con i corpi solidi è in realtà un attrito *interno* del fluido. Teoria ed esperienza concordano nell'indicare che il passaggio dalla velocità del corpo a quella della corrente avviene, in tal caso, in uno strato sottile di fluido, tanto più sottile quanto minore è la viscosità. In questo strato, che chiamiamo *strato limite*, le forze dovute alla viscosità sono dello stesso ordine di grandezza delle forze d'inerzia, come si vede senza difficoltà.¹ È dunque importante osservare che, per quanto piccola sia la viscosità, in uno strato limite sulla superficie del corpo esistono sempre forze viscosi (per unità di volume) dello stesso ordine di grandezza di quelle d'inerzia. Un'indagine più approfondita mostra che, in certe condizioni, nello strato limite può prodursi un'*inversione* della corrente e, di conseguenza, un arresto del fluido dello strato, posto in rotazione dalle forze viscosi, cosicché più a valle l'intero flusso risulta modificato dalla formazione di vortici. L'analisi dei fenomeni che conducono alla formazione dei vortici mostra che essa avviene dove il fluido subisce un *ritardo* del moto lungo il corpo. In alcuni casi il ritardo deve raggiungere un certo valore finito perché nasca una corrente di ritorno. Un tale ritardo si verifica regolarmente dietro i corpi tozzi; perciò lì i vortici si formano molto presto dopo l'inizio del moto e, di conseguenza, i risultati forniti dalla teoria del flusso non viscoso non possono essere applicati. Dietro i corpi molto affusolati, invece, i ritardi sono spesso così piccoli che non si ha formazione apprezzabile di vortici: i principali successi dell'idrodinamica si

¹Da questa considerazione si può calcolare lo spessore approssimato dello strato limite per ciascun caso particolare.

riferiscono a questo caso. E poiché sono proprio i corpi affusolati a offrire resistenza particolarmente piccola — e ad avere perciò trovata speciale considerazione in aeronautica — la teoria può rendersi utile esattamente per i corpi di maggiore interesse tecnico.

Dalle considerazioni precedenti ricaviamo, per ciò che segue, questo risultato: all'interno del fluido la viscosità, se piccola, non ha influenza essenziale; ma per gli strati di fluido a contatto immediato con i corpi solidi devono ammettersi eccezioni alle leggi del fluido non viscoso. Cercheremo di formulare tali eccezioni in modo che siano, per quanto possibile, in accordo con i fatti sperimentali.

Nota del curatore

Questo paragrafo è la sintesi, in una pagina, della celebre memoria di Heidelberg del 1904 in cui Prandtl introdusse il concetto di strato limite — l'idea che riconciliò l'idrodinamica matematica con l'ingegneria. Nel nostro corso lo strato limite ritorna nello studio della resistenza di attrito e dello stallo.

1.2 La comprimibilità

2. Un'ulteriore osservazione va fatta sull'effetto della comprimibilità del fluido sul carattere del moto nel caso di corpi solidi che si muovono nel fluido. Tutti i fluidi reali sono comprimibili. Per comprimere un volume d'aria dell'1% occorre una pressione di circa un centesimo di atmosfera; nel caso dell'acqua, per produrre la stessa variazione di volume, è necessaria una pressione di 200 atmosfere: la differenza è dunque grandissima. Con l'acqua è quasi sempre lecito trascurare le variazioni di volume dovute alle differenze di pressione prodotte dal moto, e quindi trattarla come assolutamente incompressibile. Ma anche nel caso di moti nell'aria possiamo ignorare la comprimibilità finché le differenze di pressione causate dal moto sono sufficientemente piccole. La considerazione della comprimibilità nel trattamento matematico dei fenomeni di flusso introduce difficoltà così grandi che trascureremo tranquillamente variazioni di volume di alcuni percento, e nei calcoli l'aria sarà riguardata come incompressibile. Una compressione del 3%, ad esempio, si verifica davanti a un corpo che si muova con velocità di circa 80 m/s. Si vede dunque che appare lecito trascurare la comprimibilità nelle ordinarie applicazioni all'aeronautica tecnica. Soltanto in corrispondenza delle pale dell'elica si hanno velocità sostanzialmente maggiori, e in questo caso l'influenza della comprimibilità è da attendersi ed è già stata osservata. Il moto di un corpo a grande velocità è stato investigato, finora, soltanto per linee generali; risulta che se la velocità del moto supera quella del suono nel fluido i fenomeni cambiano del tutto, ma che fin quasi a tale velocità il flusso è approssimativamente dello stesso carattere che in un fluido incompressibile.

Nota del curatore

La verifica numerica è immediata: al punto di ristagno $\Delta\rho/\rho \simeq \frac{1}{2}M^2$, e con $V = 80$ m/s, $a \simeq 340$ m/s si ottiene $\Delta\rho/\rho \simeq 2,8\%$, in accordo con il «3%» di Prandtl. Nel modulo di flusso comprimibile del corso ritroverete questa stima come limite di validità dell'ipotesi di incompressibilità, $M \lesssim 0,3$.

1.3 Il fluido ideale e la descrizione del moto

3. In ciò che segue ci occuperemo soltanto di un fluido non viscoso e incompressibile, del quale abbiamo appreso che fornirà, con le riserve fatte, un'approssimazione sufficiente per le nostre applicazioni. Un tale fluido è detto anche «fluido ideale».

Quali sono le proprietà di un simile fluido ideale? Non considero mio compito svilupparle e dimostrarle tutte qui, giacché i teoremi dell'idrodinamica classica sono contenuti in tutti i trattati sull'argomento e lì possono essere studiati. Mi propongo di enunciare nel seguito, a beneficio di quei lettori che non abbiano ancora studiato l'idrodinamica, i principi e i teoremi più importanti che saranno necessari per gli sviluppi ulteriori, in maniera tale che questi sviluppi possano essere compresi. Prego dunque questi lettori semplicemente di credere ai teoremi che enuncerò, finché non avranno il tempo di studiare l'argomento su qualche trattato di idrodinamica.

Il metodo principale di descrizione dei problemi idrodinamici consiste nell'esprimere in formule, come funzioni dello spazio e del tempo, la velocità del flusso, data dalle sue tre componenti rettangolari u , v , w , e inoltre la pressione p del fluido. Lo stato di moto è evidentemente noto per intero se u , v , w e p sono dati in funzione di x , y , z e t , poiché allora u , v , w e p possono calcolarsi per ogni punto scelto ad arbitrio e per ogni istante. La direzione del flusso è definita dai rapporti fra u , v e w ; il modulo della velocità è $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$. Le «linee di corrente» si ottengono tracciando le linee che coincidono con la direzione del flusso in tutti i punti che toccano, il che può compiersi matematicamente con un'integrazione. Se il flusso descritto dalle formule dev'essere quello prodotto da un corpo determinato, allora nei punti dello spazio che a ogni istante formano la superficie del corpo le componenti della velocità del fluido normali a tale superficie devono coincidere con le corrispondenti componenti della velocità del corpo. Si esprime così la condizione che il fluido non penetri nel corpo né si formi alcun distacco fra corpo e fluido. Se il corpo è in quiete in una corrente, le componenti normali della velocità sulla sua superficie devono essere nulle: il flusso dev'essere cioè tangente alla superficie, la quale in questo caso è dunque formata di linee di corrente.

1.4 L'equazione di Bernoulli e la pressione dinamica

4. In un moto *stazionario* — cioè in un flusso che non cambia col tempo, nel quale ogni nuova particella fluida, quando sostituisce un'altra particella davanti a sé, ne assume la velocità in modulo e direzione e anche la pressione — sussiste, per le particelle fluide che giacciono sulla stessa linea di corrente, una relazione assai notevole fra il modulo della velocità, qui indicato con V , e la pressione: la cosiddetta equazione di Bernoulli

$$p + \frac{\rho}{2} V^2 = \text{cost.} \quad (1.1)$$

(ρ è la densità del fluido, cioè la massa dell'unità di volume). Questa relazione è immediatamente applicabile al caso di un corpo che si muova uniformemente e in linea retta in un fluido in quiete, poiché siamo sempre liberi di adottare per le nostre considerazioni un qualunque sistema di riferimento animato di moto rettilineo uniforme. Se facciamo coincidere la velocità del riferimento con quella del corpo, il corpo è in quiete rispetto ad esso e il flusso attorno al corpo è stazionario. Se ora V è la velocità del corpo rispetto all'aria ferma, quest'ultima avrà nel nuovo riferimento la velocità V verso il corpo (un uomo su un aeroplano in volo compie le sue osservazioni in un riferimento di questo tipo, e percepisce il moto del volo come «vento»).

La corrente incidente si divide su un corpo tozzo come mostrato in figura 1.1. Nel punto A il flusso si arresta completamente, e poi si rimette in moto in direzioni opposte, tangenti alla superficie del corpo. Dall'equazione (1.1) apprendiamo che in un tale punto, che chiameremo «punto di ristagno», la pressione dev'essere maggiore di $\frac{\rho}{2} V^2$ rispetto al fluido indisturbato. Chiameremo il valore di questa pressione, della quale faremo uso frequente, la «pressione dinamica», e la indicheremo con q . Un'estremità aperta di un tubo rivolta contro la corrente produce un punto di ristagno dello stesso tipo, e nell'interno del tubo nasce, come esperimenti molto accurati hanno mostrato, esattamente la pressione dinamica; sicché questo principio può usarsi per la misura della velocità, e di fatto è molto usato. La pressione dinamica è inoltre assai adatta a esprimere le leggi della resistenza dell'aria. È noto che tale resistenza è proporzionale al quadrato della velocità e alla densità del mezzo; ma $q = \frac{\rho}{2} V^2$, sicché la legge della resistenza dell'aria può anche esprimersi con la formula

$$W = c \cdot F \cdot q \quad (1.2)$$

dove F è l'area della superficie e c un numero puro. Con questo modo di esprimersi appare con grande chiarezza che la forza detta «resistenza» è uguale a una superficie moltiplicata per una differenza di pressione (la formula ha la stessa forma di quella per la spinta sul pistone di una macchina a vapore). Questo modo di enunciare la relazione è stato introdotto in Germania e in Austria e si è dimostrato utile; i coefficienti di resistenza dell'aria diventano così il doppio dei coefficienti «assoluti» usati in precedenza.

Poiché V^2 non può diventare minore di zero, un aumento di pressione maggiore di q non può verificarsi, per l'equazione (1.1). Per la *diminuzione* di pressione, invece, non può fissarsi alcun limite definito: nel flusso lungo superfici convesse si producono marcati aumenti della velocità e, in connessione con essi, diminuzioni di pressione che di frequente ammontano a $3q$ e più.

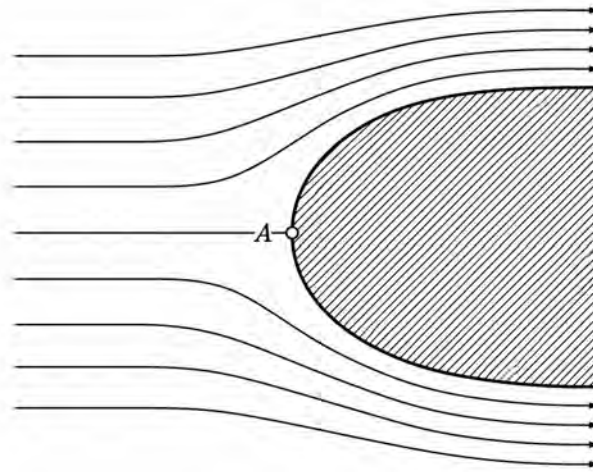


Figura 1.1. Corrente attorno a un corpo tozzo (fig. 1 dell'originale): nel punto di ristagno A il filetto centrale si arresta e la pressione sale di q .

Nota del curatore

Qui nascono tre pilastri del corso: il *tubo di Pitot* (l'«estremità aperta di un tubo» che misura q), la forma standard dei coefficienti aerodinamici e l'osservazione, cruciale per il funzionamento dell'ala, che la depressione sul dorso non ha limite teorico mentre la sovrappressione sul ventre non supera q : il dorso lavora più del ventre.

1.5 La circolazione e il teorema di Kelvin

5. Una serie di proprietà tipiche del moto dei fluidi non viscosi può dedursi in maniera utile dal teorema seguente, dovuto a Lord Kelvin. Prima di enunciare il teorema occorre definire due concetti. 1. *La circolazione*: si consideri l'integrale di linea della velocità $\int V \cos(V, ds) ds$, formato esattamente come l'integrale di linea di una forza, che si chiama «lavoro della forza». Il valore di questo integrale di linea, preso lungo un cammino che ritorna su sé stesso, si chiama *circolazione* del flusso. 2. *La linea fluida*: con ciò s'intende una linea formata sempre dalle stesse particelle fluide, che perciò partecipa al moto del fluido. Il teorema di Lord Kelvin è: *in un fluido non viscoso la circolazione lungo ogni linea fluida resta invariata al passare del tempo*. Ma occorre aggiungere quanto segue:

(1) Può presentarsi il caso che una linea fluida sia intersecata da un corpo solido che si muove nel fluido. Se ciò accade, il teorema cessa di valere. Come esempio menziono il caso in cui si spinge una lastra piana in un fluido in quiete e poi, per mezzo della lastra, si esercita una pressione sul fluido: così nasce una circolazione, che permarrà se in seguito la lastra viene rapidamente ritirata nel proprio piano. Si veda la figura 1.2.

(2) Perché il teorema valga dobbiamo escludere forze di massa di tale natura che esse forniscano lavoro lungo un cammino chiuso. Forze simili non si presentano ordinariamente, e non occorre tenerne conto qui, dove abbiamo regolarmente a che fare soltanto con la gravità.

(3) Il fluido dev'essere omogeneo, cioè di densità uguale in tutti i punti. Si vede facilmente che, nel caso di densità non uniforme, una circolazione può nascere da sé col passare del tempo: si pensi alla salita naturale di aria calda in mezzo ad aria fredda. La circolazione cresce continuamente lungo una linea che salga nell'aria calda e ritorni in basso nell'aria fredda.

Di frequente si presenta il caso che il fluido, all'inizio, sia in quiete oppure in moto assolutamente uniforme, cosicché la circolazione è nulla per ogni immaginabile linea chiusa nel fluido. Il nostro teorema dice allora che per ogni linea chiusa che possa nascere da una delle linee chiuse originarie la circolazione resta nulla; dobbiamo però eccettuare, come detto sopra, le linee tagliate da corpi. Se l'integrale di linea lungo ogni linea chiusa è nullo, l'integrale di linea per una curva aperta da un punto definito O a un punto arbitrario P è indipendente dalla

scelta della linea lungo la quale si integra (se così non fosse, e se gli integrali lungo due linee da O a P fossero diversi, è evidente che l'integrale lungo la curva chiusa OPO non sarebbe nullo, contro la nostra premessa). L'integrale di linea lungo la linea OP dipende dunque — poiché considereremo il punto O fissato una volta per tutte — soltanto dalle coordinate del punto P : è cioè una funzione di tali coordinate. Per analogia con le corrispondenti considerazioni nel caso dei campi di forza, questo integrale di linea si chiama «potenziale di velocità», e il particolare tipo di moto nel quale un simile potenziale esiste si chiama «moto potenziale». Come segue immediatamente dal significato degli integrali di linea, la componente della velocità in una direzione definita è la derivata del potenziale in quella direzione. Se l'elemento di linea è perpendicolare alla velocità risultante, l'incremento del potenziale è nullo: le superfici di potenziale costante sono cioè ovunque normali alla velocità del flusso. La velocità stessa è detta il *gradiente* del potenziale. Le componenti u , v , w sono legate al potenziale Φ dalle equazioni

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (1.3)$$

Il fatto che il flusso avvenga senza variazione di volume si esprime dicendo che da ogni elemento di volume esce tanto fluido quanto ne entra. Ciò conduce all'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.4)$$

Nel caso di moto potenziale abbiamo perciò

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4a)$$

come condizione di flusso senza variazione di volume. Tutte le funzioni $\Phi(x, y, z, t)$ che soddisfano quest'ultima equazione rappresentano possibili forme di flusso. Questa rappresentazione di un flusso è particolarmente comoda per i calcoli, poiché per suo mezzo l'intero flusso è dato dall'unica funzione Φ . Ma la proprietà più preziosa di tali rappresentazioni è che la somma di due — o di quante si vogliano — funzioni Φ , ciascuna delle quali soddisfi l'equazione (4a), soddisfa anch'essa tale equazione e rappresenta dunque un possibile tipo di flusso («sovrapposizione dei flussi»).

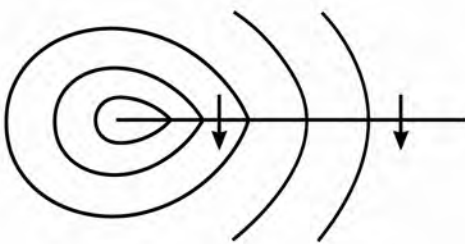


Figura 1.2. Produzione di circolazione mediante introduzione e ritiro di una lastra piana (fig. 2 dell'originale).

Nota del curatore

Trovate la definizione operativa di circolazione, il teorema di Kelvin e il principio di sovrapposizione richiamati per esteso nell'Appendice, §A.2. Il principio di sovrapposizione è la chiave tecnica di tutta la Parte II: l'ala verrà costruita sommando flussi elementari.

1.6 La rotazione

6. Dalla circolazione può derivarsi un altro concetto, comodo per molte considerazioni: quello di *rotazione*. La componente della rotazione rispetto a un asse qualunque si ottiene prendendo la circolazione attorno a una

superficie elementare di area unitaria in un piano perpendicolare all'asse. Espresso più esattamente: tale componente di rotazione è il rapporto fra la circolazione lungo il bordo di una qualunque superficie infinitesima di quel tipo e l'area della superficie. La rotazione totale è un vettore e si ottiene dalle componenti di rotazione rispetto a tre assi mutuamente perpendicolari. Nel caso in cui il fluido ruoti come un corpo rigido, la rotazione così definita risulta pari al doppio della velocità angolare del corpo rigido. Se adottiamo un sistema di assi rettangolari e consideriamo le rotazioni rispetto ai singoli assi, troviamo che la rotazione può anche esprimersi come somma geometrica delle velocità angolari rispetto ai tre assi.

L'affermazione che nel caso di moto potenziale la circolazione è nulla per ogni linea fluida chiusa può ora esprimersi dicendo che la rotazione è ivi sempre nulla. Il teorema secondo cui la circolazione, se è nulla, resta nulla nelle condizioni menzionate, può ora anche enunciarsi dicendo che, se tali condizioni sono soddisfatte in un fluido privo di rotazione, la rotazione non può mai nascere: un moto fluido irrotazionale resta dunque sempre irrotazionale. Vanno però notate le eccezioni seguenti: se il fluido è diviso dalla presenza di corpi, il teorema in questione non si applica allo strato di fluido nel quale le correnti divise si riuniscono, non soltanto nel caso della figura 1.2 ma anche nel caso di fenomeni stazionari come in figura 1.3, poiché in questo caso una linea fluida chiusa tracciata davanti al corpo non può trasformarsi in una linea fluida che intersechi la regione in cui le correnti si ricongiungono. La figura 1.3 mostra quattro forme successive di una tale linea fluida. Questa regione, inoltre, è riempita di particelle fluide che sono passate molto vicino al corpo. Siamo perciò condotti alla conclusione, dal punto di vista di un fluido con viscosità molto piccola ma non del tutto nulla, che la comparsa di vortici nei punti di ricongiungimento della corrente dietro il corpo non contraddice le leggi dell'idrodinamica. Le tre componenti della rotazione ξ, η, ζ si esprimono come segue per mezzo delle componenti di velocità u, v, w :

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.5)$$

Se le componenti di velocità derivano da un potenziale, come mostrato nell'equazione (1.3), le componenti di rotazione, secondo l'equazione (1.5), si annullano identicamente, poiché $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}$.

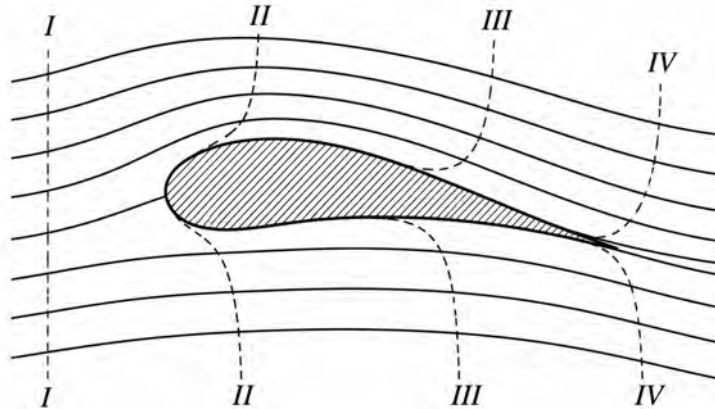


Figura 1.3. Posizioni successive di una linea fluida nel flusso attorno a un corpo solido (fig. 3 dell'originale).

1.7 I teoremi di Helmholtz sui vortici

7. Per la rotazione valgono teoremi assai notevoli, scoperti da von Helmholtz ed enunciati nel suo celebre lavoro sui moti vorticosi. Sulle proprietà geometriche della rotazione va detto quanto segue.

In tutti i punti del fluido dove esiste rotazione può indicarsi la direzione dell'asse di rotazione risultante, e possono anche tracciarsi linee le cui direzioni coincidano ovunque con tali assi, così come le linee di corrente

si tracciano in modo da coincidere con le direzioni della velocità. Queste linee saranno chiamate, seguendo Helmholtz, «linee vorticosi». Le linee vorticosi passanti per i punti di una piccola curva chiusa formano un tubo detto «tubo vorticoso». È conseguenza immediata dell'idea geometrica di rotazione sopra dedotta che attraverso l'intera estensione di un tubo vorticoso la sua intensità — cioè la circolazione lungo il contorno del tubo — è costante. Si riconosce infatti che, per ragioni puramente geometriche, la distribuzione spaziale della rotazione, del tutto indipendentemente dalle proprietà particolari del campo di velocità da cui è dedotta, è della stessa natura della distribuzione spaziale delle velocità in un fluido incomprimibile. Di conseguenza un tubo vorticoso, esattamente come una linea di corrente in un fluido incomprimibile, non può terminare in nessun punto interno del fluido; e l'intensità del vortice, esattamente come la portata che attraversa un tubo di flusso, ha in uno stesso istante lo stesso valore lungo tutto il tubo vorticoso. Se ora si applica il teorema di Lord Kelvin alla linea fluida chiusa che forma il bordo di un piccolo elemento della superficie di un tubo vorticoso, la circolazione lungo di essa è nulla, poiché la superficie racchiusa è parallela all'asse di rotazione in quel punto. Poiché la circolazione non può cambiare col tempo, ne segue che l'elemento di superficie appartiene anche in tutti gli istanti successivi alla superficie di un tubo vorticoso. Se immaginiamo l'intera superficie di contorno di un tubo vorticoso composta di simili superfici elementari, è evidente che — poiché al proseguire del moto questa relazione resta invariata — le particelle di fluido che a un dato istante formano il contorno di un tubo vorticoso continueranno a formarne il contorno. Dalla considerazione della circolazione lungo una linea chiusa che racchiude il tubo vorticoso vediamo che questa circolazione — cioè l'intensità del nostro tubo vorticoso — ha lo stesso valore in ogni tempo. Abbiamo così ottenuto i teoremi di Helmholtz, che ora possono esprimersi come segue, chiamando «filetto vorticoso» il contenuto di un tubo vorticoso: *le particelle di fluido che a un istante qualunque appartengono a un filetto vorticoso vi restano sempre; l'intensità di un filetto vorticoso ha, lungo tutta la sua estensione e per ogni tempo, lo stesso valore.* Da ciò segue, fra l'altro, che se una porzione del filetto viene stirata, diciamo, al doppio della sua lunghezza — e con ciò la sua sezione ridotta a metà — la rotazione raddoppia, perché l'intensità del vortice, prodotto della rotazione per la sezione, deve rimanere la stessa. Giungiamo dunque al risultato che il vettore che esprime la rotazione varia in modulo e direzione esattamente come varia la distanza fra due particelle vicine sull'asse del filetto.

1.8 Il teorema di Stokes e la legge di Biot–Savart

8. Dal modo in cui sono state definite le intensità dei vortici segue, per uno spazio riempito di filetti vorticosi arbitrari, in conseguenza di un noto teorema di Stokes, che la circolazione lungo una qualunque linea chiusa è uguale alla somma algebrica delle intensità di tutti i filetti che attraversano una superficie avente quella linea come contorno. Se la linea chiusa viene variata con continuità in modo da tagliare dei filetti, evidentemente la circolazione cambia in misura pari alle intensità dei vortici tagliati. Viceversa possiamo concludere, dalla circostanza che la circolazione lungo una linea chiusa (la quale naturalmente non può essere una linea fluida) cambia di una quantità definita in un certo spostamento, che nello spostamento verrà tagliata un'intensità di vortice pari a tale quantità; o, detto altrimenti, che la superficie spazzata dalla linea chiusa nel suo spostamento è attraversata da filetti vorticosi le cui intensità si sommano algebricamente fino all'ammontare della variazione di circolazione.

I teoremi sul moto vorticoso sono specialmente importanti perché in molti casi è più facile fare affermazioni sulla forma dei filetti vorticosi che sulla forma delle linee di corrente, e perché esiste un metodo di calcolo per mezzo del quale la velocità in un punto qualunque dello spazio può determinarsi dalla conoscenza della distribuzione della rotazione. Questa formula, per noi tanto importante, dev'essere ora discussa. Se Γ è l'intensità di un filetto vorticoso sottile e ds un elemento della sua linea mediana, se inoltre r è la distanza dall'elemento di vortice a un punto P nel quale si vuole calcolare la velocità, e infine α è l'angolo fra ds ed r , allora il contributo alla velocità dovuto all'elemento di vortice è, in modulo,

$$dv = \frac{\Gamma ds \sin \alpha}{4\pi r^2}; \quad (1.6)$$

la direzione di questo contributo è perpendicolare al piano di ds e r . La velocità totale nel punto P si ottiene sommando i contributi di tutti gli elementi di vortice presenti nello spazio. La legge di questo calcolo coincide

allora esattamente con quella di Biot–Savart, con l'aiuto della quale si calcola il campo magnetico dovuto a una corrente elettrica: i filetti vorticosi vi corrispondono alle correnti elettriche, e il vettore velocità al vettore campo magnetico.

Come esempio possiamo prendere un filetto vorticoso rettilineo infinitamente lungo. I contributi alla velocità in un punto P sono tutti nella stessa direzione, e la velocità totale può determinarsi con una semplice integrazione dell'equazione (1.6); questa velocità è dunque

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds \cdot \sin \alpha}{r^2}.$$

Come si vede dalla figura 1.4, $s = h \operatorname{ctg} \alpha$ e, differenziando, $ds = -\frac{h}{\sin^2 \alpha} d\alpha$; inoltre $r = \frac{h}{\sin \alpha}$; cosicché

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = -\frac{\Gamma}{4\pi h} [\cos \alpha]_0^\pi = \frac{\Gamma}{2\pi h}. \quad (6a)$$

Questo risultato potrebbe dedursi in modo più semplice dal concetto di circolazione, usando il teorema, già dimostrato, che la circolazione lungo una qualunque linea chiusa coincide con l'intensità dei filetti da essa racchiusi. La circolazione lungo ogni linea chiusa che giri una sola volta attorno al singolo filetto deve dunque coincidere con la sua intensità. Se la velocità in un punto di un cerchio di raggio h attorno al nostro filetto rettilineo vale v , allora tale circolazione vale «cammino per velocità» = $2\pi h \cdot v$, da cui segue subito $v = \frac{\Gamma}{2\pi h}$. L'indagine più esatta di questo campo di velocità mostra che per ogni punto *esterno* al filetto (e la formula vale soltanto per tali punti) la rotazione è nulla, cosicché di fatto stiamo trattando il caso di una distribuzione di velocità nella quale la rotazione regna soltanto lungo l'asse, mentre in tutti gli altri punti la rotazione è assente.

Per una porzione finita di un filetto vorticoso rettilineo il calcolo precedente fornisce il valore

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (6b)$$

Questa formula può applicarsi soltanto a una serie di porzioni di vortici che insieme formino una linea infinita o chiusa. Il campo di velocità di una singola porzione di filetto richiederebbe infatti rotazione anche fuori dal filetto, nel senso che dall'estremità della porzione le linee vorticosi si spanderebbero in tutto lo spazio per poi ricongiungersi all'inizio della porzione. Nel caso di una linea senza estremità questa rotazione esterna scompare, poiché ogni fine coincide sempre con l'inizio di un'altra porzione di uguale intensità, e la rotazione è presente soltanto dove il calcolo la prevede.

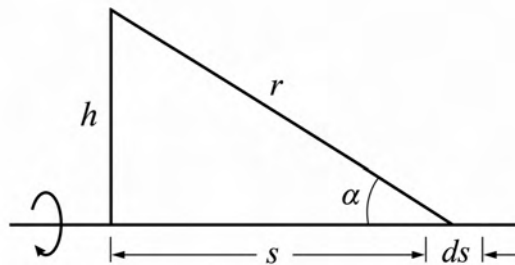


Figura 1.4. Velocità dovuta a un vortice rettilineo infinito (fig. 4 dell'originale): notazione per l'integrazione della legge di Biot–Savart.

Nota del curatore

L'equazione (6a) è una delle formule più usate della Parte II: la velocità indotta da un vortice a distanza b decresce come $1/b$. La versione «a metà», $v = \Gamma/(4\pi b)$, per un filetto semi-infinito ($\alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 180^\circ$ nella (6b)) sarà il mattone con cui Prandtl costruirà la velocità indotta dai vortici d'estremità dell'ala.

1.9 Sorgenti e pozzi

9. Se si vuole rappresentare il flusso attorno a corpi solidi in un fluido, si può in molti casi procedere immaginando il posto dei corpi solidi occupato dal fluido, nel cui interno vengono introdotte perturbazioni del flusso (singolarità) tali che il flusso ne risulti alterato in modo che i contorni dei corpi diventino superfici di corrente. Per simili costruzioni ipotetiche nell'interno dello spazio effettivamente occupato dal corpo si possono assumere, per esempio, vortici opportunamente scelti, i quali, essendo soltanto immaginari, non hanno bisogno di obbedire alle leggi di Helmholtz. Come vedremo più avanti, tali vortici immaginari possono essere la sede di forze portanti. Anche le sorgenti e i pozzi — cioè punti nei quali il fluido compare, o scompare, con continuità — offrono un metodo utile per costruzioni di questo genere. Mentre i filetti vorticosi possono realmente presentarsi nel fluido, sorgenti e pozzi possono assumersi soltanto in quella parte dello spazio che è effettivamente occupata dal corpo, poiché rappresentano un fenomeno non realizzabile. Una contraddizione con la legge di conservazione della materia si evita, tuttavia, se si assumono all'interno del corpo sorgenti e pozzi di uguale intensità complessiva, cosicché il fluido prodotto dalle sorgenti venga riassorbito dai pozzi.

Il metodo delle sorgenti e dei pozzi sarà descritto con maggiore dettaglio quando si discuteranno certi problemi pratici; ma fin d'ora, per chiarire la questione, può descriversi la distribuzione di velocità nel caso di una sorgente. Essa è semplicissima: il flusso esce dalla sorgente uniformemente in tutte le direzioni radiali. Descriviamo attorno alla sorgente puntiforme una superficie sferica concentrica: se la portata di fluido emessa al secondo è Q , la velocità sulla superficie è

$$v = \frac{Q}{4\pi r^2}; \quad (1.7)$$

la velocità decresce dunque in ragione inversa del quadrato della distanza. Il flusso è un flusso potenziale, e il potenziale risulta (come integrale di linea lungo il raggio)

$$\Phi = \text{cost.} - \frac{Q}{4\pi r}. \quad (7a)$$

Se a questa distribuzione di velocità si sovrappone una velocità uniforme verso destra dell'intera massa fluida — mentre la sorgente puntiforme rimane ferma — si ottiene un flusso che, a distanza considerevole dalla sorgente, procede in linee rette da sinistra a destra. Il fluido uscente dalla sorgente viene perciò premuto verso destra (si veda la figura 1.5); esso riempie, a una certa distanza dalla sorgente, un cilindro il cui diametro può determinarsi facilmente. Se V è la velocità del flusso uniforme, il raggio r del cilindro è dato dalla condizione $Q = \pi r^2 V$. Non resta ora che assumere sull'asse, più a destra della sorgente, un pozzo della stessa intensità, affinché l'intera massa di fluido uscita dalla sorgente vi scompaia: il flusso si richiude dietro il pozzo esattamente come si era aperto davanti alla sorgente. Otteniamo così il flusso attorno a un corpo allungato con estremità arrotondate.

1.10 Il moto piano e le funzioni complesse

10. Il caso particolare in cui, in un flusso, i fenomeni in tutti i piani paralleli a un piano dato coincidono esattamente gioca un ruolo importante sia in pratica sia in teoria. Se le linee che congiungono i punti corrispondenti dei diversi piani sono perpendicolari ai piani, e tutte le linee di corrente sono curve piane interamente contenute in uno di quei piani, parliamo di *flusso uniplanare* (o piano). Il flusso attorno a un montante il cui asse sia perpendicolare alla direzione del vento ne è un esempio.

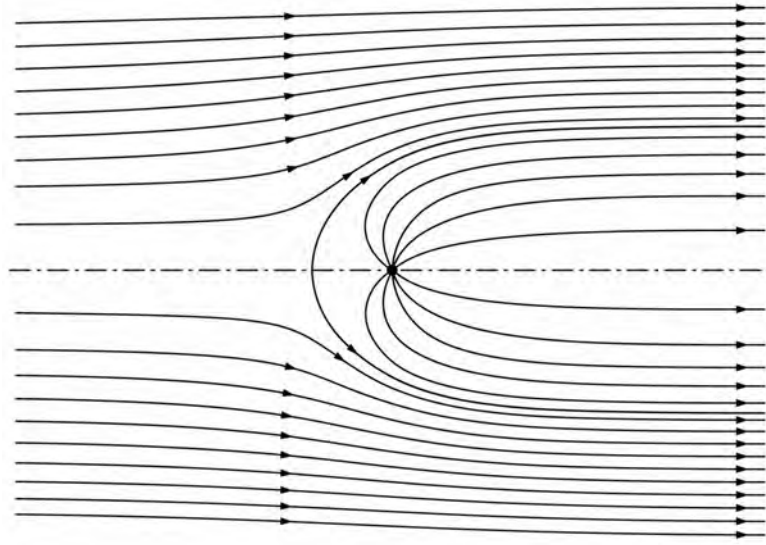


Figura 1.5. Sovrapposizione del flusso uniforme e di quello prodotto da una sorgente (fig. 5 dell'originale): nasce il flusso attorno a un semicorpo.

Il trattamento matematico del flusso potenziale piano del fluido ideale è stato elaborato in modo particolarmente completo, più di ogni altro problema dell'idrodinamica. Ciò è dovuto al fatto che, con l'aiuto delle quantità complesse ($x + iy$, dove $i = \sqrt{-1}$ è detta unità immaginaria), da ogni funzione analitica può dedursi un caso di flusso di questo tipo, incomprimibile e irrotazionale. Ogni coppia di funzioni reali $\Phi(x, y)$ e $\Psi(x, y)$ che soddisfi la relazione

$$\Phi + i\Psi = f(x + iy), \quad (1.8)$$

dove f è una qualunque funzione analitica, è il potenziale di un tale flusso. Lo si vede dalle considerazioni seguenti. Si ponga $x + iy = z$, dove z è ora un «numero complesso». Differenziamo l'equazione (1.8) prima rispetto a x e poi rispetto a y , ottenendo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = i \frac{df}{dz} = i \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

In queste relazioni le parti reali dei due membri devono essere uguali, e così pure le parti immaginarie. Se si sceglie Φ come potenziale, le componenti di velocità u e v sono date da

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (1.9)$$

Se ora scriviamo le espressioni $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ (continuità) e $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ (rotazione), prima in termini di Φ e poi di Ψ , esse diventano

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \underbrace{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}}_{=0} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Si vede dunque che il moto non soltanto è irrotazionale (com'è ovvio, esistendo un potenziale), ma è anche continuo. La relazione $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$ corrisponde inoltre esattamente alla nostra equazione (4a). Poiché essa è soddisfatta anche da Ψ , anche questa funzione può usarsi come potenziale.

La funzione Ψ ha però, rispetto al flusso dedotto usando Φ come potenziale, un significato individuale particolare. Dall'equazione (1.8) si deduce facilmente che le linee $\Psi = \text{cost.}$ sono parallele alla velocità: sono

cioè, in altre parole, linee di corrente. Infatti, se poniamo

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y}dy = 0, \quad \text{allora} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial\Psi/\partial x}{\partial\Psi/\partial y} = \frac{v}{u},$$

il che esprime appunto il parallelismo. Le linee $\Psi = \text{cost.}$ sono perciò perpendicolari alle linee $\Phi = \text{cost.}$ Se si tracciano le famiglie di linee $\Phi = \text{cost.}$ e $\Psi = \text{cost.}$ per valori di Φ e Ψ che differiscano fra loro di uno stesso piccolo intervallo, segue dalla relazione, di facile derivazione, $d\Phi + i d\Psi = \frac{df}{dz}(dx + i dy)$ che i due fasci formano una rete a maglie quadrate; da ciò segue che le curve diagonali della rete formano a loro volta una rete ortogonale, e anzi quadrata. Questo fatto può usarsi in pratica nel disegno di simili famiglie di curve, perché un errore nel disegno si riconosce a occhio dalla forma sbagliata della rete delle diagonali, e così può correggersi. Con un po' di pratica si ottiene, semplicemente a occhio, una precisione discretamente buona. Esistono naturalmente anche metodi matematici per l'ulteriore perfezionamento di tali reti di curve. La funzione Ψ , che si chiama «funzione di corrente», ha un altro significato particolare: se consideriamo due linee di corrente $\Psi = \Psi_1$ e $\Psi = \Psi_2$, la quantità di fluido che scorre fra le due linee di corrente nell'unità di tempo, in una regione di flusso piano di spessore unitario, vale $\Psi_2 - \Psi_1$. Infatti, considerando il flusso attraverso un piano perpendicolare all'asse X , tale quantità è

$$Q = \int_{y_1}^{y_2} u dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy = \int_{y_1}^{y_2} d\Psi = \Psi_2 - \Psi_1.$$

Il valore numerico della funzione di corrente coincide dunque con la quantità di fluido che scorre fra il punto x, y e la linea di corrente $\Psi = 0$.

Come esempio, si discuta brevemente la funzione

$$\Phi + i\Psi = A(x + iy)^n.$$

In generale la cosa più semplice è chiedersi anzitutto quale sia la linea di corrente $\Psi = 0$. Com'è noto, passando dalle coordinate rettangolari a quelle polari r, φ , si ha $(x + iy)^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. La parte immaginaria di questa espressione è $i r^n \sin n\varphi$; essa va posta uguale a $i\Psi$. $\Psi = 0$ fornisce dunque $\sin n\varphi = 0$, cioè $n\varphi = 0, \pi, 2\pi$, ecc. Le linee di corrente $\Psi = 0$ sono perciò rette per l'origine delle coordinate che formano fra loro un angolo $\alpha = \pi/n$: il flusso è dunque il flusso potenziale fra due pareti piane che formino fra loro l'angolo α . Le altre linee di corrente soddisfano l'equazione $r^n \sin n\varphi = \text{cost.}$ Le velocità si ottengono per derivazione, per esempio rispetto a x :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + i \frac{\partial\Psi}{\partial x} = u - iv = A n (x + iy)^{n-1} = A n r^{n-1} \{\cos(n-1)\varphi + i \sin(n-1)\varphi\}.$$

Per $r = 0$ questa espressione si annulla o diventa infinita a seconda che n sia maggiore o minore di 1, cioè a seconda che l'angolo α sia minore o maggiore di π ($= 180^\circ$). Le figure 1.6 e 1.7 danno le linee di corrente per $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$ e $\frac{3}{2}\pi = 270^\circ$, corrispondenti a $n = 4$ e $n = \frac{2}{3}$. Nel caso della figura 1.7 la velocità, come appena spiegato, diventa infinita allo spigolo. C'è da attendersi che, nel flusso reale, intervenga qualche effetto dovuto all'attrito: di fatto a tali spigoli si osservano, all'inizio del moto, grandi velocità e subito dopo la formazione di vortici, per la quale il moto si modifica in modo che la velocità allo spigolo diventa finita.

Va inoltre notato che con un'equazione

$$p + iq = \varphi(x + iy) \tag{1.11}$$

il piano $x-y$ può essere *rappresentato* sul piano $p-q$, poiché a ogni coppia di valori x, y corrisponde una coppia di valori p, q , a ogni punto del piano $x-y$ un punto del piano $p-q$, e perciò anche a ogni elemento di linea o a ogni curva del primo piano un elemento lineare e una curva del secondo. La trasformazione conserva tutti gli angoli: linee corrispondenti si intersecano cioè, nelle due figure, sotto lo stesso angolo.

Invertendo la funzione φ dell'equazione (1.11) possiamo scrivere

$$x + iy = \chi(p + iq)$$

e dedurre quindi dall'equazione (1.8) che

$$\Phi + i\Psi = f[\chi(p + iq)] = F(p + iq). \quad (1.12)$$

Φ e Ψ sono dunque legate a p e q da un'equazione del tipo dell'equazione (1.8), e perciò, nel piano p - q , sono il potenziale e la funzione di corrente di un flusso: precisamente di quel flusso che nasce dalla trasformazione della rete Φ, Ψ del piano x - y nel piano p - q . È questo un metodo potente, usato per ottenere per trasformazione, da un flusso semplice noto, nuovi tipi di flusso per altri contorni assegnati. Applicazioni se ne daranno nella sezione 2.0.3.

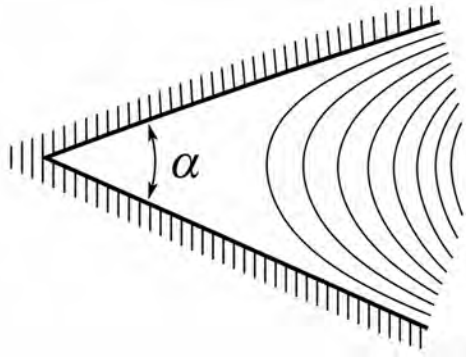


Figura 1.6. Flusso piano fra pareti che formano un angolo $\alpha = 45^\circ$ (fig. 6 dell'originale).

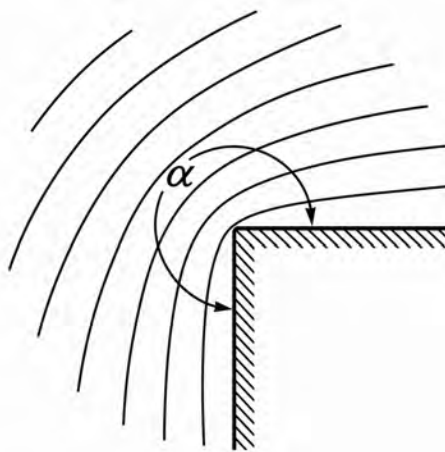


Figura 1.7. Flusso piano attorno a pareti che formano un angolo di 270° (fig. 7 dell'originale): allo spigolo la velocità teorica diverge.

Nota del curatore

Chi non ha mai maneggiato i numeri complessi trovi nell'Appendice, §A.4, tutto il necessario: definizioni, forma polare, funzioni analitiche e il perché delle condizioni di Cauchy–Riemann che Prandtl usa qui senza nominarle (sono le (1.9)). La trasformazione conforme dell'equazione (1.11) è lo strumento con cui in §2.0.3 si passerà dal cilindro al profilo alare di Joukowski.

1.11 Il teorema della quantità di moto

11. La discussione dei principi dell'idrodinamica dei fluidi non viscosi che dobbiamo applicare può fermarsi qui. Aggiungo soltanto una considerazione che si riferisce a un teorema molto utile per ottenere le forze nel moto dei fluidi: il cosiddetto «teorema della quantità di moto per i moti stazionari».

Dobbiamo applicare al moto dei fluidi il teorema della meccanica generale che afferma: la rapidità di variazione nel tempo della quantità di moto è uguale alla risultante di tutte le forze esterne. Per farlo, si consideri una porzione definita di fluido, separata dal resto del fluido da una superficie chiusa. Questa superficie può, in accordo con lo spirito del teorema, essere considerata una «superficie fluida», cioè formata sempre dalle stesse particelle. Dobbiamo ora esprimere in formula la variazione della quantità di moto del fluido entro la superficie. Se, come supporremo, il flusso è stazionario, dopo un tempo dt ogni particella fluida dell'interno sarà sostituita da un'altra di velocità uguale. Sul contorno, però, a causa dello spostamento, della massa uscirà dal lato verso cui il fluido si dirige, e una massa corrispondente entrerà dal lato opposto. Se dS è l'area di un elemento di superficie e v_n la componente della velocità nella direzione della normale esterna in quell'elemento, allora in quel punto $dm = \rho dS \cdot v_n dt$. Se vogliamo ricavare la componente dell'«impulso» — definito come rapidità di variazione della quantità di moto — lungo una direzione qualunque s , il contributo dell'elemento di superficie è

$$dJ_s = v_s \frac{dm}{dt} = \rho dS \cdot v_n v_s. \quad (1.13)$$

Con questa formula siamo passati dalla superficie fluida a una corrispondente «superficie di controllo» solida.

Le forze esterne si compongono delle pressioni del fluido sulla superficie di controllo e delle forze che eventuali corpi solidi interni alla superficie di controllo esercitano sul fluido. Se chiamiamo queste ultime P , otteniamo l'equazione

$$\Sigma P_s = \iint p \cos(n, s) dS + \rho \iint v_n v_s dS \quad (1.14)$$

per la componente s del teorema della quantità di moto. Gli integrali di superficie vanno estesi all'intera superficie di controllo chiusa. L'integrale d'impulso può limitarsi al lato di uscita se, per ogni velocità v_s su quel lato, è nota la velocità v'_s con cui la stessa particella arriva sul lato di ingresso. In tal caso nell'equazione (1.13) dJ va sostituito con

$$dJ - dJ' = (v_s - v'_s) \frac{dm}{dt} = \rho dS v_n (v_s - v'_s). \quad (1.14a)$$

Le applicazioni della Parte II forniranno illustrazioni del teorema.

Il senso di tutto questo

La Parte I ci ha consegnato una cassetta degli attrezzi di appena cinque pezzi: Bernoulli, circolazione, vortici di Helmholtz, Biot–Savart, quantità di moto. Con questi soli strumenti Prandtl costruirà, nella Parte II, la pressione sui dirigibili, la portanza dei profili, l'ala finita, il biplano, le correzioni di galleria e l'elica. È una lezione di metodo prima ancora che di aerodinamica: pochi principi robusti, spinti fino in fondo, valgono più di cento formule imparate a memoria.

Parte II — Applicazioni

Dove stiamo andando

Qui la teoria scende in officina. Prandtl procede per complessità crescente: la pressione sui corpi dei dirigibili (§2.0.1), dove la teoria potenziale trionfa quasi senza correzioni; la portanza del profilo in flusso piano con il teorema di Kutta–Žukovskij (§§2.0.2–2.0.4); poi il salto concettuale decisivo, l'*ala finita* con i suoi vortici liberi (§§2.0.5–2.0.8); la teoria del monoplano con la resistenza indotta (§§2.0.9–2.0.12); i sistemi portanti multipli (§§2.0.13–2.0.18); le correzioni per gallerie e getti (§§2.0.19–2.0.20); infine l'elica (§§2.0.21–2.0.22).

A. Distribuzione della pressione sui corpi dei dirigibili

2.0.1 Il metodo di Fuhrmann

12. La prima applicazione della teoria idrodinamica messa alla prova sperimentale nel laboratorio di Gottinga riguardò la distribuzione della pressione sulla superficie di modelli di dirigibili. Possiamo costruire matematicamente il flusso per un numero qualunque di varietà di forme di corpi di rivoluzione di questo tipo, disponendo lungo un asse parallelo alla direzione della corrente una qualunque opportuna distribuzione di sorgenti e pozzi, avendo cura che l'intensità totale delle sorgenti e quella dei pozzi siano uguali. Secondo l'intensità del moto uniforme che si sovrappone al flusso delle sorgenti, si ottengono dallo stesso sistema di sorgenti e pozzi corpi di spessore diverso. Per ottenere le forme più levigate possibili, sorgenti e pozzi si distribuiscono in generale con continuità lungo l'asse, benché siano ammesse anche sorgenti puntiformi isolate.

Nel caso di sorgenti e pozzi distribuiti con continuità il procedimento è, in breve, questo: le ascisse delle singole sorgenti si indicano con ξ , l'intensità di sorgente per unità di lunghezza con $f(\xi)$, dove i valori positivi di $f(\xi)$ denotano sorgenti, quelli negativi pozzi. La condizione che rende chiusa in sé la corrente uscita dalle sorgenti si esprime con l'equazione

$$\int_0^l f(\xi) d\xi = 0.$$

Sommando semplicemente i potenziali dovuti alle singole sorgenti elementari $f(\xi) d\xi$ — cioè, in questo caso, integrandoli — il flusso totale dovuto alle sorgenti risulta dato dal potenziale definito dalla formula seguente:

$$\Phi_1(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^l \frac{f(\xi) d\xi}{r} \quad (2.1)$$

nella quale $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}$, e y è la distanza dal punto all'asse (misurata perpendicolarmente ad esso), x l'ascissa lungo l'asse misurata dalla stessa origine di ξ (si veda la figura 2.1). A questo potenziale va aggiunto quello dovuto al flusso uniforme di velocità V , cioè $\Phi_2 = Vx$. Il potenziale totale è allora $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$; e quindi la velocità parallela all'asse e quella laterale (radiale) sono

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = V + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}.$$

Per calcolare le linee di corrente si potrebbe eseguire un'integrazione della direzione data da u e v . Queste linee si ottengono però più comodamente, anche in questo caso, per mezzo della funzione di corrente (si veda

la sezione 1.10). Nel caso di flusso simmetrico rispetto all'asse, quale è quello qui discusso, si può assumere come funzione di corrente la quantità di fluido che scorre entro il cerchio tracciato per il punto x, y in un piano perpendicolare all'asse e con centro sull'asse. La quantità di fluido emessa dalle sorgenti a monte viene di proposito detratta da questa. Non è difficile vedere che tutti i punti del piano $X-Y$ attraverso i cui cerchi paralleli scorre al secondo la stessa quantità di fluido — detratto il contributo delle sorgenti — devono giacere su una stessa linea di corrente: evidentemente, infatti, non c'è flusso, né in entrata né in uscita, attraverso la superficie formata dalle linee di corrente tracciate per i punti di un qualunque cerchio parallelo (poiché il flusso è tangente alla superficie); perciò la quantità di fluido che scorre dentro questa superficie è costante, in quanto non accresciuta dalle sorgenti. Dal significato della funzione di corrente — per determinare la quale bisogna integrare la velocità su una superficie — segue che la funzione di corrente di un flusso dovuto a due o più cause è in ogni punto la somma delle funzioni di corrente dei singoli flussi parziali. Per una distribuzione continua di sorgenti, dunque, la funzione di corrente ψ si ottiene con un'integrazione esattamente come il potenziale. Secondo la nostra premessa la superficie del corpo è designata semplicemente dal valore $\psi = 0$. Le formule si ottengono come segue.

Il flusso di una sorgente semplice attraverso un cerchio passante per un punto posto a destra della sorgente è, scrivendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\Psi' = \int_0^y u \cdot 2\pi y \, dy = \int_0^y \frac{Qx}{4\pi r^3} 2\pi y \, dy = \frac{Qx}{2} \int_0^y \frac{y \, dy}{r^3} = \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{x}{r}\right).$$

Da questa, in accordo con quanto detto, va sottratta la quantità Q , cosicché

$$\Psi = \Psi' - Q = -\frac{Q}{2} \left(1 + \frac{x}{r}\right). \quad (2.2)$$

Per i punti a sinistra della sorgente si ottiene dall'integrale

$$\Psi'' = -\frac{Q}{2} \left(1 + \frac{x}{r}\right)$$

che coincide con la formula (2.2): questa vale dunque ovunque. Per l'assunta distribuzione continua di sorgenti otteniamo

$$\Psi_1 = -\frac{1}{2} \int_0^l f(\xi) \left(1 + \frac{x - \xi}{r}\right) d\xi \quad (2.3)$$

nella quale $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}$. A questa funzione di corrente delle sorgenti va ora aggiunta quella dovuta al flusso parallelo

$$\Psi_2 = V\pi y^2. \quad (2.4)$$

Ponendo uguale a zero la funzione di corrente totale $\Psi_1 + \Psi_2 = \Psi$ si ottiene l'equazione della superficie del corpo attorno al quale avviene il flusso; ponendo $\Psi_1 + \Psi_2 = C$ si ottiene ogni altra linea di corrente. È evidente che, con la stessa distribuzione di sorgenti, si può ottenere un intero gruppo di superfici di corpi, secondo la scelta del rapporto fra l'intensità delle sorgenti e l'intensità del flusso parallelo.

La determinazione si esegue al meglio, in pratica, con metodi grafici: per esempio riportando le curve $x = \text{cost.}$ in un sistema di coordinate formato da y e $-\Psi$, ottenibili subito da un calcolo tabellare della funzione di corrente Ψ_1 . Se intersechiamo queste curve con le parabole corrispondenti all'equazione $-\Psi = V\pi y^2 - C$, otteniamo immediatamente un contorno (per $C = 0$) oppure una linea di corrente esterna o interna (per $C > 0$ o $C < 0$). La parabola può disegnarsi su carta trasparente; spostandola lungo l'asse Ψ si ottengono subito dalla figura 2.2 i valori di y corrispondenti a ogni x .

In questo modo un mio antico collega, caduto purtroppo all'inizio della guerra, il dott. G. Fuhrmann, calcolò le forme dei corpi corrispondenti a una serie di distribuzioni di sorgenti; da un lato determinò la distribuzione della pressione sulla superficie di questi corpi per mezzo dell'equazione di Bernoulli (si veda la sezione 1.4)

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2} \{V^2 - (u^2 + v^2)\},^1 \quad (2.5)$$

¹Le velocità u e v possono ottenersi dal potenziale, ma anche dalla funzione di corrente ψ : infatti $u = \frac{1}{2\pi y} \frac{\partial \psi}{\partial y}$ e $v = -\frac{1}{2\pi y} \frac{\partial \psi}{\partial x}$.

e dall'altro costruì modelli secondo quei disegni e ne misurò la distribuzione di pressione in galleria del vento. L'accordo fu nel complesso sorprendentemente buono, e questo successo ci diede lo stimolo a cercare ulteriori relazioni fra l'idrodinamica teorica e l'aeronautica pratica. Il lavoro di Fuhrmann fu pubblicato nello *Jahrbuch der Motorluftschiff-Studiengesellschaft*, volume V, 1911–12 (Springer, Berlino), e contiene un gran numero di illustrazioni. Quattro dei modelli investigati sono mostrati qui: le metà superiori delle figure 2.3–2.3 mostrano le linee di corrente per un riferimento in quiete rispetto all'aria indisturbata, le metà inferiori le linee di corrente per un riferimento solidale al corpo. La distribuzione delle intensità di sorgente è indicata sull'asse. Le distribuzioni di pressione sono mostrate nelle figure 2.4–2.4: le distribuzioni calcolate sono indicate dalle linee piene, le singole pressioni osservate da piccoli cerchi.²

Si vede che l'accordo è molto completo; all'estremità posteriore, però, appare in tutti i casi una deviazione caratteristica, poiché la distribuzione teorica di pressione raggiunge l'intera pressione dinamica nel punto in cui la corrente si ricongiunge, mentre in realtà questa risalita di pressione, per l'influenza dello strato d'aria ritardato dall'attrito, resta vicina alla superficie senza compiersi.

Com'è noto, per il flusso teorico in un fluido non viscoso non esiste resistenza. La resistenza reale si compone di due parti, l'una risultante da tutte le forze normali (pressioni) agenti sulla superficie del corpo, l'altra da tutte le forze tangenziali (attrito). La resistenza di pressione — che in questo caso può ottenersi integrando la distribuzione di pressione sulla superficie del corpo — nasce principalmente dalla deviazione menzionata all'estremità posteriore ed è, com'è noto, molto piccola. I calcoli di Fuhrmann diedero per queste resistenze un coefficiente, riferito al volume del corpo, come nella tabella seguente:³

Modello	I	II	III	IV
k_1	0,0170	0,0123	0,0131	0,0145

Questo coefficiente si ottiene dalla formula

$$\text{Resistenza } w_1 = k_1 U^{2/3} q$$

dove U designa il volume e q la pressione dinamica.

La resistenza totale fu ottenuta per i quattro modelli per mezzo della bilancia; la differenza fra le due quantità fornisce allora la resistenza di attrito. I coefficienti di resistenza totale furono:

Modello	I	II	III	IV
k	0,0340	0,0220	0,0246	0,0248

Con valori di VL maggiori di quelli allora a nostra disposizione i coefficienti di resistenza diventano minori di quasi il 30%. A scopo di confronto con altri casi si può ricordare che la «sezione maestra» era circa $2/5$ di $U^{2/3}$; la superficie era circa sette volte $U^{2/3}$: se ne deduce che la resistenza totale dei buoni modelli non era maggiore dell'attrito di una superficie piana di uguale area. Il teorema teorico secondo cui nel fluido ideale la resistenza è nulla riceve in ciò una brillante conferma sperimentale.

Nota del curatore

Il « VL » del penultimo capoverso è il prodotto velocità–lunghezza: a densità e viscosità fissate è proporzionale al numero di Reynolds, che nel 1921 non aveva ancora questo nome d'uso corrente. Notate anche il metodo sperimentale: la resistenza di pressione si calcola dalla teoria, quella totale si misura con la bilancia, e l'attrito si ottiene *per differenza* — un modo di procedere che ritroverete identico nelle moderne prove in galleria.

²Nella galleria del vento vi era una piccola caduta di pressione nella direzione della sua lunghezza; per eliminarne l'effetto le pressioni verso prua furono lievemente diminuite e quelle verso poppa lievemente aumentate.

³Dopo aver detratto la spinta aerostatica orizzontale.

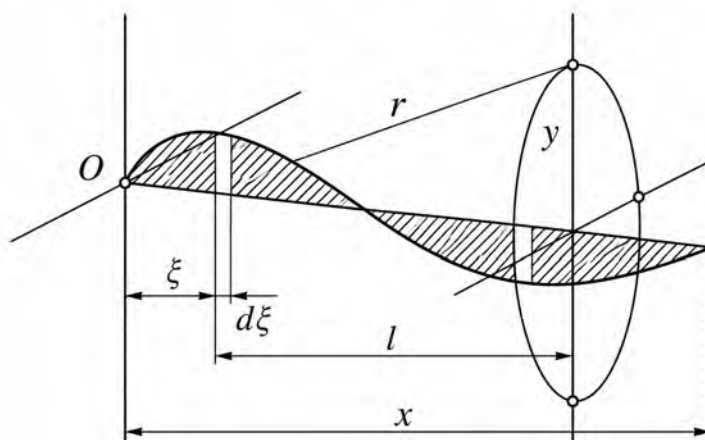


Figura 2.1. Notazione per il calcolo delle forme dei corpi di rivoluzione (fig. 8 dell'originale): ascissa ξ della sorgente, intensità per unità di lunghezza $f(\xi)$.

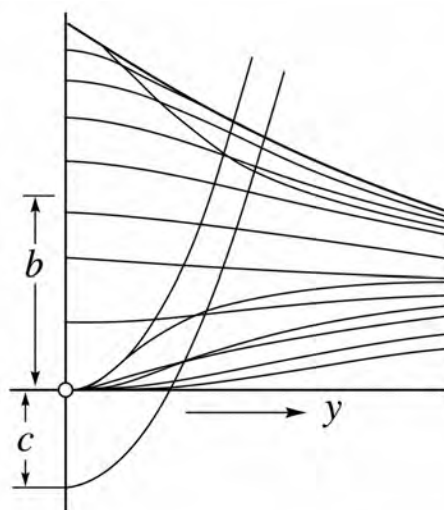


Figura 2.2. Costruzione grafica del contorno: le curve valgono per diversi $x = \text{cost.}$ (fig. 9 dell'originale).

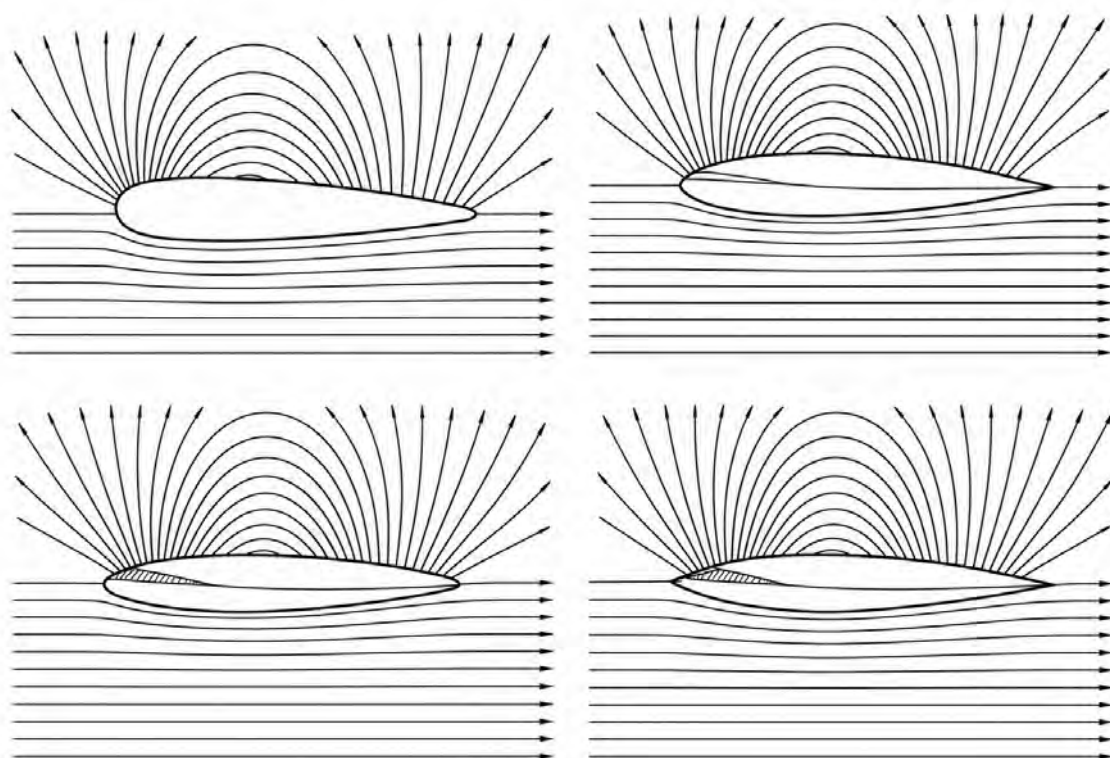


Figura 2.3. I quattro modelli di dirigibile di Fuhrmann ottenuti per combinazione di sorgenti e flusso uniforme (figg. 10–13 dell'originale). Metà superiore: linee di corrente rispetto all'aria indisturbata; metà inferiore: rispetto al dirigibile; sull'asse la distribuzione delle sorgenti.

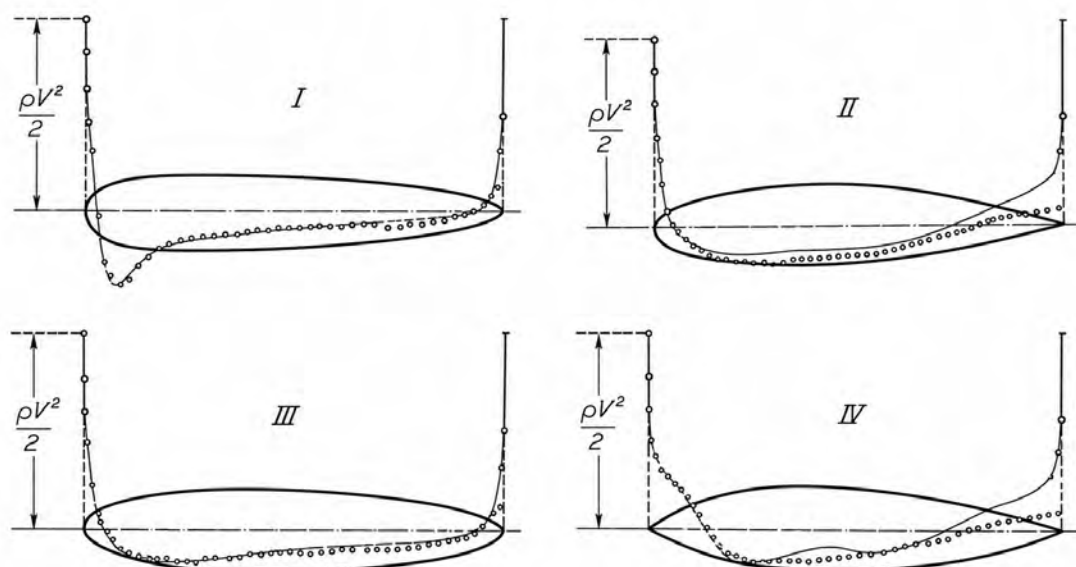


Figura 2.4. Distribuzioni di pressione sui dirigibili delle figg. 10–13 (figg. 14–17 dell'originale). Linee piene: valori calcolati; cerchietti: punti osservati in galleria del vento.

B. Teoria della portanza

2.0.2 Il flusso piano attorno all'ala e il teorema di Kutta–Žukovskij

13. I fenomeni che danno origine alla portanza di un profilo alare possono studiarsi nella maniera più semplice nel caso del moto piano (si veda la sezione 1.10). Un tale flusso piano sarebbe ovviamente da attendersi nel caso di un'ala illimitata ai lati, dunque «infinitamente lunga», e che presentasse ovunque lo stesso profilo e lo stesso angolo d'attacco. In questo caso tutte le sezioni sono uguali sotto ogni rispetto, e ciascuna può considerarsi un piano di simmetria. L'ala infinitamente lunga gioca perciò un ruolo importante nelle considerazioni del teorico. Realizzarla in aria libera non è possibile, e deviazioni marcate dall'ala infinita si mostrano anche con ali molto lunghe, per esempio con allungamento 1 : 10. Nei laboratori, tuttavia, l'ala infinitamente lunga — ossia il flusso piano — può ottenersi con buona approssimazione se un'ala di profilo costante viene posta fra pareti piane in una galleria del vento, con le pareti che percorrono l'intera altezza della corrente. In questo caso l'ala deve estendersi fin quasi alle pareti: non deve restare alcuna fessura attraverso la quale possa passare una quantità apprezzabile d'aria. Discuteremo fra poco simili esperimenti; prima enunceremo la teoria fondamentale del flusso piano.

Poiché, come spiegato nella sezione 1.4, in una corrente fluida prima indisturbata la somma della pressione statica e di quella dinamica è costante — $p + \frac{\rho}{2} V^2 = \text{cost.}$ — per produrre portanza, per la quale la pressione sotto la superficie dev'essere aumentata e quella sopra diminuita, occorre disporre le cose in modo da diminuire la velocità sotto l'ala e aumentarla sopra. L'altro metodo di produrre simili differenze di pressione — provocare cioè una regione vorticoso sopra una superficie disposta obliqua al vento come un aquilone, per mezzo della quale si produce una suzione — non entra in discussione nell'aeronautica pratica, a causa della grande resistenza che esso comporta. Già Lanchester ha richiamato l'attenzione sul fatto che questa corrente portante attorno all'ala nasce se a un semplice flusso potenziale si sovrappone un flusso circolatorio che sul lato in pressione corre contro la corrente principale e sul lato in depressione con essa. Kutta (1902) e Žukovskij (1906) dimostrarono, indipendentemente l'uno dall'altro, il teorema che la portanza per il tratto l dell'ala è

$$A = \rho \Gamma V l \quad (2.6)$$

nella quale Γ è la circolazione del flusso sovrapposto. Da questa formula può concludersi che in una corrente fluida stazionaria la portanza non è possibile senza un moto che dia luogo a una circolazione. Nel flusso piano di un fluido ideale questa portanza non comporta alcuna resistenza.

La dimostrazione della formula di Kutta–Žukovskij si deduce in generale applicando il teorema della quantità di moto a un cilindro circolare di grande raggio il cui asse sia la linea mediana dell'ala. Il moto circolatorio — che vicino all'ala si potrebbe ottenere numericamente soltanto con elaborati procedimenti matematici — si riduce, a grande distanza dall'ala, a un moto che concorda esattamente con il flusso attorno a un filetto vorticoso rettilineo (si veda la sezione 1.8), nel quale, dunque, le singole particelle descrivono cerchi concentrici. La velocità su un cerchio di raggio R è allora $v = \frac{\Gamma}{2\pi R}$. Per un elemento di superficie $l R d\theta$ (si veda la figura 2.5) la componente normale della velocità è $V \cos \theta$, e la massa che vi fluisce al secondo $dm = \rho l R V \cos \theta d\theta$. Se vogliamo applicare il teorema della quantità di moto alle componenti verticali, cioè perpendicolari alla direzione di V , va presa questa componente della velocità attraverso l'elemento di superficie: essa è evidentemente $v \cos \theta$, positiva se diretta verso il basso. L'impulso totale è allora

$$J = \int v \cos \theta dm = \rho l R V \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta.$$

L'integrale vale π , e introducendo il valore di v

$$J = \frac{1}{2} \rho \Gamma V l.$$

Poiché l'impulso risultante è diretto verso il basso (la velocità verso l'alto davanti all'ala si muta in una verso il basso dietro l'ala), ciò significa che la reazione del fluido contro l'ala è una portanza dell'ala verso l'alto. L'ammon-tare fornito dall'impulso, come si vede confrontando con la formula (2.6), è soltanto *metà* della portanza; l'altra

metà proviene dalle differenze di pressione sulle superfici di controllo. Poiché, per R sufficientemente grande, v può sempre considerarsi piccola rispetto a V , trascurando $\frac{\rho}{2}v^2$ la pressione p è data, secondo l'equazione di Bernoulli, da

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2}V^2 - \frac{\rho}{2}\{(V + v \sin \theta)^2 + v^2 \cos^2 \theta\} \cong p_0 - \rho V v \sin \theta.$$

Una componente di questa, ottenuta moltiplicando per $\sin \theta$, agisce verticalmente sull'elemento di superficie $l R d\theta$. La forza risultante D è allora

$$D = \rho l R V v \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta.$$

Anche questo integrale vale π , sicché anche qui

$$D = \frac{1}{2}\rho V \Gamma l$$

con direzione verticale verso l'alto. La portanza totale è dunque

$$A = J + D = \rho V \Gamma l.$$

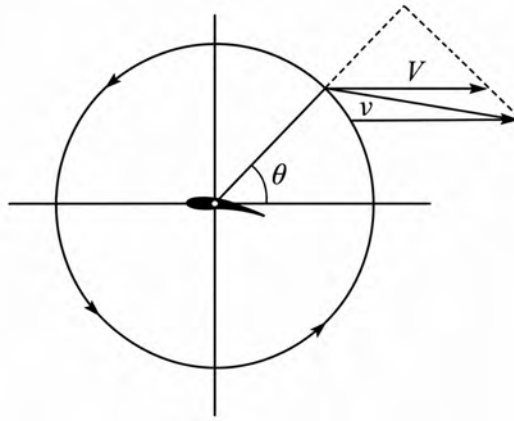


Figura 2.5. Deduzione della formula di Kutta: flusso piano attorno all'ala infinita, cilindro di controllo di raggio R (fig. 18 dell'originale).

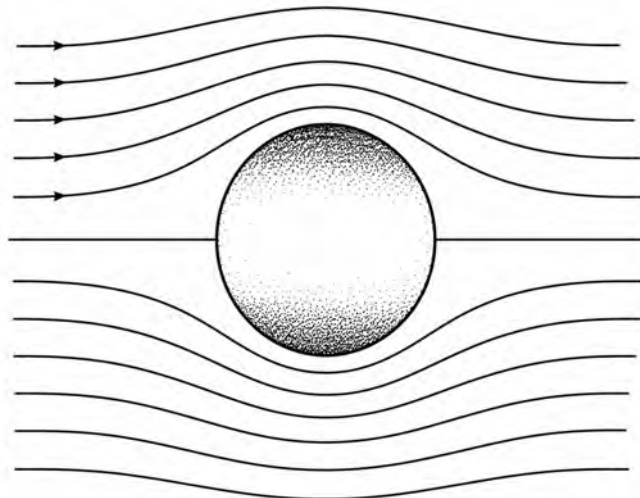


Figura 2.6. Flusso piano uniforme attorno al cilindro circolare (fig. 19 dell'originale).

Nota del curatore

Questa dimostrazione «a metà e metà» — mezza portanza dall'impulso, mezza dalle pressioni sul contorno — vi tornerà utile all'orale: mostra che il risultato (2.6) non dipende dalla forma del profilo ma soltanto da ρ , V e Γ . L'esercizio svolto B ne fa un'applicazione numerica.

2.0.3 Il metodo delle trasformazioni conformi: i profili di Joukowski

14. Per l'analisi più accurata del flusso attorno alle ali sono state applicate con grande successo le funzioni complesse (si veda la sezione 1.10), seguendo il procedimento di Kutta. Sono stati usati metodi molto diversi; qui calcoleremo soltanto un caso particolarmente semplice, nel quale il flusso verrà dedotto prima attorno a un cilindro circolare e poi calcolato per un profilo alare mediante una trasformazione del cilindro circolare e del suo flusso per mezzo delle funzioni complesse.

Il flusso attorno al cilindro circolare è noto da tempo. Se le coordinate nel piano del cerchio sono p e q , e se scriviamo $p + iq = t$, il potenziale e la funzione di corrente del flusso simmetrico ordinario attorno al cilindro circolare sono dati dalla formula semplicissima

$$\Phi_1 + i\Psi_1 = V\left(t + \frac{a^2}{t}\right).^4 \quad (2.7)$$

Si vede facilmente, passando alle coordinate polari, che per $r = a$ si ha $\psi_1 = 0$, e che perciò il cerchio di raggio a è una linea di corrente; inoltre per l'asse p è $\psi_1 = 0$, cioè anche questo è una linea di corrente. Il flusso complessivo è quello mostrato in figura 2.6. A questo flusso va aggiunto il flusso di circolazione espresso dalla formula

$$\Phi_2 + i\Psi_2 = \frac{i\Gamma}{2\pi} \log t^5 \quad (2.8)$$

che, come mostrato in figura 2.7, è semplicemente un flusso in cerchi concentrici con velocità $\frac{\Gamma}{2\pi r}$. La combinazione dei due flussi — cioè il flusso per la somma delle espressioni delle equazioni (2.7) e (2.8) — è mostrata in figura 2.7. Si vede che il punto di ristagno si è spostato in basso di una quantità de ; con una scelta opportuna della circolazione esso può portarsi in qualunque punto desiderato.

Dobbiamo ora discutere la trasformazione di questo flusso in un profilo alare. A tale scopo sono possibili molti mezzi; il più semplice è fornito da una trasformazione secondo l'equazione

$$z = x + iy = t + \frac{b^2}{t}.$$

Con essa il cerchio di diametro $AB = 2b$ nel piano t (come per brevità chiameremo il piano p, q) si trasforma in un segmento rettilineo $A'B'$ di lunghezza $4b$ lungo l'asse X ; i cerchi concentrici attorno al precedente diventano ellissi, e i raggi iperboli. Tutte le ellissi e le iperboli hanno i fuochi agli estremi del segmento, formando così un sistema confocale. Le figure 2.8 e 2.8 illustrano la trasformazione. Può inoltre ricordarsi che l'interno del cerchio della figura 2.8 corrisponde a una continuazione della rete della figura 2.8 attraverso la fessura $A'B'$, la cui forma concorda con la rete disegnata. Ogni cerchio passante per i punti A e B viene con ciò trasformato in un arco di cerchio percorso due volte, con angolo al centro pari a 4β .

Molti risultati diversi possono ora ottenersi per mezzo di questa rappresentazione, secondo la posizione che il cerchio attorno al quale avviene il flusso — secondo le equazioni (2.7) e (2.8) — assume rispetto al diametro AB del cerchio della figura 2.8. Se il diametro AB è fatto coincidere con un diametro obliquo qualunque della sezione circolare del cilindro, otteniamo il flusso attorno a una lastra obliqua il cui angolo d'attacco coincide con l'inclinazione della retta AB . Se il diametro AB è scelto un po' più corto, in modo che entrambi i punti giacciono dentro il cerchio, simmetricamente sul diametro, si ottiene il flusso attorno a ellissi. Se invece il

⁴ $t + \frac{a^2}{t} = \left(r + \frac{a^2}{r}\right) \cos \vartheta + i\left(r - \frac{a^2}{r}\right) \sin \vartheta$.
⁵ $i \log t = -\vartheta + i \log r$.

diametro AB coincide con una corda del cerchio del flusso originario — corda che, per esempio, può giacere sotto il centro — si ottiene il flusso attorno a una lastra curva formante un arco di cerchio. Scegliendo punti diversi nell'interno del cerchio originario si ottengono forme delle più diverse. Il riconoscimento del fatto che fra queste forme si trovano bellissimi profili simili ad ali lo dobbiamo a Žukovskij. Essi si ottengono scegliendo il punto B sul contorno del cerchio originario e il punto A all'interno, un po' sotto il diametro passante per B . La figura 2.9 dà illustrazioni di tali profili di Joukowski.

Perché il flusso sia simile a quello reale, nei casi menzionati la circolazione dev'essere sempre scelta in modo che il punto di ristagno posteriore coincida con il punto B o, rispettivamente, con il punto del cerchio originario che gli è più vicino. In questo caso, dopo la rappresentazione sul piano z , si avrà un flusso che abbandona dolcemente il bordo d'uscita, come si osserva in pratica. Si vede perciò che la circolazione dev'essere presa tanto maggiore quanto maggiore è l'angolo d'attacco: in accordo con l'osservazione che la portanza cresce al crescere dell'angolo d'attacco.

La trasformazione dei flussi delle figure 2.6–2.7 in profili alari dà le illustrazioni di linee di corrente mostrate nelle figure 2.10–2.12: figura 2.10, flusso potenziale semplice; figura 2.11, flusso di circolazione; figura 2.12, flusso reale attorno all'ala ottenuto per sovrapposizione dei due precedenti.

Siamo dunque, con l'aiuto di simili costruzioni, in condizione di calcolare la velocità in ogni punto dell'intorno del profilo alare, e con essa la pressione. In particolare può calcolarsi la distribuzione di pressione sull'ala stessa.

Il mio assistente, dott. A. Betz, elaborò nel 1914 la distribuzione di pressione per un profilo alare di Joukowski, per una serie di angoli d'attacco, e poi misurò in galleria del vento la distribuzione di pressione su un modello cavo di tale ala costruito in lamiera, introducendo pareti laterali dell'altezza della galleria in modo da assicurare il flusso piano. I risultati delle misure concordarono in maniera molto soddisfacente con i calcoli; soltanto — come poté ben spiegarsi con l'attrito — la circolazione reale risultò sempre lievemente minore di quella calcolata per lo stesso angolo d'attacco. Se le distribuzioni di pressione si confrontano non per gli stessi angoli d'attacco ma per la stessa circolazione, l'accordo diventa notevolmente migliore. Le distribuzioni di pressione sono mostrate nelle figure 2.13–2.13, nelle quali di nuovo le curve piene corrispondono alle misure e i tratteggi alle pressioni calcolate. Portanza e resistenza dell'ala furono ottenute anche con la bilancia della galleria. A tale scopo la parte centrale dell'ala fu isolata dalle parti laterali, fissate alle pareti della galleria con labirinti accuratamente disegnati, in modo che entro un piccolo campo essa potesse muoversi senza attrito. Il risultato dell'esperimento è mostrato in figura 2.14. La resistenza teorica è nulla; quella misurata è molto piccola nella regione in cui l'ala è «buona», ma sensibilmente maggiore per angoli d'attacco troppo grandi o troppo piccoli. La portanza è corrispondentemente in accordo con il valore teorico nella regione buona, e ovunque un po' minore. Le deviazioni della resistenza come della portanza vanno spiegate con l'influenza della viscosità del fluido. L'accordo, nell'insieme, è buono quanto può attendersi da una teoria che trascura completamente la viscosità.

Per il legame fra l'angolo d'incidenza α e la circolazione, che risulta dalla condizione discussa sopra, i calcoli danno per la portanza i risultati seguenti.

(1) La teoria di Kutta dà per la lastra piana sottile la formula

$$A = b t \cdot \pi \rho V^2 \sin \alpha. \quad (2.9)$$

Il coefficiente di portanza C_a è definito dall'equazione

$$C_a = \frac{A}{Fq} \quad \text{dove } q = \frac{1}{2} \rho V^2$$

e quindi

$$C_a = 2\pi \sin \alpha. \quad (2.10)$$

(2) Per le lastre curvate ad arco di cerchio con angolo al centro 4β (si veda la figura 2.8) si ha, secondo Kutta, se α è l'angolo d'attacco della corda,

$$C_a = 2\pi \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \quad (2.11)$$

che, per piccole curvature, diventa $2\pi \sin(\alpha + \beta)$; ciò può esprimersi dicendo che la portanza della lastra ad arco di cerchio è uguale a quella di una lastra piana che tocchi la prima in un punto posto a tre quarti della distanza lungo l'arco dal bordo d'attacco.

Per i profili di Joukowski, e per altri, le formule sono meno semplici. Von Mises mostrò nel 1917 che la crescita di C_a con l'angolo d'attacco, cioè $\frac{dC_a}{d\alpha}$, è maggiore per tutti gli altri profili che per la lastra piana, e tanto maggiore quanto più spesso è il profilo; ma le differenze non sono marcate per i profili che ricorrono in pratica.

Anche il movimento del centro di pressione è stato investigato teoricamente. Per la lastra piana, nella regione dei piccoli angoli, esso giace sempre a un quarto della larghezza della lastra; per le lastre sottili ad arco di cerchio la sua posizione, per piccoli angoli, è data dalla legge seguente:

$$x_0 = -\frac{t}{4} \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha + \tan \beta} \quad (2.12)$$

nella quale t è la corda della lastra e x_0 la distanza misurata dal centro della lastra. Il fatto che il movimento del centro di pressione, per gli angoli d'attacco «buoni» dei profili, concordi con la teoria è provato dall'accordo della distribuzione di pressione reale con quella calcolata. Nel caso delle lastre sottili è da attendersi un accordo meno soddisfacente riguardo alla distribuzione di pressione, perché con esse si ha in pratica una formazione di vortici ai bordi d'attacco aguzzi, mentre la teoria deve assumere un flusso dolce anche a tale bordo.

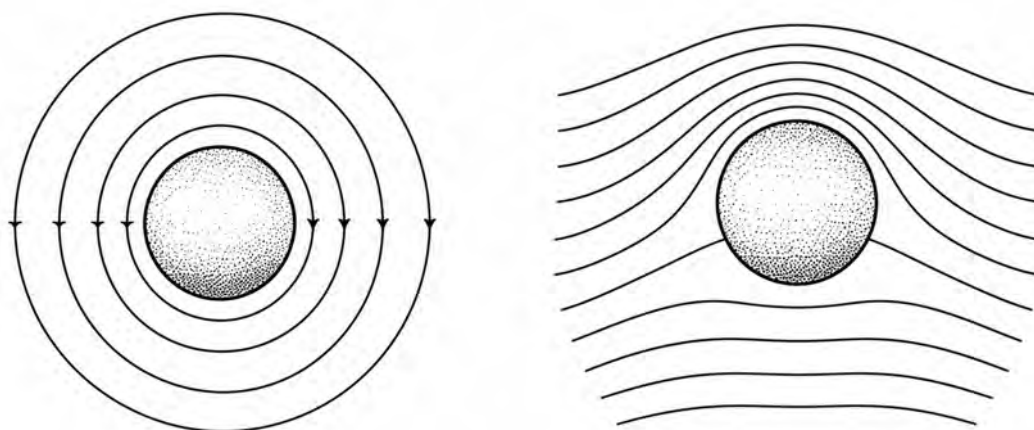


Figura 2.7. A sinistra: flusso piano attorno al cilindro considerato come vortice colonnale d'intensità Γ (fig. 20). A destra: sovrapposizione dei due flussi precedenti (fig. 21): il punto di ristagno scende.

Nota del curatore

La condizione «il punto di ristagno posteriore deve coincidere con B » è la celebre *condizione di Kutta*: è essa a selezionare, fra le infinite circolazioni matematicamente possibili, l'unica fisicamente realizzata. Le equazioni (2.10) e (2.11) sono l'origine del 2π per radiante della pendenza della retta di portanza che usate nel corso, e la (2.12) spiega il «quarto di corda» come posizione del centro aerodinamico della lastra piana.

2.0.4 La nascita della circolazione

15. Che un moto circolatorio sia essenziale per la produzione della portanza di un profilo è definitivamente stabilito. La questione è allora come conciliare questo fatto con la proposizione che la circolazione attorno a una linea fluida in un fluido non viscoso resta costante. Se, prima che il moto cominci, tracciamo una linea

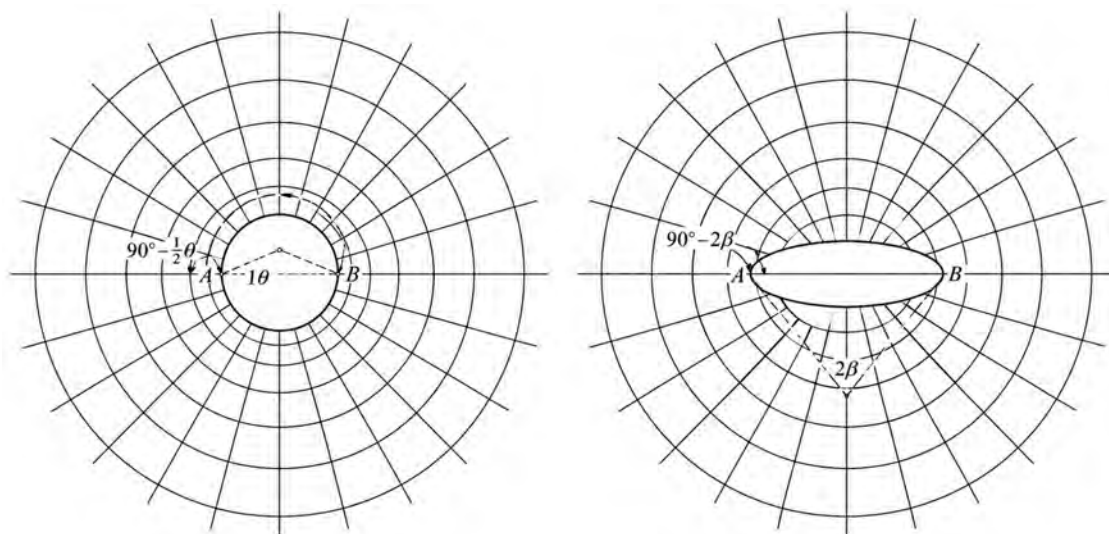


Figura 2.8. Trasformazione conforme del piano z nel piano t mediante $z = t + b^2/t$ (figg. 22–23 dell'originale): cerchi e raggi diventano ellissi e iperboli confocali.

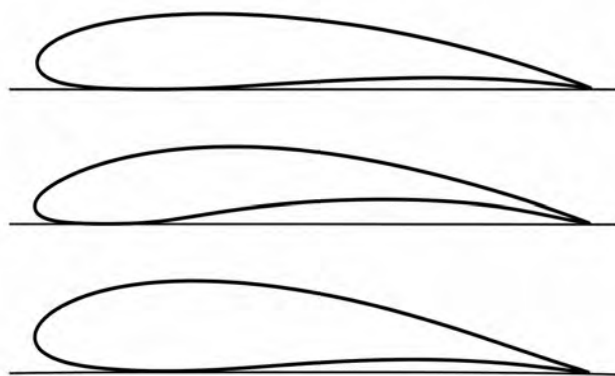


Figura 2.9. Esempi di profili di Joukowski (fig. 24 dell'originale).

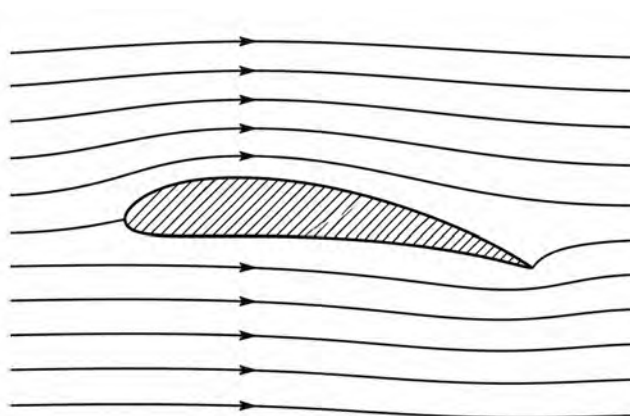


Figura 2.10. Trasformazione del flusso potenziale semplice della fig. 19 (fig. 25 dell'originale).

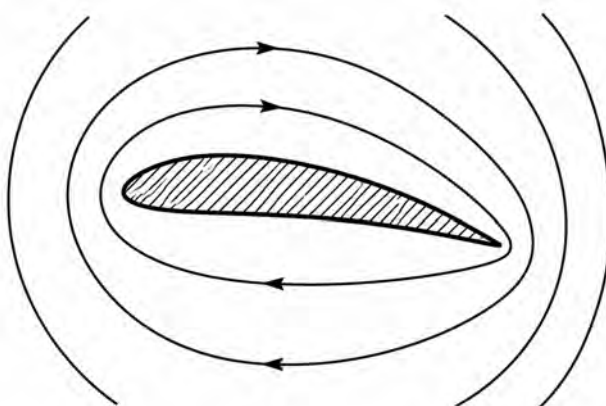


Figura 2.11. Trasformazione del flusso circolatorio della fig. 20 (fig. 26 dell'originale).

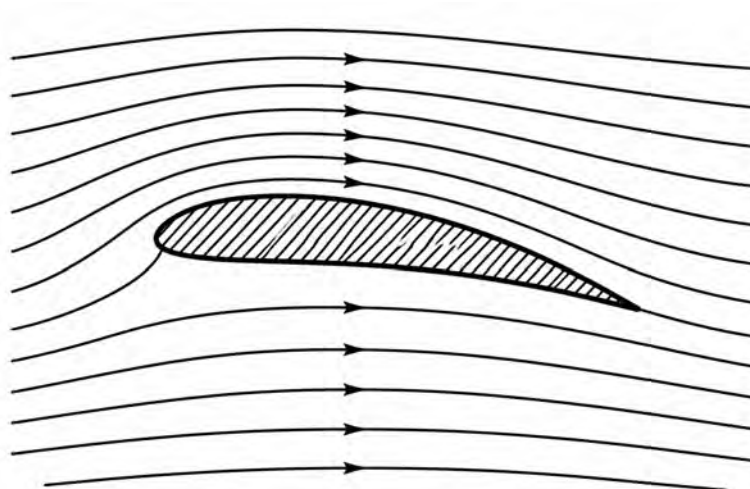


Figura 2.12. Trasformazione della sovrapposizione dei due flussi, fig. 21 (fig. 27 dell'originale): il flusso reale attorno all'ala, con uscita dolce dal bordo posteriore.

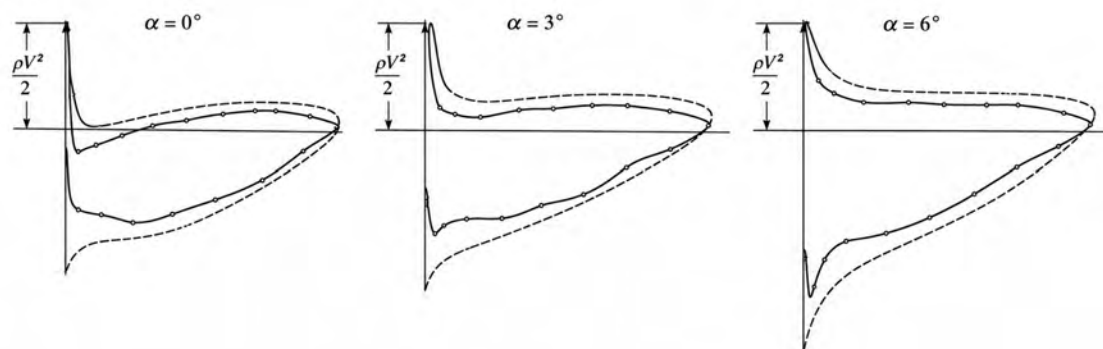


Figura 2.13. Distribuzione di pressione su un'ala di Joukowski per $\alpha = 0^\circ, 3^\circ, 6^\circ$ (figg. 28–30 dell'originale). Linee piene: prove in galleria; tratteggiate: valori calcolati.

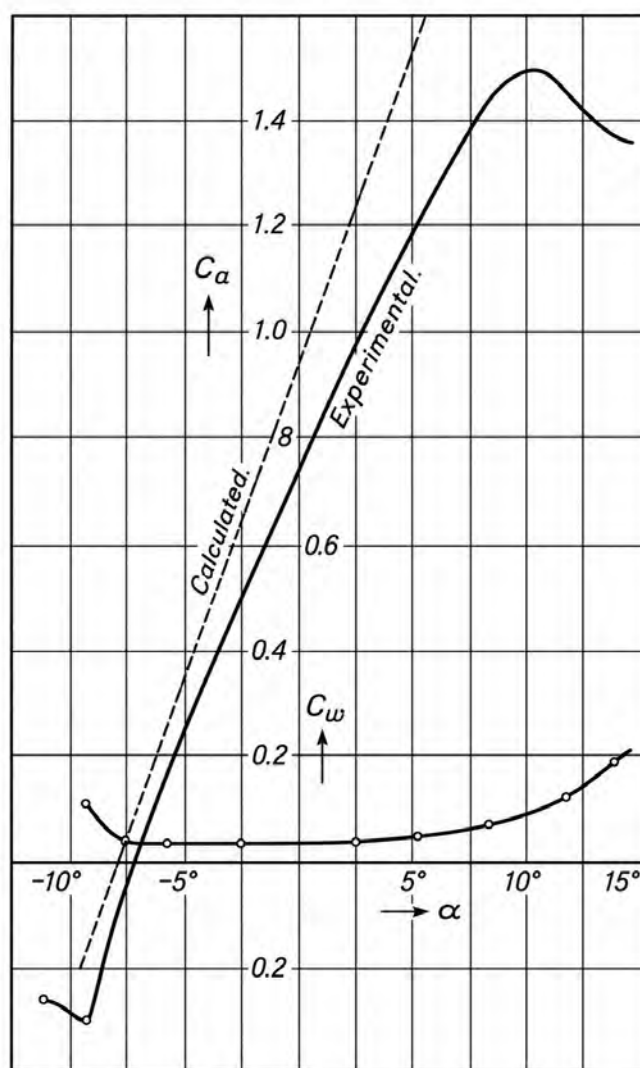


Figura 2.14. Coefficienti di portanza e resistenza di un profilo di Joukowski: prove in galleria e teoria (fig. 31 dell'originale).

chiusa attorno all'ala, allora — finché tutto è in quiete — la circolazione è certamente nulla; e anche quando il moto comincia essa non può cambiare per questa linea. La spiegazione del perché, nonostante ciò, l'ala acquisti circolazione è la seguente. Al primo istante del moto la circolazione è ancora assente; il moto avviene approssimativamente secondo la figura 2.10, e vi è un flusso ad alta velocità attorno al bordo d'uscita (si veda la sezione 1.10). Questo moto non può però durare: al bordo d'uscita si forma istantaneamente un vortice d'intensità crescente il quale — in accordo con il teorema di Helmholtz per cui il vortice è sempre costituito dalle stesse particelle fluide — resta con il fluido mentre questo scorre via (si veda la figura 2.15). La circolazione attorno ad ala e vortice, presi insieme, resta nulla; e resta allora attorno all'ala una circolazione uguale e contraria a quella del vortice andato via con la corrente. Perciò verranno emessi vortici finché la circolazione attorno all'ala raggiunge un'intensità tale che il fluido possa scorrere via dolcemente dal bordo d'uscita. Se una variazione dell'angolo d'attacco disturba la condizione di flusso dolce, vengono emessi di nuovo vortici finché la circolazione raggiunge il suo nuovo valore. Questi fenomeni si compiono in una distanza relativamente breve, sicché l'intera portanza si sviluppa molto rapidamente.

Nelle immagini del flusso attorno a un'ala — per esempio la figura 2.12 — si vede che l'aria davanti all'ala scorre verso l'alto, contro la reazione della portanza. La considerazione della quantità di moto ha mostrato che metà dell'impulso è dovuta alla corrente ascendente sopravveniente. Questo fatto richiede qualche spiegazione ulteriore. La risposta migliore è quella data da Lanchester,⁶ il quale mostra che, per la produzione della portanza, alla massa d'aria che in ogni istante si trova sotto l'ala dev'essere impressa un'accelerazione verso il basso. La domanda che egli pone è: quale specie di moto nasce se per un breve tempo l'aria sotto l'ala viene accelerata verso il basso, poi l'ala avanza un poco senza esercitare pressione, poi l'aria viene di nuovo accelerata, e così via? La distribuzione spaziale delle accelerazioni è nota per il caso di una lastra piana, infinitamente estesa ai lati, accelerata a partire dalla quiete; lo schema delle direzioni di accelerazione è dato in figura 2.16. Si vede che sopra e sotto la lastra l'accelerazione è diretta verso il basso; davanti e dietro la lastra verso l'alto, opposta all'accelerazione della lastra, poiché l'aria sfugge dalla lastra. Lanchester si chiede poi quali velocità nascano dalla velocità uniforme iniziale, relativa alla lastra, per il fatto che la lastra — mentre imprime le accelerazioni della figura 2.16 — si avvicina gradualmente alla particella d'aria considerata, la oltrepassa, e infine se ne allontana di nuovo in avanti. L'immagine delle velocità e delle linee di corrente che Lanchester ottenne in questo modo e riprodusse nel suo libro fu calcolata esattamente, indipendentemente da lui, da Kutta; essa è riprodotta in figura 2.17. Si vede che, come risultato delle accelerazioni verso l'alto del flusso lontano dall'ala, davanti alla lastra si ha una velocità ascendente, alla lastra stessa un'accelerazione uniforme verso il basso — per la quale la velocità ascendente si muta in discendente — e infine, dietro la lastra, una graduale diminuzione della velocità discendente per effetto dell'accelerazione verso l'alto.

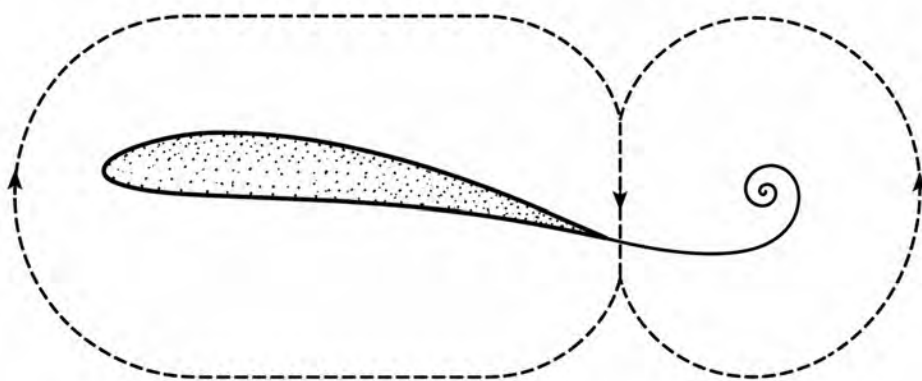


Figura 2.15. Produzione della circolazione attorno a un'ala per emissione di vortici dal bordo d'uscita (fig. 32 dell'originale): il *vortice di avviamento*.

⁶ *Aerodynamics I*, §§ 110–118.

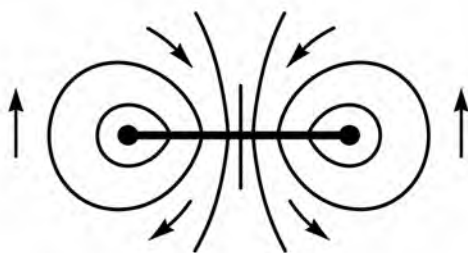


Figura 2.16. Schema delle accelerazioni attorno a una lastra piana infinita accelerata perpendicolarmente alla propria superficie (fig. 33 dell'originale).

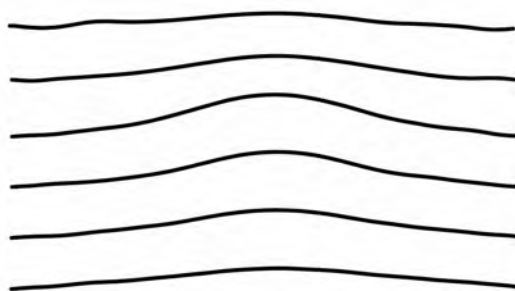


Figura 2.17. Linee di corrente attorno a una lastra curva infinitamente lunga secondo Lanchester e Kutta (fig. 34 dell'originale).

Il senso di tutto questo

La sezione 2.0.4 risolve un apparente paradosso con un'eleganza che vale la pena gustare: la circolazione dell'ala non viola Kelvin, perché nasce *in coppia* con il vortice di avviamento, di segno opposto, lasciato indietro sulla pista. Ogni decollo del pianeta, da allora, lascia dietro di sé questo gemello invisibile.

C. L'ala finita

2.0.5 I vortici liberi dell'ala finita

16. È noto da lungo tempo che l'allungamento di un'ala ha un grande effetto sulle sue proprietà. Ci si sarebbe potuti aspettare che, a causa dell'annullarsi della pressione ai bordi laterali, l'intensità della portanza dovesse diminuire verso il bordo, cosicché il suo valore medio, per lo stesso angolo d'attacco, dovesse risultare minore per piccoli valori dell'allungamento che per grandi. Ma l'influenza osservata dell'allungamento è sensibilmente maggiore di quanto possa spiegarsi in questo modo. Dobbiamo perciò investigare se una spiegazione del fenomeno possa trovarsi applicando all'ala finita, in qualche maniera appropriata, i risultati noti per il flusso piano.

Si vede facilmente che qui vanno presi in considerazione vortici nel fluido libero. È certo, infatti, che attorno alla parte centrale dell'ala è presente circolazione, perché senza circolazione non è possibile portanza. Se una linea chiusa tracciata attorno alla parte centrale dell'ala — attorno alla quale, dunque, c'è circolazione — viene spostata lateralmente oltre l'estremità dell'ala, essa certamente non mostrerà più circolazione quando si trova al di là dell'ala. Dal teorema per cui la circolazione lungo una linea chiusa cambia soltanto se essa taglia filetti vorticosi, e per cui l'ammontare della variazione uguaglia la somma delle intensità dei filetti tagliati (si veda la sezione 1.8), dobbiamo concludere che da ciascuna metà dell'ala devono staccarsi filetti vorticosi, le cui intensità sommate danno Γ , concentrati principalmente vicino alle estremità dell'ala. Per il teorema di

Helmholtz sappiamo inoltre che ogni vortice prodotto nel fluido continua a muoversi con le stesse particelle fluide. Possiamo riguardare le velocità prodotte dall'ala come piccole rispetto alla velocità di volo V , cosicché, in approssimazione, possiamo assumere che i vortici si allontanino dall'ala all'indietro con la velocità rettilinea V . (Volendo, le considerazioni fondate su tale ipotesi possono raffinarsi tenendo conto del moto proprio dei vortici rispetto all'aria; ciò si vedrà però non necessario per le applicazioni pratiche della teoria.)

Per ottenere ora lo schema più semplice possibile, supporremo che la portanza sia distribuita uniformemente sull'ala; allora la circolazione totale nascerà soltanto alle estremità e proseguirà all'indietro come vortici liberi. Il campo di velocità di un'ala infinitamente lunga era, come abbiamo visto, uguale a grande distanza a quello di un filetto vorticoso rettilineo posto al posto dell'ala. Assumeremo che l'affermazione corrispondente valga per l'ala finita. Otteniamo così, per il campo di velocità attorno a un'ala finita, un'immagine — certo un po' grossolana — prendendo per esso la distribuzione di velocità dovuta a un filetto vorticoso di forma corrispondente.

Può qui ricordarsi che, essendo le leggi del campo di velocità di un filetto vorticoso identiche a quelle del campo magnetico di una corrente elettrica (si veda la sezione 1.8), la velocità vicino a un'ala finita può investigarsi numericamente anche calcolando direzione e intensità del campo magnetico prodotto vicino a un conduttore elettrico sagomato come in figura 2.18 e percorso da corrente.

I principi per il calcolo di questo campo di velocità sono stati enunciati nella sezione 1.8; la velocità totale si compone di tre velocità parziali causate dalle tre porzioni rettilinee di vortice. Come si vede senza difficoltà, nella regione fra i vortici il flusso è diretto verso il basso, fuori di essa verso l'alto.

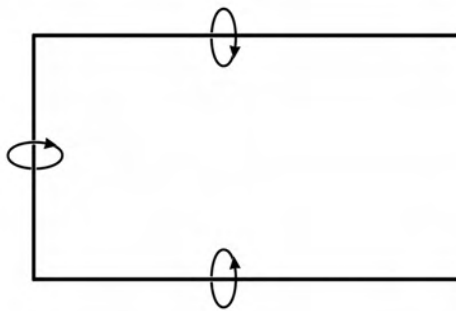


Figura 2.18. Un'ala finita considerata come dovuta ai vortici che la sostituiscono: il «vortice a staffa» (fig. 35 dell'originale).

Nota del curatore

È nato il *vortice a staffa* (o a ferro di cavallo): vortice aderente sull'ala più due vortici liberi d'estremità. Nel corso lo usiamo per spiegare qualitativamente il *downwash* e le scie degli aeromobili — comprese le distanze di separazione al decollo imposte dalla turbolenza di scia.

2.0.6 L'effetto suolo

17. Questo teorema di approssimazione è specialmente comodo quando si trattano le condizioni a grande distanza dall'ala. Con il suo aiuto possiamo spiegare come il peso di un aeroplano si trasferisca al suolo. Per far sì che il flusso soddisfi la condizione che al suolo le componenti di velocità normali ad esso sono impossibili, applichiamo un concetto preso da altri rami della fisica e sovrapponiamo l'effetto di un'*immagine* dell'aeroplano, prendendo la terra come specchio. Per simmetria, allora, tutte le componenti di velocità normali alla superficie terrestre si annullano. Se usiamo come sistema di coordinate uno solidale all'aeroplano, abbiamo il caso del moto stazionario. Prendiamo l'asse X nella direzione dell'apertura alare, l'asse Y orizzontale nella direzione del volo e l'asse Z verticale verso il basso; siano u, v, w le componenti della velocità addizionale dovuta ai vortici. Detta p_0 la pressione indisturbata e p' la differenza di pressione rispetto a p_0 , e trascurando il peso

dell'aria, l'equazione di Bernoulli dà

$$p_0 + p' + \frac{\rho}{2} [u^2 + (v - V)^2 + w^2] = p_0 + \frac{\rho}{2} V^2.$$

Sviluppando, e trascurando u^2 , v^2 e w^2 come piccoli di ordine superiore, resta la semplice equazione

$$p' = \rho V v. \quad (2.13)$$

Per determinare la distribuzione di pressione al suolo dobbiamo ora calcolare il valore di v . Supponiamo che i vortici lascino l'ala in direzione esattamente orizzontale (in realtà la loro traiettoria inclina lievemente verso il basso): in tal caso essi non contribuiscono a v . Resta allora soltanto il «vortice trasversale» di lunghezza l (apertura efficace) e circolazione Γ . Supporremo che l'apertura dell'ala sia piccola rispetto alla distanza h dell'aeroplano dal suolo: in tal caso possiamo trattare il vortice trasversale come un singolo elemento di vortice. Otteniamo allora — si veda la figura 2.19 — in un punto A di coordinate x e y una velocità perpendicolare al piano ABF , di modulo

$$v_1 = \Gamma l \frac{\sin \alpha}{4\pi R^2}.$$

L'immagine dell'aeroplano fornisce un contributo uguale, perpendicolare al piano ABF' . Se β è l'angolo fra il piano ABF e il piano XY , la velocità effettiva al suolo, in quanto dovuta al vortice trasversale, sarà la risultante di v_1 e v_2 . Si ha dunque $v = 2v_1 \sin \beta$ ovvero, scrivendo $\sin \alpha = \frac{R'}{R}$ e $\sin \beta = \frac{h}{R'}$ (si veda la figura 2.19),

$$v = \frac{\Gamma l h}{2\pi R^3}. \quad (2.14)$$

Tenendo conto che, secondo la formula di Kutta-Žukovskij (2.6), $\rho \Gamma V l = A$, le equazioni (2.13) e (2.14) conducono alla relazione

$$p' = \frac{A h}{2\pi R^3}. \quad (2.15)$$

Integrando su tutta la superficie infinita del suolo, si vede che la risultante delle pressioni sul suolo ha esattamente il valore A . È così dimostrato che la distribuzione di pressione dovuta al moto di circolazione trasferisce al suolo esattamente il peso dell'aeroplano. La distribuzione della pressione — che secondo la formula (2.15) è a simmetria assiale rispetto al piede della verticale calata dall'aeroplano — è mostrata in figura 2.20. Il massimo di pressione è $p_1 = \frac{A}{2\pi h^2}$; il suo valore, anche per quote di volo basse, è molto piccolo, perché la superficie sulla quale la pressione si distribuisce è molto grande.

2.0.7 Il campo di velocità dietro l'ala; azione mutua fra le ali

18. Applicazioni di natura del tutto diversa possono farsi del campo di velocità che appartiene al vortice della figura 2.18. Per esempio può stimarsi il modulo della componente di velocità discendente in un punto qualunque dei piani di coda, e in questo modo può calcolarsi l'influenza delle ali sugli impennaggi. Se, in accordo con la formula di Kutta-Žukovskij, la portanza si scrive $A = \rho \Gamma V l$ — nella quale, tenendo conto del fatto che una parte dei vortici si stacca già entro le estremità dell'ala, l può prendersi un po' minore dell'apertura reale b — allora a una distanza d dietro l'ala la componente di velocità verso il basso è

$$w = 2 \frac{\Gamma}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\frac{l}{2}} \left(1 + \frac{d}{a} \right) + \frac{1}{d} \frac{l/2}{a} \right\} = \frac{\Gamma}{\pi l} \left(1 + \frac{a}{d} \right) \quad (2.16)$$

nella quale $a = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + d^2}$. Se la velocità di volo è V , questo dà per l'inclinazione della corrente d'aria discendente $\tan \varphi = \frac{w}{V}$. Dimostrammo questa relazione nell'anno 1911 e trovammo un accordo approssimato con l'osservazione.

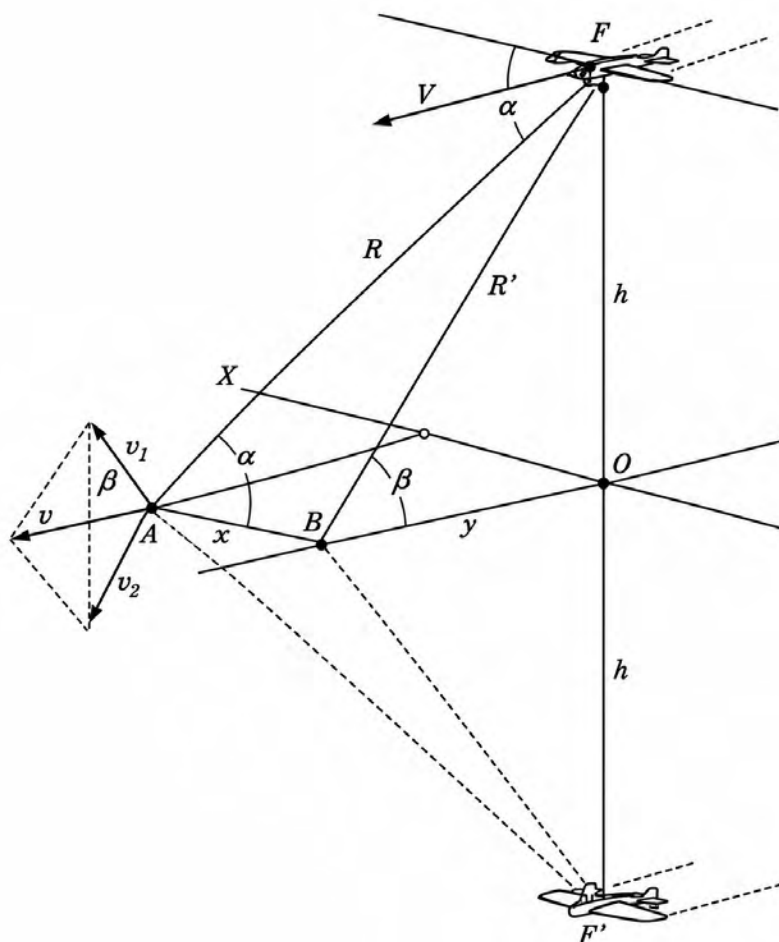


Figura 2.19. Applicazione del metodo delle immagini a un aeroplano in volo vicino al suolo (fig. 36 dell'originale).

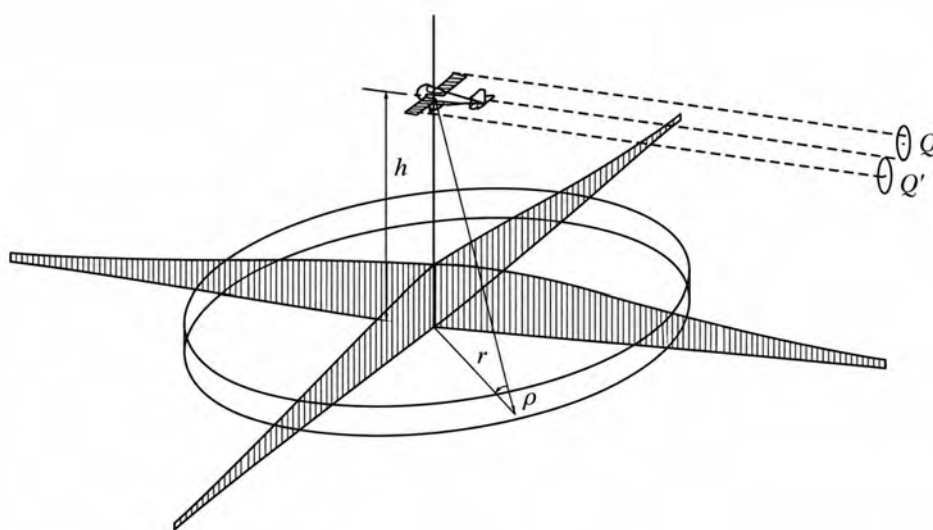


Figura 2.20. Distribuzione della pressione al suolo prodotta da un aeroplano in volo vicino ad esso (fig. 37 dell'originale).

Il principio di cui sopra è stato applicato con profitto al calcolo dell'influenza di un'ala di un biplano sull'altra, e ha dato un metodo per calcolare le proprietà di un biplano a partire dalle proprietà di un'ala singola quali risultano dagli esperimenti. L'idea fondamentale, che si applica sempre in simili calcoli, è che, a causa del sistema di vortici di un'ala, il campo di velocità vicino all'altra è disturbato, e si assume che un'ala sperimenti la stessa portanza che avrebbe in una corrente indisturbata purché essa tagli le linee di corrente del flusso disturbato dall'altra ala nello stesso modo in cui un'ala di monoplano taglia le linee di corrente rettilinee del flusso indisturbato. Come si vede facilmente, il profilo dell'ala deve in generale essere lievemente ruotato e la sua curvatura lievemente alterata, come mostrato nelle figure 2.21 e 2.21. Per la rotazione dell'ala anche la direzione della forza aerodinamica risultante che agisce su di essa viene ruotata di un angolo uguale. Se, oltre alla direzione, cambia anche il modulo della velocità, ciò dev'essere espresso da una corrispondente variazione della forza aerodinamica risultante.

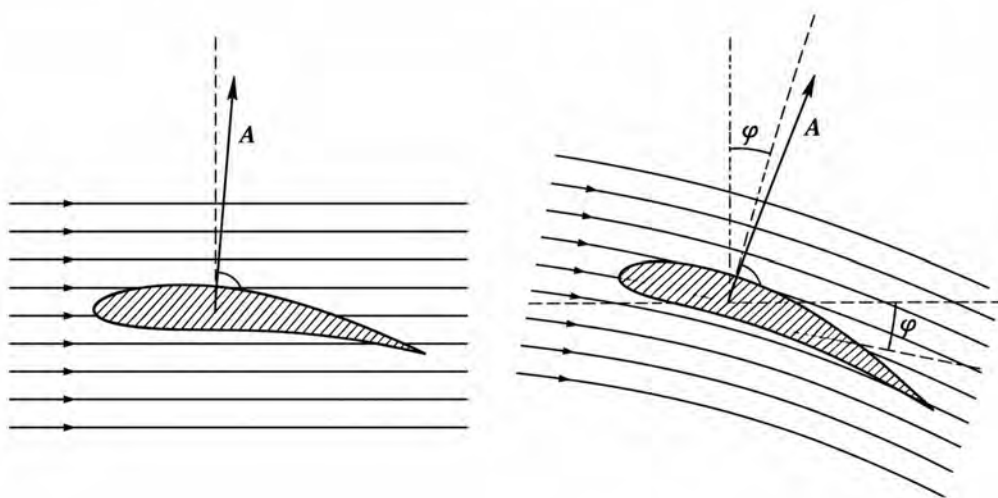


Figura 2.21. Influenza di un'ala di un biplano sull'altra: rotazione del profilo e alterazione della sua curvatura (figg. 38–39 dell'originale).

2.0.8 Il biplano senza scalamento: la resistenza mutua

19. Come illustrazione tratteremo brevemente il caso del biplano senza scalamento. La componente più importante della velocità di disturbo w è di nuovo quella verticale; nel piano delle linee portanti medie del biplano essa è influenzata soltanto dalla coppia di vortici che si staccano dalle ali, poiché il vortice trasversale di un'ala causa sull'altra soltanto un aumento (o una diminuzione) della velocità della corrente. Ci occupiamo qui soltanto del calcolo della velocità discendente di disturbo dovuta ai vortici provenienti dall'ala che *non* è sotto esame, poiché l'altro sistema di vortici è presente anche nel monoplano e la sua influenza è già stata messa in conto negli esperimenti sul monoplano.

La velocità totale dovuta a una porzione di vortice che si estende all'infinito in una sola direzione, nel piano perpendicolare al vortice condotto per il suo estremo, è — come può dedursi facilmente dalla formula della sezione 1.8 — esattamente la metà della velocità corrispondente nell'intorno di un filetto rettilineo che si estende all'infinito in entrambe le direzioni. Ciò si vede facilmente anche dal fatto che due filetti, ciascuno esteso all'infinito in una sola direzione ma in versi opposti nei due casi, formano, se combinati, un unico filetto esteso all'infinito in entrambe le direzioni. La velocità totale prodotta nel punto P dal vortice A — si veda la figura 2.22 — è $\frac{\Gamma_1}{4\pi r}$, dove $r = \sqrt{x^2 + b^2}$; la sua componente verticale è

$$w_A = \frac{\Gamma_1}{4\pi r} \cdot \frac{x}{r}.$$

La componente verticale dovuta al vortice B è

$$w_B = \frac{\Gamma_1}{4\pi r'} \cdot \frac{l_1 - x}{r'}$$

dove $r' = \sqrt{(l_1 - x)^2 + b^2}$. La componente verticale dovuta a entrambi i vortici è perciò

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\frac{x}{r^2} + \frac{l_1 - x}{r'^2} \right). \quad (2.17)$$

Se assumiamo che la portanza sia distribuita uniformemente sull'apertura efficace l_1 — che di nuovo prenderemo un po' minore dell'apertura reale — allora, poiché ogni elemento dell'ala dev'essere ruotato dell'angolo φ dato da $\tan \varphi = \frac{w}{V}$, anche la direzione della forza aerodinamica dev'essere ruotata: il che comporta una variazione trascurabile della portanza, ma un aumento della resistenza di questa ala di cui bisogna tenere conto.

È essenziale, in questo calcolo, passare dalla condizione di monoplano a quella in cui l'ala, come parte del biplano, ha la stessa portanza che aveva come monoplano. L'angolo d'attacco per il quale questa condizione si realizza può stimarsi in seguito dalla media degli angoli φ .

Il contributo del vortice A all'aumento di resistenza dell'ala superiore della figura 2.22 è evidentemente

$$W' = \int_0^{l_2} \frac{w}{V} \frac{A_2}{l_2} dx = \frac{A_2}{l_2} \frac{\Gamma}{4\pi V} \int_0^{l_2} \frac{x dx}{r^2} = \frac{A_2}{l_2} \frac{\Gamma}{4\pi V} \log \frac{r_2}{r_1}.$$

Il contributo del vortice B è, per simmetria, lo stesso. In accordo con l'equazione (2.6) possiamo porre $\Gamma = \frac{A_1}{l_1 \rho V}$ e ottenere così, per l'aumento di resistenza dell'ala superiore,

$$W_{12} = \frac{A_1 A_2}{l_1 l_2} \frac{\log r_2 / r_1}{2\pi \rho V^2}. \quad (2.18)$$

Con il simbolo W_{12} s'intende che si tratta della resistenza prodotta dall'ala 1 sull'ala 2. Ci si convince facilmente che la resistenza W_{21} , che l'ala 2 produce sull'ala 1, ha lo stesso valore. Perciò l'aumento totale di resistenza dovuto al fatto che due monoplani, i quali producono le portanze A_1 e A_2 , vengono combinati in un biplano — restando invariate le due portanze (ma naturalmente cambiando gli angoli d'incidenza) — è

$$W_{12} + W_{21} = 2 W_{12} = \frac{A_1 A_2}{2\pi l_1 l_2 q} \log \frac{r_2}{r_1} \quad (2.19)$$

nella quale, come sempre, $q = \frac{1}{2} \rho V^2$.⁷

Sulla variazione del modulo della velocità — che con l'approssimazione usata dipende soltanto dalla componente di disturbo v nella direzione del volo — ha influenza soltanto il vortice trasversale dell'altra ala. Per un punto qualunque questa influenza, secondo la nostra formula, è data da

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} \left(\frac{x}{r} + \frac{l - x}{r'} \right) \quad (2.20)$$

nella quale r e r' hanno lo stesso significato di prima. L'ala superiore sperimenta, per effetto dell'inferiore, un aumento di velocità; l'inferiore, per effetto della superiore, una diminuzione: a ciò corrispondono, rispettivamente, un aumento o una diminuzione della portanza secondo le formule consuete. Se vogliamo mantenere le portanze invariate, come richiesto dal trattamento dato sopra, occorre variare corrispondentemente gli angoli d'attacco.

⁷L'azione mutua di due ali affiancate può calcolarsi anch'essa dalle considerazioni esposte sopra, e risulta in una *diminuzione* della resistenza. Questa diminuzione è di natura simile a quella che nasce, nella teoria del monoplano, per aumento dell'allungamento.

La variazione efficace della curvatura⁸ del profilo sarà discussa qui, per semplicità, soltanto per il piano mediano del biplano, cioè per $x = \frac{l_1}{2}$. Essa si ottiene nel modo più semplice derivando l'angolo d'inclinazione della corrente disturbata dall'altra ala; il che, ricordando che $\tan \varphi = \frac{w}{V}$, dà

$$\frac{1}{R} \simeq \frac{d}{dy}(\tan \beta) = \frac{1}{V} \frac{dw}{dy}. \quad (2.21)$$

Fuori del piano verticale, per effetto dell'ala disturbante, contribuiscono al valore di w tre vortici. Un vortice laterale contribuisce, in un punto ad altezza h e distanza y davanti al piano trasversale, una velocità v' perpendicolare a r'' pari a $\frac{\Gamma_1}{4\pi r} \left(1 - \frac{y}{r''}\right)$, e quindi il suo contributo a w è

$$w_1 = \frac{\Gamma_1 x}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{y}{r''}\right) = \frac{\Gamma_1 l_1}{8\pi r^2} \left(1 - \frac{y}{r''}\right).$$

Il vortice trasversale contribuisce

$$w_2 = -\frac{\Gamma_1}{4\pi r} \cdot \frac{l_1}{r''} \cdot \frac{y}{r''}$$

nella quale il significato di r'' e r''' può vedersi dalla figura 2.23. Il w totale è pertanto

$$w = 2w_1 + w_2 = \frac{\Gamma l_1}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{y}{r^2 r''} - \frac{y}{r'' r''^2} \right).$$

La derivata di questo rispetto a y , per $y = 0$ — essendo allora $r'' = r$ e $r''' = h$ — è

$$\left(\frac{dw}{dy_0} \right) = -\frac{\Gamma l_1}{4\pi r} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{h^2} \right).$$

La curvatura cercata è allora, secondo l'equazione (2.21),

$$\frac{1}{R} = \frac{\Gamma}{4\pi V} \frac{l_1}{r} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{h^2} \right). \quad (2.22)$$

Calcoli di questa natura furono eseguiti nel 1912 dal mio assistente A. Betz, allo scopo di confrontare esperimenti su monoplani e biplani e di studiare l'influenza dei diversi angoli d'attacco e dei diversi gradi di scalamento delle due ali di un biplano l'una sull'altra. L'influenza sulla resistenza non ci era allora nota, e il calcolo fu condotto in modo da ottenere le variazioni della portanza dovute a w , a v e alla curvatura delle linee di corrente. In questa connessione fu dedotta anche la variazione della portanza di un monoplano in volo vicino alla superficie terrestre, calcolando l'influenza dell'«ala specchiata» esattamente come quella dell'altra ala di un biplano; tutto ciò che occorre era cambiare alcuni segni algebrici, perché l'ala specchiata aveva portanza negativa. La teoria di questi calcoli fu data da Betz nella Z. F. M., 1914, pagina 253.

I risultati della teoria di Betz, da un punto di vista più moderno come quello qui adottato, furono esposti nei *Technische Berichte*, volume 1, pagina 103 e seguenti. Vi si trova la discussione necessaria al trattamento del caso più generale di un biplano con ali di apertura diversa e con scalamento qualunque. Nel caso di grande scalamento appare, per esempio, che l'ala anteriore si trova in una corrente ascendente causata dall'ala posteriore, mentre quest'ultima si trova in una corrente discendente intensificata, dovuta all'ala anteriore e ai vortici che se ne staccano. In corrispondenza, se l'angolo d'attacco resta invariato, la portanza dell'ala anteriore risulta aumentata e quella della posteriore indebolita; al tempo stesso il rapporto resistenza/portanza sperimenta una diminuzione per l'ala anteriore e un marcato aumento per la posteriore.

Per un'ala in vicinanza del suolo, per l'influenza di v si ha una diminuzione di portanza e, viceversa, un aumento di portanza per l'influenza di w , se l'angolo d'attacco è mantenuto costante; ma il risultato complessivo è un'evidente diminuzione del rapporto resistenza/portanza. Da quest'ultima circostanza si comprende perché nei primi tempi dell'aeronautica molte macchine potessero volare soltanto vicino al suolo e non riuscissero a innalzarsi: i loro motori di bassa potenza bastavano a vincere la resistenza diminuita vicino al suolo, ma non quella in aria libera.

⁸Con variazione di curvatura dell'ala s'intende che, se il flusso restasse rettilineo e la curvatura fosse cambiata, le forze sull'ala varierebbero esattamente come variano sull'ala reale per la variazione del flusso. — *Nota del traduttore americano.*

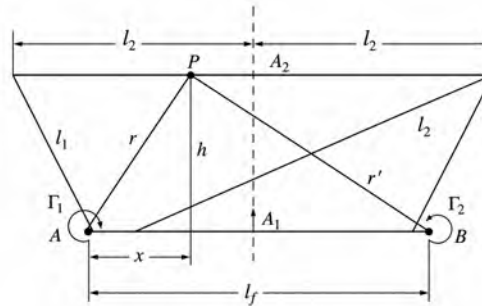


Figura 2.22. Velocità in un punto P dovuta ai vortici d'estremità (fig. 40 dell'originale).

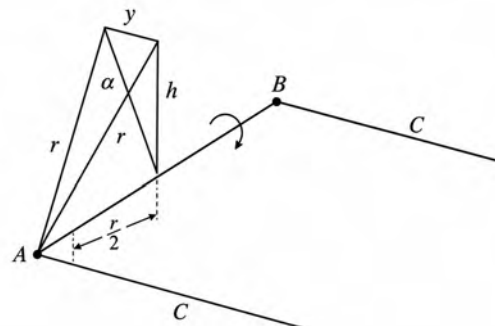


Figura 2.23. Curvatura del profilo alare nel piano mediano dovuta alle velocità causate dai vortici trasversale e d'estremità (fig. 41 dell'originale).

Il senso di tutto questo

L'§2.0.8 contiene, in miniatura, la logica di tutti i metodi di interferenza aerodinamica: ogni superficie portante «vive» nel campo indotto delle altre e paga — o incassa — in resistenza. E la chiusa storica sugli aeroplani dei pionieri che volavano solo in effetto suolo è una perla: la teoria appena costruita spiega d'un tratto un mistero che aveva accompagnato l'aviazione per un decennio.

D. Teoria del monoplano

2.0.9 L'ala di riferimento e il nastro vorticoso

20. Se estendiamo i principi finora applicati all'influenza di un'ala sull'altra all'effetto che i vortici propri di un'ala esercitano su di essa, si può dire in anticipo che ci si dovrà attendere effetti simili a quelli mostrati nell'influenza di un'ala di biplano sull'altra: cioè che l'esistenza della portanza presuppone una corrente discendente nell'intorno dell'ala, per la quale l'angolo d'attacco risulta accresciuto e la resistenza aumentata, tanto più quanto più vicino al centro si staccano i vortici alle estremità — cioè quanto minore è l'allungamento. Si potrebbe proporre di applicare la teoria data per i biplani ponendo nelle formule il distacco fra le ali uguale a zero. A parte il fatto che le formule sviluppate non valgono nell'immediata vicinanza dell'ala che genera i vortici — e devono essere sostituite da altre più accurate — questa non è certamente la via giusta da seguire: nel trattamento precedente, infatti, abbiamo preso come oggetto di confronto il monoplano indisturbato e ci siamo chiesti quale resistenza, quale variazione di angolo d'attacco eccetera fossero causate dall'aggiunta di una seconda ala. Per procedere con lo stesso metodo dobbiamo cercare, per la teoria del monoplano, un altro oggetto di confronto adatto: servirà a questo scopo l'ala infinitamente lunga. Là dove prima si parlava di variazione dell'angolo d'attacco, aumento di resistenza eccetera, ora intendiamo riferirli all'ala infinitamente lunga come

punto di partenza. Poiché nel flusso teorico non viscoso l'ala infinitamente lunga non sperimenta resistenza, la resistenza totale di una tale ala in un tale fluido dev'essere dovuta a vortici accessibili ai nostri calcoli, come mostrerà il trattamento seguente. In un fluido viscoso nascerà resistenza per entrambe le ali, infinitamente lunghe o no, la quale — per quegli angoli d'attacco per i quali il profilo è detto «buono» — è, secondo i risultati dell'esperienza, dell'ordine di grandezza della resistenza di attrito di una superficie piana.

Lo svolgimento di questo problema è accompagnato da difficoltà maggiori del calcolo dato per il biplano. Per ottenere l'aiuto necessario alla soluzione, dovremo anzitutto migliorare l'accuratezza della nostra immagine del sistema di vortici.

La densità della portanza (portanza per unità di lunghezza) non è costante sull'intera apertura, ma in generale decresce gradualmente da un massimo al centro fin quasi a zero alle estremità. In accordo con quanto dimostrato, a ciò corrisponde una circolazione decrescente dall'interno verso l'esterno. Perciò, secondo il teorema per cui la circolazione lungo una curva chiusa spostata può cambiare soltanto se viene tagliata una corrispondente quantità di filetti vorticosi, dobbiamo assumere che filetti vorticosi si staccino dal bordo d'uscita ovunque Γ cambia. Per una porzione di tale bordo di lunghezza dx l'intensità di vortice è dunque da scriversi $\frac{d\Gamma}{dx} dx$, e quindi per unità di lunghezza del bordo $\frac{d\Gamma}{dx}$. Questi filetti vorticosi che si staccano, uno accanto all'altro, formano nel loro insieme una figura simile a una superficie, che chiameremo «nastro vorticoso».

Per la comprensione di questo nastro vorticoso possiamo avvicinarci all'argomento anche da un lato del tutto diverso. Consideriamo il flusso nell'immediata vicinanza della superficie dell'ala. Poiché l'eccesso di pressione sotto l'ala e la depressione sopra di essa devono annullarsi non appena si oltrepassano in qualunque modo i bordi laterali, in vicinanza di tali bordi deve esserci una caduta di pressione diretta verso l'esterno sul lato inferiore dell'ala e verso l'interno sul superiore. La corrente sopravveniente, sotto l'azione di questa caduta di pressione mentre scorre lungo l'ala, riceverà sul lato inferiore una componente addizionale verso l'esterno e sul superiore una verso l'interno, componenti che non svaniscono più. Se assumiamo che al bordo d'uscita il flusso si richiuda completamente — com'è il caso nel flusso non viscoso — avremo dunque una differenza di direzione fra la corrente superiore e quella inferiore: quella superiore ha, rispetto all'inferiore, una velocità relativa diretta verso l'interno, e questa è perpendicolare alla velocità media, poiché per l'equazione di Bernoulli, in assenza di differenza di pressione fra i due strati, i valori numerici delle loro velocità devono essere uguali. Questa velocità relativa dei due flussi è esattamente il risultato della distribuzione superficiale di vortici menzionata sopra (come la teoria dei vortici dimostra, una distribuzione superficiale di vortici significa sempre una discontinuità di velocità fra le regioni poste dai due lati della superficie). La velocità relativa è tanto maggiore quanto maggiore è la caduta laterale di pressione, cioè quanto maggiore è la variazione laterale della portanza. Il quadro così ottenuto concorda sotto ogni rispetto con il precedente.

2.0.10 Il problema linearizzato e la linea portante

21. Le intensità del nostro nastro vorticoso restano invariate durante tutto il volo; tuttavia le singole parti del nastro si influenzano a vicenda e ha luogo, all'incirca come mostrato in figura 2.24, un graduale arrotolamento del nastro, come un esame più attento dimostra. Un'indagine teorica esatta di questo fenomeno non è al momento possibile; può soltanto dirsi che le due metà del nastro vorticoso si concentrano sempre più e che infine, a grande distanza dall'ala, resta una coppia di vortici con nuclei piuttosto deboli. Per il problema pratico che principalmente ci interessa — studiare la reazione dei vortici sull'ala — non è necessario conoscere queste trasformazioni che avvengono a grande distanza, perché le parti del sistema di vortici più vicine all'ala eserciteranno l'influenza maggiore. Non considereremo perciò la graduale trasformazione del nastro vorticoso e, per rendere la cosa del tutto semplice, faremo il calcolo come se tutti i filetti vorticosi corressero all'indietro in linee rette opposte alla direzione del volo. Si vedrà che, con questa ipotesi, i calcoli possono eseguirsi e forniscono una teoria del monopiano molto utile e capace di dare aiuto in vari modi.

Se vogliamo fondare il metodo indicato con maggior rigore matematico, possiamo procedere così: poiché il problema completo dovrebbe essere sviluppato tenendo conto di tutte le circostanze, ci limiteremo al caso di una portanza molto piccola e condurremo sistematicamente tutti i calcoli in modo da conservare soltanto la potenza più bassa della portanza, trascurando tutte le potenze superiori. Il moto del nastro vorticoso è

proporzionale alla circolazione totale, quindi anche alla portanza: è dunque piccolo se la portanza è piccola. Se si calcolano le velocità causate dal nastro vorticoso, prima per il nastro nella sua forma reale, poi per il nastro semplificato nella maniera detta, la differenza fra le due distribuzioni sarà piccola rispetto ai valori della velocità, dunque piccola del secondo ordine — cioè piccola come il quadrato della circolazione. Trascureremo perciò la differenza. Considerazioni di questo tipo sono in grado di decidere, in ogni caso, quali azioni vadano tenute in conto e quali possano trascurarsi. Con le nostre semplificazioni abbiamo dunque reso il problema *lineare*, come dice il matematico, e con ciò ne abbiamo resa possibile la soluzione. Va considerata una circostanza particolarmente fortunata che, anche con i più grandi valori della portanza che effettivamente si presentano con gli allungamenti usuali, il moto proprio del nastro vorticoso resti ancora abbastanza piccolo, cosicché — nel senso di questa teoria — tutte le portanze che s'incontrano in pratica possono ancora riguardarsi come piccole. Per superfici con grandi corde — per esempio un quadrato — questo non vale più; in tal caso vi sono inoltre altre ragioni che provano che la nostra teoria non è più sufficientemente accurata. Ciò sarà mostrato nel prossimo paragrafo.

Si è già ricordato che l'ala infinitamente lunga servirà come oggetto di confronto per la teoria del monoplano. Formuliamo ora la cosa più esattamente dicendo: *ogni sezione dell'ala, di lunghezza dx , starà al flusso modificato dal sistema di vortici nella stessa relazione in cui un elemento corrispondente di ala infinitamente lunga sta al flusso rettilineo*. Le velocità aggiuntive causate dal sistema di vortici variano da luogo a luogo, e variano anche lungo la corda dell'ala, sicché abbiamo di nuovo a che fare con un'influenza di curvatura. Questa influenza è in pratica non molto grande e sarà trascurata per amore di semplicità: il che è particolarmente lecito per ali di corda piccola rispetto all'apertura, cioè di grande allungamento. Volendo esprimere con esattezza matematica questa ipotesi semplificatrice, si può dire che non viene sviluppata la teoria dell'ala reale di corda finita, bensì quella di una «linea portante». È chiaro che un'ala di allungamento 1 : 6 può bene approssimarsi con una linea portante, specialmente considerando che di fatto la portanza è concentrata per la massima parte in una regione vicina al bordo d'attacco; è facile vedere, invece, che una superficie quadrata può approssimarsi con una linea portante soltanto malamente.

Se assumiamo una linea portante rettilinea, giacente in un piano perpendicolare alla direzione del volo, il flusso dovuto ai vortici — che secondo la legge di Biot-Savart è causato dai suoi stessi elementi — non produce sulla linea portante stessa alcuna velocità, salvo il flusso di circolazione attorno ad essa, il quale sarebbe presente anche per una linea portante infinitamente lunga con la stessa circolazione del punto osservato. Tutte le velocità di disturbo in un punto della linea portante, da riguardare come deviazioni dalla linea portante infinitamente lunga, sono dunque dovute ai vortici che si staccano, e possono perciò calcolarsi facilmente con un'integrazione.

Una considerazione qualitativa della distribuzione da attendersi per le velocità di disturbo lungo la nostra linea portante mostra subito che — proprio come nel caso del biplano — il fatto principale è la produzione, da parte dei vortici, di una corrente d'aria discendente. Se vogliamo conservare la portanza della stessa intensità che con l'ala infinita, l'angolo d'attacco dev'essere aumentato, poiché la corrente d'aria discendente, sommata al vento dovuto al volo, produce una velocità obliquamente discendente. Inoltre la forza aerodinamica, come prima, dev'essere ruotata dello stesso angolo, sicché ne risulta una resistenza. La rotazione sarà tanto maggiore quanto maggiore è la portanza e quanto più vicino al centro dell'ala avviene la produzione principale dei vortici. La resistenza deve perciò crescere sia al crescere della portanza sia al diminuire dell'apertura.

Un'immagine di ciò che accade con un'ala di corda finita ma piccola è data in figura 2.25. Vi è mostrata la variazione della componente verticale di velocità lungo una retta parallela alla direzione del volo passante per il centro dell'ala: nella parte superiore del diagramma per l'ala infinitamente lunga, in quella inferiore per l'ala finita. Dalla curva I vediamo la corrente ascendente davanti all'ala, la sua trasformazione in discendente sull'ala stessa e il graduale smorzamento della componente discendente per la risalita di pressione dietro l'ala (si veda la sezione 2.0.4). La curva corrispondente per l'ala finita è la curva III: essa si deriva dalla I aggiungendovi la velocità discendente II. Riconosciamo la rotazione del profilo, come pure quella della forza portante — originariamente perpendicolare — dell'angolo φ , dove $\tan \varphi = \frac{w}{V}$ e w è la velocità discendente nella posizione del centro di pressione (cioè alla linea portante). Seguendo il metodo di Lanchester descritto nella sezione 2.0.4, la velocità discendente w può anche riguardarsi come una diminuzione del flusso ascendente al bordo d'attacco,

dovuta all'assenza del prolungamento laterale dell'ala — cioè alla deviazione dall'ala infinitamente lunga che era alla base del trattamento della sezione 2.0.4. Discussioni molto simili a questa si trovano in Lanchester, volume I, sezione 117.

Dalla figura può vedersi che a grande distanza dietro l'ala la velocità discendente è $2w$: il che concorda con la relazione già menzionata per cui le velocità dovute a un filetto vorticoso rettilineo esteso all'infinito in entrambe le direzioni sono il doppio di quelle dovute a un filetto esteso all'infinito in una sola direzione, per punti del piano perpendicolare al vortice passante per il suo estremo.

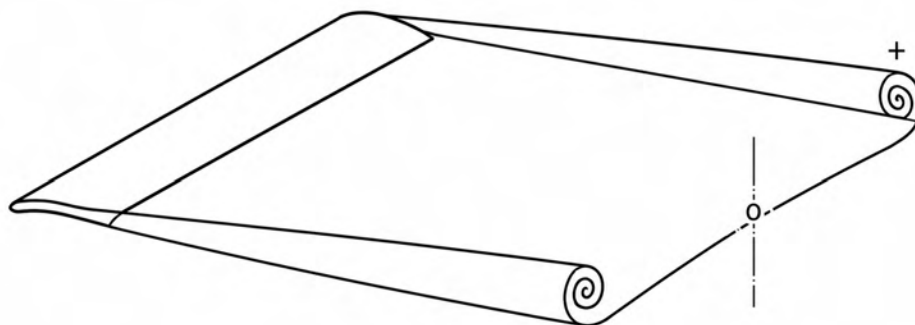


Figura 2.24. Cambiamento di forma dei nastri vorticosi a grande distanza dietro l'ala: l'arrotolamento (fig. 42 dell'originale).

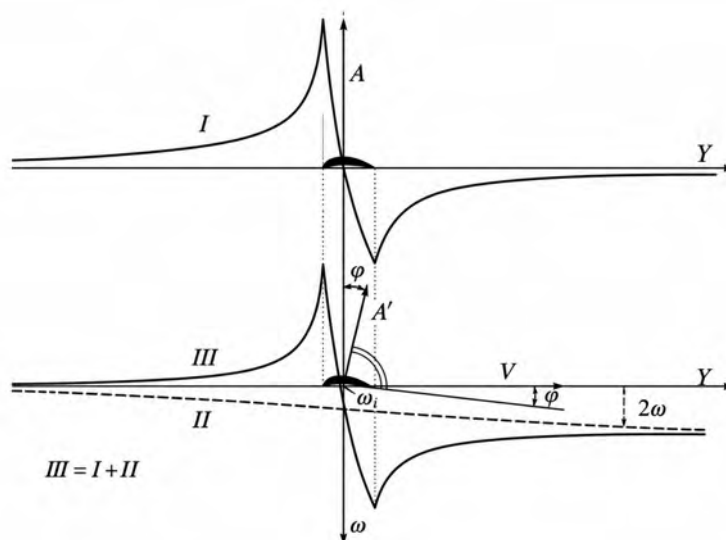


Figura 2.25. Ala di corda finita ma piccola: distribuzione della componente verticale di velocità lungo una parallela alla direzione del volo. I: ala infinita; II: velocità discendente prodotta dai vortici liberi; III: ala finita, somma di I e II (fig. 43 dell'originale).

2.0.11 Il primo problema: la distribuzione ellittica

22. I procedimenti matematici richiesti dallo svolgimento della teoria delineata diventano semplicissimi se si considera nota la legge di distribuzione della portanza sull'ala. Chiameremo questo il «primo problema».

Il calcolo si fa come segue. La distribuzione di portanza è la circolazione espressa in funzione dell'ascissa x . L'intensità del filetto vorticoso che abbandona una sezione infinitamente piccola dx è allora $\frac{d\Gamma}{dx} \cdot dx$. Essa produce in un punto x' , secondo quanto già spiegato, una velocità verticale, discendente o ascendente, di valore

$$dw = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\Gamma}{dx} \cdot \frac{dx}{x' - x}.$$

Qui $x' - x$ prende il posto di r della sezione 1.8. Se la circolazione cade a zero alle estremità dell'ala — com'è di fatto il caso — tutti i vortici che lasciano l'ala sono di questo tipo. La velocità addizionale totale nella posizione x' , assumendo la funzione $\Gamma(x)$ ovunque continua, è

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_0^b \frac{d\Gamma}{dx} \cdot \frac{dx}{x' - x}. \quad (2.23)$$

Dell'integrale — indeterminato nel punto $x = x'$ — dobbiamo prendere il cosiddetto «valore principale», cioè il limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{x' - \varepsilon} + \int_{x' + \varepsilon}^b \right)$$

come un esame più attento mostra. Ciò può giustificarsi calcolando, invece del valore della velocità sulla linea portante — determinato dall'influenza preponderante degli elementi più vicini — il valore di w in un punto un poco sopra o sotto la linea portante: si vede che quest'ultimo non è indeterminato e che, passando al limite di distanza nulla dalla linea, esso raggiunge il valore principale detto. Su questa digressione, importante in sé, bastino le brevi osservazioni precedenti.

Eseguita l'integrazione della (2.23), la velocità discendente è nota in funzione dell'ascissa x' (che più avanti chiameremo x). Conosciamo allora anche l'inclinazione del flusso risultante, $\tan \varphi = \frac{w}{V}$; la portanza $dA = \rho \Gamma V dx'$ agente sulla sezione dx' contribuisce perciò al valore della resistenza con

$$dW = \tan \varphi \cdot dA = \rho \Gamma(x') \cdot w(x') dx'$$

essendo essa inclinata all'indietro del piccolo angolo φ . La resistenza totale è dunque

$$W = \rho \int_0^b \Gamma(x') w(x') dx' = \frac{\rho}{4\pi} \int_0^b \int_0^b \frac{\Gamma(x') \frac{d\Gamma}{dx} dx dx'}{x' - x}. \quad (2.24)$$

Per lungo tempo fu difficile trovare funzioni adatte a esprimere la distribuzione di portanza dalle quali si ottenesse, per mezzo dell'equazione (2.23), una distribuzione plausibile di w . Dopo vari tentativi si trovò che una distribuzione di portanza secondo una semiellisse lungo l'apertura dà la soluzione desiderata. Secondo essa, prendendo l'origine delle coordinate al centro dell'ala,

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{b/2}\right)^2}, \quad \text{e quindi} \quad \frac{d\Gamma}{dx} = \frac{-\Gamma_0 x}{\frac{b}{2} \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - x^2}}.$$

Il «valore principale» dell'integrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{t dt}{(t' - t)\sqrt{1 - t^2}} \quad \text{è uguale a } \pi$$

e perciò l'integrale dell'equazione (2.23) è uguale a $\frac{\Gamma_0 \pi}{b/2}$ moltiplicato per il fattore $\frac{1}{4\pi}$: dunque indipendente da x' e costante su tutta l'apertura. Quindi

$$w = \frac{\Gamma_0}{2b}.$$

Il valore di Γ_0 si ottiene da

$$A = \rho V \int_{-b/2}^{+b/2} \Gamma dx = \rho V \Gamma_0 \int_{-b/2}^{+b/2} \sqrt{1 - \frac{x}{b/2}} \cdot dx = \rho V \Gamma_0 \frac{\pi}{4} b,$$

che dà

$$\Gamma_0 = \frac{4A}{\pi \rho V b}.$$

Quindi

$$w = \frac{2A}{\pi \rho V b^2}. \quad (2.25)$$

Poiché w è costante non occorre calcolare la resistenza con un integrale: essa è semplicemente

$$W = \frac{w}{V} A = \frac{2A^2}{\pi \rho V^2 b^2} = \frac{A^2}{\pi q b^2}. \quad (2.26)$$

Il calcolo può eseguirsi anche per distribuzioni di circolazione date dalla formula generale seguente:

$$\Gamma = \sqrt{1 - \xi^2} (\Gamma_0 + \Gamma_2 \xi^2 + \Gamma_4 \xi^4 + \dots) \quad (2.27)$$

nella quale $\xi = \frac{x}{b/2}$. Secondo i calcoli di A. Betz

$$w = \frac{1}{2b} \sum_n \left\{ \Gamma_{2n} \sum_{m=0}^{m=n} \xi^{2m} [(2n+1)p_{n-m} - 2n p_{n-m-1}] \right\} \quad (2.28)$$

e

$$W = \frac{\pi \rho}{4} \sum_i \sum_k \left\{ \Gamma_{2i} \Gamma_{2k} \sum_{m=0}^{m=k} q_{i+m} [(2k+1)p_{k-m} - 2k p_{k-m-1}] \right\} \quad (2.29)$$

nelle quali i numeri p e q hanno il significato

$$p_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}; \quad q_n = \frac{p_n}{2n+2}; \quad p_0 = 1, \quad p_{-1} = 0.$$

La distribuzione ellittica della portanza, a parte la sua semplicità, ha acquistato un significato speciale dal fatto che la resistenza calcolata dall'equazione (2.26) si dimostrò essere la *minima* resistenza immaginabile per un monoplano di dati valori della portanza totale, dell'apertura e della velocità. La dimostrazione di ciò sarà data più avanti.

Era desiderabile confrontare questa resistenza teorica minima con le resistenze effettivamente ottenute. Ciò fu fatto già nel 1913, ma — per la cattiva qualità dei profili allora investigati — tutto quel che si poté stabilire fu che la resistenza reale era maggiore di quella teorica. Più tardi (1915) si mostrò, investigando buoni profili, che la resistenza teorica corrisponde assai da vicino alla legge di variazione della resistenza osservata in funzione della portanza. Se riportiamo nel modo consueto la resistenza teorica, quale data dalla formula (2.26), in funzione della portanza corrispondente, otteniamo una parabola che corre parallela alla «polare» misurata attraverso l'intera regione in cui il profilo è buono (si veda la figura 2.27).

Questo procedimento fu ripetuto per ali di diverso allungamento, e si dimostrò che per uno stesso profilo la differenza fra la resistenza misurata e quella teorica, per uno stesso valore del coefficiente di portanza, aveva quasi identicamente lo stesso valore in tutti i casi. Questa parte della resistenza dipende però dalla forma del profilo, e perciò l'abbiamo chiamata «resistenza di profilo». La parte della resistenza ottenuta dalla teoria è chiamata «resistenza di bordo», poiché dipende dai fenomeni ai bordi delle ali. Più giustificata è l'espressione «resistenza indotta», poiché di fatto i fenomeni relativi alle ali sono in alto grado analoghi ai fenomeni di induzione osservati nei conduttori elettrici.

Grazie al fatto che la resistenza di profilo è indipendente dall'allungamento, divenne possibile, dalla conoscenza della resistenza reale per un allungamento, calcolarla per un altro. A tale scopo passiamo dalla formula (2.26) ai coefficienti adimensionali di portanza e resistenza ponendo $\frac{A}{Fq} = c_a$ e $\frac{W}{Fq} = c_w$: otteniamo allora per il coefficiente della resistenza indotta la relazione

$$c_{wi} = \frac{c_a^2 F}{\pi b^2}. \quad (2.30)$$

La resistenza di profilo può allora scriversi $c_{w0} = c_w - c_{wi}$. Se questo coefficiente di resistenza dipende soltanto dal coefficiente di portanza, allora sarebbe evidente — essendo esso la differenza fra i coefficienti misurato e teorico — che, per le polari di due ali diverse aventi $c_{a1} = c_{a2} = c_a$,

$$c_{w1} - \frac{c_a^2 F_1}{\pi b_1^2} = c_{w2} - \frac{c_a^2 F_2}{\pi b_2^2},$$

e pertanto

$$c_{w2} = c_{w1} + \frac{c_a^2}{\pi} \left(\frac{F_2}{b_2^2} - \frac{F_1}{b_1^2} \right). \quad (2.31)$$

In modo analogo può farsi un calcolo per l'angolo d'attacco, se presupponiamo una distribuzione ellittica della portanza. Secondo la nostra ipotesi esiste una stretta connessione fra la portanza dei singoli elementi dell'ala e l'angolo d'attacco «efficace», che è lo stesso dell'angolo d'attacco di un'ala infinitamente lunga. Questo angolo d'attacco efficace, secondo le nostre considerazioni precedenti, è l'angolo d'attacco della corda rispetto alla corrente risultante. Esso è dunque $\alpha' = \alpha - \phi$. Sostituendo $\tan \phi = \frac{w}{V}$ a ϕ , e introducendo di nuovo nell'equazione (2.25) il coefficiente di portanza in luogo della portanza, otteniamo per il confronto di due ali — esprimendo il fatto che l'angolo d'attacco efficace dev'essere lo stesso per due uguali coefficienti di portanza — la relazione

$$\alpha_1 - \frac{c_a}{\pi} \frac{F_1}{b_1^2} = \alpha_2 - \frac{c_a}{\pi} \frac{F_2}{b_2^2},$$

che conduce alla formula di trasformazione

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{c_a}{\pi} \left(\frac{F_2}{b_2^2} - \frac{F_1}{b_1^2} \right). \quad (2.32)$$

Queste formule si sono trovate valide per distribuzioni di portanza che non deviino troppo da quelle ellittiche, benché a rigore si applichino soltanto a queste ultime. Il fatto che il tipo di distribuzione non abbia effetto marcato si fonda sulla considerazione che tanto nel calcolo della resistenza quanto in quello degli angoli d'attacco medi efficaci abbiamo a che fare con risultati *medi*; per il calcolo della resistenza si può inoltre riflettere che nessuna quantità varia molto nell'intorno del proprio minimo. Un'indagine più attenta dell'ala rettangolare ha mostrato che, se l'allungamento non è troppo piccolo, la distribuzione di portanza non devia molto dal tipo ellittico, e che la resistenza teorica, per gli allungamenti usuali, è al più il 5% maggiore che per la distribuzione ellittica. Come esempio di queste formule prenderemo quattro figure dal libro pubblicato dall'Istituto di Gottinga (*Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt*, 1. Lieferung, 1921). La prima e la seconda figura mostrano le polari e la connessione fra coefficiente di portanza e angolo d'incidenza per sette ali di allungamento⁹ da 1 : 7 a 1 : 1. Le ultime due figure danno i risultati del ricalcolo di queste quantità sperimentali a partire dai risultati dell'ala di allungamento 1 : 5. Si vede che, a parte gli allungamenti 1 : 1 e 1 : 2, praticamente non vi sono deviazioni. Il fatto che il quadrato non possa dedursi correttamente dall'ala 1 : 5 non deve sorprendere, poiché la teoria fu sviluppata dal concetto di linea portante, e un quadrato — o un'ala di allungamento 1 : 2 — può ben difficilmente essere approssimato da una linea portante. È invece sorprendente che un allungamento 1 : 3 possa essere sufficientemente approssimato dalla costruzione immaginaria di una linea portante. Le deviazioni del quadrato vanno peraltro nella direzione che ci si aspetterebbe da una distribuzione di portanza estesa lungo la corda. Una teoria quantitativa non è in ogni caso disponibile al momento presente.

⁹L'uso americano è definire l'allungamento come rapporto fra apertura e corda, il che comporterebbe di prendere i reciproci dei rapporti dati nel testo. — *Nota del traduttore americano.*

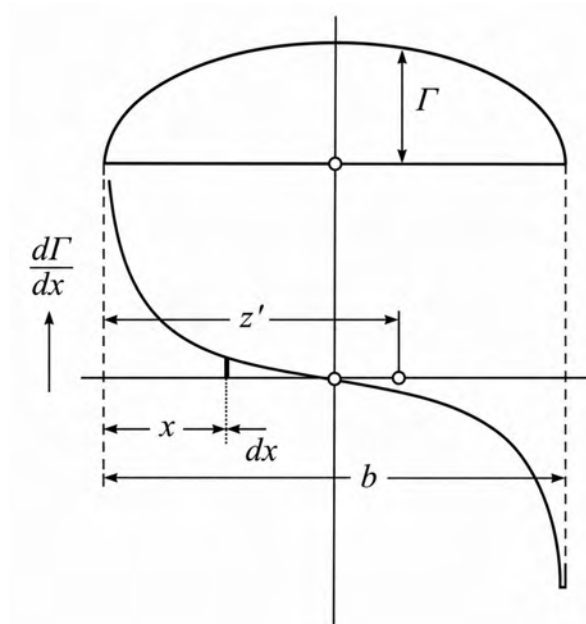


Figura 2.26. Velocità in un punto x' dovuta al vortice che lascia l'ala nel punto x (fig. 44 dell'originale).

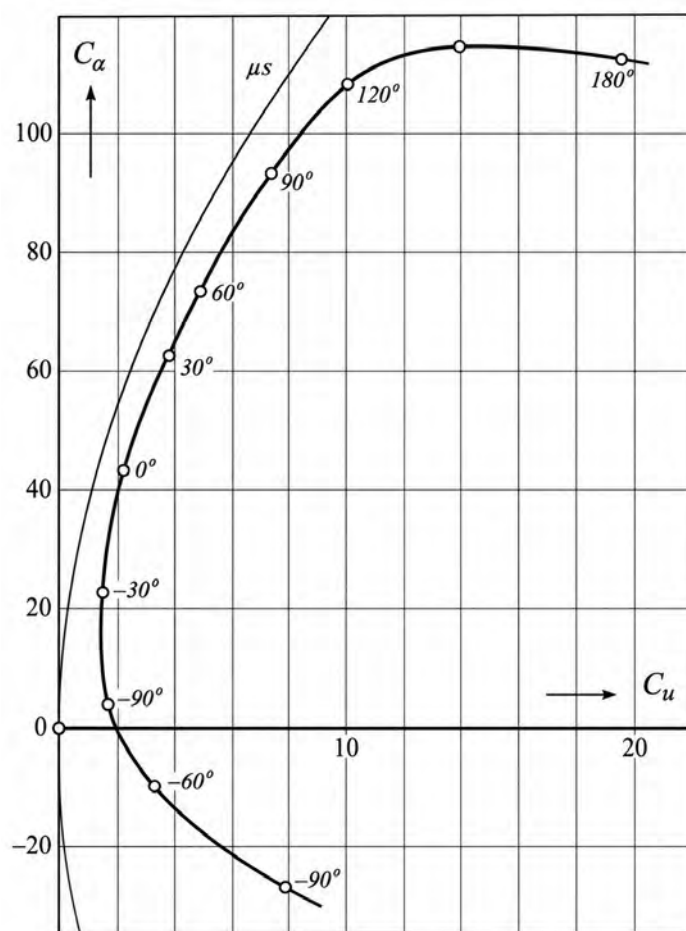


Figura 2.27. Diagramma polare: resistenza teorica (parabola) e resistenza osservata (fig. 45 dell'originale).

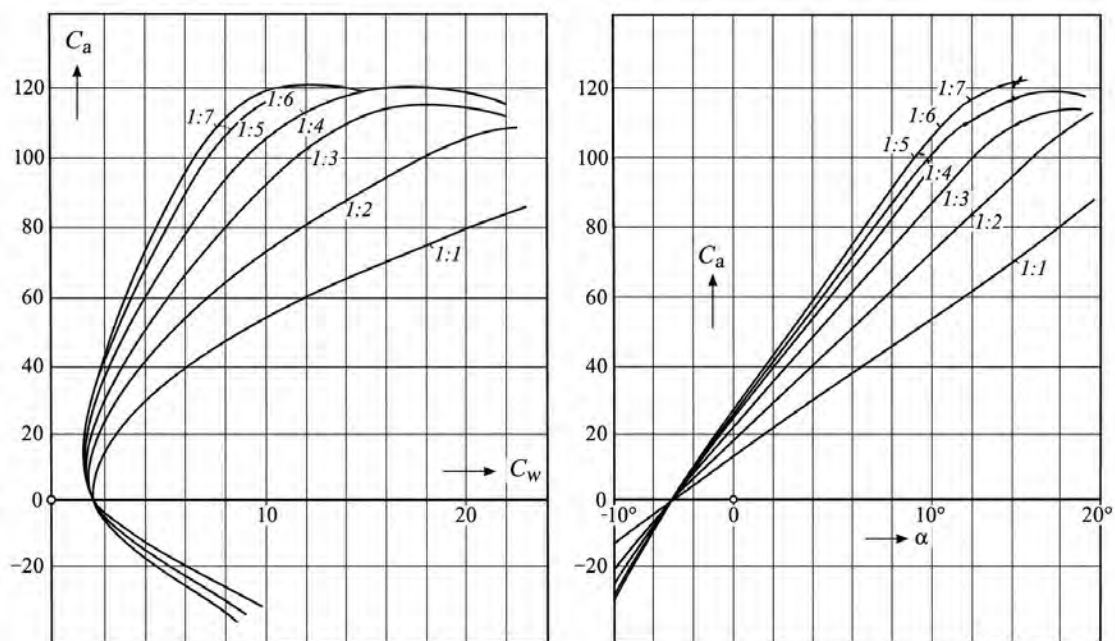


Figura 2.28. Polari e curve di portanza per sette ali di allungamento da 1:7 a 1:1 (figg. 46–47 dell'originale).

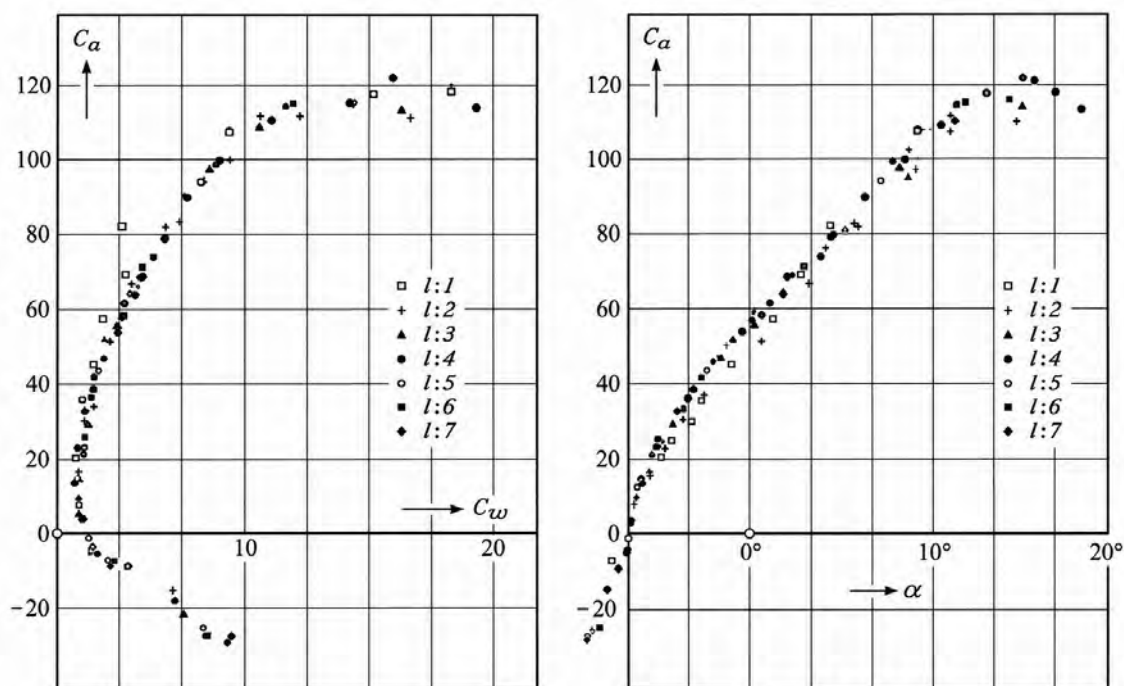


Figura 2.29. Le stesse grandezze ricondotte, con le formule di trasformazione, all'allungamento 1:5 (figg. 48–49 dell'originale): le curve collassano.

Formula chiave

Per l'ala con distribuzione ellittica della portanza:

$$w = \frac{2A}{\pi \rho V b^2}, \quad W_i = \frac{A^2}{\pi q b^2}, \quad c_{wi} = \frac{c_a^2 F}{\pi b^2} \left(= \frac{C_L^2}{\pi AR} \text{ nella notazione del corso} \right).$$

Le formule di trasformazione (2.31) e (2.32) permettono di riportare polare e curva di portanza da un allungamento a un altro.

Nota del curatore

Questo è il cuore del rapporto e del vostro programma: la resistenza indotta con la sua dipendenza da C_L^2 e da $1/AR$, la costanza del *downwash* per ala ellittica, la separazione fra resistenza di profilo e resistenza indotta. Gli esercizi svolti B e B applicano numericamente le formule (2.25), (2.26) e (2.30). Nota di fedeltà: nell'integrale che dà Γ_0 l'originale a stampa reca un radicante privo del quadrato per un refuso tipografico; il risultato $\rho V \Gamma_0 \pi b/4$ è comunque quello corretto dell'area della semiellisse, come verificato numericamente nello script allegato.

2.0.12 Secondo e terzo problema

23. Se non è data la distribuzione di portanza ma, per esempio, la velocità discendente, può usarsi il metodo di trattamento seguito finora sviluppando la velocità discendente in serie di potenze e determinando le costanti della serie data sopra per la portanza a partire dalle costanti di questa serie di potenze, mediante la soluzione di equazioni lineari. Con ciò la distribuzione di portanza e ogni altra cosa risultano note.

Un altro metodo per la soluzione di questo «secondo problema» si otterrà dalla considerazione seguente: le velocità a distanza dietro l'ala — in virtù della connessione tante volte menzionata fra un filetto vorticoso esteso all'infinito in una sola direzione e uno esteso in entrambe — sono il doppio di quelle nella sezione della linea portante, purché non si tenga conto del cambiamento di forma del nastro vorticoso. Abbiamo perciò qui, trascurando tale cambiamento di forma, l'illustrazione di un flusso bidimensionale (piano), per il quale sono assegnate le componenti verticali di velocità nei punti dove l'ala è incontrata. Per il caso semplice di velocità w costante — quale si è trovata valere per la distribuzione ellittica — la forma del flusso che ne nasce è nota da tempo: essa è data in figura 2.35, ed è la stessa già considerata, in altra connessione, nella sezione 2.0.4. L'immagine delle linee di corrente mostra chiaramente la discontinuità di velocità fra i lati superiore e inferiore del nastro vorticoso, indicata dal gradino nelle linee di corrente, e anche il moto vorticoso attorno ai due punti estremi del nastro, corrispondenti alle estremità dell'ala.

Ogni problema di questo tipo può dunque risolversi con i metodi che la teoria del potenziale fornisce per il corrispondente problema di flusso piano. Non possiamo addentrarci ora in queste questioni; in un'occasione successiva ne saranno però discusse alcune relazioni particolari.

Un «terzo problema» consiste nel determinare la distribuzione di portanza per un'ala determinata, di forma data e dato angolo d'attacco. Questo problema, come può immaginarsi, fu il primo che ci ponemmo; la sua soluzione ha richiesto il tempo più lungo, poiché conduce a un'equazione integrale scomoda da maneggiare. Il dott. Betz riuscì nel 1919, dopo sforzi assai grandi, a risolverla per il caso di un'ala rettangolare con profilo e angolo d'attacco ovunque uguali. La via seguita per la soluzione può indicarsi qui brevemente. Partiamo, come prima, dalla relazione

$$\alpha = \alpha' + \phi \cong \alpha' + \frac{w}{V}.$$

Per l'equazione (2.23) w è espressa in termini della circolazione. L'angolo d'attacco efficace α' può esprimersi in termini di Γ , poiché, secondo le ipotesi fatte, la distribuzione di portanza — proporzionale a Γ — dipende direttamente da α' . La relazione fra α' e Γ può assumersi data, con esattezza sufficiente ai nostri scopi, da un'espressione lineare

$$\Gamma = Vt(c_1 \alpha' + c_2) \quad (2.33)$$

nella quale t è la corda (misurata nella direzione del volo). Per l'introduzione del fattore Vt , c_1 e c_2 risultano numeri puri. Il valore numerico di c_1 , che è il più importante, può esprimersi — se $c_{a\infty}$ è il coefficiente di portanza dell'ala infinitamente lunga all'angolo d'attacco α' — con la relazione

$$c_1 = \frac{1}{2} \frac{dc_{a\infty}}{d\alpha'}.$$

Infatti

$$c_{a\infty} = \frac{A}{Fq} = \frac{\rho \Gamma V l}{l t \cdot \frac{1}{2} \rho V^2} = \frac{2\Gamma}{Vt} = 2(c_1 \alpha' + c_2).$$

Per una lastra piana la teoria dimostra che $c_1 = \pi$; per ali curve esso ha un valore lievemente maggiore. Se, secondo quanto precede, esprimiamo α' per mezzo di Γ e w per mezzo di $\frac{d\Gamma}{dx}$, e scriviamo

$$\frac{d\Gamma}{dx} = f(x) \quad \text{e quindi} \quad \Gamma = \int_0^x f(x) dx,$$

otteniamo dopo un semplice calcolo l'equazione integrale

$$\int_0^x f(x) dx + \frac{c_1 t}{4\pi} \int_0^b \frac{f(x') dx'}{x - x'} = Vt (c_1 \alpha + c_2) = \text{cost.} \quad (2.34)$$

Una soluzione di questa equazione può ottenersi sviluppando Γ come nell'equazione (2.27) e sviluppando poi tutte le espressioni in serie di potenze di $\xi = \frac{x}{b/2}$. Per ogni potenza di ξ si ha allora un'equazione lineare fra le quantità Γ_0, Γ_2 , ecc. Si ha dunque un sistema con un numero indefinito di equazioni per un numero infinito di incognite, la cui soluzione in questa forma non è ancora possibile. In queste equazioni l'allungamento dell'ala compare come parametro, ed è chiaro che la soluzione per un piccolo allungamento, cioè per $\frac{b}{t}$ piccolo, è più facile che per uno grande. Il dott. Betz dimostrò che per le incognite può farsi uno sviluppo in potenze di un parametro contenente l'allungamento. I calcoli, contenuti nella dissertazione¹⁰ del dott. Betz (1919), sono molto complicati e non possono riprodursi qui; ma alcuni risultati vanno menzionati. Il parametro di Betz L ha il significato

$$L = \frac{2b}{c_1 t} = \frac{4b}{t} \frac{d\alpha'}{dc_{a\infty}}.$$

Nell'applicazione a superfici investigate in galleria del vento è noto il valore $\frac{dc_a}{d\alpha}$, non $\frac{dc_{a\infty}}{d\alpha'}$. Per questo caso la teoria dà una relazione esprimibile approssimativamente con

$$L \cong 3,85 \frac{b}{t} \frac{d\alpha}{dc_a} - 1,3.$$

Possiamo così ottenere il valore di $\frac{d\alpha'}{dc_{a\infty}}$ dalla connessione menzionata.

La distribuzione della densità di portanza sull'apertura è ellittica per allungamenti molto piccoli e per allungamenti maggiori diventa sempre più uniforme; per ali molto allungate essa si avvicina gradualmente a una distribuzione rettangolare. La figura 2.30 mostra questa variazione della distribuzione in dipendenza da L .

La resistenza dell'ala con la distribuzione rettangolare è naturalmente maggiore che con la distribuzione ellittica — la quale dà il minimo della resistenza — ma le differenze non sono molto grandi; per esempio, per $L = 4$ ($\frac{b}{t} \cong 6$) essa è circa il 5% maggiore di quella della distribuzione ellittica. Una formula di approssimazione, secondo i valori ottenuti da Betz, è

$$W \cong \frac{A^2}{\pi q b^2} (0,99 + 0,015 L).$$

¹⁰Stampata per estratti nel fascicolo 2 dei *Berichte und Abhandlungen der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt*, Monaco, 1920 (R. Oldenbourg).

Essa è applicabile per valori di L fra 1 e 10.

La distribuzione di portanza, velocità discendente e resistenza su un'ala molto allungata è mostrata qualitativamente in figura 2.31. Si vede che la velocità discendente e la resistenza si accumulano gradualmente verso le estremità dell'ala. Ciò dà anche la corretta transizione all'ala infinitamente lunga, per la quale nelle posizioni interne la portanza è costante e velocità discendente e resistenza sono uguali a zero, mentre — come sappiamo — vicino alle estremità queste ultime quantità assumono sempre valori finiti.

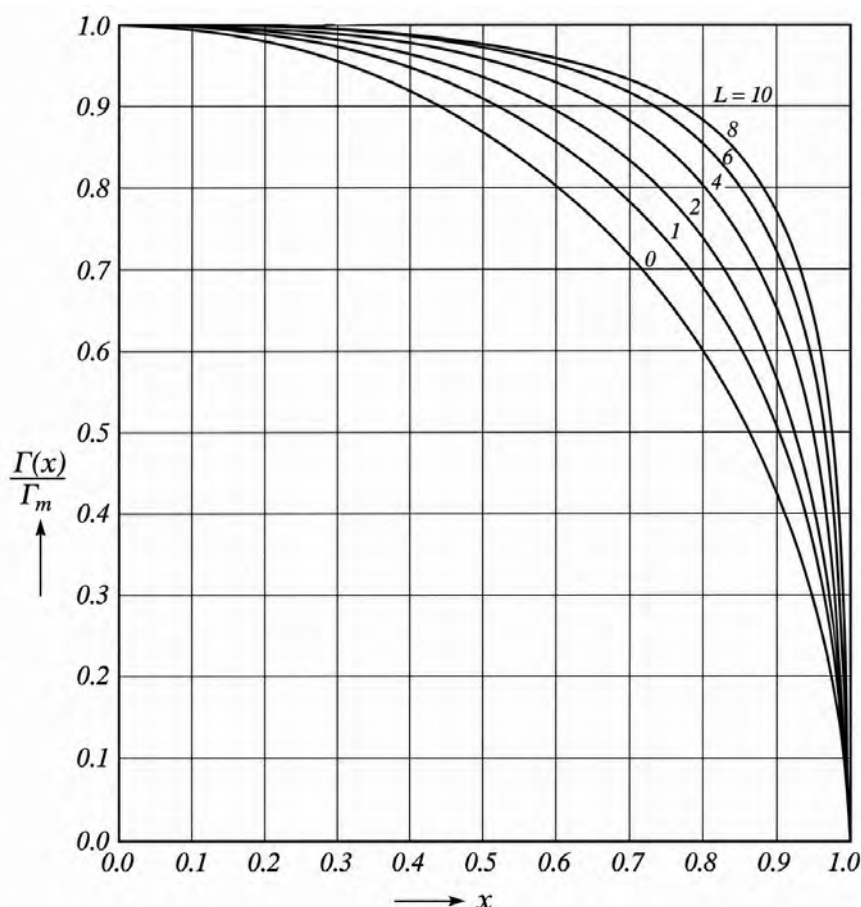


Figura 2.30. Variazione della distribuzione di portanza in funzione di L , il parametro di Betz (fig. 50 dell'originale).

E. Teoria perfezionata degli aeroplani a più ali

2.0.13 Il teorema di reciprocità di Munk

2.4. Le conoscenze ottenute nella teoria del monoplano possono applicarsi anche ai multiplani, e forniscono qui una serie di teoremi notevoli. Ci limiteremo alla teoria del primo ordine, quale designata nella teoria dei monoplani: trascureremo perciò le influenze di v . Inoltre non terremo conto dell'effetto di curvatura — cioè considereremo le singole ali sostituite da «linee portanti». Per amore di semplicità ci limiteremo a multiplani con ali rettilinee e parallele fra loro. La generalizzazione dei teoremi ad ali non parallele, corrispondente alla deduzione data nella «Teoria dell'ala II», sarà poi enunciata senza dimostrazione.

Risolviamo anzitutto il problema introduttivo di calcolare la velocità verticale w prodotta da una linea portante in un punto A che giace fuori della linea portante. All'inizio supponiamo che questo punto giaccia nello stesso «piano trasversale» (piano perpendicolare alla direzione del volo). Per la nostra ipotesi sulla posizione di A , l'azione del vortice trasversale è nulla. Quanto ai vortici longitudinali va ricordato che la velocità

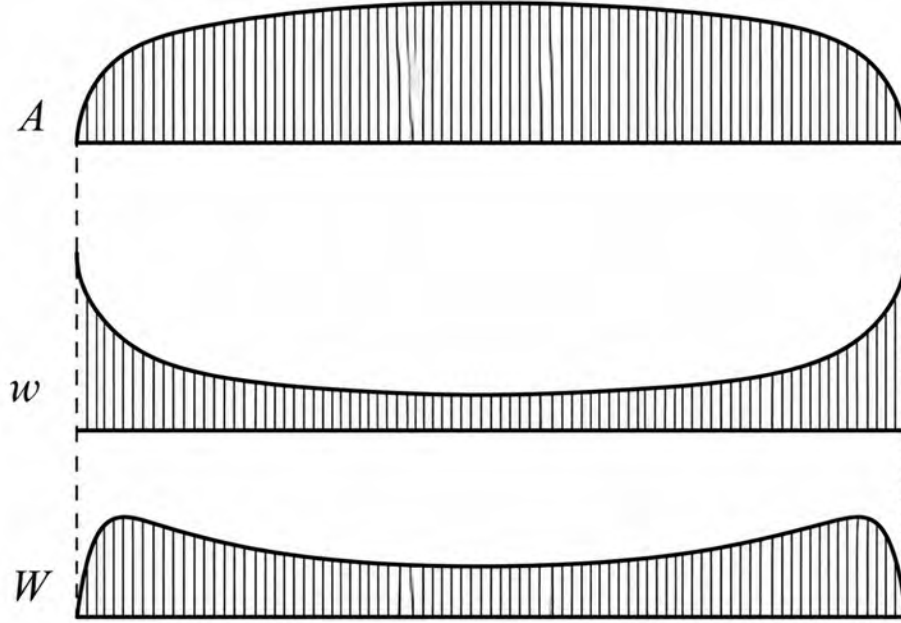


Figura 2.31. Distribuzione di portanza, deflessione verso il basso e resistenza per un'ala lunga (fig. 51 dell'originale).

$\frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma}{dx} \cdot \frac{dx}{a}$ prodotta da un vortice longitudinale d'intensità $\frac{d\Gamma}{dx} dx$ è perpendicolare alla congiungente a (si veda la figura 2.32), e va perciò moltiplicata per $\sin \beta$ per ottenere la componente verticale. Giungiamo dunque alla velocità discendente integrando lungo la linea portante:

$$w = -\frac{1}{4\pi} \int_0^b \frac{d\Gamma}{dx} \left(\frac{\sin \beta}{a} \right) dx. \quad (2.35)$$

Questa relazione può portarsi in altra forma con un'integrazione per parti. Poiché a entrambe le estremità dell'ala $\Gamma = 0$, abbiamo

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_0^b \Gamma \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin \beta}{a} \right) dx.$$

Ma

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin \beta}{a} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{z}{a^2} \right) = \frac{a^2 - 2x^2}{a^4} = \frac{1 - 2 \sin^2 \beta}{a^2} = \frac{\cos 2\beta}{a^2}$$

cosicché abbiamo

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_0^b \Gamma \frac{\cos 2\beta}{a^2} dx. \quad (2.36)$$

Con l'aiuto di questa relazione possiamo scrivere immediatamente il valore della resistenza che nasce per una seconda ala posta sotto l'influenza del disturbo causato dalla prima ala, giacente nello stesso piano trasversale. Chiamiamo w_{12} la velocità di disturbo in un punto A della seconda ala. Secondo i risultati della sezione 2.0.11 la resistenza è allora

$$W_{12} = \rho \int_0^{b_2} \Gamma_2 w_{12} dx$$

ovvero, sostituendo a w_{12} il valore dato dall'equazione (2.36),

$$W_{12} = \frac{\rho}{4\pi} \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \Gamma_1 \Gamma_2 \frac{\cos 2\beta}{a^2} dx_1 dx_2. \quad (2.37)$$

Il doppio integrale, come si vede, è perfettamente simmetrico nelle quantità associate alle due ali 1 e 2. Ne concludiamo che la resistenza che l'ala 1 sperimenta per la presenza dell'ala 2 è dello stesso valore della resistenza qui calcolata: che cioè

$$W_{12} = W_{21}.$$

Nel caso più generale di due linee portanti curve giacenti in un piano trasversale si ottiene una formula che differisce dall'equazione (2.37) soltanto per avere $\cos(\beta_1 + \beta_2)$ al posto di $\cos 2\beta$ — dove β_1 e β_2 sono gli angoli che la congiungente a forma con le normali ai due elementi portanti da essa collegati — e per avere $ds_1 ds_2$ al posto di $dx_1 dx_2$. Anche in questo caso vale dunque la relazione $W_{12} = W_{21}$. Questa relazione mutua, scoperta in altro modo dal mio assistente dott. Munk, è importante in varie applicazioni. Poiché evidentemente non è necessario che gli elementi portanti considerati nel loro insieme appartengano a un'unica superficie, il teorema può enunciarsi così:

Se, di un sistema portante i cui elementi giacciono tutti in un piano trasversale, si scelgono due gruppi qualunque, la porzione di resistenza sperimentata dal gruppo 1 per effetto del campo di velocità del gruppo 2 è esattamente uguale a quella sperimentata dal gruppo 2 per effetto del campo di velocità del gruppo 1.

Possiamo interpretare l'integrazione per parti eseguita sopra dicendo che con essa la velocità w appare costruita con i contributi di ali puramente infinitesime di lunghezza dx e circolazione Γ , mentre in precedenza l'avevamo sempre costruita con le azioni dei singoli vortici $\frac{d\Gamma}{dx} dx$. L'integrando dell'equazione (2.36) concorda infatti con la velocità causata da due linee vorticose di intensità uguali e opposte poste alla distanza dx l'una dall'altra. Il doppio integrale dell'equazione (2.37) può, da questo punto di vista, riguardarsi come la somma delle azioni delle strisce vorticose di tutti gli elementi dx_1 su tutti gli elementi portanti dx_2 .

Potrebbe sollevarsi l'obiezione che le equazioni (2.36) e (2.37) cessino di essere applicabili quando compare il valore $a = 0$, che dà un'espressione della forma $\infty - \infty$. Esse non sono infatti adatte al calcolo della velocità w sull'ala stessa. In questo caso dobbiamo tornare all'equazione (2.35) e prendere il «valore principale» dell'integrale; oppure va calcolato il valore di w_{12} e di W_{12} per una linea portante molto vicina, e il risultato finale si ottiene con il passaggio al limite per linee coincidenti. Come si vede da ciò, le relazioni $W_{12} = W_{21}$ valgono anche per linee portanti coincidenti nello spazio, le quali, del resto, possono avere distribuzioni di portanza arbitrarie.

La resistenza mutua non è necessariamente sempre positiva, come si è già ricordato: per due ali affiancate essa è negativa, poiché in tal caso ciascuna ala si trova in una corrente ascendente causata dall'altra, e la resistenza totale è perciò minore della somma delle resistenze mutue che ciascuna delle ali avrebbe a maggiore distanza. Il comportamento di certi uccelli che in uno spazio di volo comune si dispongono in falange regolare può spiegarsi con riferimento a questo.

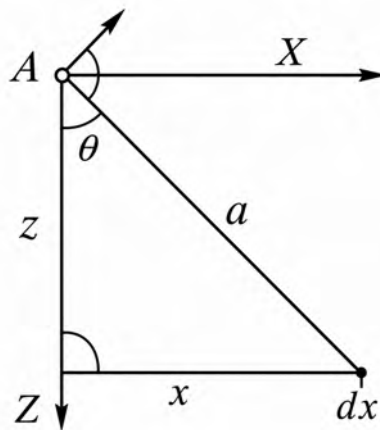


Figura 2.32. Velocità in un punto A fuori della linea portante ma nel piano trasversale, dovuta ai vortici (fig. 52 dell'originale).

2.0.14 Sistemi scalati: il teorema dello scalamento

25. Per poter trattare il caso dei sistemi di ali scalate, il problema successivo è calcolare il campo di velocità dovuto a un elemento portante di lunghezza dx , con la sua coppia di vortici, in un punto A che ora può

giacere fuori del piano trasversale, a distanza y da esso (si veda la figura 2.33). L'origine delle coordinate sarà presa nella proiezione del punto A sul piano trasversale, e l'asse X parallelo alla direzione dell'elemento. Usando le abbreviazioni

$$a^2 = x^2 + z^2, \quad r^2 = a^2 + y^2,$$

la velocità prodotta nel punto A da uno dei due vortici, per la formula (6b), è data da $\frac{\Gamma}{4\pi a} \left(1 + \frac{y}{r}\right)$; la componente nella direzione dell'asse Z , alla quale anche qui ci limitiamo, è allora, ponendo $\sin \beta = \frac{x}{a}$,

$$w_1 = \frac{\Gamma x}{4\pi a^2} \left(1 + \frac{y}{r}\right).$$

La coppia di vortici produce dunque una velocità che può scriversi come differenza degli effetti di due vortici molto vicini:

$$dw_1 = \frac{\partial w_1}{\partial x} dx = \frac{\Gamma dx}{4\pi} \left[\left\{ \frac{a^2 - 2x^2}{a^4} \left(1 + \frac{y}{r}\right) \right\} - \frac{x^2 y}{a^2 r^3} \right].$$

A questa va aggiunto il contributo del vortice trasversale

$$dw_2 = \frac{\Gamma dx \cdot y}{4\pi r^3}.$$

La somma di queste due velocità, introducendo i due angoli definiti nella figura 2.33, vale

$$dw = \frac{\Gamma dx}{4\pi} \left\{ \frac{\cos 2\beta}{a^2} (1 + \sin \alpha) + \frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \beta}{r^2} \right\}. \quad (2.38)$$

Con l'aiuto di questa formula possiamo ora calcolare subito la resistenza sperimentata da un elemento portante situato nel punto A e parallelo al primo, di lunghezza dx_2 e circolazione Γ_2 . Se al primo elemento si dà l'indice 1, questa resistenza è

$$d^2 W_{12} = \frac{\rho \Gamma_1 \Gamma_2 dx_1 dx_2}{4\pi} \left[\left\{ \frac{\cos 2\beta}{a^2} (1 + \sin \alpha) + \frac{\sin \alpha \cos^2 \beta}{r^2} \right\} \right]. \quad (2.39)$$

Come si vede facilmente, la resistenza prodotta sull'elemento portante 1 dall'elemento portante 2 si ottiene introducendo, al posto di α e β , i valori $\alpha + \pi$ e $\beta + \pi$. Perciò essa è

$$d^2 W_{21} = \frac{\rho \Gamma_2 \Gamma_1 dx_2 dx_1}{4\pi} \left[\left\{ \frac{\cos 2\beta}{a^2} (1 - \sin \alpha) - \frac{\sin \alpha \cos^2 \beta}{r^2} \right\} \right]. \quad (53a)$$

Si vede da ciò che le due parti della resistenza sono uguali soltanto se $\alpha = 0$, cioè se i due elementi giacciono nello stesso piano trasversale. Ma in generale la somma $d^2 W_{12} + d^2 W_{21}$ è indipendente da α , dunque indipendente dall'ammontare dello scalamento. La somma delle due resistenze mutue conduce quindi alla stessa formula già derivata per le ali non scalate. Se passiamo di nuovo al caso generale di linee portanti non parallele — nel quale di nuovo ds_1 e ds_2 vanno scritti al posto di dx_1 e dx_2 — otteniamo, come può dimostrarsi eseguendo il calcolo, la relazione

$$W_{12} + W_{21} = \frac{\rho}{2\pi} \iint \Gamma_1 \Gamma_2 ds_1 ds_2 \frac{\cos(\beta_1 + \beta_2)}{a^2}. \quad (2.40)$$

Come si vede, questa somma resta invariata se i due gruppi portanti vengono spostati nella direzione del volo. Poiché la resistenza totale di un sistema portante si compone di tali resistenze mutue, quali calcolate sopra, e delle resistenze proprie delle singole ali — anch'esse invariate per uno spostamento dell'ala nella direzione del volo — può enunciarsi il teorema seguente:

La resistenza totale di un qualunque sistema portante resta invariata se gli elementi portanti vengono spostati nella direzione del volo, senza che si cambino le loro forze portanti.

Questo «teorema dello scalamento» fu dimostrato anch'esso da Munk. Per la corretta comprensione del teorema va detto espressamente che, nello spostamento dei singoli elementi portanti, i loro angoli d'attacco devono essere variati in modo che gli angoli d'attacco efficaci, e quindi le forze portanti, restino inalterati.

Questo teorema, a prima vista sorprendente, può dimostrarsi anche con considerazioni energetiche. Ricordiamo che, vincendo la resistenza, si compie lavoro, e che in un fluido non viscoso — quale ovunque supponiamo — questo lavoro non può svanire. Il suo equivalente è, di fatto, l'energia cinetica che resta indietro nei moti vorticosi nella scia del sistema portante. Questa energia dipende soltanto dal carattere di quei vortici, non dal modo in cui sono stati prodotti. Se trascuriamo, come abbiamo fatto dappertutto, ogni cambiamento di forma del sistema di vortici, allora, di fatto, lo scalamento delle singole parti del sistema portante non può avere alcuna influenza sulla resistenza totale.

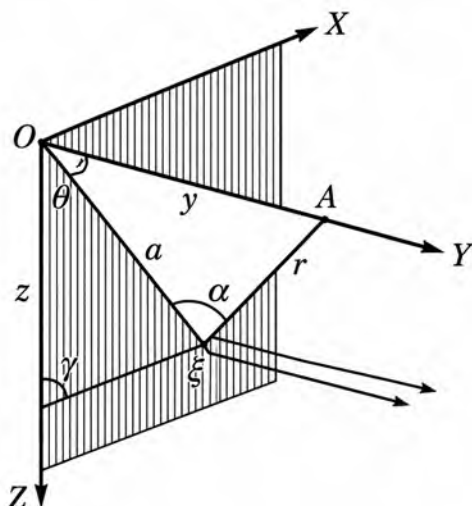


Figura 2.33. Velocità in un punto A fuori del piano trasversale, dovuta al sistema di vortici (fig. 53 dell'originale).

2.0.15 La ripartizione ottima della portanza

26. Per il calcolo pratico della resistenza totale di un multiplano abbiamo dunque quanto segue: la resistenza totale consiste della somma di tutte le resistenze proprie e di tante resistenze mutue quante sono le combinazioni delle ali a due a due. Se è specificata la natura della distribuzione di portanza su tutte le singole ali, le resistenze proprie sono proporzionali al quadrato delle singole portanze; le resistenze mutue al prodotto delle portanze delle due ali in questione. Se i coefficienti di questa espressione quadratica mista sono tutti noti, può risolversi senza difficoltà il problema: per una portanza totale specificata, determinare la distribuzione della portanza sulle singole ali che renda minima la resistenza totale.

Per conoscere questi coefficienti in una certa misura, li ho calcolati per il caso di due linee portanti rettilinee i cui punti medi giacciono nello stesso piano di simmetria, con l'ipotesi che la portanza su ciascuna ala sia distribuita secondo una semiellisse. I risultati sono dati nel mio scritto «La resistenza indotta dei multiplani» nel volume III, parte 7, dei *Technische Berichte*. A tale scopo la velocità w per l'intero intorno di un'ala nel piano trasversale fu prima calcolata con la formula (2.35), e poi gli integrali per le resistenze mutue furono ottenuti per planimetria. Per mostrare l'analogia con l'equazione (2.26) il risultato può esprimersi con la formula

$$W_{12} = \sigma \frac{A_1 A_2}{\pi q b_1 b_2} \quad (2.41)$$

per mezzo della quale il fattore numerico σ può esprimersi in funzione delle due variabili $\frac{b}{\frac{1}{2}(b_1 + b_2)}$ e $\frac{b_2}{b_1}$. Il calcolo diede la tabella seguente.

Tabella 2.1. Tabella I dell'originale — Valori di σ .

$\frac{2b}{b_1 + b_2} =$	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5
$\frac{b_2}{b_1} = 1,0$	1,000	0,780	0,655	0,561	0,485	0,370	0,290	0,230
$\frac{b_2}{b_1} = 0,8$	—	0,690	0,600	0,523	0,459	0,355	0,282	0,225
$\frac{b_2}{b_1} = 0,6$	—	0,540	0,485	0,437	0,394	0,315	0,255	0,210

La curva della funzione σ è data in figura 2.34. Per il caso più importante — cioè due ali di uguale apertura — ho sviluppato una formula di approssimazione, che è

$$\sigma = \frac{1 - 0,66 \frac{b}{b_1}}{1,055 + 3,7 \frac{b}{b_1}}. \quad (2.42)$$

Essa può usarsi da $\frac{b}{b_1} = 0,05$ a $0,5$.

La resistenza indotta totale di un biplano è allora — se b_1 è l'apertura maggiore e se il rapporto $\frac{b_2}{b_1}$ si designa con μ —

$$W = W_{11} + 2 W_{12} + W_{22} = \frac{1}{\pi q b_1^2} (A_1^2 + 2\sigma\mu A_1 A_2 + \mu^2 A_2^2). \quad (2.43)$$

Un semplice calcolo mostra che, per un dato $A_1 + A_2$, questa resistenza è minima per

$$A_2 : A_1 = (\mu - \sigma) : \left(\frac{1}{\mu} - \sigma\right). \quad (2.44)$$

Il valore del minimo risulta

$$W_{\min} = \frac{(A_1 + A_2)^2}{\pi q b_1^2} \cdot \frac{1 - \sigma^2}{1 - 2\sigma\mu + \mu^2}. \quad (2.45)$$

Il primo fattore di questa formula è la resistenza di un monoplano di apertura b_1 e portanza $A_1 + A_2$. Poiché $\sigma < \mu$, il secondo fattore della formula è sempre minore di 1: la resistenza indotta di un biplano è cioè minore di quella di un monoplano che porti lo stesso carico sulla stessa apertura. Per un «tandem» — cioè una disposizione di due ali una dietro l'altra — il teorema dello scalamento mostra l'equivalenza con due ali coincidenti, cioè con un monoplano. Fra i diversi biplani di apertura b_1 e distanza b prescritte, il più favorevole è quello in cui anche la seconda ala ha l'apertura b_1 . Il rapporto più favorevole delle due portanze è allora 1 : 1, e il secondo fattore dell'equazione (2.45) diventa uguale a $\frac{1}{2} (1 + \sigma)$.

Queste affermazioni non devono però essere fraintese: esse si riferiscono soltanto al confronto di sistemi portanti aventi lo stesso valore dell'apertura massima. Naturalmente, per ogni biplano può trovarsi un monoplano di apertura un po' maggiore di quella del biplano che, a parità di portanza totale, abbia la stessa resistenza indotta del biplano.

Nota del curatore

L'esercizio svolto B usa la formula (2.42) e la (2.45) per un biplano di ali uguali. Notate anche l'osservazione sugli uccelli in volo a falange del §2.0.13: la formazione a V riduce la resistenza di ciascun individuo — un risultato oggi confermato da misure sul battito cardiaco degli uccelli migratori.

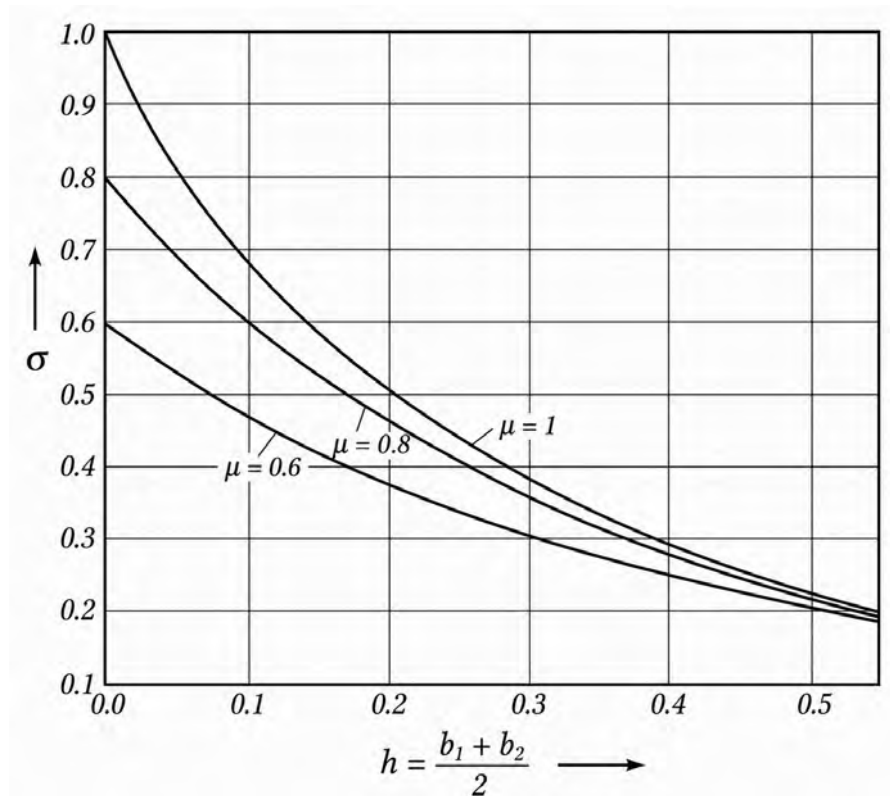


Figura 2.34. Curva della funzione σ per biplani il cui rapporto di aperture $\mu = b_2/b_1$ è variato (fig. 54 dell'originale).

2.0.16 La trasformazione a monoplano equivalente

Quest'ultima osservazione ci conduce ad applicare anche al biplano le formule di riduzione ottenute per i monoplani. Tutto ciò che occorre è sostituire il biplano di apertura b_1 con un monoplano di apertura un po' maggiore $k b_1$, che rispetto alla resistenza — e, nel complesso, anche rispetto all'angolo d'attacco — è equivalente al biplano. Se passiamo di nuovo dalla portanza e dalla resistenza ai loro coefficienti c_a e c_w , la formula che collega le resistenze di due sistemi portanti qualunque 1 e 2 è

$$c_{w1} - c_{w2} = \frac{c_a^2}{\pi} \left(\frac{F_1}{(k_1 b_1)^2} - \frac{F_2}{(k_2 b_2)^2} \right) \quad (2.46)$$

nella quale, come si vede facilmente, il fattore k , per un biplano con la distribuzione di portanza più favorevole, è il reciproco della radice quadrata del secondo fattore della formula (2.45).

Le prove di questa formula con i biplani hanno mostrato che, quando con una forma speciale dell'ala la distribuzione di portanza era resa ellittica, si aveva buon accordo con i calcoli dedotti dagli esperimenti sui monoplani; con i biplani ad ali rettangolari usuali si aveva invece una discrepanza, da attribuire al fatto che la distribuzione di portanza su tali biplani devia troppo da quella ellittica. Possiamo tuttavia conservare la stessa formula di trasformazione se il fattore k viene determinato empiricamente per ciascun sistema portante; esso risulta un po' minore di quanto dia la teoria esposta sopra. Gli esperimenti su questo punto non sono ancora completati, sicché valori più accurati non possono ancora darsi. I primi esperimenti di Gottinga furono elaborati dal dott. Munk — al quale è dovuta quest'ultima idea — nello scritto «Contributo all'aerodinamica delle parti portanti degli aeroplani» nei *Technische Berichte*, volume II, pagina 187.

27. Nella sezione precedente ho trattato il problema di trovare il minimo della resistenza indotta di un multipiano sotto ipotesi ben determinate sulla distribuzione della portanza sulle singole ali. Il problema di minimo in senso stretto è però diverso, cioè:

determinare, per una data vista frontale di un sistema portante, quella distribuzione della portanza su tutti gli elementi portanti che renda minima la resistenza indotta per una portanza totale specificata.

In questo enunciato l'espressione «una data vista frontale» — cioè, detto più esattamente, una data proiezione del sistema portante su un piano perpendicolare alla direzione del volo — è usata per significare che la corda dell'ala è di considerazione secondaria, e non ha bisogno di essere determinata che più tardi, quando si sceglie un opportuno angolo d'attacco.

La soluzione generale di questo problema fu data anch'essa dal dott. Munk. Sarà qui dedotta in maniera più semplice di quella della dissertazione di Munk, dove la soluzione era ottenuta con il calcolo delle variazioni. Per mezzo del teorema dello scalamento menzionato nella sezione 2.0.14, il sistema di ali viene ricondotto al corrispondente sistema non scalato. Per esso, come abbiamo mostrato, vale la relazione $W_{12} = W_{21}$. Introduciamo ora — con l'ipotesi semplificatrice che tutti gli elementi portanti siano paralleli fra loro — una variazione della distribuzione di portanza, aggiungendo in un punto qualunque una portanza δA e togliendo al tempo stesso un ammontare uguale in qualche altro punto, in modo che nel complesso la portanza, che è prescritta, resti invariata. Dobbiamo ora considerare la variazione della resistenza indotta causata da questa variazione. Se alla distribuzione di portanza si sovrappone una forza aerodinamica addizionale δA distribuita su una breve porzione dx , nasce da essa — oltre alla resistenza propria della portanza aggiunta, che però, se sufficientemente piccola, è del secondo ordine — una resistenza mutua, perché da un lato la portanza aggiunta si trova in un flusso avente la velocità discendente w dovuta al sistema portante, e dall'altro il sistema portante si trova nel campo di velocità della portanza aggiunta. La prima di queste due resistenze, come si vede facilmente, è $\delta A \frac{w}{V}$; l'altra parte, per il nostro teorema, ha lo stesso valore: la resistenza totale è dunque il doppio di questa. Quale condizione deve ora soddisfare la somma delle resistenze mutue causate dalla nostra duplice variazione della distribuzione di portanza, perché si abbia il minimo assoluto della resistenza indotta? La risposta è, evidentemente, che avremo il minimo soltanto se nessuna variazione di questo tipo può diminuire ulteriormente la resistenza. La somma delle resistenze indotte non può dunque in nessun caso essere negativa; ma non può nemmeno essere positiva, perché in tal caso, invertendo i segni delle variazioni scelte, potremmo renderla negativa. È perciò ammissibile soltanto il valore zero. Quindi, se w è la velocità verticale nel punto 1 e w_2 quella nel punto 2, abbiamo la relazione

$$\delta A_1 \frac{w_1}{V} + \delta A_2 \frac{w_2}{V} = 0$$

e perciò, essendo $\delta A_1 = -\delta A_2$,

$$w_1 = w_2.$$

Poiché ciò vale per tutti gli elementi portanti, abbiamo ottenuto la risposta: *la distribuzione di portanza che, nel dato sistema di ali e per una portanza totale specificata, causa il minimo di resistenza è quella che conduce alla stessa velocità discendente in tutti gli elementi portanti.* Nei monoplani la distribuzione ellittica della portanza conduce a una velocità discendente w costante: riconosciamo da ciò che la distribuzione ellittica è di fatto quella distribuzione di portanza che causa la minima resistenza per un monoplano.

Il teorema può inoltre estendersi facilmente al caso di elementi portanti non paralleli giacenti in un piano trasversale. Se w_n è la velocità nel piano trasversale perpendicolare all'elemento portante ed ε è l'angolo fra la direzione di w_n e quella della portanza totale data, allora, come può mostrarsi senza difficoltà, $w_n = w_0 \cos \varepsilon$ per tutti gli elementi. (Se $\varepsilon = 0$, e quindi $\cos \varepsilon = 1$, ricompare l'enunciato dato sopra.)

2.0.17 Il flusso piano equivalente e la superficie F'

28. Una via per risolvere il problema di trovare la distribuzione di portanza per una prescritta distribuzione della velocità verticale è già stata indicata nella sezione 2.0.12. Il campo di velocità lasciato nell'aria dalla superficie portante è, approssimativamente, secondo l'osservazione fatta prima, un flusso piano attorno al sistema di vortici prodotto dal sistema portante nel suo moto, e questo sistema di vortici può riguardarsi, in prima approssimazione, come un corpo solido nel fluido. Nel caso del minimo questa figura, secondo i risultati della sezione 2.0.16, si muove come un corpo *rigido*: non soltanto nel caso di elementi portanti paralleli, ma anche nel caso generale, poiché la condizione generale di minimo, $w_n = w_0 \cos \varepsilon$, esprime direttamente che la velocità normale del fluido in un elemento della figura rigida che si muove nella direzione della portanza coincide con la componente normale della velocità w_0 della figura rigida stessa. Il problema è così ridotto a un problema perfettamente definito trattato nell'idrodinamica del moto fluido piano.

Questo flusso piano può porsi in relazione, in maniera specialmente chiara, con la distribuzione di pressione esistente sul sistema di ali. Il sistema di ali, durante il suo moto lungo la traiettoria, imprime a una porzione d'aria dopo l'altra le velocità che abbiamo imparato a conoscere come risultato dei vortici che si staccano dalle ali. Questa trasmissione di velocità è il risultato del propagarsi del campo di pressione del sistema di ali sulle particelle d'aria, una dopo l'altra. Per semplificarci il fenomeno possiamo ora immaginare che queste velocità siano prodotte nello stesso momento, da una sorta di fenomeno impulsivo, sull'intera traiettoria del sistema portante. Per produrre questo impulso è necessario avere una figura solida della forma della regione geometrica spazzata dal sistema portante (cioè della forma delle superfici vorticosi che esso lascia dietro di sé). Se abbiamo a che fare con un sistema di minima resistenza, questa figura si muove come un corpo rigido; altrimenti essa sperimenterebbe anche un cambiamento di forma dovuto all'impulso. La velocità finale w^* della figura coincide con il moto delle superfici vorticosi a grande distanza dal sistema portante, ed è quindi da porre uguale a $2w$. Per un monoplano a distribuzione ellittica la nostra figura è perciò una lastra piana infinitamente lunga di larghezza b .

Per la produzione della velocità durante l'accelerazione impulsiva nasce un aumento di pressione p_1 sotto la lastra (nel caso dei multiplani, sotto ciascuna delle lastre corrispondenti alle singole ali) e al tempo stesso una diminuzione di pressione p_2 sopra la lastra (o le lastre). Possiamo ora confrontare in maniera molto semplice l'azione totale delle differenze di pressione in ogni punto di una lastra durante il tempo dell'impulso con l'azione totale delle differenze di pressione dell'ala, nel suo moto di avanzamento, sul punto del mezzo in questione. Se il moto risultante è lo stesso nei due casi, le differenze di pressione integrate nei tempi corrispondenti devono avere gli stessi valori. Se nel fenomeno impulsivo di durata τ si considera una porzione di fluido di lunghezza l , e se quindi si confronta l'azione della portanza $\frac{dA}{dx} dx$ nel tempo $t = \frac{l}{V}$ necessario a percorrere la lunghezza l , deve valere, per le condizioni su una striscia di larghezza dx , la relazione

$$l dx \int_0^\tau (p_1 - p_2) dt = \frac{dA}{dx} dx \cdot \frac{l}{V}. \quad (2.47)$$

Una formula collegata alle nostre relazioni precedenti si ottiene con una trasformazione del primo membro. Secondo una nota estensione dell'equazione di Bernoulli per il moto accelerato si ha

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\rho v^2}{2} + p = f(t).$$

Per il nostro fenomeno impulsivo la funzione arbitraria del tempo $f(t)$ è una costante, poiché nei punti del fluido lontani dalla lastra la pressione non cambia. Se l'impulso è sufficientemente rapido, durante il breve tempo τ dell'impulso l'accelerazione e le differenze di pressione saranno molto grandi, e perciò il termine $\frac{\rho v^2}{2}$ può trascurarsi rispetto agli altri due, non superando esso valori moderati. Otteniamo quindi la relazione semplificata

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p = \text{cost.} = p_0$$

la quale, se all'inizio tutto è in quiete ($\Phi_0 = 0$), può integrarsi in

$$\rho \Phi = \int_0^\tau (p_0 - p) dt. \quad (2.48)$$

Possiamo perciò scrivere, nell'equazione (2.47), l'espressione $\rho(\Phi_2 - \Phi_1)$ al posto di $\int_0^\tau (p_1 - p_2) dt$. La differenza di potenziale $\Phi_2 - \Phi_1$ che qui compare non è altro — per la connessione fra potenziale e circolazione (si veda la sezione 1.5) — che la circolazione Γ lungo una curva chiusa che passi attorno a un bordo del nastro vorticoso e intersechi il nostro nastro vorticoso nel punto x considerato. Questa circolazione è a sua volta null'altro che la circolazione attorno all'ala nel punto x . Se il fattore $l dx$ si elimina da entrambi i membri dell'equazione (2.47), essa assume, in conseguenza di questa trasformazione, la forma

$$\frac{dA}{dx} = \rho(\Phi_2 - \Phi_1) V = \rho V \Gamma. \quad (2.49)$$

Abbiamo così dimostrato per via del tutto indipendente, come si vede, il teorema di Kutta–Žukovskij per un elemento d'ala, che in precedenza avevamo semplicemente trasferito, senza dimostrazione, dall'ala infinitamente lunga.

Le relazioni dedotte nei paragrafi precedenti permettono, nel caso di w costante, la formazione di teoremi generali per w e W al posto delle formule (2.25) e (2.26). Integrando la (2.49) si ottiene subito la portanza totale

$$A = \rho V \Sigma \int (\Phi_2 - \Phi_1) dx. \quad (2.50)$$

I valori di Φ in questa formula sono proporzionali alla velocità w^* del nastro vorticoso, dipendono cioè da A . Quantità indipendenti da A si ottengono dividendo i potenziali Φ per w^* : otteniamo così i potenziali per una velocità del nastro vorticoso uguale a 1. Il potenziale, essendo l'integrale di linea della velocità, ha le dimensioni di una velocità per una lunghezza; il potenziale ϕ per $w^* = 1$ ha perciò le dimensioni di una lunghezza, e quindi

$$\Sigma \int (\phi_2 - \phi_1) dx$$

è una superficie, che in ciò che segue chiameremo F' : essa dipende soltanto dalle proprietà geometriche della proiezione del sistema di ali su un piano perpendicolare alla direzione del volo — cioè dalla vista frontale del sistema portante — ed evidentemente, per viste frontali geometricamente simili, è proporzionale al quadrato dell'apertura. Introducendo F' nell'equazione (2.50) otteniamo, essendo $\Phi = \phi w^*$,

$$A = \rho V w^* F'. \quad (2.51)$$

Da qui possiamo dedurre immediatamente w^* , e con esso anche la velocità discendente nella posizione del sistema di ali

$$w = \frac{1}{2} w^* = \frac{A}{2\rho V F'}. \quad (2.52)$$

Se questo valore si introduce nella relazione $W = \frac{w}{V} A$, abbiamo

$$W = \frac{A^2}{2\rho V^2 F'} = \frac{A^2}{4q F'}. \quad (2.53)$$

La valutazione secondo il flusso della figura 2.35 dà, se l'apertura dell'ala si pone uguale a b , un potenziale che sulla lastra ha il valore $\sqrt{(b/2)^2 - x^2}$. L'espressione geometrica di questo valore dà un cerchio avente l'apertura b come diametro: perciò $F' = \frac{\pi b^2}{4}$. Con questo valore la formula (2.53) ripassa di fatto nella formula (2.26).

Può inoltre notarsi che al flusso piano qui discusso può sovrapporsi una velocità uniforme, la cui discontinuità di potenziale sulla figura rigida rappresentante il nastro vorticoso genera la superficie F' , senza con ciò cambiare la relazione per F' : la discontinuità di potenziale fra i lati inferiore e superiore, che qui ci interessa, non è infatti alterata dal moto uniforme sovrapposto. Possiamo ora scegliere la velocità del moto uniforme esattamente opposta e uguale alla velocità w^* della figura rigida, e assicurare così la condizione che nel nuovo flusso la figura rigida sia in quiete e sia circondata da un flusso che all'infinito ha la velocità w . Le forze che la figura rigida sperimenta per la produzione di questo moto — e che sono intimamente connesse con la cosiddetta «massa apparente» — sono ciò che abbiamo qui posto in parallelo con la portanza dell'ala.

La superficie F' fornisce inoltre una connessione meccanica molto semplice fra la velocità w da un lato e portanza e resistenza dall'altro. Secondo l'equazione (2.51)

$$A = \rho F' V w^*, \quad W V = A w = \rho F' V \frac{w^{*2}}{2}$$

dove nella seconda equazione si è usata di nuovo la relazione $w^* = 2w$. Ora $\rho F' V$ è la massa d'aria che fluisce al secondo attraverso la sezione F' . Se, per semplificare l'intero problema, si assume una volta per tutte che tutte le particelle d'aria entro la sezione F' sperimentino l'intera deviazione w^* e che tutte quelle esterne restino

del tutto indeviate, allora l'applicazione del teorema della quantità di moto e del teorema dell'energia fornisce esattamente la portanza corretta e il corretto lavoro di resistenza. La portanza infatti è uguale alla massa di fluido deviata al secondo moltiplicata per la velocità verticale ad essa impartita — cioè all'impulso impartito al mezzo. Allo stesso modo il lavoro compiuto al secondo dalla resistenza, WV , è il prodotto della massa che passa al secondo per il semiquadrato della velocità di deflessione, ed è quindi uguale all'energia cinetica lasciata indietro nel mezzo. Questa relazione è certamente la più adatta per presentare i fenomeni della teoria dell'ala in un corso per studenti soltanto lievemente esperti di matematica. Il fatto che per un monoplano la superficie F' risulti il cerchio avente per diametro l'apertura è di quelli che appariranno più plausibili ai profani.

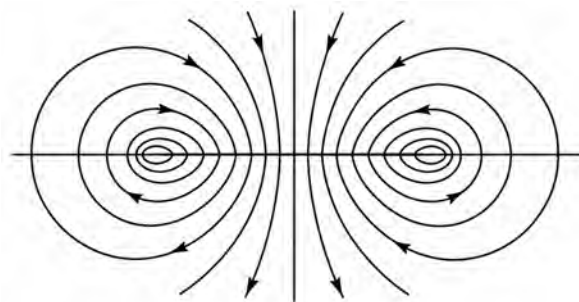


Figura 2.35. Flusso piano nel caso di distribuzione ellittica della portanza sulla linea portante (fig. 49a dell'originale).

Il senso di tutto questo

Il bilancio «di massa e quantità di moto» che chiude il §2.0.17 è il modo più fisico di raccontare la resistenza indotta: l'ala devia verso il basso un tubo d'aria di sezione $F' = \pi b^2/4$, e portanza e resistenza sono rispettivamente l'impulso e l'energia al secondo di quella deviazione. Quando in classe diciamo «la portanza si paga in energia lanciata nella scia», stiamo citando — quasi alla lettera — questa pagina.

2.0.18 Applicazioni: biplano e ala con fessura

29. Della teoria delineata nella sezione precedente — secondo la quale la determinazione della resistenza indotta nel caso della distribuzione di portanza più favorevole è ridotta a un problema di teoria del potenziale — sono già state fatte molteplici applicazioni. In particolare il dott. Grammel e K. Pohlhausen hanno trattato, su mio invito, il caso del biplano costituito da due monoplani rettilinei di uguale apertura e anche, d'altra parte, quello di un monoplano con fessura longitudinale. I calcoli in entrambi i casi si risolvono per mezzo di integrali ellittici. Le formule le ho date nella mia «Teoria dell'ala II». Qui può bastare enunciare il risultato finale pratico, riferito alla grandezza delle superfici F' . Queste superfici si esprimono al meglio, per i biplani, in termini delle superfici corrispondenti del monoplano di uguale apertura. Il rapporto $F' : \frac{\pi}{4}b^2$, come si vede facilmente, è infatti uguale al quadrato del fattore k introdotto nella sezione 2.0.15, del quale l'apertura dev'essere aumentata per avere un monoplano di uguale resistenza indotta. I valori di k^2 per il biplano si ottengono dalla tabella seguente. La distanza fra le ali del biplano è designata con h .

Tabella 2.2. Tabella 2 dell'originale — Valori di $k^2 = F' : \frac{\pi}{4}b^2$ per il biplano.

$h/b =$	0	0,05	0,10	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5	∞
$k^2 =$	1,000	1,156	1,212	1,289	1,352	1,461	1,550	1,626	2,000

I valori dati nella tabella possono esprimersi con la formula di approssimazione

$$k^2 \cong \frac{1,027 + 3,84 h/b}{1 + 1,63 h/b}. \quad (2.54)$$

Nel caso del monoplano con fessura, un'ala di confronto adatta si ottiene spingendo le due metà del monoplano l'una verso l'altra finché la fessura è chiusa. Se b è l'apertura originaria e d la larghezza della fessura, questo monoplano ha evidentemente l'apertura $b - d$. Formeremo perciò il rapporto $F' : \frac{\pi}{4}(b - d)^2$ e lo designeremo di nuovo con k^2 . I calcoli hanno dato i valori seguenti.

Tabella 2.3. Tabella 3 dell'originale — Valori di $k^2 = F' : \frac{\pi}{4}(b - d)^2$ per il monoplano con fessura.

$\frac{d}{b} =$	0,000	0,001	0,010	0,0316	0,100	0,250	0,500	1,000
$k^2 =$	1,000	0,782	0,678	0,6200	0,568	0,528	0,506	0,500

Si vede che anche fessure molto strette producono un aumento importante della resistenza indotta. Per un'apertura molto larga k^2 cade a un mezzo, come può dedursi facilmente dal fatto che allora, invece di un monoplano, abbiamo due monopiani di apertura metà. I valori dati nella tabella possono esprimersi con la formula di approssimazione

$$k^2 = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1 + 0,35 (\log_{10} b/d)^2}}. \quad (2.55)$$

Le figure 55–57 mostrano, a sinistra, il flusso piano di w^* e, a destra, le superfici F' , per un monoplano, un biplano e un monoplano con fessura.

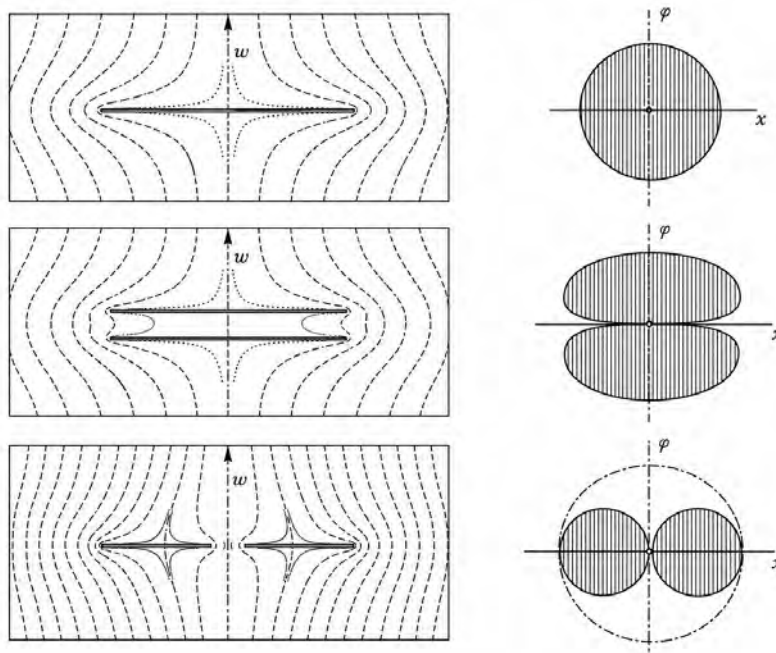


Figura 2.36. A sinistra: flusso dietro un monoplano, un biplano e un monoplano con fessura, rispetto a un osservatore che scende con la velocità w^* del sistema di vortici. A destra: le corrispondenti superfici F' (figg. 55–57 dell'originale).

F. Profili alari in una galleria o in un getto libero

2.0.19 Le condizioni al contorno

30. Per trarre conclusioni dai risultati sperimentali ottenuti in una galleria delimitata da pareti solide, oppure in un getto libero uscente da un ugello, è molto utile conoscere l'influenza delle pareti vicine e dei contorni del getto sui fenomeni al profilo. Desideriamo infatti conoscere il comportamento del profilo in uno spazio

d'aria infinitamente esteso in tutte le direzioni; nasce perciò il problema di introdurre un metodo per passare, mediante calcolo, dal caso che si realizza negli esperimenti a quello dello spazio d'aria illimitato. A questo scopo enunceremo anzitutto con chiarezza le condizioni al contorno che sussistono su pareti solide parallele alla direzione del vento e sul contorno libero di un getto. Sulle pareti solide la componente di velocità normale alla parete, w_n , deve annullarsi; su un contorno libero di getto, invece, la pressione dev'essere posta uguale a quella dello strato d'aria quiescente circostante, ed è quindi costante. Possiamo trasformare queste ultime relazioni come segue, restando entro la nostra teoria del primo ordine. Per il teorema di Bernoulli, se V è la velocità del vento indisturbato e u, v, w sono le velocità addizionali,

$$p + \frac{\rho}{2} [u^2 + (V + v)^2 + w^2] = p_0 + \frac{\rho}{2} V^2$$

ovvero, essendo $p = p_0$,

$$u^2 + v^2 + w^2 + 2Vv = 0.$$

Se trascuriamo i quadrati delle velocità di disturbo come piccoli del secondo ordine, abbiamo come condizione iniziale approssimata per il getto libero $v = 0$. Facciamo un passo ulteriore sulla via indicata dalla teoria di approssimazione del primo ordine prescrivendo il valore $v = 0$ non sul contorno reale del getto, ma su quel cilindro che è dato dalla superficie del getto indeviato. Con ciò la condizione al contorno per il getto libero diventa, formalmente, molto simile a quella per le pareti solide.

I due problemi possono ora risolversi nel modo seguente. Consideriamo anzitutto il campo di velocità per lo spazio d'aria illimitato, secondo l'esposizione data in precedenza. Questo campo presenta, tanto nel caso della galleria quanto in quello del getto libero, contraddizioni con le nostre condizioni al contorno sulle pareti o sul contorno del getto. Dobbiamo sovrapporre un campo di velocità che nell'interno della regione considerata sia privo di singolarità e che sui contorni abbia velocità opposte a quelle componenti di velocità il cui annullarsi è prescritto dalla condizione al contorno. Si vede facilmente che, con la sovrapposizione di questo secondo campo di velocità al primo, le condizioni al contorno sono soddisfatte esattamente. L'influenza di questo secondo campo sul profilo è ora esattamente l'influenza che stiamo cercando, e che possiamo calcolare dai risultati della teoria dei profili non appena questo secondo campo è noto.

Il campo di velocità addizionale corrisponde a un moto puramente potenziale; abbiamo dunque il problema di determinarne il potenziale Φ . Nel caso di pareti solide siamo così condotti al problema di trovare il potenziale per una regione data (l'interno della galleria) quando al contorno della regione è assegnata la componente normale w_n del flusso: è questo il cosiddetto «secondo problema al contorno» della teoria del potenziale. Il problema corrispondente per il getto conduce invece, come vedremo subito, al «primo problema al contorno», nel quale al contorno sono prescritti i valori del potenziale stesso. Secondo quanto detto, la nostra regione è un cilindro le cui generatrici sono parallele alla velocità V , dunque parallele all'asse Y , e per ogni punto del contorno è prescritta la relazione $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\bar{v}$ (i trattini indicano valori al contorno). Integrando questa relazione lungo ciascuna generatrice si ottiene

$$\bar{\Phi}(y) = - \int_{-\infty}^y \bar{v} \, dy.$$

Se risaliamo sufficientemente a monte, ogni influenza del profilo svanisce: perciò per $y = -\infty$ è $\Phi = 0$, e quindi $y = -\infty$ è preso come limite inferiore dell'integrale. Con ciò otteniamo dunque i valori al contorno del potenziale $\bar{\Phi}(y)$.

Il calcolo completo del potenziale aggiunto Φ per l'intero interno della galleria o del getto è piuttosto difficile. Se però ci occupiamo soltanto del nostro problema principale — determinare le correzioni da applicare ai risultati sperimentali — possiamo di nuovo assumere che le componenti di velocità perpendicolari all'asse della galleria, nel piano del profilo, siano la metà di quelle a grande distanza dietro di esso. Questa considerazione — che procede dal confronto fra un filetto vorticoso esteso all'infinito in una sola direzione e uno esteso in entrambe — vale qui esattamente come nei casi discussi in precedenza. Possiamo perciò passare, come prima, dal problema spaziale a uno piano, se calcoliamo i fenomeni a grande distanza dietro il profilo. Le nostre condizioni al contorno per il problema piano sono: per la galleria $\bar{w}_n = 0$, per il getto libero $\bar{\Phi} = \text{cost.}$ L'ultima condizione può interpretarsi in modo particolarmente comodo se ci si serve del metodo di trattamento della

sezione 2.0.17: poiché per la fine del fenomeno impulsivo $\Phi = \int_0^\tau (p_0 - p) dt$, la condizione $\bar{\Phi} = \text{cost.}$ significa semplicemente $\bar{p} = \text{cost.}$, che era appunto la condizione al contorno originaria per il getto libero.

2.0.20 Le formule di correzione

31. Le condizioni enunciate nella sezione precedente possono soddisfarsi nel modo più facile per un getto, o una galleria, a sezione circolare. In questo caso il moto aggiunto si ottiene molto semplicemente assumendo, per ogni vortice che si stacca, un vortice ugualmente intenso esterno al cerchio, nel punto esterno che corrisponde a quello interno secondo i raggi reciproci. Se il verso di rotazione del vortice esterno si prende uguale a quello del vortice interno, ne segue che sui punti del cerchio è soddisfatta la condizione al contorno del getto libero; se si prendono versi di rotazione opposti, è soddisfatta la condizione della galleria. Ciò può esprimersi dicendo che al profilo se ne associa un altro, ottenuto per riflessione secondo i raggi reciproci, la cui circolazione nei punti corrispondenti ha lo stesso valore assoluto di quella del profilo reale: per il getto con lo stesso segno, per la galleria con segno opposto.

Il calcolo esatto è stato eseguito per un monoplano rettilineo al centro del getto, assumendo la portanza distribuita secondo una semiellisse. Se b è l'apertura del monoplano e D il diametro del getto, la velocità di disturbo w' causata dal contorno del getto alla distanza x dal centro del getto è

$$w' = \frac{A}{\pi D^2 \rho V} \left(1 + \frac{3}{4} \xi^2 + \frac{5}{8} \xi^4 + \frac{35}{128} \xi^6 + \text{ecc.} \right) \quad (2.56)$$

nella quale $\xi = 2xb/D^2$. La resistenza addizionale calcolata da questa velocità secondo l'equazione (2.24) risulta

$$W' = \frac{A^2}{\pi D^2 \rho V^2} \left[1 + \frac{3}{16} \left(\frac{b}{D} \right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{b}{D} \right)^8 + \dots \right]. \quad (2.57)$$

Un calcolo analogo per una distribuzione uniforme della portanza diede per il primo termine della formula della resistenza lo stesso valore dell'equazione (2.57). Appare che gli altri termini della serie hanno poca importanza per i rapporti usuali, sicché possiamo limitarci al primo termine. Un trattamento approssimato mostra inoltre che qualunque piccolo sistema portante al centro del getto circolare conduce alla stessa espressione. Possiamo perciò scrivere, per la resistenza indotta totale del sistema di ali in un getto di sezione F_0 , se si introduce di nuovo la superficie F' della sezione 2.0.17,

$$W = \frac{A^2}{4q} \left(\frac{1}{F'} + \frac{1}{2F_0} \right). \quad (2.58)$$

Per una galleria a sezione circolare si trova lo stesso effetto di disturbo, ma con il segno opposto; abbiamo perciò la formula di approssimazione per la resistenza

$$W = \frac{A^2}{4q} \left(\frac{1}{F'} - \frac{1}{2F_0} \right). \quad (72a)$$

La correzione dovuta alla considerazione della sezione finita del getto non è piccola per i rapporti ordinariamente usati: per $\frac{b}{D} = \frac{1}{2}$ essa è già un ottavo della resistenza indotta. La formula (2.57) dà 0,1262 invece di 0,125; la formula corrispondente per la distribuzione uniforme dà 0,127. Si vede dunque che le differenze non sono grandi e che la formula di approssimazione (2.58) è soddisfacente per la maggior parte dei casi.

Per una galleria a sezione rettangolare i calcoli dovrebbero condursi in modo che il profilo risulti specchiato in tutte le pareti un numero infinito di volte, come una scacchiera. L'ulteriore sviluppo del calcolo conduce a funzioni ellittiche, e non è stato ancora portato a termine. Si può assumere, tuttavia, che per una galleria a sezione quadrata l'influenza delle pareti sia all'incirca della stessa grandezza che per il cerchio di uguale area.

Nota del curatore

Le formule (2.58) e (72a) sono le *correzioni di bloccaggio del contorno* che ogni sperimentatore applica ancora oggi: getto libero (tipo Gottinga, tipo il nostro piccolo impianto didattico) $\Rightarrow$ resistenza misurata *maggiore*; galleria a camera chiusa $\Rightarrow$ resistenza misurata *minore*. L'esercizio svolto B le applica a un caso realistico.

G. Applicazione della teoria dei profili all'elica

2.0.21 I teoremi di Betz sull'elica

32. Le idee fondamentali della teoria dei profili possono applicarsi passo passo all'elica. Per gli elementi delle pale vale la formula di Kutta-Žukovskij: la forza aerodinamica è perpendicolare alla velocità c dell'elemento rispetto all'aria e vale, per unità di lunghezza della pala, $\rho \Gamma c$. In corrispondenza con quanto precede, sulla pala nasceranno vortici con un'intensità per unità di lunghezza pari a $\frac{d\Gamma}{dx}$. Se vogliamo costruire di nuovo una teoria del primo ordine — se cioè conveniamo di considerare piccole le forze aerodinamiche e le velocità da esse prodotte — allora anche il moto proprio dei vortici sarà piccolo e potrà, in prima approssimazione, essere di nuovo trascurato. I vortici hanno allora la forma di linee elicoidali e formano nastri vorticosi che — se per semplicità assumiamo pale rettilinee radiali — hanno la forma di ordinarie superfici elicoidali.

Il calcolo del campo di velocità di un vortice elicoidale è notevolmente più complicato di quello di un vortice rettilineo, e conduce a funzioni finora non studiate in dettaglio. Nonostante ciò è possibile, come il dott. Betz ha mostrato, dimostrare una serie di teoremi generali molto simili a quelli di Munk per i multiplani. Poiché la velocità c non è la stessa nei diversi elementi di pala, dobbiamo parlare di «lavoro perduto» là dove Munk parla di resistenza. Il lavoro applicato per il moto dell'elica si compone di due parti: lavoro utile + lavoro perduto. Quest'ultimo, nel nostro caso ideale in cui l'attrito è escluso, si trasforma completamente in energia cinetica dell'aria. L'energia cinetica sta di nuovo in stretta connessione con il sistema di vortici prodotto dall'elica. Betz dimostrò, fra gli altri, i teoremi seguenti.

(1) Se due elementi di una pala d'elica giacciono sullo stesso raggio alle distanze x e ξ dall'asse, il lavoro perduto nel punto ξ per la velocità di disturbo causata dalla forza aerodinamica nel punto x è uguale al lavoro perduto nel punto x per la velocità di disturbo causata dalla forza aerodinamica nel punto ξ .

(2) Questo teorema dev'essere alquanto modificato per due elementi che non giacciono sullo stesso raggio. Esso suona: il lavoro perduto nel punto ξ per la velocità di disturbo causata dalla forza aerodinamica nel punto x è dello stesso valore del lavoro che sarebbe perduto nel punto x se il vortice elicoidale proveniente dall'elemento in ξ uscisse in avanti, nel prolungamento del vortice reale, invece di andare all'indietro.¹¹

(3) Quest'ultimo teorema conduce subito alla relazione seguente per la somma dei due lavori perduti: il lavoro totale perduto per l'azione mutua delle forze aerodinamiche di due elementi di pala nei punti x e ξ è lo stesso del lavoro che sarebbe perduto in uno solo dei due punti se il vortice elicoidale proveniente dall'altro punto si estendesse all'infinito tanto in avanti quanto all'indietro.¹²

Si vede facilmente che questo teorema è perfettamente analogo al teorema dello scalamento della sezione 2.0.14: se infatti il vortice dell'elemento inducente si estende in entrambe le direzioni, la posizione dell'elemento stesso sulla propria striscia vorticosa è irrilevante per il campo di velocità prodotto. Vale dunque anche per le eliche che nulla cambia nella perdita totale di energia se elementi di pala vengono spostati in qualunque modo, senza cambiamento delle loro forze aerodinamiche, lungo le linee di corrente relative che passano per essi (cioè, in questo caso, lungo linee elicoidali). Ciò si connette di nuovo, naturalmente, con il fatto che l'ammontare totale della perdita di energia dipende soltanto dalla distribuzione finale dei sistemi di vortici, non dalla posizione relativa dei luoghi dove i singoli vortici nascono.

¹¹In questo senso il verso del vortice trasversale dev'essere invertito.

¹²Il vortice trasversale in questo caso si elide completamente nella determinazione del campo di velocità, poiché vi compare due volte con versi di circolazione opposti.

Il teorema n. 3 ci sarà utile anche in ciò che segue. Esso può rendersi più chiaro con la considerazione seguente. Il campo del nastro vorticoso di un elemento portante si spegne molto rapidamente davanti all'elemento, ma nella parte posteriore si estende su tutta la lunghezza del cammino percorso. Se si forma la somma delle due perdite mutue di lavoro di due elementi nei punti x e ξ , possiamo, grazie al teorema dello scalamento, spostare uno dei due elementi lungo la sua linea elicoidale tanto indietro che il suo campo di velocità non sia più apprezzabile nella posizione dell'altro elemento non spostato. Al tempo stesso, però, l'influenza di quest'ultimo sul primo è accresciuta, poiché il suo nastro vorticoso, visto dalla nuova posizione del primo elemento, si estende tanto in avanti quanto all'indietro. La somma delle due perdite mutue di lavoro si riduce in questo modo alla perdita che il campo di velocità dell'elemento anteriore produce su quello spostato.¹³

(4) Il più importante dei teoremi di Betz, dal punto di vista pratico, fornisce la completa analogia con il teorema di Munk sul sistema portante di minima resistenza e, in perfetta corrispondenza con gli enunciati delle sezioni 2.0.16 e 2.0.17, può esprimersi così: *il flusso dietro un'elica avente la minima perdita di energia è come se le superfici elicoidali spazzate dalle pale dell'elica fossero solidificate in una figura solida e questa fosse spostata all'indietro nel fluido non viscoso con una piccola velocità assegnata*. La differenza di potenziale fra la faccia anteriore e quella posteriore di una superficie elicoidale in uno stesso punto fornisce allora di nuovo la circolazione Γ del punto corrispondente della pala.

Diamo una breve dimostrazione del teorema 4. A tale scopo vanno dedotte anzitutto le equazioni principali dell'azione di un'elica. L'elica si immagina spostata con la velocità v rispetto all'aria e in rotazione, al tempo stesso, con la velocità angolare ω . Un elemento di pala alla distanza x dall'asse ha allora, rispetto all'aria — che nella teoria del primo ordine può assumersi in quiete — la velocità c , di componenti v e $x\omega$ (si veda la figura 2.37).

Se non si producessero vortici, allora, con l'ipotesi di fluido non viscoso, nascerebbe una forza aerodinamica dP che, secondo i teoremi di Kutta-Žukovskij, sarebbe perpendicolare alla velocità c e avrebbe il valore, per un elemento di pala di lunghezza dx ,

$$dP = \rho \Gamma c \, dx. \quad (2.59)$$

La forza dP si scompone in due componenti, delle quali quella nella direzione di v ci interessa in modo particolare, poiché è applicata all'avanzamento. Questa componente è

$$dS = dP \cdot \cos \varepsilon = \rho \Gamma x \omega \, dx. \quad (2.60)$$

La spinta totale, se le pale sono n , è allora

$$S = \rho \omega \sum_1^n \int_0^r \Gamma x \, dx. \quad (2.61)$$

L'altra componente

$$dT = dP \sin \varepsilon = \rho \Gamma v \, dx \quad (2.62)$$

fornisce un contributo di coppia al momento di rotazione. Si vede subito che $dS \cdot v = dT \cdot x\omega$: cioè il lavoro utile della spinta è uguale al lavoro compiuto dalla coppia finora considerata. Ciò dipende immediatamente dalla nostra ipotesi che la forza dP sia perpendicolare alla velocità c . Ma le pale dell'elica producono realmente un sistema di vortici, e dobbiamo chiederci quale sia la reazione di questo sistema di vortici sui fenomeni dell'elica. Assumeremo, esattamente come nella teoria dei profili, di orientare il profilo della pala in modo che le forze portanti da noi desiderate entrino effettivamente in gioco. Poiché qui c'interessa soltanto la perdita di lavoro causata dal sistema di vortici, abbiamo a che fare soltanto con le componenti di resistenza causate dal sistema di vortici. Ciò dipende, esattamente come prima, dalla componente di velocità perpendicolare alla velocità di moto dell'elemento, che in questo caso è c . La designeremo di nuovo con w . La componente di velocità aggiunta w fornisce una resistenza nella direzione del moto pari a

$$dQ = dP \frac{w}{c} = \rho \Gamma w \, dx. \quad (2.63)$$

¹³Questo procedimento di pensiero può applicarsi, naturalmente, allo stesso modo ai profili alari, e fornisce una comoda deduzione per la somma delle resistenze $W_{12} + W_{21}$.

La perdita di lavoro al secondo è dunque

$$dQ \cdot c = \rho \Gamma dx \cdot w \cdot c (= dP \cdot w).$$

Se ora, secondo la figura 2.37, poniamo $c = v / \sin \varepsilon$, il nostro problema è rendere minima la perdita totale di lavoro

$$L = \rho v \sum_1^n \int_0^r \frac{\Gamma w dx}{\sin \varepsilon}. \quad (2.64)$$

La variazione di questa quantità dev'essere dunque posta uguale a zero. Procederemo a tale scopo in modo simile a quello con cui fu dedotto il teorema di Munk nella sezione 2.0.16. Cambieremo di piccole quantità la circolazione in due punti, che possono estendersi da x_1 a $x_1 + dx_1$ e da x_2 a $x_2 + dx_2$, in maniera tale che la spinta totale resti invariata. Secondo l'equazione (2.61) dobbiamo porre

$$\delta \Gamma_1 \cdot x_1 dx_1 + \delta \Gamma_2 \cdot x_2 dx_2 = 0. \quad (2.65)$$

Esattamente come prima, la condizione di minimo si ottiene se la perdita di energia dovuta alla circolazione aggiunta resta invariata. Per calcolare la perdita facciamo uso del teorema n. 3 e assumiamo che le forze aerodinamiche aggiunte siano portate in azione molto indietro rispetto all'elica, cosicché la perdita sia semplicemente il prodotto della forza aerodinamica aggiunta per la velocità w^* che nasce dai vortici dell'elica, e quindi per il primo elemento sia uguale a $\rho v \delta \Gamma_1 \frac{w_1^*}{\sin \varepsilon_1} dx_1$. Omettendo il fattore costante, otteniamo come condizione di minimo

$$\delta \Gamma_1 \frac{w_1^*}{\sin \varepsilon_1} dx_1 + \delta \Gamma_2 \frac{w_2^*}{\sin \varepsilon_2} dx_2 = 0$$

dalla quale si deriva, facendo uso dell'equazione (2.65),

$$\frac{w_1^*}{x_1 \sin \varepsilon_1} = \frac{w_2^*}{x_2 \sin \varepsilon_2} = \text{cost.} \quad (2.66)$$

Dobbiamo confrontare questa condizione con quella ottenuta per le componenti di velocità normali a una superficie elicoidale rigida, quando questa superficie è mossa all'indietro con la velocità w' . Abbiamo allora (si veda la figura 2.38):

$$w_n = w' \cos \varepsilon.$$

Ma su una superficie elicoidale il passo h è legato all'angolo di passo ε e al raggio x dalla relazione $h = 2\pi x \tan \varepsilon$. Moltiplicando quest'ultima equazione per w_n e risolvendo, otteniamo

$$w_n = \frac{2\pi w' x \sin \varepsilon}{h}$$

e quindi

$$\frac{w_n}{x \sin \varepsilon} = \text{cost.} \quad (2.67)$$

Confrontando la (2.67) con la (2.66) si vede che, con una scelta opportuna di w' , il valore di w_n può sempre farsi coincidere con quello di w^* : il che dimostra il teorema di Betz.

2.0.22 La distribuzione ottima di circolazione sull'elica

33. Per conoscere più esattamente la natura della distribuzione di circolazione che cerchiamo, procederemo come se il campo di velocità a grande distanza dall'elica fosse prodotto imprimendo impulsivamente la velocità w' , nella direzione dell'asse, alla figura rigida composta dalle superfici elicoidali. In maniera puramente qualitativa si può vedere che, con qualunque sistema di superfici elicoidali di piccolo passo, l'aria nell'interno del sistema viene effettivamente accelerata all'indietro, con la comparsa, naturalmente, di componenti tangenziali di velocità la cui intensità è funzione dell'angolo ε ed è massima per $\varepsilon = 45^\circ$. Sull'asse stesso non si ha né accelerazione assiale né tangenziale. Meno semplici sono le condizioni vicino al contorno esterno delle superfici elicoidali, dove si ha un flusso attorno ai bordi delle superfici.

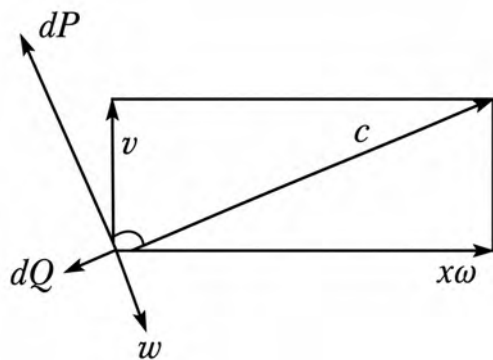


Figura 2.37. Campo di velocità vicino a un elemento di pala di elica (fig. 58 dell'originale).

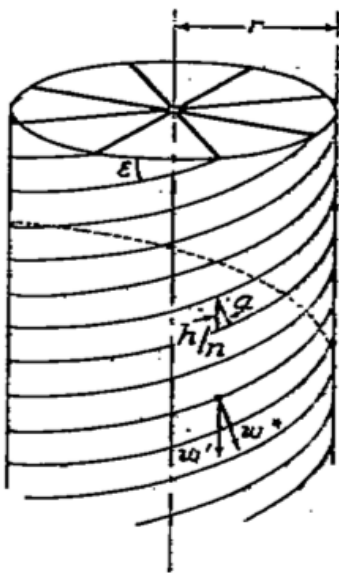


Figura 2.38. Sistema di vortici idealizzato di un'elica (fig. 59 dell'originale).

Per ottenere un'affermazione quantitativa penseremo per semplicità, dapprima, a un'elica con un gran numero di pale. La nostra figura rigida consiste allora di un gran numero di superfici elicoidali ravvicinate, e perciò l'aria è condotta con difficoltà nell'interno. Quando avviene l'impulso, essa sfugge nella direzione delle normali alle superfici elicoidali. Le componenti radiali di velocità w_r saranno apprezzabili soltanto in vicinanza del contorno esterno delle superfici; più all'interno possiamo porle approssimativamente uguali a zero. Per le componenti tangenziali w_t e per quelle assiali w_a valgono, come si vede facilmente, le relazioni

$$w_t = w^* \sin \varepsilon = w' \cos \varepsilon \sin \varepsilon, \quad w_a = w^* \cos \varepsilon = w' \cos^2 \varepsilon.$$

L'angolo può esprimersi scrivendo

$$\tan \varepsilon = \frac{b}{2\pi x} = \frac{v}{x\omega} = \frac{r'}{x} \quad (2.68)$$

dove, per brevità, $\frac{b}{2\pi} = \frac{v}{\omega}$ è posto uguale a r' (r' è quel raggio per il quale l'angolo di passo dell'elica ha tangente uguale a 1). Allora

$$\sin \varepsilon = \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + x^2}} \quad \text{e} \quad \cos \varepsilon = \frac{x}{\sqrt{r'^2 + x^2}} \quad (2.69)$$

e quindi

$$w_t = w' \frac{r'x}{r'^2 + x^2} \quad \text{e} \quad w_a = w' \frac{x^2}{r'^2 + x^2}. \quad (2.70)$$

Dobbiamo ora determinare la circolazione attorno alle singole pale in funzione del raggio x . Per un'elica di n pale la circolazione totale dei vortici interni al cerchio di raggio x coincide con l'integrale di linea lungo il cerchio chiuso di raggio x ; questa circolazione deve evidentemente essere uguale a $n\Gamma$, dove Γ è la circolazione di una delle pale nel punto x . Da qui abbiamo

$$\Gamma = \frac{2\pi x \cdot w_t}{n} = \frac{2\pi r' w'}{n} \cdot \frac{x^2}{r'^2 + x^2} \left(= \frac{b w_a}{n} \right). \quad (2.71)$$

La curva di Γ secondo l'equazione (2.71) è mostrata nella curva I della figura 2.41.

Alle estremità delle pale ci aspetteremmo una diminuzione della circolazione dello stesso carattere di quella trovata per i profili alari. Un trattamento approssimato può escogitarsi nel modo seguente: immaginiamo una serie infinita di profili alari che abbiano una distanza reciproca a , non siano scalati e si estendano infinitamente verso sinistra. Ci chiediamo quale sia la distribuzione di portanza più favorevole vicino alle estremità di questi profili. La distanza a va poi posta uguale alla distanza perpendicolare fra i bordi di due pale consecutive dell'elica, cioè, secondo la figura 2.38,

$$a = \frac{b}{n} \cos \varepsilon_1 = \frac{2\pi r'}{n} \cdot \frac{r^2}{\sqrt{r'^2 + r^2}} \cdot \frac{1}{r}. \quad (2.72)$$

Il problema, secondo il procedimento della sezione 2.0.17, può ora risolversi cercando il flusso potenziale attorno ai bordi della corrispondente famiglia di piani e determinando la discontinuità di potenziale sui piani. Questo problema può risolversi senza difficoltà con le rappresentazioni conformi (si veda la sezione 1.10). Può mostrarsi che il piano con i tagli rettilinei mostrato in figura 2.39 — che chiameremo piano z — può trasformarsi nel cerchio unitario (piano t) con la formula

$$z = \frac{a}{\pi} \log \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right). \quad (2.73)$$

Il flusso della figura 2.37 si trasforma con ciò in un flusso di circolazione attorno al cerchio unitario; si ha infatti

$$\Phi + i\Psi = i C \log t.$$

Dopo un breve calcolo, eliminando t , abbiamo

$$z = \frac{a}{\pi} \log \cos \frac{\Phi + i\Psi}{C}. \quad (2.74)$$

Per la superficie attorno alla quale avviene il flusso, che è data dalla linea di corrente $\psi = 0$, abbiamo dunque

$$x = \frac{a}{\pi} \log \cos \frac{\Phi}{C}$$

ovvero

$$\Phi = \pm C \cos^{-1} e^{\frac{\pi x}{a}} \quad (2.75)$$

che fornisce i valori reali per valori negativi di x . I potenziali così ottenuti per la velocità unitaria del flusso libero (per ottenere la quale C dev'essere posto uguale a $\frac{a}{\pi}$) ci danno, secondo quanto precede, la superficie F' , e formano un'immagine come quella mostrata in figura 2.40. Per mezzo di questa possiamo formarci un giudizio preciso su come la circolazione — e con essa la spinta — diminuisca alle estremità delle pale. Possiamo sostituire le porzioni ombreggiate con una retta, di area sottostante uguale, la quale, secondo l'integrazione eseguita, deve giacere dietro le estremità delle pale alla distanza

$$a' = a \frac{\log 2}{\pi} = 0,2207 a. \quad (2.76)$$

Concludiamo da ciò che, anche per le eliche, la diminuzione di circolazione alle estremità delle pale ha all'incirca lo stesso effetto che si avrebbe se l'elica avesse un raggio diminuito di $0,2207 a$ e l'aria potesse allora considerarsi uniforme su ogni cerchio di raggio x (come sarebbe il caso per un'elica con un numero infinito di pale).

Le proprietà trovate per la porzione interna dell'elica e per il suo bordo possono combinarsi in un'unica formula, che può applicarsi come formula di approssimazione anche a eliche con un piccolo numero di pale. Questa formula si ottiene moltiplicando il valore dell'equazione (2.71) per l'espressione $\frac{2}{\pi} \cos^{-1} e^{-\frac{\pi(r-x)}{a}}$, che per grandi valori di $\frac{r-x}{a}$ assume il valore 1. (Al posto di $-x$ della formula (2.75) è qui sostituito $r-x$, com'è ovvio.) Otteniamo così la formula

$$\Gamma = \frac{4w'r'}{n} \cdot \frac{x^2}{r'^2 + x^2} \cdot \cos^{-1} e^{-\frac{\pi(r-x)}{a}}. \quad (2.77)$$

La curva di Γ secondo l'equazione (2.77) è data in figura 2.41 per un'elica a 4 pale e per $r' : r = 1 : 5$, corrispondente a condizioni medie della pratica.

L'intera deduzione vale, come già osservato, per eliche non pesantemente caricate. Per eliche a forte carico può introdursi un miglioramento calcolando il passo delle superfici elicoidali formate dai vortici in corrispondenza dello stato di flusso che regna nel piano del disco dell'elica. Invece di scrivere $\tan \xi = \frac{v}{x\omega}$, dobbiamo

scrivere, più esattamente, $\tan \xi = \frac{V + \frac{w_a}{2}}{x\omega - \frac{w_t}{2}}$, nella quale V è la velocità di volo, poiché nel piano del disco dell'elica è già presente metà delle velocità di disturbo finali. Un'approssimazione utile si ottiene se, conservando

le nostre formule, si pone v uguale a $V + \frac{w'}{2}$ e quindi r' uguale a $\frac{V + \frac{w'}{2}}{\omega}$.

Nota la circolazione, la distribuzione di spinta e coppia può calcolarsi facilmente per mezzo delle equazioni (2.60) e (2.62), e così, seguendo il metodo usato nella teoria dei profili, possono determinarsi le larghezze richieste delle pale e gli angoli d'attacco affinché, per una data condizione di funzionamento (cioè per r' e w' dati) nella quale l'elica deve avere il rendimento più favorevole, tutte le informazioni possano dedursi dalla teoria. Tenendo conto delle relazioni di velocità più esatte nel piano del disco dell'elica, queste informazioni possono migliorarsi.

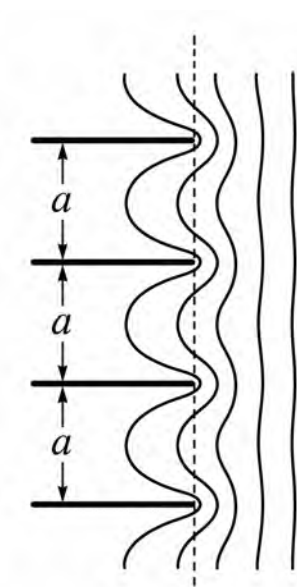


Figura 2.39. Trasformazione conforme $z = \frac{a}{\pi} \log \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$ per la famiglia di semipiani (fig. 60 dell'originale).

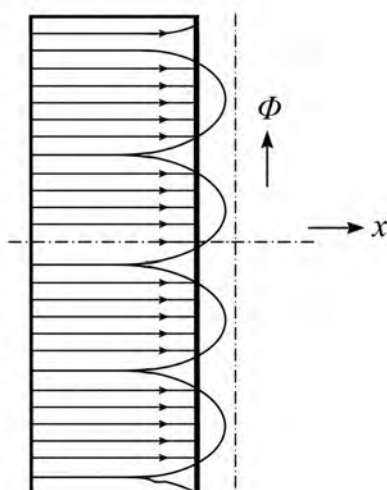


Figura 2.40. Potenziale ottenuto dal flusso della fig. 60: da esso la correzione d'estremità (fig. 61 dell'originale).

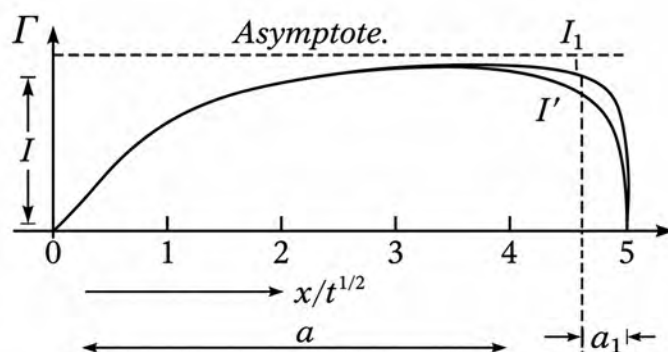


Figura 2.41. Distribuzione della circolazione: I numero infinito di pale; II quattro pale a distanza a fra i vortici (fig. 62 dell'originale).

Nota del curatore

La formula (2.76) è la celebre *correzione d'estremità di Prandtl* (tip-loss factor), tuttora incorporata in tutti i codici BEM — Blade Element Momentum — per eliche e turbine eoliche: la stessa matematica che qui ottimizza l'elica di un biplano dimensiona oggi i rotor eolici da centoventi metri di diametro.

Osservazioni conclusive dell'autore

La teoria dei profili ha numerose ulteriori applicazioni. Un'investigazione dei voli in virata — specialmente del momento, importante nelle discussioni di stabilità, attorno all'asse longitudinale nel caso di un'ala mossa in cerchio — è attualmente in corso, come pure il calcolo del momento di un'ala svergolata. Una serie di singole questioni non prive d'importanza deve attendere un ulteriore perfezionamento della teoria: per esempio varie conclusioni riguardanti in particolare le proprietà dei profili, l'influenza della curvatura, ecc. possono raggiungersi se si passa dalla linea portante al caso di un carico distribuito anche lungo la corda; per il trattamento di un'ala disposta obliqua alla direzione del volo, l'ipotesi di un carico distribuito lungo la corda è necessaria, poiché in questo caso le condizioni contraddicono la «linea portante». Investigazioni di questo tipo — che possono compiersi soltanto con calcoli numerici molto estesi — furono iniziate durante la guerra, ma da allora, per mancanza di collaboratori, sono rimaste incompiute. Un'affermazione analoga vale per i calcoli, anch'essi già iniziati, dell'ala battente, nei quali si è parimenti costretti ad assumere la portanza distribuita lungo la corda, poiché altrimenti il risultato è indeterminato. Molto, dunque, resta da fare.

Nota del curatore

Chiude l'originale una postilla della redazione NACA: dopo la stesura della memoria apparvero due lavori, di R. Fuchs e di E. Trefftz, sulla teoria dei profili, che discutono la teoria del monoplano e quella degli aeroplani di minima resistenza; entrambi pubblicati nella *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1921, fascicoli 2 e 3, Berlino.

Simboli più importanti e letteratura

I simboli più importanti (dall'originale)

ρ	densità
V	velocità dell'aeroplano
u, v, w	componenti di velocità lungo X, Y, Z (per un aeroplano: X lungo l'apertura, Y nella direzione del volo, Z verticale)
$q = \frac{\rho V^2}{2}$	pressione dinamica
b	apertura di un'ala (<i>Breite</i>)
t	corda di un'ala (<i>Tiefe</i>)
b	distanza fra le ali di un biplano (<i>Höhe</i>)
F	area della superficie (= $b \cdot t$) (<i>Fläche</i>)
A	portanza (<i>Auftrieb</i>)
W	resistenza (<i>Widerstand</i>)
$c_a = \frac{A}{Fq}$	coefficiente di portanza (= $2K_y$ «assoluto»)
$c_w = \frac{W}{Fq}$	coefficiente di resistenza (= $2K_x$ «assoluto»)
α	angolo d'attacco
Γ	circolazione
Φ	potenziale di velocità
ψ	funzione di corrente

Elenco della letteratura più importante (dall'originale)

L'originale elenca, con i riferimenti bibliografici completi, le pubblicazioni della scuola di Gottinga e i lavori sul problema bidimensionale. Ne diamo qui la sostanza, utile per chi voglia risalire alle fonti (le abbreviazioni sono: Z.F.M. = *Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt*; TB = *Technische Berichte der Flugzeugmeisterei*).

A. Pubblicazioni di Gottinga

- L. Prandtl, *Tragflügeltheorie*, I e II comunicazione, Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften, Gottinga, 1918 (p. 451) e 1919 (p. 107) — la teoria dell'ala nelle due memorie fondative.
- L. Prandtl, *Tragflächen-Auftrieb und -Widerstand in der Theorie*, Jahrbuch der Wiss. Gesellschaft f. Luftfahrt, V, 1920, p. 37.
- L. Prandtl, *Der induzierte Widerstand von Mehrdeckern*, TB, vol. III, p. 309 — la resistenza indotta dei multiplani.
- G. Fuhrmann, indagini teoriche e sperimentali su modelli di dirigibili, Jahrbuch der Motorluftschiff-Studiengesellschaft, 1911/12, p. 65.

- A. Betz, sull'influenza mutua di due ali (Z.F.M., 1914, p. 253); sull'ala di Joukowski (Z.F.M., 1915, p. 173); sull'influenza di apertura e carico alare (TB, vol. I, p. 98); contributi alla teoria dell'ala con speciale riguardo all'ala rettangolare (dissertazione, Gottinga, 1919; estratto in Beiheft II della Z.F.M., 1920, p. 1); l'elica con minima perdita di energia, con appendice di L. Prandtl (Nachrichten, Gottinga, 1919, p. 193); un'estensione della teoria del getto dell'elica (Z.F.M., 1920, p. 105).
- M. Munk, contributo all'aerodinamica degli organi portanti (TB, vol. II, p. 187); problemi isoperimetrici della teoria del volo (dissertazione, Gottinga, 1919).
- C. Wieselsberger, sulla spiegazione del volo in formazione angolata di alcuni uccelli migratori (Z.F.M., 1914, p. 225); verifica sperimentale delle formule di conversione (Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt, parte I, Monaco, 1921, p. 50).

B. Lavori sul problema bidimensionale

- W. M. Kutta, sulle forze di portanza nei fluidi in moto (Illustrierte aeronautische Mitteilungen, 1902, p. 133) e memorie più estese nei rendiconti dell'Accademia Bavarese delle Scienze (1910, seconda memoria, e 1911, p. 65).
- N. Joukowski, sui contorni delle superfici portanti degli aeroplani (Z.F.M., 1910, p. 281); *Aérodynamique*, tradotto dal russo da Drzewiecki, Parigi, 1916.
- R. Grammel, *Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges*, Braunschweig, 1917.
- R. von Mises, sulla teoria della portanza delle superfici alari (Z.F.M., 1917, p. 157; 1920, pp. 68 e 87).

Nota del curatore

Per lo studio moderno degli stessi argomenti restano di riferimento, nella nostra biblioteca di corso: V. Losito, *Fondamenti di Aeronautica Generale* (Accademia Aeronautica, Napoli, 1994) e J. D. Anderson, *Introduction to Flight* e *Fundamentals of Aerodynamics*. L'originale del presente rapporto è scaricabile liberamente dal NASA Technical Reports Server, documento n. 19930091180.

Strumenti per leggere Prandtl

Dove stiamo andando

Questa appendice rende la monografia autoconsistente: raccoglie, al livello di un diplomando di quinta, gli strumenti che Prandtl usa dando per scontato che il lettore li conosca. Cinque stazioni: campi di velocità e derivate parziali (§A.1), circolazione e potenziale (§A.2), l'equazione di Bernoulli (§A.3), i numeri complessi e le trasformazioni conformi (§A.4), il teorema della quantità di moto (§A.5). Ogni stazione rimanda ai punti del rapporto in cui lo strumento entra in scena.

A.1 Campi di velocità e derivate parziali

Descrivere un flusso «alla Eulero» significa non seguire le singole particelle ma assegnare, in ogni punto dello spazio e in ogni istante, il vettore velocità:

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = (u, v, w).$$

È la descrizione che usa Prandtl al §3. Una *derivata parziale* come $\frac{\partial u}{\partial x}$ misura quanto la componente u varia spostandosi lungo x tenendo ferme le altre variabili: è la pendenza della funzione «vista» lungo una sola direzione.

Esempio

Pensate alla mappa delle temperature d'Italia: $T(x, y)$. $\frac{\partial T}{\partial x}$ dice quanto la temperatura cambia andando verso est, $\frac{\partial T}{\partial y}$ andando verso nord. Nessuna delle due, da sola, è «la» variazione: sono le componenti del *gradiente*, il vettore che punta nella direzione di massima crescita.

Continuità (incomprimibilità)

In un fluido incomprimibile da ogni volumetto esce tanta portata quanta ne entra. Il bilancio, fatto su un cubetto infinitesimo, dà l'equazione (4) del rapporto:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

La somma a primo membro si chiama *divergenza* di $\mathbf{v}$.

Le *linee di corrente* sono le curve tangenti in ogni punto al vettore velocità; in un moto stazionario coincidono con le traiettorie delle particelle. La condizione di tangenza alla parete di un corpo fermo ($v_n = 0$) è quella che Prandtl impone alla fine del §3.

A.2 Circolazione, rotazione, potenziale

Circolazione

Data una curva chiusa C immersa nel flusso, la circolazione è l'integrale di linea

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C V \cos \theta \, ds,$$

formalmente identico al lavoro di una forza lungo un percorso chiuso. Misura «quanto il fluido gira» attorno alla curva; unità: m^2/s .

Esempio

Attorno a un vortice rettilineo con velocità tangenziale $v_\theta = \Gamma/(2\pi r)$, la circolazione lungo un cerchio di raggio r è $2\pi r \cdot v_\theta = \Gamma$ per *qualsunque* raggio: il valore non dipende dal cerchio scelto, perché fuori dall'asse la rotazione è nulla. È esattamente il ragionamento «cammino per velocità» dell'equazione (6a) del rapporto.

La *rotazione* (oggi: vorticità) è la circolazione per unità d'area attorno a una superficie infinitesima; le sue componenti sono le (§) del rapporto. Un moto con rotazione ovunque nulla si dice *irrotazionale*: per esso l'integrale di linea da O a P non dipende dal cammino, e definisce il *potenziale di velocità* $\Phi(P)$, con $\mathbf{v} = r\Phi$ (equazioni 3). L'analogia meccanica è perfetta: forza conservativa $\leftrightarrow$ flusso irrotazionale, energia potenziale $\leftrightarrow$ potenziale di velocità.

Formula chiave

Teorema di Kelvin. In un fluido non viscoso, omogeneo, soggetto a forze conservative, la circolazione lungo una linea *fluida* chiusa non cambia nel tempo. **Teoremi di Helmholtz.** I filetti vorticosi sono sempre fatti delle stesse particelle; la loro intensità è costante lungo il filetto e nel tempo; un filetto non può terminare nel fluido: o si chiude su sé stesso, o termina su una parete, o va all'infinito.

Da qui discendono i tre attori della Parte II: il vortice *aderente* sull'ala, il vortice di *avviamento* lasciato al decollo (§15) e i vortici *liberi* d'estremità che li collegano (§16) — il sistema chiuso richiesto da Helmholtz.

Osservazione

La *legge di Biot-Savart* (equazione 6 del rapporto) dà la velocità indotta da un elemento di filetto vorticoso ed è matematicamente identica alla legge che dà il campo magnetico di un elemento di corrente. Il dizionario: corrente $I \leftrightarrow$ circolazione Γ ; campo $\mathbf{B} \leftrightarrow$ velocità indotta $\mathbf{v}$. Per questo Prandtl chiama «indotta» la resistenza dell'ala finita.

I casi da ricordare, per un filetto rettilineo a distanza b :

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi b} \text{ (filetto infinito),} \quad v = \frac{\Gamma}{4\pi b} \text{ (filetto semi-infinito, sul piano dell'estremo).}$$

La sovrapposizione di flussi elementari — uniforme, sorgente, pozzo, vortice, doppietta — è lecita perché l'equazione di Laplace (4a) è lineare: la somma di soluzioni è una soluzione. È il «Lego» con cui il rapporto costruisce dirigibili (§12) e cilindri portanti (§14).

A.3 L'equazione di Bernoulli

Lungo una linea di corrente di un flusso stazionario, incompressibile e non viscoso (trascurando le quote):

$$p + \frac{\rho}{2} V^2 = \text{cost.}$$

Fisicamente è la conservazione dell'energia per unità di volume: pressione statica + pressione dinamica = pressione totale. Dove il fluido accelera la pressione cade; dove ristagna, la pressione sale di $q = \frac{1}{2}\rho V^2$.

Esempio

A $V = 45$ m/s in aria standard ($\rho = 1,225$ kg/m³): $q = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 45^2 \simeq 1240$ Pa, poco più dell'1% della pressione atmosferica. Il tubo di Pitot della cabina misura esattamente questo q e lo converte in velocità indicata.

Per moti *non* stazionari vale l'estensione usata al §28 del rapporto: $\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\rho v^2}{2} + p = f(t)$, da cui, nei fenomeni impulsivi, il legame $\rho \Phi = \int (p_0 - p) dt$ fra potenziale e impulso delle pressioni.

A.4 Numeri complessi e trasformazioni conformi

Un numero complesso $z = x + iy$ (con $i^2 = -1$) è un punto del piano; in forma polare $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = r e^{i\vartheta}$. Moltiplicare per $e^{i\vartheta}$ significa ruotare di ϑ : per questo i complessi sono la lingua naturale dei flussi piani.

Una funzione $f(z)$ si dice *analitica* se ha derivata df/dz indipendente dalla direzione con cui si fa il limite. Separando $f = \Phi + i\Psi$, questa richiesta equivale alle condizioni di Cauchy–Riemann

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

che sono esattamente le equazioni (9) del rapporto: parte reale = potenziale, parte immaginaria = funzione di corrente. Ogni funzione analitica «regala» quindi un flusso piano incompressibile e irrotazionale; le linee $\Phi = \text{cost.}$ e $\Psi = \text{cost.}$ formano una rete ortogonale a maglie quadrate.

Esempio

$f(z) = Vz$: flusso uniforme. $f(z) = V(z + a^2/z)$: cilindro circolare (eq. 21). $f(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z$: vortice (eq. 22). $f(z) = Az^n$: flusso in un angolo π/n (fine del §10). La somma dei primi tre è il cilindro *portante* da cui, per trasformazione, nasce il profilo.

Trasformazione conforme

Una funzione analitica $w = \phi(z)$ con $\phi' \neq 0$ trasforma il piano z nel piano w conservando gli angoli fra curve. Se un flusso è noto attorno a un contorno semplice (il cerchio), la trasformazione lo trasporta attorno al contorno trasformato (il profilo), con potenziale e funzione di corrente che «viaggiano» insieme ai punti (equazione 12 del rapporto).

La trasformazione di Joukowski $z = t + b^2/t$ manda il cerchio per i punti $\pm b$ in un segmento; cerchi leggermente decentrati diventano archi, ellissi o profili alari con bordo d'uscita aguzzo (§14). Il punto delicato — la scelta della circolazione — è fissato dalla *condizione di Kutta*: il flusso deve lasciare dolcemente il bordo d'uscita.

A.5 Il teorema della quantità di moto

Per un flusso stazionario, si racchiuda la regione d'interesse in una *superficie di controllo* fissa S . La seconda legge della dinamica, riscritta per il fluido che la attraversa, dice: la somma delle forze esterne (pressioni su S più le forze dei corpi interni sul fluido) uguaglia il flusso netto di quantità di moto uscente da S :

$$\Sigma P_s = \iint_S p \cos(n, s) dS + \rho \iint_S v_n v_s dS,$$

che è l'equazione (14) del rapporto. La forza sul corpo si legge «da fuori», senza conoscere i dettagli del flusso vicino al corpo: è la potenza del metodo.

Esempio

È così che al §13 Prandtl dimostra Kutta-Žukovskij con un cilindro di controllo di raggio grande: metà della portanza arriva dal flusso di quantità di moto, metà dalle pressioni sul cilindro; e al §28 lo stesso bilancio, fatto sul tubo di sezione $F' = \pi b^2/4$, restituisce in due righe portanza e resistenza indotta dell'ala ellittica.

Il senso di tutto questo

Se dovessimo comprimere questa appendice in una frase: *il fluido ideale si racconta con quattro integrali* — l'integrale di linea della velocità (circolazione), l'integrale che la rende potenziale, l'integrale di Bernoulli lungo la corrente e l'integrale di quantità di moto sulla superficie di controllo. Chi possiede questi quattro strumenti legge Prandtl come si legge un giornale.

Esercizi svolti calati nel testo

Dove stiamo andando

Quattro esercizi, uno per ciascun pilastro del rapporto: il teorema di Kutta–Žukovskij (eq. 20), la resistenza indotta del monoplano ellittico (eq. 39, 40, 44), il biplano ottimo (eq. 56 e 59) e la correzione di getto libero (eq. 72). Metodo dei cinque passi: dati, modello, equazione, incognita, verifica. Tutti i valori numerici sono stati verificati indipendentemente con lo script Python `verifica_prandtl.py` allegato al progetto.

Esercizio 1 — La circolazione di un'ala da addestratore (eq. 20)

Una sezione d'ala in flusso piano vola a $V = 45$ m/s in aria standard ($\rho = 1,225$ kg/m³) con circolazione $\Gamma = 22$ m²/s. Determinare la portanza per metro di apertura.

1) Dati. $\rho = 1,225$ kg/m³; $V = 45$ m/s; $\Gamma = 22$ m²/s; $l = 1$ m.

2) Modello. Ala infinita, fluido ideale, flusso piano: vale il teorema di Kutta–Žukovskij del §2.0.2, indipendente dalla forma del profilo.

3) Equazione. $A = \rho \Gamma V l$ (eq. 20)

4) Incognita.

$$A = 1,225 \cdot 22 \cdot 45 \cdot 1 = 1213 \text{ N/m (per metro di apertura).}$$

5) Verifica. Dimensioni: $[\rho \Gamma V] = \text{kg/m}^3 \cdot \text{m}^2/\text{s} \cdot \text{m/s} = \text{N/m} \checkmark$. Ordine di grandezza: con corda $t \simeq 1,5$ m risulta $c_a = A/(t q) = 1213/(1,5 \cdot 1240) \simeq 0,65$: un coefficiente di portanza di crociera del tutto plausibile $\checkmark$.

Esercizio 2 — Resistenza indotta e deflessione di un monoplano (eq. 39, 40, 44)

Un monoplano da turismo di massa $m = 1150$ kg vola in crociera livellata a $V = 44$ m/s al livello del mare. Apertura $b = 10,9$ m, superficie $F = 16,2$ m², distribuzione di portanza ellittica. Calcolare: pressione dinamica, c_a , resistenza indotta, velocità di deflessione w e angolo indotto.

1) Dati. $A = mg = 1150 \cdot 9,81 = 11\,282$ N (in volo livellato la portanza equilibra il peso); $b = 10,9$ m; $F = 16,2$ m²; $V = 44$ m/s; $\rho = 1,225$ kg/m³.

2) Modello. Linea portante di Prandtl con distribuzione ellittica (§2.0.11): w costante lungo l'apertura, resistenza indotta minima.

3) Equazioni. $q = \frac{1}{2}\rho V^2$; $c_a = A/(Fq)$; $c_{wi} = c_a^2 F/(\pi b^2)$ (eq. 44); $W_i = A^2/(\pi q b^2)$ (eq. 40); $w = 2A/(\pi \rho V b^2)$ (eq. 39).

4) Incognite.

$$q = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 44^2 = 1186 \text{ Pa}; \quad c_a = \frac{11282}{16,2 \cdot 1186} = 0,587;$$

$$\frac{b^2}{F} = \frac{10,9^2}{16,2} = 7,33 (= AR); \quad c_{wi} = \frac{0,587^2}{\pi \cdot 7,33} = 0,0150;$$

$$W_i = c_{wi} F q = 0,0150 \cdot 16,2 \cdot 1186 \simeq 288 \text{ N};$$

$$w = \frac{2 \cdot 11282}{\pi \cdot 1,225 \cdot 44 \cdot 10,9^2} = 1,12 \text{ m/s}; \quad \tan \varphi = \frac{w}{V} = 0,0255 \Rightarrow \varphi \simeq 1,46^\circ.$$

5) Verifica. Coerenza interna: $W_i = \frac{w}{V} A = 0,0255 \cdot 11282 = 288 \text{ N}$, identico al valore da eq. 40 ✓. La potenza spesa contro la resistenza indotta è $W_i V \simeq 12,7 \text{ kW}$: circa un sesto della potenza di un motore da 100 kW in crociera — ordine di grandezza corretto per questa classe di velivoli ✓.

Esercizio 3 — Quanto conviene il biplano? (eq. 56 e 59)

Un biplano d'epoca ha due ali uguali di apertura $b = 10 \text{ m}$ poste a distanza $h = 1,5 \text{ m}$, portanza totale $A_1 + A_2 = 12\,000 \text{ N}$ ripartita in parti uguali (il caso ottimo per ali uguali), $V = 40 \text{ m/s}$ al livello del mare. Confrontare la resistenza indotta con quella di un monoplano di pari apertura e pari portanza.

1) Dati. $b_1 = b_2 = b = 10 \text{ m}$ (dunque $\mu = 1$); $h/b = 0,15$; $A_1 = A_2 = 6000 \text{ N}$; $q = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 40^2 = 980 \text{ Pa}$.

2) Modello. Teoria dei multiplani di §§2.0.13–2.0.15: distribuzioni ellittiche su ciascuna ala, fattore d'interferenza σ di Prandtl.

3) Equazioni. $\sigma = \frac{1 - 0,66 h/b}{1,055 + 3,7 h/b}$ (eq. 56); per ali uguali e portanze uguali $W = \frac{1 + \sigma}{2} \cdot \frac{(A_1 + A_2)^2}{\pi q b^2}$ (eq. 59 con $\mu = 1$).

4) Incognite.

$$\sigma = \frac{1 - 0,66 \cdot 0,15}{1,055 + 3,7 \cdot 0,15} = \frac{0,901}{1,610} = 0,560 \text{ (Tabella I: } 0,561 \text{ ✓);}$$

$$W_{\text{mono}} = \frac{12000^2}{\pi \cdot 980 \cdot 10^2} = 468 \text{ N}; \quad W_{\text{bi}} = \frac{1 + 0,560}{2} \cdot 468 = 365 \text{ N}.$$

Il biplano risparmia il 22% di resistenza indotta rispetto al monoplano di uguale apertura.

5) Verifica. Limiti del modello: per $h \rightarrow 0$ si ha $\sigma \rightarrow 1$ e $W_{\text{bi}} \rightarrow W_{\text{mono}}$ (le due ali coincidono); per $h \rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow 0$ e $W_{\text{bi}} \rightarrow W_{\text{mono}}/2$ (due ali indipendenti che si dividono il carico: ciascuna porta metà portanza, quindi un quarto della resistenza, e in due fanno metà) ✓. Attenzione però al monito di Prandtl in chiusura del §2.0.15: il confronto vale a *pari apertura massima*; un monoplano con apertura $k b = \sqrt{2/(1 + \sigma)} b \simeq 1,13 b$ pareggierebbe il biplano.

Esercizio 4 — Dalla galleria all'aria libera (eq. 72)

In un getto libero circolare di diametro $D = 2 \text{ m}$ (impianto tipo Gottinga) si prova un'ala di apertura $b = 1,2 \text{ m}$ a $V = 30 \text{ m/s}$; la bilancia misura una portanza $A = 260 \text{ N}$. Di quanto la resistenza indotta misurata nel getto supera quella che la stessa ala avrebbe in aria libera?

1) Dati. $D = 2 \text{ m} \Rightarrow F_0 = \pi D^2/4 = 3,142 \text{ m}^2$; $b = 1,2 \text{ m}$; $A = 260 \text{ N}$; $q = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 30^2 = 551 \text{ Pa}$; distribuzione ellittica $\Rightarrow F' = \pi b^2/4 = 1,131 \text{ m}^2$.

2) Modello. Correzione del primo ordine di §§2.0.19–2.0.20: getto libero, sistema portante piccolo e centrato.

3) Equazioni. Nel getto: $W = \frac{A^2}{4q} \left(\frac{1}{F'} + \frac{1}{2F_0} \right)$ (eq. 72); in aria libera: $W_\infty = \frac{A^2}{4qF'}$ (eq. 67).

4) Incognite.

$$\frac{A^2}{4q} = \frac{260^2}{4 \cdot 551} = 30,7 \text{ N m}^2;$$

$$W_\infty = \frac{30,7}{1,131} = 27,1 \text{ N}; \quad W = 30,7 \left(\frac{1}{1,131} + \frac{1}{6,283} \right) = 32,0 \text{ N}.$$

La correzione è $\Delta W = 4,9 \text{ N}$: il getto libero *sovrastima* la resistenza indotta del $\Delta W/W_\infty = F'/(2F_0) = 18\%$.

5) Verifica. Il rapporto $\Delta W/W_\infty = F'/(2F_0)$ dipende solo dalla geometria: con $b/D = 0,6$ si ha $F'/(2F_0) = \frac{1}{2}(b/D)^2 = 0,18$ ✓. Per una galleria a camera chiusa dello stesso diametro il segno si inverte (eq. 72a): la misura andrebbe *aumentata* della stessa quantità. Limite di validità: sistema portante

piccolo rispetto al getto e centrato; con $b/D = 0,6$ siamo al margine del campo in cui il solo primo termine della serie (71) è adeguato, come discusso da Prandtl per $b/D = 1/2$.

Il senso di tutto questo

Quattro esercizi, quattro epoche della stessa idea: la circolazione genera la portanza (1902–1906), la portanza genera i vortici liberi, i vortici generano la resistenza indotta (1918), la resistenza indotta si gestisce — ripartendola fra più ali o correggendo le misure di galleria (1919–1921). Chi sa rifare questi quattro conti in autonomia possiede la spina dorsale dell’aerodinamica dell’ala finita, ed è pronto per la seconda prova.