

L'atmosfera standard

Il palcoscenico del volo: come si costruisce l'aria tipo
e come si usa davvero

Serie Raucci — Monografie di Costruzioni Aeronautiche

Prof. Ing. Biagio Raucci

ITIS "E. Majorana" — Somma Vesuviana (NA)

Sommario

Prima di studiare come vola un velivolo dobbiamo conoscere il mezzo in cui vola. Questa monografia costruisce, un mattone alla volta, il modello di *atmosfera standard* (o *aria tipo*): partiamo dall'equazione idrostatica — una semplice condizione di equilibrio —, distinguiamo le diverse definizioni di quota, deriviamo le leggi di variazione di pressione, temperatura e densità con l'altitudine e impariamo a usare le tabelle che ne derivano, comprese le quote di pressione, di densità e di temperatura che il pilota e il progettista maneggiano ogni giorno. Ogni passaggio teorico è accompagnato da esercizi interamente svolti, in unità SI, con i conti fatti fino in fondo. Alla fine trovate un formulario essenziale e una tabella dell'aria tipo pronta all'uso.

Indice

1	Perché un'atmosfera «tipo»	3
2	Quante quote esistono? Quota geometrica, quota assoluta e la gravità che cambia	5
3	L'equazione idrostatica	6
3.1	L'equilibrio dell'elementino di fluido	6
3.2	Il caso facile: il liquido incompressibile	7
4	La quota geopotenziale	8
4.1	Una quota definita da un'equazione	8
4.2	Il legame esatto fra h e h_G	8
5	La costruzione dell'aria tipo	10
5.1	La chiave di volta: il profilo di temperatura	10
5.2	Da $T(h)$ a $p(h)$ e $\rho(h)$: la derivazione	11
5.3	L'incollaggio degli strati	12
6	Interpolazione lineare: leggere le tabelle fra le righe	14
6.1	L'idea geometrica: sostituire la curva con la sua corda	15
6.2	La formula, ricavata in due modi	15
6.3	Interpolazione inversa: trovare x noto y	15
6.4	Quanto vale l'errore?	16
6.5	Tabelle a doppia entrata: la doppia interpolazione	16
6.6	Esercizi proposti	18

7	Due strumenti rapidi: l'atmosfera esponenziale e la velocità di caduta della pressione	20
7.1	L'atmosfera esponenziale	20
7.2	Dove la pressione cala più in fretta?	21
8	Quota di pressione, di temperatura e di densità	22
9	Quando la quota cambia nel tempo	25
10	Oltre la Terra: le atmosfere degli altri pianeti	26
11	Un po' di storia: come nacque l'aria tipo	27
12	Formulario essenziale	28
A	Tabella dell'aria tipo (unità SI)	29

I Perché un'atmosfera «tipo»

Dove stiamo andando

In questa sezione capiamo *il problema* che l'atmosfera standard risolve: l'atmosfera reale cambia di continuo, ma progettisti, piloti e sperimentatori hanno bisogno di un riferimento comune, sempre uguale, su cui mettersi d'accordo. È una convenzione — ma una convenzione costruita con la fisica, non inventata a tavolino.

I veicoli aerospaziali si dividono in due grandi famiglie: quelli *atmosferici* — aeroplani, elicotteri, alianti — che volano sempre immersi nell'aria, e quelli *spaziali* — satelliti, sonde, capsule — che operano al di fuori dell'atmosfera sensibile. Ma attenzione: anche i secondi devono attraversare l'atmosfera, al lancio e al rientro; e se la destinazione è un altro pianeta, incontreranno l'atmosfera di *quel* pianeta. In ogni caso, chi progetta o studia le prestazioni di un veicolo che vola non può fare a meno di conoscere le proprietà dell'aria che lo circonda: **pressione** p , **temperatura** T e **densità** ρ .

Qui nasce il problema. L'atmosfera reale è un sistema in perenne trasformazione: p e T dipendono dalla quota, sì, ma anche dalla posizione geografica, dall'ora del giorno, dalla stagione, perfino dall'attività solare. Sulla pista di Cassino a mezzogiorno d'agosto e sulla stessa pista all'alba di gennaio l'aria è diversa; figuriamoci fra Cassino e Oslo. Progettare un velivolo tenendo conto di tutte queste variazioni sarebbe impraticabile — e soprattutto renderebbe *inconfrontabili* fra loro le prove di volo, le prove in galleria del vento e i calcoli di progetto eseguiti in luoghi e giorni diversi.

La soluzione è la stessa che l'ingegneria adotta ogni volta che la realtà è troppo variabile: si definisce un **riferimento convenzionale**. L'**atmosfera standard** (in italiano tecnico: *aria tipo*) è una tabella — o meglio, una famiglia di funzioni $p(h)$, $T(h)$ e $\rho(h)$ — che assegna a ogni quota dei valori *medi e condivisi* delle proprietà dell'aria. I valori nascono da misure sperimentali (palloni sonda, razzi di sondaggio) combinate con un modello matematico; rispecchiano ragionevolmente le condizioni medie, ma il loro vero scopo non è prevedere il tempo che farà: è fornire a tutti gli ingegneri del mondo lo stesso metro.

Che cosa è (e che cosa non è) l'aria tipo

L'atmosfera standard è un riferimento convenzionale, costruito su base fisica, che dà p , T e ρ in funzione della quota. *Non* è una previsione delle condizioni reali in un dato luogo e istante: se oggi saliste davvero a 3 000 m sopra Cassino, misurereste quasi certamente valori un po' diversi da quelli tabulati. L'aria tipo serve a *ridurre* dati di prova e calcoli a un riferimento comune, non a sostituire il bollettino meteorologico.

Esistono in realtà diversi modelli standard, compilati da enti diversi in epoche diverse (il modello ARDC del 1959, il modello ISA dell'ICAO, lo U.S. Standard Atmosphere del 1976...). La buona notizia è che, al di sotto di circa 30 km — il regno degli aeroplani —, le differenze fra questi modelli sono del tutto trascurabili. In questa monografia adotteremo i valori al suolo dell'ISA ($T_0 = 288,15$ K, $p_0 = 101\,325$ Pa, $\rho_0 = 1,225$ kg/m³) e il profilo termico completo fino a 105 km del modello classico a strati.

Nei testi trovate 288,15 oppure 288,16

I modelli storici (ARDC 1959) usano $T_0 = 288,16$ K e tropopausa a 216,66 K; i modelli moderni (ISA) usano 288,15 K e 216,65 K. La differenza è di un centesimo di grado: nelle applicazioni non cambia assolutamente nulla, ma è bene saperlo per non stupirsi confrontando libri diversi.

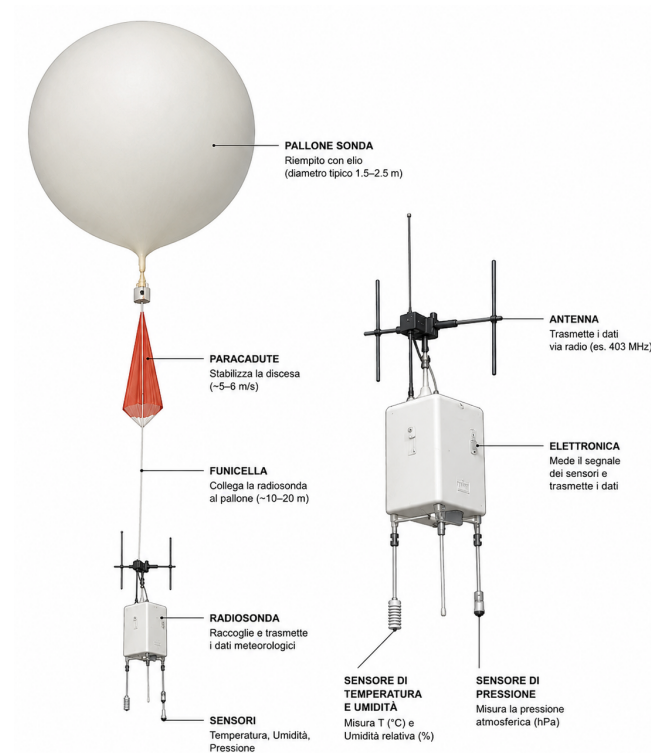


Figura 1. Un pallone sonda con la sua radiosonda: è da migliaia di lanci come questo che nascono i dati sperimentali alla base del modello di atmosfera standard.

L'aria tipo nel progetto preliminare

Il primo passo del progetto di un nuovo velivolo è la definizione delle *specifiche*: ad esempio una velocità massima assegnata a una certa quota, o un rateo di salita minimo a un'altra. Prestazioni di questo tipo dipendono da portanza e resistenza, che a loro volta dipendono dalle proprietà dell'aria. Quando la specifica dice «a quota 6 000 m», quella quota si intende *nell'aria tipo*: il progettista apre la tabella e vi legge p , T e ρ da usare nei calcoli. Gran parte dei conti del progetto preliminare contiene, spesso in modo invisibile, numeri usciti da questa tabella — ed è per questo che apriamo il corso proprio da qui.

Il senso di tutto questo

Sappiamo *perché* ci serve l'aria tipo. Per costruirla ci servono però due ingredienti: una definizione precisa di «quota» (che è meno ovvia di quanto sembri) e una legge fisica che colleghi la pressione alla quota. Cominciamo dalla quota.

2 Quante quote esistono? Quota geometrica, quota assoluta e la gravità che cambia

Dove stiamo andando

Tutti crediamo di sapere che cos'è la quota: l'altezza da terra. Ma per l'uso quantitativo in ingegneria la parola va precisata — e scopriremo che di «quote» ne esistono ben *sei*: geometrica, assoluta, geopotenziale, di pressione, di temperatura e di densità. In questa sezione definiamo le prime due e vediamo perché la gravità entra in gioco.

Immaginiamo di trovarci su una spiaggia, al livello del mare, e di salire in verticale con un elicottero calando una fettuccia metrica fino al suolo. La lettura sulla fettuccia è, per definizione, la **quota geometrica** h_G : l'altezza geometrica sopra il livello del mare. È la quota «vera», quella che misurerebbe un metro da sarta abbastanza lungo.

Se invece potessimo perforare il terreno e prolungare la fettuccia fino al centro della Terra, la lettura sarebbe la **quota assoluta** h_a . Detto r il raggio terrestre, le due quote sono legate dalla relazione ovvia

$$h_a = h_G + r. \quad (1)$$

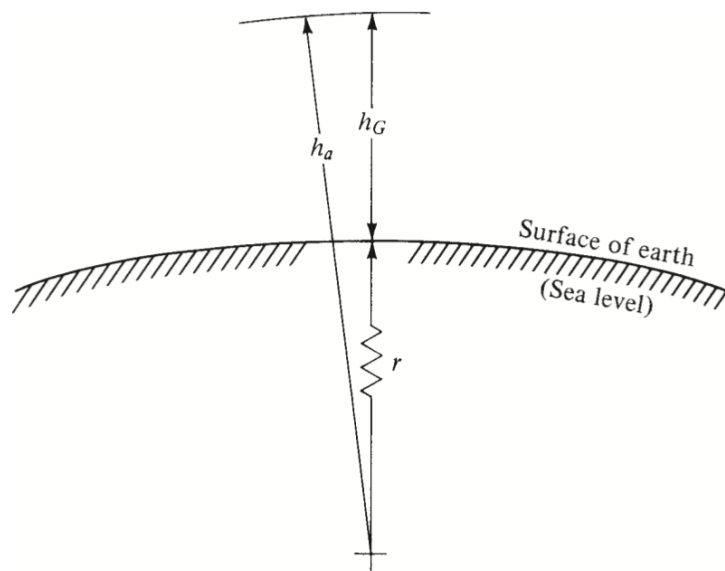


Figura 2. Le prime due quote: geometrica h_G (dal livello del mare) e assoluta h_a (dal centro della Terra).

Perché mai dovrebbe interessarci la quota assoluta? Perché l'**accelerazione di gravità** g non è costante: per la legge di gravitazione universale di Newton, g diminuisce con il quadrato della distanza dal centro della Terra. Detta g_0 la gravità al livello del mare, alla quota assoluta h_a vale

$$g = g_0 \left(\frac{r}{h_a} \right)^2 = g_0 \left(\frac{r}{r + h_G} \right)^2 \quad (2)$$

Un ordine di grandezza da ricordare

Con $r \simeq 6\,357$ km, a 10 km di quota — la crociera di un liner — la gravità si è ridotta di appena lo 0,3%. È poco, ma non è *nulla*: vedremo che questa piccola variazione, se trascurata con criterio, semplifica enormemente i conti (è l'origine della quota geopotenziale). Per il volo spaziale, invece, la variazione di g

è tutt'altro che trascurabile.

Il senso di tutto questo

Abbiamo due quote «geometriche» e una gravità che cambia con esse. Il prossimo ingrediente è la legge fisica che governa la pressione in un fluido fermo: l'equazione idrostatica. È il cuore di tutta la monografia.

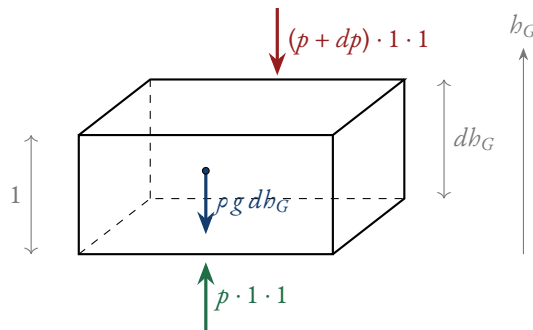
3 L'equazione idrostatica

Dove stiamo andando

Vogliamo una relazione fra la pressione p e la quota. La otteniamo con il più classico degli strumenti della meccanica: l'*equilibrio di un elementino*. Il risultato — l'equazione idrostatica — vale per qualunque fluido in quiete: l'aria dell'atmosfera come l'acqua del mare. E infatti il primo esercizio lo faremo... in un serbatoio d'acqua.

3.1 L'equilibrio dell'elementino di fluido

Consideriamo un elementino di aria *in quiete*, a forma di parallelepipedo: base quadrata di lato unitario ($1\text{ m} \times 1\text{ m}$, per comodità) e altezza infinitesima dh_G . Sulla faccia inferiore agisce la pressione p , che spinge *verso l'alto* con una forza $p \cdot 1 \cdot 1 = p$. La faccia superiore si trova un po' più in alto, e poiché la pressione varia con la quota, lì la pressione vale $p + dp$: essa spinge *verso il basso* con una forza $(p + dp) \cdot 1 \cdot 1$. Infine c'è il peso: il volume dell'elementino è $1 \cdot 1 \cdot dh_G = dh_G$, la sua massa è ρdh_G e il suo peso è $g\rho dh_G$, diretto verso il basso.



Il bilancio delle forze sull'elementino di fluido in quiete: pressione da sotto, pressione da sopra, peso.

L'elementino è fermo, quindi le tre forze devono equilibrarsi:

$$p = (p + dp) + \rho g dh_G,$$

da cui, semplificando p ,

$$\boxed{dp = -\rho g dh_G} \quad (3)$$

Questa è l'**equazione idrostatica**. Leggiamola con calma, perché dice tre cose importanti.

1. **Il segno meno.** Se salgo ($dh_G > 0$) la pressione *diminuisce* ($dp < 0$): sopra di me c'è meno colonna d'aria a premere. È l'esperienza delle orecchie che si «stappano» in funivia o in aereo.
2. **È un'equazione differenziale.** Collega una variazione infinitesima di pressione dp a una variazione infinitesima di quota dh_G . Per ottenere $p(h_G)$ dovremo *integrarla* — e per farlo dovremo sapere come variano ρ e g lungo il cammino.

3. **Vale per qualunque fluido in quiete.** Non abbiamo mai detto che il fluido è aria: la (3) governa anche l'acqua di un serbatoio, di un lago, dell'oceano. Cambia solo il modo in cui ρ dipende (o non dipende) dalla posizione.

3.2 Il caso facile: il liquido incompressibile

Prima di affrontare l'atmosfera — dove ρ cambia con la quota — alleniamoci sul caso in cui ρ è costante: un liquido. Se $\rho = \text{cost}$ e $g = \text{cost}$, la (3) si integra a vista fra la superficie libera (dove $p = p_{\text{atm}}$) e la profondità z (misurata verso il basso, quindi $dz = -dh_G$):

$$p(z) = p_{\text{atm}} + \rho g z \quad (\text{legge di Stevino}). \quad (4)$$

Esercizio 3.1 — Il serbatoio d'acqua dell'aeroporto

Un serbatoio antincendio a pianta rettangolare, aperto in sommità, è profondo $H = 3$ m; una delle pareti verticali è larga $L = 6$ m. Il serbatoio è pieno d'acqua ($\rho_w = 1\,000 \text{ kg/m}^3$) e si trova al livello del mare. Calcolare: (a) la pressione relativa e assoluta sul fondo; (b) la forza risultante esercitata dall'acqua sulla parete.

Dati. $H = 3$ m; $L = 6$ m; $\rho_w = 1\,000 \text{ kg/m}^3$; $g_0 = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$; $p_0 = 101\,325 \text{ Pa}$.

Fase A. *La pressione sul fondo.*

Applichiamo la legge di Stevino (4) alla profondità $z = H$. La *pressione relativa* (cioè in più rispetto a quella atmosferica) vale

$$p_{\text{rel}} = \rho_w g_0 H = 1000 \cdot 9,80665 \cdot 3 = 29\,420 \text{ Pa} \simeq 29,4 \text{ kPa}.$$

La *pressione assoluta* somma anche l'atmosfera che preme sul pelo libero:

$$p_{\text{ass}} = p_0 + \rho_w g_0 H = 101\,325 + 29\,420 = 130\,745 \text{ Pa} \simeq 1,29 \text{ atm}.$$

Fase B. *La forza sulla parete: perché si integra.*

Sulla parete la pressione *non è uniforme*: vale zero (relativa) al pelo libero e cresce linearmente fino a $\rho_w g_0 H$ sul fondo. La forza si ottiene quindi integrando la pressione sulle strisciole orizzontali di area $L dz$:

$$F = \int_0^H \rho_w g_0 z L dz = \rho_w g_0 L \frac{H^2}{2}.$$

Notate la struttura: la pressione media $\rho_w g_0 H/2$ moltiplicata per l'area bagnata LH . Sostituendo:

$$F = 1000 \cdot 9,80665 \cdot 6 \cdot \frac{3^2}{2} = 264\,780 \text{ N} \simeq 265 \text{ kN}.$$

Fase C. *Dove «passa» la risultante.*

Poiché il diagramma delle pressioni è triangolare, la risultante passa per il baricentro del triangolo: a $\frac{2}{3}H = 2$ m sotto il pelo libero. È per questo che le paratie e le dighe sono più robuste in basso: è lì che il carico si concentra.

Risultato. $p_{\text{rel}} = 29,4 \text{ kPa}$; $p_{\text{ass}} \simeq 130,7 \text{ kPa}$; $F \simeq 265 \text{ kN}$ applicata a 2 m di profondità. Circa 27 tonnellate-peso su una parete di 18 m^2 : l'idrostatica non scherza. Ed è la *stessa* equazione che fra poco ci darà la pressione a 11 000 m di quota.

Il senso di tutto questo

Nel liquido l'integrazione era immediata perché ρ era costante. Nell'atmosfera ρ diminuisce salendo, e anche g diminuisce (poco, ma diminuisce). Il prossimo passo è un'idea furba per sbarazzarci della variabilità di g : la quota geopotenziale.

4 La quota geopotenziale

Dove stiamo andando

Per integrare l'equazione idrostatica converrebbe che g fosse costante. La comunità aeronautica ha adottato una convenzione elegante: si *assume* $g = g_0$ costante, e in cambio si accetta di lavorare con una quota leggermente «fittizia», la quota geopotenziale h . Qui capiamo che cos'è, ricaviamo il legame esatto con la quota geometrica h_G e vediamo con i numeri quanto (poco) differiscano.

4.1 Una quota definita da un'equazione

Riscriviamo l'equazione idrostatica (3) in due versioni:

$$dp = -\rho g dh_G \quad (g \text{ variabile, quota geometrica}), \quad (5)$$

$$dp = -\rho g_0 dh \quad (g_0 \text{ costante, quota... nuova}). \quad (6)$$

La (5) è la fisica vera. La (6) è la versione comoda: ma se vogliamo che le due espressioni diano lo stesso dp per lo stesso strato d'aria, e $g_0 \neq g$, allora necessariamente $dh \neq dh_G$. Dividendo membro a membro:

$$1 = \frac{g_0}{g} \frac{dh}{dh_G} \quad \Rightarrow \quad dh = \frac{g}{g_0} dh_G. \quad (7)$$

Abbiamo così *definito* una nuova quota h , detta **quota geopotenziale**: quella quota fittizia che rende esatta l'equazione idrostatica scritta con g_0 costante. Poiché $g < g_0$ appena si sale, risulta $dh < dh_G$: la quota geopotenziale «cresce un po' più lentamente» di quella geometrica.

Il senso fisico: l'energia potenziale

Il nome non è casuale: $g dh_G$ è il lavoro (per unità di massa) necessario a sollevarsi di dh_G nella gravità vera; $g_0 dh$ è lo stesso lavoro calcolato con la gravità di riferimento. La quota geopotenziale è dunque una quota «pesata sull'energia»: due punti alla stessa h hanno la stessa energia potenziale per unità di massa. Per i nostri scopi, però, basta la lettura pratica: è la quota che rende costante g nei conti.

4.2 Il legame esatto fra h e h_G

Sostituiamo la legge di variazione della gravità (2) nella (7):

$$dh = \frac{r^2}{(r + h_G)^2} dh_G.$$

Integriamo da livello del mare (dove, per convenzione, $h = h_G = 0$) fino a un punto generico:

$$\int_0^h dh = \int_0^{h_G} \frac{r^2}{(r + h_G)^2} dh_G \quad \Rightarrow \quad h = r^2 \left[\frac{-1}{r + h_G} \right]_0^{h_G} = r^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + h_G} \right),$$

da cui, mettendo a denominatore comune,

$$\boxed{h = \frac{r}{r + h_G} h_G} \quad \text{e, invertendo,} \quad h_G = \frac{r}{r - h} h. \quad (8)$$

Poiché r è enorme rispetto alle quote di volo, il fattore $r/(r + h_G)$ è vicinissimo a 1: h e h_G quasi coincidono. Vediamolo con i numeri.

Esercizio 4.1 — Gravità e quota geopotenziale a 10 km

Per la quota geometrica $h_G = 10\,000$ m (crociera tipica di un liner) calcolare: (a) la gravità locale g ; (b) la quota geopotenziale h ; (c) la quota geometrica alla quale la differenza $h_G - h$ raggiunge l'1 % di h .

Dati. $h_G = 10\,000$ m; $r = 6,356\,766 \times 10^6$ m; $g_0 = 9,806\,65$ m/s².

Fase A. *La gravità in quota.*

Dalla (2):

$$g = g_0 \left(\frac{r}{r + h_G} \right)^2 = 9,80665 \left(\frac{6\,356\,766}{6\,366\,766} \right)^2 = 9,775\,87 \text{ m/s}^2.$$

La riduzione è dello 0,31 %: per il calcolo del peso di un velivolo in crociera è del tutto trascurabile.

Fase B. *La quota geopotenziale.*

Dalla (8):

$$h = \frac{r}{r + h_G} h_G = \frac{6\,356\,766}{6\,366\,766} \cdot 10\,000 = 9\,984,3 \text{ m}.$$

La differenza è di appena 15,7 m su diecimila: lo 0,16 %. Ecco perché, alle quote degli aeroplani, si può spesso confondere h con h_G senza rimorsi.

Fase C. *Dove la differenza vale l'1 %.*

Imponiamo $h_G - h = 0,01 h$, cioè $h_G = 1,01 h$. Dalla (8), $h_G/h = (r + h_G)/r$, quindi

$$\frac{r + h_G}{r} = 1,01 \quad \Rightarrow \quad h_G = 0,01 r = 63\,568 \text{ m} \simeq 63,6 \text{ km}.$$

Verifica: a quella quota $h = 62\,939$ m e $h_G - h = 629$ m, che è esattamente l'1 % di h .

Risultato. $g(10 \text{ km}) = 9,776 \text{ m/s}^2$ (−0,31 %); $h = 9\,984 \text{ m}$ (−0,16 %); la differenza fra le due quote supera l'1 % solo oltre ~ 64 km — quote da rientro di veicoli spaziali, non da aeroplani. Morale: la quota geopotenziale è un artificio di calcolo raffinato ma, per il volo atmosferico, numericamente quasi invisibile.

A che cosa serve davvero la quota geopotenziale

A una cosa sola: *costruire le tabelle*. Le formule dell'aria tipo che ricaveremo fra poco contengono g_0 e h (non g e h_G), perché nascono dall'ipotesi $g = g_0$. Le tabelle riportano poi entrambe le colonne: la prima è h_G (la quota «vera», pratica, a valori tondi), la seconda è la h corrispondente, usata per generare p , T e ρ . Una volta capito il meccanismo, nell'uso quotidiano parleremo sempre di quota geometrica.

Il senso di tutto questo

Abbiamo tutti gli strumenti: l'equazione idrostatica scritta con g_0 costante e la quota geopotenziale che la rende esatta. Manca l'ultimo ingrediente — il comportamento della temperatura — e potremo finalmente *costruire* l'aria tipo, strato per strato.

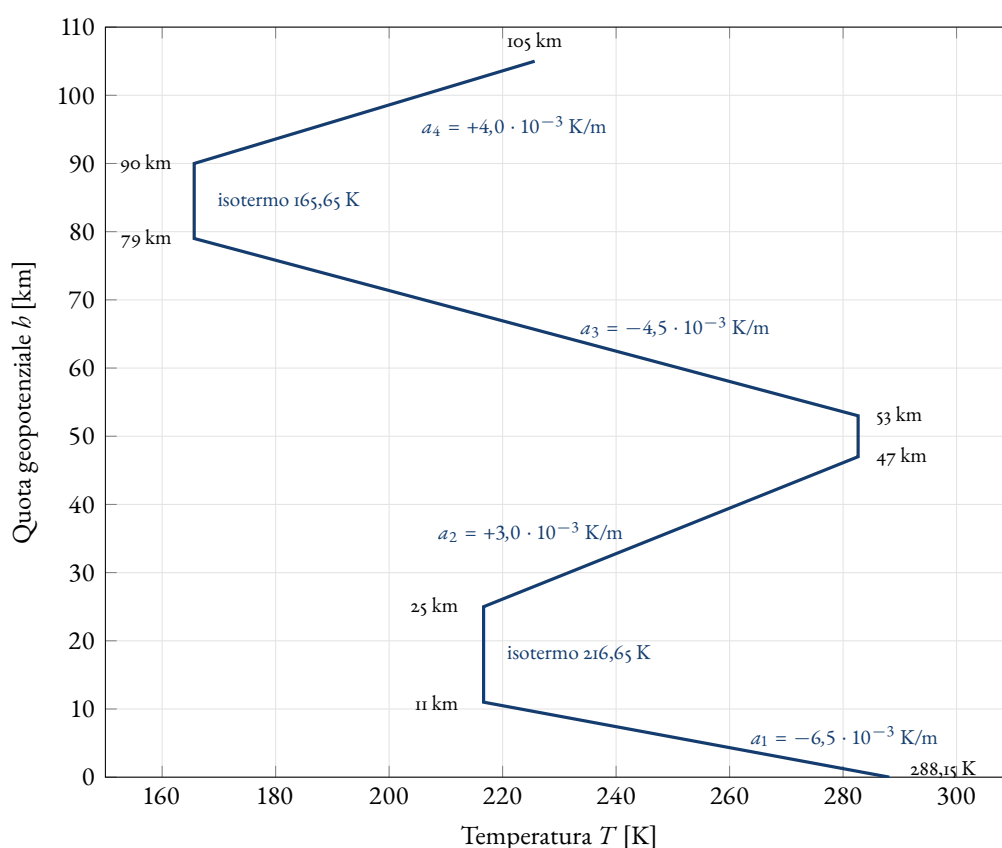
5 La costruzione dell'aria tipo

Dove stiamo andando

Qui accade tutto. Assegnato per via sperimentale il profilo di temperatura $T(h)$ — una spezzata di tratti verticali (strati *isotermi*) e tratti inclinati (strati *a gradiente*) —, la pressione e la densità seguono *per forza* dalle leggi della fisica: equazione idrostatica più equazione di stato. Ricaviamo le quattro formule fondamentali e le usiamo subito in tre esercizi, salendo di quota un po' alla volta.

5.1 La chiave di volta: il profilo di temperatura

La pietra angolare dell'aria tipo è una variazione di T con la quota *definita per convenzione* sulla base delle misure sperimentali. Il profilo è una spezzata: tratti a temperatura costante (**strati isotermi**) alternati a tratti in cui T varia linearmente (**strati a gradiente**).



Il profilo convenzionale di temperatura dell'aria tipo: una spezzata di strati a gradiente e strati isotermi, dal livello del mare a 105 km.

Nel primo tratto — la **troposfera**, da 0 a 11 km — la temperatura scende con **gradiente termico verticale** (in inglese *lapse rate*) $a_1 = -6,5 \times 10^{-3} \text{ K/m}$: circa mezzo grado in meno ogni cento metri di salita, sei gradi e mezzo ogni chilometro. Segue lo strato isoterma della bassa **stratosfera** (da 11 km–25 km, $T = 216,65 \text{ K} \simeq -56,5^\circ \text{C}$: la «quota di crociera fredda» dei jet), poi un tratto in cui la temperatura *risale* (è l'ozono che assorbe l'ultravioletto solare), un nuovo isoterma, una lunga discesa nella **mesosfera**, un isoterma gelido a 165,65 K e infine una risalita. In formule, per ogni strato a gradiente:

$$a \equiv \frac{dT}{dh} = \text{costante dello strato}, \quad T = T_1 + a(h - h_1), \quad (9)$$

dove il pedice i indica la **base** dello strato.

5.2 Da $T(h)$ a $p(h)$ e $\rho(h)$: la derivazione

Ora la fisica. Dividiamo l'equazione idrostatica (6) per l'equazione di stato dei gas perfetti $p = \rho R T$:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho g_0}{\rho R T} dh = -\frac{g_0}{R T} dh. \quad (10)$$

Questa relazione è il motore di tutto: lega la variazione *percentuale* di pressione alla quota, attraverso la temperatura. La integriamo separatamente nei due tipi di strato.

Strati isotermi. Qui $T = T_1 = \text{cost}$, quindi g_0 , R e T escono dall'integrale (è proprio la semplificazione permessa dalla quota geopotenziale!):

$$\int_{p_1}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g_0}{R T} \int_{b_1}^b dh \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{p}{p_1} = -\frac{g_0}{R T} (b - b_1),$$

cioè

$$\boxed{\frac{p}{p_1} = e^{-\frac{g_0}{RT}(b-b_1)}} \quad (11)$$

Per la densità usiamo l'equazione di stato: essendo T costante, $p/p_1 = \rho T/(\rho_1 T_1) = \rho/\rho_1$, dunque

$$\boxed{\frac{\rho}{\rho_1} = e^{-\frac{g_0}{RT}(b-b_1)}} \quad (12)$$

Nell'isoterma pressione e densità calano con la *stessa* legge esponenziale.

Strati a gradiente. Qui T varia secondo la (9); da $a = dT/dh$ ricaviamo $dh = dT/a$ e sostituiamo nella (10):

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0}{a R} \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad \int_{p_1}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g_0}{a R} \int_{T_1}^T \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{p}{p_1} = -\frac{g_0}{a R} \ln \frac{T}{T_1},$$

da cui

$$\boxed{\frac{p}{p_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{-\frac{g_0}{aR}}} \quad (13)$$

Per la densità, dall'equazione di stato $p/p_1 = (\rho/\rho_1)(T/T_1)$, quindi

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{p}{p_1} \left(\frac{T}{T_1}\right)^{-1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{-\frac{g_0}{aR}} \left(\frac{T}{T_1}\right)^{-1},$$

cioè

$$\boxed{\frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{-\left(\frac{g_0}{aR}+1\right)}} \quad (14)$$

Le quattro formule, in una riga ciascuna

Strato	Pressione	Densità
Isoterma	$\frac{p}{p_1} = e^{-\frac{g_0}{RT}(b-b_1)}$	$\frac{\rho}{\rho_1} = e^{-\frac{g_0}{RT}(b-b_1)}$
A gradiente	$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{-g_0/(aR)}$	$\frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{-[g_0/(aR)+1]}$

con $T = T_1 + a(b - b_1)$ negli strati a gradiente. Il pedice 1 indica sempre la *base dello strato in cui ci troviamo*: è l'errore più frequente negli esercizi.

5.3 L'incollaggio degli strati

Come si costruisce, in pratica, la tabella dell'aria tipo? Si parte dal livello del mare con i valori convenzionali

$$T_0 = 288,15 \text{ K}, \quad p_0 = 101\,325 \text{ Pa}, \quad \rho_0 = 1,225\,0 \text{ kg/m}^3, \quad (15)$$

e si sale nel primo strato a gradiente con le (13)–(14) fino a 11 km. I valori così ottenuti a 11 km diventano i valori di base (T_1, p_1, ρ_1) dello strato isoterma successivo, nel quale si prosegue con le (11)–(12) fino a 25 km; e così via, strato dopo strato, come una cordata che riparte ogni volta dall'ultimo campo base. Ogni riga delle tabelle in appendice A nasce esattamente così.

L'errore classico: sbagliare campo base

Volete p a 16 km? *Non* potete usare la formula esponenziale partendo dal livello del mare: il livello del mare non è la base dello strato isoterma! Dovete prima arrivare a 11 km con le formule del gradiente, e solo da lì applicare l'esponenziale con $b - b_1 = 16 - 11 = 5$ km. Ogni formula vale *solo dentro il proprio strato*.

Adesso, i conti. Tre esercizi in salita: la tropopausa, lo strato isoterma, e un salto a 30 km attraverso tre strati.

Esercizio 5.1 — Salita alla tropopausa: T, p, ρ a 11 km

Calcolare temperatura, pressione e densità dell'aria tipo alla quota geopotenziale $h = 11\,000$ m (la *tropopausa*, confine superiore della troposfera).

Dati. Valori al suolo: $T_0 = 288,15 \text{ K}$, $p_0 = 101\,325 \text{ Pa}$, $\rho_0 = 1,225\,0 \text{ kg/m}^3$.

Gradiente: $a_1 = -6,5 \times 10^{-3} \text{ K/m}$; $R = 287,05 \text{ J/(kg K)}$; $g_0 = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$.

Fase A. La temperatura (è la parte definita).

La temperatura non si calcola con la fisica: è *assegnata* dal profilo convenzionale (9):

$$T = T_0 + a_1 h = 288,15 - 0,0065 \cdot 11\,000 = 288,15 - 71,50 = 216,65 \text{ K} (\simeq -56,5^\circ \text{C}).$$

Fase B. L'esponente del gradiente.

Calcoliamo una volta per tutte l'esponente che compare nelle (13) e (14):

$$\frac{g_0}{a_1 R} = \frac{9,80665}{(-0,0065) \cdot 287,05} = -5,2559,$$

$$-\frac{g_0}{a_1 R} = 5,2559, \quad -\left(\frac{g_0}{a_1 R} + 1\right) = 4,2559.$$

Questi due numeri — 5,26 e 4,26 circa — valgono per *tutta* la troposfera: conviene impararli a riconoscere.

Fase C. Pressione e densità.

Il rapporto di temperature vale $T/T_0 = 216,65/288,15 = 0,75187$. Allora

$$p = p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{5,2559} = 101\,325 \cdot (0,75187)^{5,2559} = 101\,325 \cdot 0,22336 = 22\,632 \text{ Pa},$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{4,2559} = 1,2250 \cdot (0,75187)^{4,2559} = 1,2250 \cdot 0,29707 = 0,3639 \text{ kg/m}^3.$$

Risultato. A 11 km: $T = 216,65 \text{ K}$, $p \simeq 22\,630 \text{ Pa}$, $\rho \simeq 0,364 \text{ kg/m}^3$. Guardate i rapporti: la pressione è scesa al 22 % del valore al suolo, la densità al 30 %, la temperatura (assoluta) al 75 %. In un liner in crociera, fuori dal finestrino, c'è meno di un quarto dell'aria che respirate a terra: ecco perché la cabina è pressurizzata. Questi tre valori diventano ora il *campo base* per lo strato isoterma.

Esercizio 5.2 — Nello strato isoterma: T, p, ρ a 16 km

Calcolare i valori dell'aria tipo a $h = 16\,000 \text{ m}$.

Dati. Base dello strato isoterma (dall'esercizio precedente): $h_1 = 11\,000 \text{ m}$, $T_1 = 216,65 \text{ K}$, $p_1 = 22\,632 \text{ Pa}$, $\rho_1 = 0,3639 \text{ kg/m}^3$.

Fase A. Riconoscere lo strato giusto.

Fra 11 e 25 km l'aria tipo è isoterma: $T = 216,65 \text{ K}$, punto. Restano da calcolare p e ρ con le (11)–(12), misurando le quote *dalla base dello strato*: $h - h_1 = 16\,000 - 11\,000 = 5\,000 \text{ m}$.

Fase B. L'esponente dell'esponenziale.

$$\frac{g_0}{R T} = \frac{9,80665}{287,05 \cdot 216,65} = 1,5769 \times 10^{-4} / \text{m},$$

$$\frac{g_0}{R T} (h - h_1) = 1,5769 \cdot 10^{-4} \cdot 5000 = 0,78845.$$

Fase C. Pressione e densità.

$$p = p_1 e^{-0,78845} = 22\,632 \cdot 0,45455 = 10\,287 \text{ Pa},$$

$$\rho = \rho_1 e^{-0,78845} = 0,3639 \cdot 0,45455 = 0,1654 \text{ kg/m}^3.$$

Notate: stesso fattore di riduzione per entrambe, perché a T costante p e ρ sono proporzionali.

Risultato. A 16 km: $T = 216,65 \text{ K}$, $p \simeq 10\,290 \text{ Pa}$ (un decimo di atmosfera), $\rho \simeq 0,165 \text{ kg/m}^3$. In cinque chilometri di isoterma l'aria si è più che dimezzata: è la matematica spietata dell'esponenziale.

Esercizio 5.3 — Tre strati in un colpo solo: p e ρ a 30 km

Un pallone stratosferico da ricerca raggiunge la quota geopotenziale di 30 km. Calcolare T, p e ρ dell'aria tipo a quella quota.

Dati. Percorso: gradiente $a_1 = -6,5 \times 10^{-3} \text{ K/m}$ fino a 11 km; isoterma 216,65 K fino a 25 km; gradiente $a_2 = 3,0 \times 10^{-3} \text{ K/m}$ da 25 km in su.

Fase A. Il piano di volo (dei calcoli).

La quota richiesta sta nel *terzo* strato. Ci servono dunque i valori di base a 25 km, che a loro volta richiedono quelli a 11 km. La strategia è sempre la stessa: si sale un campo base alla volta. I valori a 11 km li abbiamo già ($p_{11} = 22\,632 \text{ Pa}$, $\rho_{11} = 0,3639 \text{ kg/m}^3$).

Fase B. Campo base a 25 km (isotermo, 14 km di salita).

Con $h - h_1 = 25\,000 - 11\,000 = 14\,000$ m e l'esponente già noto $g_0/(RT) = 1,5769 \times 10^{-4}/\text{m}$:

$$\frac{g_0}{RT}(h - h_1) = 1,5769 \cdot 10^{-4} \cdot 14\,000 = 2,2077, \quad e^{-2,2077} = 0,10996.$$

$$p_{25} = 22\,632 \cdot 0,10996 = 2\,489 \text{ Pa}, \quad \rho_{25} = 0,3639 \cdot 0,10996 = 0,040\,01 \text{ kg/m}^3.$$

Fase C. L'ultimo tratto: gradiente positivo fino a 30 km.

Temperatura a 30 km:

$$T = 216,65 + 0,0030(30\,000 - 25\,000) = 216,65 + 15,00 = 231,65 \text{ K}.$$

Esponente del secondo gradiente:

$$-\frac{g_0}{a_2 R} = -\frac{9,80665}{0,0030 \cdot 287,05} = -11,388, \quad -\left(\frac{g_0}{a_2 R} + 1\right) = -12,388.$$

Con $T/T_1 = 231,65/216,65 = 1,06924$:

$$p = p_{25} (1,06924)^{-11,388} = 2489 \cdot 0,46657 = 1\,161 \text{ Pa},$$

$$\rho = \rho_{25} (1,06924)^{-12,388} = 0,04001 \cdot 0,43636 = 0,017\,46 \text{ kg/m}^3.$$

Attenzione ai segni: qui $a_2 > 0$, quindi l'esponente è *negativo*: la temperatura sale ma la pressione continua comunque a scendere — come deve, perché l'idrostatica non perdona.

Risultato. A 30 km: $T = 231,65$ K, $p \simeq 1\,161$ Pa (poco più dell'1% di p_0), $\rho \simeq 0,017\,5$ kg/m³ (l'1,4% di ρ_0). Il pallone galleggia in un'aria 70 volte più rarefatta di quella al suolo. E abbiamo visto il metodo generale: *qualunque* quota si raggiunge incollando gli strati uno dopo l'altro.

Il senso di tutto questo

Sappiamo costruire ogni riga della tabella dell'aria tipo. Ma nella pratica professionale le righe sono già costruite: bisogna saperle *leggere*, anche quando il valore cercato cade fra due righe. È il mestiere dell'interpolazione lineare.

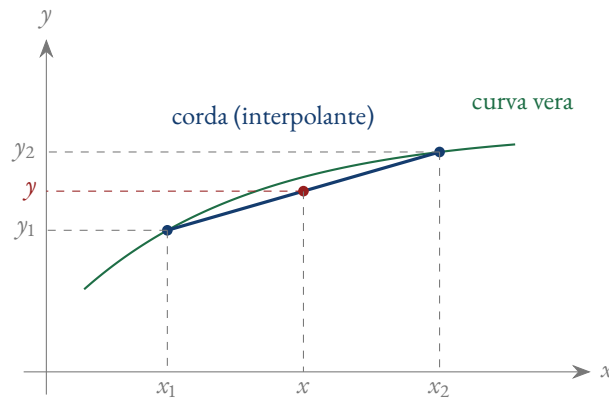
6 Interpolazione lineare: leggere le tabelle fra le righe

Dove stiamo andando

Le tabelle procedono a passi regolari, ma la realtà no: la quota, la pressione o il coefficiente che ci servono cadono quasi sempre *fra* due righe. L'**interpolazione lineare** risolve il problema assumendo che, fra due valori tabulati vicini, la grandezza vari lungo una retta. È lo strumento più usato dell'intero corso di Costruzioni: lo ritroverete nelle tavole dell'aria tipo, nelle polari dei profili, nelle tabelle dei fattori di concentrazione degli sforzi, nei diagrammi di flusso comprimibile. Impararlo bene adesso significa non doverci più pensare dopo.

6.1 L'idea geometrica: sostituire la curva con la sua corda

Immaginiamo di conoscere una grandezza y soltanto in due punti tabulati: y_1 in corrispondenza di x_1 e y_2 in corrispondenza di x_2 . Non sappiamo come si comporta y fra quei due punti: la tabella tace. L'ipotesi più semplice e onesta è che, in quel breve tratto, la funzione sia *quasi rettilinea*; sostituiamo allora l'arco di curva sconosciuto con la **corda** che unisce i due punti noti, e leggiamo su di essa il valore cercato.



L'interpolazione lineare sostituisce l'arco di curva ignoto (verde) con la corda (blu) fra i due punti tabulati: il valore cercato y si legge sulla corda in corrispondenza di x .

6.2 La formula, ricavata in due modi

Primo modo: i triangoli simili (le proporzioni). Guardando la figura, il punto interpolato divide l'intervallo orizzontale nella stessa proporzione in cui divide quello verticale (è la geometria dei triangoli simili). In altre parole, la frazione di cammino percorsa in orizzontale

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

è uguale alla frazione percorsa in verticale, $(y - y_1)/(y_2 - y_1)$. Uguagliando le due frazioni e risolvendo per y :

$$y = y_1 + (y_2 - y_1) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (16)$$

Il parametro $t \in [0, 1]$ è la nostra «posizione relativa» fra le due righe: $t = 0$ ci riporta a (x_1, y_1) , $t = 1$ a (x_2, y_2) , $t = 0,5$ sta esattamente a metà.

Secondo modo: la retta per due punti. La stessa formula è la retta passante per i due punti noti. La sua pendenza (il rapporto incrementale) è

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

e l'equazione della retta in forma punto-pendenza è $y = y_1 + m(x - x_1)$, che coincide con la (16). Due strade, una sola formula: è sempre un buon segno.

6.3 Interpolazione inversa: trovare x noto y

Spesso il problema è rovesciato: conosciamo il valore y (per esempio una pressione misurata) e vogliamo la x corrispondente (la quota). Basta invertire la (16), o ripartire dalle proporzioni, ottenendo

$$x = x_1 + (x_2 - x_1) \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (17)$$

È la forma che useremo per le quote di pressione e di densità. Nelle tavole dell'aria tipo, dove p e ρ *diminuiscono* salendo, il numeratore e il denominatore risultano entrambi negativi: il segno si elide e la frazione resta correttamente compresa fra 0 e 1. Non serve memorizzare i versi — basta scrivere le differenze nell'ordine (valore — riga inferiore) sopra e sotto.

Interpolare sì, estrapolare con giudizio

La (16) è affidabile solo *dentro* l'intervallo $[x_1, x_2]$ delimitato da due righe adiacenti. Usare la stessa retta *fuori* da quell'intervallo — **estrapolazione** — è pericoloso: la funzione reale può cambiare pendenza o addirittura direzione appena oltre l'ultimo punto noto. Nell'aria tipo, per esempio, la retta della troposfera non ha alcun senso oltre la tropopausa, dove la temperatura smette di scendere (lo verificheremo nell'esercizio proposto n. 11). Regola pratica: interpolare fra righe vicine è sicuro; estrapolare è un salto nel buio.

6.4 Quanto vale l'errore?

Sostituire una curva con la sua corda introduce un errore. Per una funzione $y = f(x)$ derivabile due volte, l'errore di interpolazione in un punto interno all'intervallo di ampiezza $\Delta x = x_2 - x_1$ è limitato da

$$|E| \leq \frac{(\Delta x)^2}{8} \max_{[x_1, x_2]} |f''(x)|. \quad (18)$$

Due letture importanti si nascondono in questa formula.

- **L'errore va col quadrato del passo.** Dimezzare la distanza fra le righe riduce l'errore a un quarto. È il motivo per cui le tavole tecniche «infittiscono» i passi dove le grandezze variano rapidamente.
- **L'errore è governato dalla curvatura.** Dove la funzione è quasi rettilinea ($f'' \simeq 0$) l'interpolazione è quasi esatta; dove piega molto, l'errore cresce. Ecco perché la temperatura dell'aria tipo — rettilinea a tratti — si interpola *senza alcun errore* nella troposfera, mentre pressione e densità — esponenziali, quindi convesse — danno un piccolo scarto.

La corda sta sopra o sotto?

Per una funzione **convessa** (che «tiene l'acqua», come l'esponenziale della pressione) la corda sta sempre *sopra* la curva: l'interpolazione lineare *soprastima* il valore vero. Per una funzione **concava** accade il contrario. È un controllo di qualità immediato: nell'esercizio dell'aria tipo a 3 050 m il valore interpolato della pressione risultò infatti di pochissimo *superiore* a quello esatto, esattamente come previsto.

6.5 Tabelle a doppia entrata: la doppia interpolazione

Molte tabelle di progetto dipendono da *due* parametri contemporaneamente: il fattore di concentrazione degli sforzi in un raccordo dipende dai rapporti geometrici D/d e r/d ; un coefficiente aerodinamico può dipendere da numero di Mach e incidenza. Se il punto cercato cade fra quattro nodi della tabella, si interpola **due volte**: prima lungo una direzione (fissando l'altra), poi lungo la seconda. Il metodo si chiama **interpolazione bilineare** e l'ordine delle due direzioni è indifferente — il risultato è lo stesso. Lo mostreremo nell'esercizio svolto n. 3.

Esercizio 6.1 — Interpolare e verificare: l'aria tipo a 3 050 m

Determinare T , p e ρ dell'aria tipo alla quota geometrica $h_G = 3\,050$ m: (a) per interpolazione bilineare fra le righe a 3 000 m e 4 000 m della tabella in appendice A; (b) con le formule esatte del §5;

(c) confrontando i risultati.

Dati. Righe di tabella: $h_G = 3\,000\text{ m}$ ($T = 268,66\text{ K}$, $p = 70\,121\text{ Pa}$, $\rho = 0,909\,3\text{ kg/m}^3$) e $h_G = 4\,000\text{ m}$ ($T = 262,17\text{ K}$, $p = 61\,660\text{ Pa}$, $\rho = 0,819\,3\text{ kg/m}^3$).

Fase A. *L'interpolazione.*

La frazione di intervallo percorsa è $t = (3050 - 3000)/(4000 - 3000) = 0,05$: siamo appena sopra la prima riga. Allora, dalla (16),

$$T \simeq 268,66 + 0,05 (262,17 - 268,66) = 268,33\text{ K},$$

$$p \simeq 70\,121 + 0,05 (61\,660 - 70\,121) = 69\,698\text{ Pa},$$

$$\rho \simeq 0,9093 + 0,05 (0,8193 - 0,9093) = 0,904\,8\text{ kg/m}^3.$$

Fase B. *Il calcolo esatto.*

Prima la quota geopotenziale (eq. 8): $h = \frac{r}{r+h_G} h_G = 3\,048,5\text{ m}$. Poi il primo gradiente:

$$T = 288,15 - 0,0065 \cdot 3048,5 = 268,33\text{ K}, \quad \frac{T}{T_0} = 0,93122,$$

$$p = 101\,325 (0,93122)^{5,2559} = 69\,677\text{ Pa},$$

$$\rho = 1,2250 (0,93122)^{4,2559} = 0,904\,6\text{ kg/m}^3.$$

Fase C. *Il confronto.*

Sulla temperatura l'interpolazione è *esatta* (nella troposfera T è davvero una retta, quindi $f'' = 0$!). Su p e ρ gli scarti valgono rispettivamente $+21\text{ Pa}$ ($+0,03\%$) e $+1,7 \times 10^{-4}\text{ kg/m}^3$ ($+0,02\%$): l'errore c'è — $p(h)$ e $\rho(h)$ sono esponenziali convesse, e la corda sta *sopra* la curva, come annunciato — ma su un passo di $1\,000\text{ m}$ è irrilevante per qualunque uso tecnico.

Risultato. $T = 268,33\text{ K}$, $p \simeq 69,7\text{ kPa}$, $\rho \simeq 0,905\text{ kg/m}^3$; interpolato ed esatto coincidono entro lo $0,03\%$. Fidatevi dell'interpolazione — ma solo fra righe adiacenti.

Esercizio 6.2 — Interpolazione inversa: a quale quota la pressione vale 50 kPa ?

Un altimetro misura una pressione ambiente $p = 50\,000\text{ Pa}$. Determinare la corrispondente quota di pressione interpolando nella tabella dell'appendice A.

Dati. Righe che racchiudono il valore: $h_G = 5\,000\text{ m}$ ($p_1 = 54\,048\text{ Pa}$) e $h_G = 6\,000\text{ m}$ ($p_2 = 47\,217\text{ Pa}$). Il valore $50\,000\text{ Pa}$ è compreso fra i due, dunque siamo nell'intervallo giusto.

Fase A. *Applicare la formula inversa.*

Cerchiamo $x = h_G$ noto $y = p$: usiamo la (17) scrivendo le differenze nell'ordine «valore meno riga inferiore»:

$$h_G = h_1 + (h_2 - h_1) \frac{p_1 - p}{p_1 - p_2} = 5000 + 1000 \cdot \frac{54\,048 - 50\,000}{54\,048 - 47\,217}.$$

Fase B. *Il conto.*

$$h_G = 5000 + 1000 \cdot \frac{4048}{6831} = 5000 + 1000 \cdot 0,5926 = 5\,592,6\text{ m}.$$

Fase C. *Il controllo esatto.*

Invertendo analiticamente la formula del gradiente troposferico si ottiene $h_G = 5\,579,3$ m: l'interpolazione sovrastima di soli 13,3 m (+0,24 %), coerentemente con il fatto che $p(h)$ è convessa e la corda le sta sopra — qui l'effetto si traduce in una quota leggermente più alta.

Risultato. Quota di pressione $\simeq 5\,593$ m. La formula inversa (17) è esattamente ciò che serve per leggere una tabella «al contrario»: dal valore fisico alla quota.

Esercizio 6.3 — Doppia interpolazione: un fattore di concentrazione degli sforzi

Nel dimensionamento di un albero con gola (raccordo) il fattore di concentrazione degli sforzi K_t dipende da due rapporti geometrici: D/d (diametro maggiore su minore) e r/d (raggio di raccordo su diametro minore). Un estratto di una tabella di progetto fornisce i valori riportati sotto. Determinare K_t per $D/d = 1,7$ e $r/d = 0,08$.

Dati. (estratto di tabella a doppia entrata).

	$D/d = 1,5$	$D/d = 2,0$
$r/d = 0,05$	2,10	2,28
$r/d = 0,10$	1,80	1,94

Fase A. *Prima interpolazione: lungo D/d , a r/d fissato.*

La frazione lungo D/d è $t_D = (1,7 - 1,5)/(2,0 - 1,5) = 0,4$. Interpoliamo su ciascuna delle due righe della tabella:

$$r/d = 0,05 : K_t = 2,10 + 0,4(2,28 - 2,10) = 2,172,$$

$$r/d = 0,10 : K_t = 1,80 + 0,4(1,94 - 1,80) = 1,856.$$

Fase B. *Seconda interpolazione: lungo r/d .*

Ora abbiamo due valori a $D/d = 1,7$: 2,172 (per $r/d = 0,05$) e 1,856 (per $r/d = 0,10$). La frazione lungo r/d è $t_r = (0,08 - 0,05)/(0,10 - 0,05) = 0,6$:

$$K_t = 2,172 + 0,6(1,856 - 2,172) = 1,982.$$

Fase C. *La controprova.*

Se avessimo interpolato prima lungo r/d e poi lungo D/d avremmo ottenuto lo stesso 1,982: l'ordine delle due direzioni è indifferente. È la firma dell'interpolazione bilineare corretta.

Risultato. $K_t \simeq 1,98$. Con due interpolazioni in cascata si legge qualunque tabella a doppia entrata: lo stesso schema vale per le tavole del flusso comprimibile, per i coefficienti aerodinamici e per molte tabelle di normativa.

6.6 Esercizi proposti

I seguenti esercizi si risolvono tutti con le (16)–(17) e, per gli ultimi, con la doppia interpolazione del §6.5. Salvo diverso avviso, usate le righe della tabella dell'appendice A che racchiudono il valore cercato. Le risposte sono in fondo alla sezione.

1. Determinare la temperatura dell'aria tipo alla quota geometrica $h_G = 2\,500$ m, interpolando fra le righe a $2\,000$ m e $3\,000$ m.
2. Determinare la pressione dell'aria tipo a $h_G = 8\,500$ m, interpolando fra $8\,000$ m e $9\,000$ m.
3. Determinare la densità dell'aria tipo a $h_G = 500$ m, interpolando fra 0 m e $1\,000$ m.
4. (*Inversa*) A quale quota di pressione corrisponde una pressione misurata $p = 85\,000$ Pa?
5. (*Inversa*) A quale quota di densità corrisponde una densità misurata $\rho = 0,700$ kg/m³?
6. Determinare la temperatura dell'aria tipo a $h_G = 10\,500$ m (occhio: siete ancora in troposfera).
7. (*Aerodinamica*) La polare di un profilo fornisce $C_L = 0,55$ a $\alpha = 4^\circ$ e $C_L = 0,75$ a $\alpha = 6^\circ$. Stimare C_L a $\alpha = 5,2^\circ$.
8. (*Prestazioni*) Un velivolo ha efficienza $E = 14,2$ a $V = 60$ m/s ed $E = 12,6$ a $V = 80$ m/s. Stimare E a $V = 72$ m/s.
9. (*Strutture*) Da una tabella, il fattore di concentrazione degli sforzi vale $K_t = 1,90$ per $D/d = 1,5$ e $K_t = 2,10$ per $D/d = 2,0$ (a r/d fissato). Stimare K_t per $D/d = 1,7$.
10. (*Doppia entrata*) Con la tabella di $K_t(D/d, r/d)$ dell'esercizio svolto n. 3, determinare K_t per $D/d = 1,8$ e $r/d = 0,06$.
11. (*Il tranello dell'estrapolazione*) Usando *solo* le righe a $9\,000$ m e $10\,000$ m, estrapolate linearmente la temperatura a $h_G = 12\,500$ m. Confrontate poi con il valore vero dell'aria tipo (che a quella quota è nello strato isoterma, $T = 216,65$ K) e commentate l'errore.
12. (*Interpolazione generica*) Un rilievo cinematica fornisce lo spazio percorso $s = 120$ m all'istante $t = 10$ s e $s = 210$ m a $t = 15$ s. Stimare s a $t = 13$ s assumendo variazione lineare.

Risposte agli esercizi proposti

1. $T \simeq 271,9$ K (esatta: in troposfera T è lineare).
2. $p \simeq 33\,226$ Pa $\approx 33,2$ kPa (valore esatto $33\,154$ Pa: scarto $+0,2\%$).
3. $\rho \simeq 1,168$ kg/m³ (esatto $1,167$: scarto $+0,09\%$).
4. $h_G \simeq 1\,470$ m.
5. $h_G \simeq 5\,477$ m.
6. $T \simeq 220,0$ K.
7. $C_L \simeq 0,67$.
8. $E \simeq 13,2$.
9. $K_t \simeq 1,98$.
10. $K_t \simeq 2,14$.
11. Estrapolando si otterrebbe $T \simeq 207,1$ K, mentre il valore vero è $216,65$ K: un errore di quasi $-9,6$ K. L'estrapolazione ignora che oltre la tropopausa la temperatura smette di scendere: è la dimostrazione pratica del perché non si estrapola.
12. $s \simeq 174$ m.

Il senso di tutto questo

Con le formule di costruzione (§5) e l'interpolazione lineare siamo ora pienamente operativi su qualunque tabella: diretta, inversa, a doppia entrata. Prima di usare queste tavole per le «quote convenzionali» del pilota, però, vale la pena fermarsi su due strumenti rapidi che semplificano i calcoli di prestazioni.

7 Due strumenti rapidi: l'atmosfera esponenziale e la velocità di caduta della pressione

Dove stiamo andando

Le formule esatte a strati sono precise ma scomode per i calcoli «in forma chiusa» delle prestazioni. Qui costruiamo un modello approssimato a una sola formula — l'atmosfera esponenziale — e impariamo a stimarne l'errore. Poi rispondiamo a una domanda sottile: la pressione cala più in fretta negli strati isotermi o in quelli a gradiente?

7.1 L'atmosfera esponenziale

Negli strati isotermi la densità segue un'esponenziale pura. L'idea è: e se *fingessimo* che tutta l'atmosfera fosse così? Si scrive

$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{-n b}, \quad (19)$$

con n costante da scegliere con astuzia. È un modello volutamente rozzo, ma la sua forma semplicissima lo rende prezioso per i calcoli approssimati di prestazioni (quota di tangenza, rientro atmosferico, autonomie): una sola formula al posto di una tabella.

Esercizio 7.1 — Taratura e collaudo dell'atmosfera esponenziale

(a) Determinare n imponendo che la (19) restituisca la densità *esatta* a $b = 11\,000$ m. (b) Con questo n , calcolare ρ a 2, 5, 8 e 14 km e confrontare con i valori esatti dell'aria tipo, valutando l'errore percentuale.

Dati. $\rho_0 = 1,225\,0\text{ kg/m}^3$; $\rho(11\text{ km}) = 0,363\,9\text{ kg/m}^3$ (esercizio 5.1).

Fase A. *La taratura.*

Imponiamo la (19) a 11 000 m:

$$\frac{0,3639}{1,2250} = 0,29707 = e^{-n \cdot 11\,000} \implies \ln 0,29707 = -n \cdot 11\,000,$$

$$n = \frac{1,2138}{11\,000} = 1,103\,4 \times 10^{-4}/\text{m}.$$

Il reciproco $1/n \simeq 9\,060$ m è la «quota di scala» del modello: ogni 9 km circa la densità si riduce di un fattore $e \simeq 2,72$.

Fase B. *Il collaudo.*

Calcoliamo $\rho = 1,2250 e^{-1,1034 \cdot 10^{-4} b}$ e confrontiamo con l'aria tipo esatta:

h [km]	ρ approssimata [kg/m ³]	ρ esatta [kg/m ³]	errore
2	0,9824	1,0066	-2,4 %
5	0,7055	0,7361	-4,2 %
8	0,5067	0,5252	-3,5 %
11	0,3639	0,3639	0 (per costruzione)
14	0,2614	0,2267	+15,3 %

Risultato. Con $n = 1,10 \times 10^{-4}/\text{m}$ il modello esponenziale riproduce la densità entro il 4 % circa in tutta la troposfera: più che sufficiente per stime ingegneristiche di prima battuta. Ma appena si esce dall'intervallo di taratura (14 km) l'errore esplode al 15 %: *ogni modello approssimato vale solo nel dominio per cui è stato tarato*. Scrivetelo accanto al risultato, sempre.

7.2 Dove la pressione cala più in fretta?

Torniamo alla relazione motore (10):

$$\frac{(dp/p)}{dh} = -\frac{g_0}{R T} \quad (20)$$

A sinistra c'è la variazione *frazionaria* (percentuale, se moltiplicata per 100) di pressione per metro di salita. A destra compare *solo la temperatura locale*: né la quota in sé, né il tipo di strato. La risposta alla domanda del titolo è dunque elegante: dipende soltanto da quanto è fredda l'aria in quel punto.

Esercizio 7.2 — Il tasso di caduta della pressione a tre quote

Valutare $(dp/p)/dh$ al livello del mare, alla tropopausa e a 20 km, e commentare.

Fase A. *I tre calcoli.*

$$\text{SL } (T = 288,15 \text{ K}) : \quad \frac{(dp/p)}{dh} = -\frac{9,80665}{287,05 \cdot 288,15} = -1,186 \times 10^{-4}/\text{m},$$

$$11 \text{ km } (T = 216,65 \text{ K}) : \quad -\frac{9,80665}{287,05 \cdot 216,65} = -1,577 \times 10^{-4}/\text{m},$$

$$20 \text{ km } (T = 216,65 \text{ K}) : \quad \text{identico a quello della tropopausa: } -1,577 \times 10^{-4}/\text{m}.$$

Fase B. *La lettura fisica.*

Al livello del mare la pressione perde circa l'1,2 % ogni 100 metri (è la sensazione alle orecchie in una rapida discesa in auto da un valico). Salendo nella troposfera l'aria si raffredda e il tasso *aumenta* in valore assoluto: a parità di salita, l'aria fredda — più densa a parità di pressione — «consuma» più pressione. Nello strato isoterma il tasso resta congelato al valore della tropopausa. E nel secondo gradiente, dove T risale, il tasso torna a diminuire. Non esiste quindi una risposta unica valida ovunque: comanda, punto per punto, la temperatura locale.

Risultato. $(dp/p)/dh$ vale $-1,19 \times 10^{-4}/\text{m}$ al suolo e $-1,58 \times 10^{-4}/\text{m}$ a da 11 km–25 km: il tasso frazionario di caduta della pressione dipende *solo* da T . È un risultato piccolo ma profondo: lo ritroveremo nell'altimetro e nel variometro.

Il senso di tutto questo

Abbiamo maneggiato p , T e ρ come funzioni della quota. Il passo successivo è rovesciare il punto di vista, come fa il pilota: dalla misura di p (o T , o ρ) risalire a una «quota convenzionale». Nascono così le quote di pressione, di temperatura e di densità.

8 Quota di pressione, di temperatura e di densità

Dove stiamo andando

Un velivolo in volo non misura la propria quota geometrica con una fettuccia: misura la *pressione* (con l'altimetro), la *temperatura* (con la sonda esterna) e da queste ricava la densità. Le ultime tre «quote» della nostra lista di sei sono quote *convenzionali*: rispondono alla domanda «a quale quota dell'aria tipo corrisponderebbe il valore che sto misurando?». Qui le definiamo e le calcoliamo in tre esercizi, interpolazione compresa.

Il meccanismo è identico per tutte e tre. In volo, a una certa quota geometrica (che non ci interessa nemmeno conoscere), misuriamo la pressione reale dell'aria: diciamo 61 600 Pa. Andiamo in tabella e cerchiamo a quale quota l'aria *tipo* avrebbe quella pressione: la risposta è la **quota di pressione**. Analogamente, la quota dell'aria tipo alla quale la temperatura standard eguaglia la temperatura misurata è la **quota di temperatura**; e la quota alla quale la densità standard eguaglia quella reale (calcolata con $\rho = p/(RT)$ dalle due misure) è la **quota di densità**.

Tre quote convenzionali, in generale *diverse fra loro* e diverse dalla quota geometrica: perché l'atmosfera reale non è l'aria tipo. Sono numeri di comodo che, attraverso le tabelle, agganciano le condizioni reali al riferimento comune.

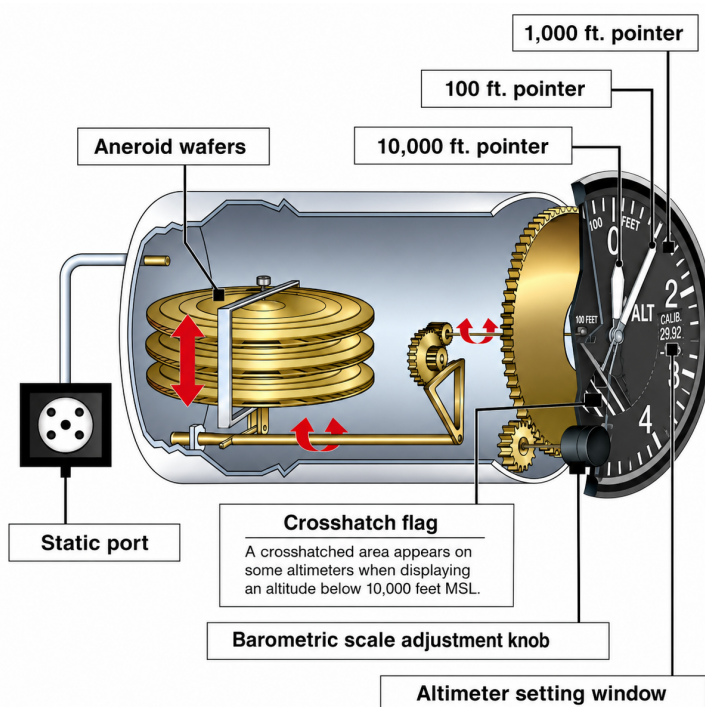


Figura 3. L'altimetro barometrico: misura la pressione statica e la converte in quota *attraverso il modello di aria tipo*. Ciò che indica è, a tutti gli effetti, una quota di pressione.

Perché la quota di densità è quella che conta

Portanza, resistenza e potenza dei motori dipendono da ρ . Due giornate con la stessa quota geometrica ma densità diverse (una torrida, una gelida) danno prestazioni diverse: corse di decollo diverse, rate di salita diversi. La quota di densità è il modo standard di dire «oggi il tuo aeroplano si comporta come se fosse a quest'altra quota». Nelle giornate calde la quota di densità di un aeroporto può superare di molte centinaia di metri la sua quota vera: è un capitolo di sicurezza del volo, non solo di teoria.

Esercizio 8.1 — Dalle misure alle tre quote convenzionali

In volo si misurano una pressione ambiente $p = 45\,000$ Pa e una temperatura ambiente $T = 250$ K. Determinare (a) la quota di pressione, (b) la quota di densità, (c) la quota di temperatura, discutendone l'eventuale ambiguità. Usare la tabella dell'appendice A con interpolazione lineare (righe intermedie a passo 100 m riportate nel testo).

Fase A. Quota di pressione.

Dalla tabella, la pressione 45 000 Pa cade fra le righe $h_1 = 6\,300$ m ($p_1 = 45\,272$ Pa) e $h_2 = 6\,400$ m ($p_2 = 44\,650$ Pa). Interpolando con la (17):

$$h_p = 6300 + 100 \cdot \frac{45\,272 - 45\,000}{45\,272 - 44\,650} = 6300 + 100 \cdot \frac{272}{622} = 6300 + 43,7 = 6\,344 \text{ m.}$$

(Il calcolo esatto, invertendo la formula del gradiente, darebbe 6 343,6 m: l'interpolazione su passo 100 m è praticamente perfetta.)

Fase B. Quota di densità.

Prima la densità reale, dall'equazione di stato:

$$\rho = \frac{p}{R T} = \frac{45\,000}{287,05 \cdot 250} = 0,6271 \text{ kg/m}^3.$$

In tabella questo valore cade fra $h_1 = 6\,400$ m ($\rho_1 = 0,6309 \text{ kg/m}^3$) e $h_2 = 6\,500$ m ($\rho_2 = 0,6238 \text{ kg/m}^3$):

$$h_\rho = 6400 + 100 \cdot \frac{0,6309 - 0,6271}{0,6309 - 0,6238} = 6400 + 100 \cdot 0,542 = 6\,454 \text{ m.}$$

Fase C. Quota di temperatura — e il suo difetto.

Nella troposfera $T = T_0 + a_1 h$, quindi

$$h_T = \frac{T - T_0}{a_1} = \frac{250 - 288,15}{-0,0065} = 5\,869 \text{ m.}$$

Ma guardate il profilo termico: la retta orizzontale $T = 250$ K taglia la spezzata *tre volte*! Oltre che a 5 869 m, anche nel secondo gradiente ($h = 25\,000 + (250 - 216,65)/0,003 \simeq 36\,100$ m) e nel terzo ($h \simeq 60\,300$ m). La quota di temperatura non è univoca: per convenzione si adotta il valore più basso, ma proprio per questa ambiguità è la meno usata delle tre.

Risultato. Quota di pressione 6 344 m; quota di densità 6 454 m; quota di temperatura 5 869 m (valore più basso di tre possibili). Tre numeri diversi per lo stesso punto dell'atmosfera reale: nessuna contraddizione — sono tre proiezioni diverse sulla stessa aria tipo. Notate che $h_\rho > h_p$: l'aria è più *calda* dello standard a quella pressione, dunque meno densa, dunque «equivale» a una quota più alta.

Esercizio 8.2 — Prova di volo: ricostruire la temperatura

Durante una prova di velocità massima in volo livellato, la strumentazione registra che il velivolo si trova simultaneamente a una quota di pressione di 9 000 m e a una quota di densità di 9 500 m. Determinare la temperatura dell'aria alla quota di volo e dire se l'aria era più calda o più fredda dello standard.

Fase A. Tradurre le quote convenzionali in p e ρ .

Le due quote convenzionali *sono* due misure travestite. Quota di pressione 9 000 m significa: la pressione reale eguaglia quella dell'aria tipo a 9 000 m, cioè (tabella) $p = 30\,742$ Pa. Quota di densità 9 500 m significa: la densità reale vale quella standard a 9 500 m, cioè $\rho = 0,438\,9$ kg/m³.

Fase B. L'equazione di stato chiude il cerchio.

p e ρ coesistono nello stesso punto dell'atmosfera reale, dunque sono legate dall'equazione di stato con la T reale:

$$T = \frac{p}{R\rho} = \frac{30\,742}{287,05 \cdot 0,4389} = 244,0 \text{ K} \simeq -29,1 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Fase C. Il confronto con lo standard.

L'aria tipo a 9 000 m prevederebbe $T_{\text{ISA}} = 288,15 - 0,0065 \cdot 9000 = 229,65$ K. L'aria reale era dunque più calda di circa 14 K: in gergo, «ISA+14». È coerente con quanto osservato: aria più calda del previsto $\Rightarrow$ meno densa $\Rightarrow$ quota di densità *superiore* alla quota di pressione.

Risultato. $T \simeq 244$ K ($\simeq -29$ °C), aria più calda dello standard di 14 K. Questo esercizio è il paradigma delle prove di volo: le quote convenzionali servono proprio a *riportare* i dati misurati in condizioni confrontabili.

Esercizio 8.3 — La galleria del vento e la quota simulata

Nella camera di prova di una galleria del vento la pressione statica della corrente vale $p = 0,92$ atm. Quale quota di pressione si sta simulando per il modello in prova?

Fase A. Conversione e ricerca in tabella.

$$p = 0,92 \cdot 101\,325 = 93\,219 \text{ Pa}.$$

In tabella (righe a passo 100 m): $p(700 \text{ m}) = 93\,193$ Pa e $p(800 \text{ m}) = 92\,076$ Pa. Il nostro valore è appena sopra la prima riga.

Fase B. Interpolazione.

Il valore misurato cade fra 600 m e 700 m? No: $93\,219 \text{ Pa} > 93\,193 \text{ Pa} = p(700 \text{ m})$, quindi siamo *sotto* i 700 m. Con $p(600 \text{ m}) = 94\,322$ Pa:

$$h_p = 600 + 100 \cdot \frac{94\,322 - 93\,219}{94\,322 - 93\,193} = 600 + 100 \cdot 0,977 \simeq 698 \text{ m}.$$

(L'inversione esatta dà 697,7 m.)

Risultato. La galleria sta simulando una quota di pressione di circa 700 m. È così che i dati di galleria dialogano con le prove di volo: entrambi vengono ricondotti alla stessa aria tipo.

Il senso di tutto questo

Le quote convenzionali chiudono il quadro «statico». Ma la pressione non varia solo con la quota: per chi *sale o scende*, varia con il tempo. Da questa osservazione nascono il variometro — e un paio di esercizi istruttivi.

9 Quando la quota cambia nel tempo

Dove stiamo andando

Un velivolo in salita attraversa quote a pressione decrescente: la pressione che i suoi strumenti misurano cambia *nel tempo*. La regola di derivazione composta trasforma l'equazione idrostatica in una relazione fra velocità verticale e velocità di variazione della pressione: è il principio del variometro. Due esercizi: un intercettore in salita rapida e... un ascensore.

Se la quota è funzione del tempo, $h = h(t)$, allora anche la pressione ambiente lo è: $p = p(h(t))$. Derivando con la regola della catena e usando l'idrostatica:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = -\rho g_0 V_v \quad (21)$$

dove $V_v = dh/dt$ è la **velocità verticale** (il *rate of climb* dei manuali). Il variometro fa esattamente il percorso inverso: misura dp/dt e lo converte in V_v .

Esercizio 9.1 — Salita rapida: quanto in fretta cala la pressione a bordo?

Un addestratore avanzato in salita rapida attraversa la quota di 7 000 m con velocità verticale $V_v = 12$ m/s. Calcolare la velocità di variazione della pressione ambiente dp/dt in quell'istante.

Dati. $h = 7\,000$ m; $V_v = 12$ m/s; dalla tabella: $\rho(7\,000 \text{ m}) = 0,5895 \text{ kg/m}^3$ (quota geopotenziale).

Fase A. Applicazione diretta della (21).

$$\frac{dp}{dt} = -\rho g_0 V_v = -0,5895 \cdot 9,80665 \cdot 12 = -69,4 \text{ Pa/s.}$$

Fase B. Ordine di grandezza e lettura fisica.

Quasi 70 Pa persi ogni secondo: in un minuto la pressione esterna cala di oltre 4 000 Pa, un decimo del valore locale. È la rapidità con cui l'impianto di pressurizzazione deve «inseguire» l'esterno per mantenere in cabina un dislivello di pressione tollerabile — un tema che ritroverete nel modulo sugli impianti di bordo.

Risultato. $dp/dt \simeq -69 \text{ Pa/s}$. Il segno meno racconta la salita: quota che aumenta, pressione che scende.

Esercizio 9.2 — L'ascensore e le orecchie

Salendo in ascensore al livello del mare, i timpani — sensori di pressione sensibilissimi — percepiscono una diminuzione di pressione dell'1 % al minuto. A quale velocità sta salendo l'ascensore?

Fase A. Impostazione: dal tasso frazionario alla velocità.

Il dato è $\frac{dp/p}{dt} = -0,01$ al minuto $= -\frac{0,01}{60}$ 1/s. Dividiamo la (21) per p e usiamo l'equazione di stato ($p = \rho RT$):

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = -\frac{\rho g_0}{p} V_v = -\frac{g_0}{R T} V_v \quad \Rightarrow \quad V_v = -\frac{R T}{g_0} \cdot \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}.$$

Riconoscete il fattore RT/g_0 ? È l'inverso del tasso di caduta della pressione dell'esercizio 7.2: al livello del mare vale $287,05 \cdot 288,15/9,80665 = 8\,434$ m (la cosiddetta *scala barometrica*).

Fase B. Il calcolo.

$$V_v = 8434 \cdot \frac{0,01}{60} = 1,41 \text{ m/s} \simeq 84 \text{ m al minuto.}$$

Risultato. L'ascensore sale a circa 1,4 m/s: la velocità di un ascensore veloce di un grattacielo. Noto: i timpani sono, a tutti gli effetti, un variometro biologico — e l'equazione idrostatica funziona anche nel vano di un ascensore.

Il senso di tutto questo

Un'ultima estensione, la più affascinante: la fisica che abbiamo costruito non sa nulla della Terra in particolare. Cambiando gas, gravità e temperatura, funziona su qualunque pianeta.

10 Oltre la Terra: le atmosfere degli altri pianeti

Dove stiamo andando

L'equazione idrostatica e l'equazione di stato valgono ovunque ci sia un gas in quiete dentro un campo gravitazionale. Basta cambiare tre numeri — la costante R del gas, la gravità g , la temperatura T — e il nostro modello descrive Venere, Marte o un gigante gassoso. Un esercizio su un'atmosfera di idrogeno lo dimostra.

Una sonda che entra nell'atmosfera di un altro pianeta ha bisogno delle stesse informazioni di un aeroplano terrestre: p , T , ρ in funzione della quota. I modelli di atmosfera planetaria si costruiscono esattamente come l'aria tipo terrestre: si misura (o si stima) il profilo termico, si applicano idrostatica e stato. La differenza è nei dati: gas diversi hanno R diverse (ricordate: $R = \mathcal{R}/M$, costante universale diviso massa molare — gas leggeri, R grande) e ogni pianeta ha la sua g .

Esercizio 10.1 — Un'atmosfera di idrogeno: la quota di dimezzamento

L'atmosfera di un pianeta gigante è composta essenzialmente di idrogeno molecolare ($R_{H_2} = 4\,157 \text{ J/(kg K)}$); la gravità locale vale $g = 24,9 \text{ m/s}^2$. Assumendo un'atmosfera isoterma a $T = 150 \text{ K}$ e una «superficie» convenzionale di riferimento, calcolare la quota alla quale la pressione si riduce alla metà del valore alla superficie. Confrontare con la Terra.

Fase A. La formula giusta.

Atmosfera isoterma: vale la (11) con base alla superficie ($h_1 = 0$):

$$\frac{p}{p_1} = e^{-\frac{g}{RT} h}.$$

Imponiamo $p/p_1 = 1/2$:

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{g}{RT} h_{1/2}} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -\frac{g}{RT} h_{1/2} \Rightarrow h_{1/2} = \frac{RT}{g} \ln 2.$$

Il gruppo $H = RT/g$ è la *scala di altezza* dell'atmosfera: la quota di dimezzamento vale sempre $H \ln 2 \simeq 0,693 H$.

Fase B. *I numeri del gigante.*

$$H = \frac{4157 \cdot 150}{24,9} = 25\,042 \text{ m}, \quad h_{1/2} = 0,6931 \cdot 25\,042 = 17\,358 \text{ m} \simeq 17,4 \text{ km}.$$

Fase C. *Il confronto con la Terra.*

Per l'aria terrestre al livello del mare $H = RT_0/g_0 = 287,05 \cdot 288,15/9,80665 = 8\,434 \text{ m}$ e $h_{1/2} \simeq 5\,850 \text{ m}$ (circa la vetta più alta delle Ande, dove infatti la pressione è circa metà di quella al mare). Sul gigante gassoso la quota di dimezzamento è tripla: la gravità maggiore comprimerebbe l'atmosfera, ma l'idrogeno leggerissimo (R quattordici volte quella dell'aria) vince e la «gonfia».

Risultato. $h_{1/2} \simeq 17,4 \text{ km}$, contro i $\simeq 5,9 \text{ km}$ terrestri. Stessa fisica, numeri diversi: il modello di atmosfera standard è un'idea che viaggia bene — letteralmente — in tutto il sistema solare.

Il senso di tutto questo

Ci resta da raccontare da dove viene, storicamente, l'aria tipo — una storia istruttiva su come nascono gli standard tecnici — e da raccogliere formule e tabelle per lo studio e per l'esame.

II Un po' di storia: come nacque l'aria tipo

Dove stiamo andando

Gli standard tecnici non nascono mai per decreto improvviso: nascono quando una comunità ne sente il bisogno. Per l'atmosfera standard il bisogno arrivò con la Grande Guerra, quando gli aeroplani presero a volare abbastanza in alto da rendere indispensabile un riferimento comune.

Con i primi voli in pallone, alla fine del Settecento, ci si cominciò a interessare alle proprietà dell'aria in quota; ma fu solo il volo a motore, nei primi del Novecento, a trasformare la curiosità in necessità ingegneristica. I pionieri del 1903 non avevano bisogno di tabelle: volavano a pochi metri dal suolo, e per i loro calcoli di portanza bastava un valore ragionevole della densità al livello del mare. Ma già durante la Prima guerra mondiale i velivoli operavano regolarmente oltre i 3 000 m, e l'assenza di una tabella condivisa delle proprietà dell'atmosfera era diventata un ostacolo concreto per i progettisti: dati di prova raccolti in nazioni diverse non erano confrontabili.

Nel 1920 il francese A. Toussaint propose una formula semplicissima per la diminuzione della temperatura con la quota:

$$T [^\circ\text{C}] = 15 - 0,0065 h \quad (h \text{ in metri}), \quad (22)$$

cioè esattamente il gradiente di $-6,5 \times 10^{-3} \text{ K/m}$ che usiamo ancora oggi nella troposfera. Francia e Italia adottarono formalmente la formula già nel 1920; il Regno Unito seguì l'anno dopo, e nel dicembre 1921 anche il comitato aeronautico statunitense la raccomandò per le prove di prestazione fino a 10 km. Le campagne di misura degli anni immediatamente successivi — voli strumentati, dati di artiglieria, palloni sonda — confermarono che la retta di Toussaint rappresentava onestamente i valori medi annui osservati.

Il passo successivo fu trasformare una formula in uno strumento di lavoro: a metà degli anni Venti vennero pubblicate le prime tabelle estese per uso ingegneristico, in unità metriche e anglosassoni, costruite proprio come abbiamo fatto noi: profilo termico assegnato (la retta di Toussaint fino alla tropopausa, poi un tratto isoterma) e integrazione dell'idrostatica per ottenere p e ρ . Con l'arrivo dei razzi negli anni Quaranta, dei missili balistici negli anni Cinquanta e del volo spaziale nei Sessanta, le tabelle furono estese a quote sempre maggiori: il modello ARDC del 1959 — quello del nostro profilo a sette strati — e i successivi standard ICAO e U.S. 1976. La cosa notevole è la stabilità: alle quote di interesse aeronautico, le tabelle degli anni Venti e quelle odierne coincidono a meno di frazioni di grado.

La lezione di metodo

Notate la sequenza, perché è universale nella tecnica: (1) un bisogno pratico (confrontare dati); (2) una proposta semplice e ragionevole (una retta!); (3) la verifica sperimentale; (4) l'adozione internazionale; (5) l'estensione e la manutenzione nel tempo. Uno standard non è una verità di natura: è un *accordo ben costruito* — e per questo va sempre citato insieme ai suoi limiti di validità.

12 Formulario essenziale

Concetto	Formula
Gravità in quota	$g = g_0 \left(\frac{r}{r + h_G} \right)^2$
Equazione idrostatica	$dp = -\rho g dh_G = -\rho g_0 dh$
Legge di Stevino (liquidi)	$p = p_{\text{atm}} + \rho g z$
Quota geopotenziale	$h = \frac{r}{r + h_G} h_G$
Profilo termico (strato a gradiente)	$T = T_1 + a (h - h_1), \quad a = dT/dh$
Strato isoterma	$\frac{p}{p_1} = \frac{\rho}{\rho_1} = e^{-\frac{g_0}{RT}(h-h_1)}$
Strato a gradiente	$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{T}{T_1} \right)^{-\frac{g_0}{aR}}, \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{T}{T_1} \right)^{-\left(\frac{g_0}{aR} + 1\right)}$
Tasso frazionario di caduta di p	$\frac{(dp/p)}{dh} = -\frac{g_0}{RT}$
Scala di altezza (atm. isoterma)	$H = \frac{RT}{g}; \quad h_{1/2} = H \ln 2$
Pressione e tempo (salita)	$\frac{dp}{dt} = -\rho g_0 V_v$
Interpolazione lineare	$h = h_1 + (h_2 - h_1) \frac{y_1 - y}{y_1 - y_2}$
Equazione di stato	$p = \rho R T$

Costanti del modello (memorizzarle conviene)

$g_0 = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$; $R = 287,05 \text{ J/(kg K)}$; $r = 6,356\,766 \times 10^6 \text{ m}$;
 $T_0 = 288,15 \text{ K}$; $p_0 = 101\,325 \text{ Pa}$; $\rho_0 = 1,225\,0 \text{ kg/m}^3$; $a_1 = -6,5 \times 10^{-3} \text{ K/m}$.

Limiti di validità del modello

(1) L'aria è trattata come gas perfetto in quiete; (2) $g = g_0$ costante, compensata dalla quota geopotenziale; (3) il profilo $T(b)$ è una convenzione basata su medie sperimentali: l'atmosfera reale se ne discosta ogni giorno; (4) sopra i 105 km il modello a strati qui presentato non è più applicabile (la composizione stessa dell'aria cambia); (5) l'approssimazione esponenziale vale solo nell'intervallo per cui è stata tarata.

A Tabella dell'aria tipo (unità SI)

Valori calcolati con le formule del §5 e le costanti del §12 (script `scripts/verifica_esercizi.py`). h_G è la quota geometrica, h la geopotenziale corrispondente; $\sigma = \rho/\rho_0$ è la densità relativa.

h_G [m]	h [m]	T [K]	p [Pa]	ρ [kg/m ³]	σ
0	0	288,15	101 325	1,2250	1,0000
1000	1000	281,65	89 876	1,1117	0,9075
2000	1999	275,15	79 501	1,0066	0,8217
3000	2999	268,66	70 121	0,9093	0,7422
4000	3997	262,17	61 660	0,8193	0,6689
5000	4996	255,68	54 048	0,7364	0,6012
6000	5994	249,19	47 217	0,6601	0,5389
7000	6992	242,70	41 105	0,5900	0,4816
8000	7990	236,22	35 651	0,5258	0,4292
9000	8987	229,73	30 800	0,4671	0,3813
10 000	9984	223,25	26 500	0,4135	0,3376
11 000	10 981	216,77	22 700	0,3648	0,2978
12 000	11 977	216,65	19 399	0,3119	0,2546
13 000	12 973	216,65	16 579	0,2666	0,2176
14 000	13 969	216,65	14 170	0,2279	0,1860
15 000	14 965	216,65	12 112	0,1948	0,1590
16 000	15 960	216,65	10 353	0,1665	0,1359
17 000	16 955	216,65	8 850	0,1423	0,1162
18 000	17 949	216,65	7 565	0,1216	0,0993
19 000	18 943	216,65	6 467	0,1040	0,0849
20 000	19 937	216,65	5 529	0,0889	0,0726

Alta atmosfera (quote geopotenziali):

h [m]	T [K]	p [Pa]	ρ [kg/m ³]
25 000	216,65	2 488,5	$4,00 \cdot 10^{-2}$
30 000	231,65	1 161,1	$1,75 \cdot 10^{-2}$
40 000	261,65	290,1	$3,86 \cdot 10^{-3}$
47 000	282,65	120,4	$1,48 \cdot 10^{-3}$
53 000	282,65	58,3	$7,19 \cdot 10^{-4}$
60 000	251,15	23,8	$3,30 \cdot 10^{-4}$
70 000	206,15	5,31	$8,98 \cdot 10^{-5}$
79 000	165,65	1,01	$2,12 \cdot 10^{-5}$
90 000	165,65	0,104	$2,20 \cdot 10^{-6}$
100 000	205,65	0,017	$2,79 \cdot 10^{-7}$
105 000	225,65	0,0075	$1,15 \cdot 10^{-7}$

Le righe intermedie a passo 100 m usate negli esercizi di interpolazione (da 600 m–800 m, da 6 300 m–6 500 m) si ottengono dalle stesse formule; per lo studio autonomo, lo script Python allegato le genera a qualunque passo.