

Stima della polare di avanprogetto di un aeromobile

Il metodo di *build-up* per componenti:
teoria, applicazioni numeriche e implementazione

Monografia MON·POLARE — Serie di Costruzioni Aeronautiche

Prof. Ing. Biagio Raucci

ITIS “E. Majorana” — Cassino

Articolazione Costruzione del Mezzo Aeronautico — Classi quarte e quinte

Anno scolastico 2026–2027

Sommario

La polare aerodinamica è la carta d'identità di un velivolo: da essa discendono resistenza, efficienza, autonomia, ratei di salita e distanze di decollo. In fase di avanprogetto, tuttavia, il velivolo non esiste ancora e la polare non può essere misurata: va *costruita* a partire da pochi dati geometrici. Questo articolo presenta in forma completa e autoconsistente il metodo semi-empirico di *build-up* per componenti, di derivazione NASA, per la stima del coefficiente di resistenza minimo $C_{D_{min}}$, e affianca ad esso le tre strade praticabili per la stima del fattore di Oswald e : dati statistici di classe, correlazioni empiriche e decomposizione viscosa. Il modello parabolico che ne risulta viene poi *letto* in termini di prestazioni, con la derivazione completa dell'efficienza massima e delle condizioni di minima potenza necessaria. Il metodo è applicato integralmente, passo dopo passo, a due velivoli agli antipodi tecnologici — un monomotore di aviazione generale a 2500 m e un bimotore a getto in crociera transonica a 11000 m — ottenendo rispettivamente $C_D = 0,0234 + 0,0546 C_L^2$ e $C_D = 0,0189 + 0,0412 C_L^2$, entrambe superate al collaudo statistico. Sono infine discussi i limiti del modello (resistenza d'onda, parabola traslata, incrementi di configurazione) e presentata un'implementazione Python compatta con cui ogni valore numerico dell'articolo è stato verificato in modo indipendente.

Parole chiave: polare parabolica, resistenza parassita, fattore di Oswald, coefficiente d'attrito, Reynolds di cut-off, fattore di forma, fattore di interferenza, efficienza aerodinamica, resistenza d'onda.

Indice

1	Introduzione	3
2	Nomenclatura e convenzioni	4
3	La polare del velivolo e il modello parabolico	4
3.1	Che cos'è la polare	4
3.2	Il modello di polare parabolica	5
3.2.1	Il fattore di Oswald	5
3.2.2	I limiti del modello parabolico	6
3.3	$C_{D_{min}}$ ed e come indicatori tecnologici	6
3.4	Effetto delle condizioni di volo	6

4	Il metodo di <i>build-up</i> per componenti	7
4.1	Le due ipotesi fondamentali	7
4.2	Calcolo del coefficiente d'attrito	8
4.2.1	Quale Reynolds usare: il Reynolds di <i>cut-off</i>	9
4.2.2	Flusso laminare	9
4.3	Calcolo dell'area bagnata	10
4.4	Calcolo del fattore di forma	11
4.5	Calcolo del fattore di interferenza	12
4.6	Resistenza di base	13
4.7	Resistenze aggiuntive	13
4.8	Sinossi operativa	14
5	Il fattore di Oswald: tre stime indipendenti	14
5.1	Prima strada: il dato statistico di classe	14
5.2	Seconda strada: le correlazioni empiriche	14
5.3	Terza strada: la decomposizione viscosa	15
5.4	Quando la geometria è nota: il metodo di Multhopp	16
6	Dalla polare alle prestazioni	17
6.1	Efficienza aerodinamica e suo massimo	17
6.2	Dall'assetto alla velocità	18
6.3	Minima resistenza e minima potenza non coincidono	18
6.4	Lettura tecnologica	19
7	Applicazione I: monomotore di aviazione generale	20
8	Applicazione II: bimotore a getto in crociera transonica	23
9	Confronto critico e sintesi	26
9.1	Il quadro d'insieme	26
9.2	Il paradosso apparente e la sua soluzione	26
9.3	Che cosa insegna la ripartizione	27
10	Limiti del modello ed estensioni	28
10.1	Il primo limite: la resistenza d'onda	28
10.2	Il secondo limite: la parabola traslata	30
10.3	Il terzo limite: gli incrementi di configurazione	31
10.4	Il quarto limite: la resistenza di equilibratura	31
11	Implementazione Python del metodo	32
11.1	Le funzioni di base	32
11.2	Il contributo del singolo componente	33
11.3	Il velivolo della sezione 7 in dieci righe	33
11.4	Primo studio parametrico: la finitura superficiale	34
11.5	Secondo studio parametrico: la snellezza di fusoliera	34
11.6	Proposte di lavoro	35
12	Conclusioni	35
A	Atmosfera standard e legge di Sutherland	36
A.1	Il modello di atmosfera standard internazionale	36
A.2	La viscosità dinamica: legge di Sutherland	37
A.3	Implementazione	37
B	Formulario riassuntivo	38

1 Introduzione

Le caratteristiche aerodinamiche fondamentali di un aeromobile sono racchiuse nelle sue *curve polari*. Da esse discendono, senza eccezioni, tutte le prestazioni generali del velivolo: le lunghezze di decollo e di atterraggio, l'autonomia chilometrica e oraria, il rateo di salita, la quota di tangenza, la velocità di massimo raggio. Chi possiede la polare possiede il velivolo.

Nasce di qui il problema che questo articolo affronta. Nella fase di *avanprogetto* il velivolo non esiste: non c'è un modello da mettere in galleria del vento, non c'è un prototipo da strumentare. Eppure il progettista deve già disporre di una polare, perché è su di essa che dimensionerà la superficie alare, sceglierà il propulsore, valuterà la fattibilità della missione. La polare, in *avanprogetto*, non si misura: si *costruisce*. E la si costruisce a partire da un patrimonio informativo minimo — poche lunghezze, poche superfici, il tipo di profilo, la finitura del rivestimento — attraverso metodi semi-empirici, calibrati su decenni di prove sperimentali.

Ogni azienda aeronautica ha sviluppato i propri, e li custodisce gelosamente: essi sintetizzano, in un certo senso, il *know-how* aerodinamico dell'azienda. Il metodo presentato in questo articolo appartiene invece alla letteratura aperta: è il metodo di *build-up per componenti* di derivazione NASA, che scompone la resistenza parassita del velivolo nella somma dei contributi dei suoi elementi (ala, fusoliera, impennaggi, gondole) e stima ciascun contributo partendo dall'attrito di lastra piana equivalente, corretto per la tridimensionalità del corpo e per la mutua interferenza fra le parti.

◉ Bussola — dove siamo e dove andiamo

Il percorso dell'articolo è il seguente.

- Le sezioni 3 e 4 costruiscono lo strumento: prima il modello parabolico di polare e il significato dei suoi due soli parametri $C_{D_{min}}$ ed e ; poi, pezzo per pezzo, la macchina di calcolo del $C_{D_{min}}$.
- La sezione 5 è dedicata interamente al fattore di Oswald, troppo spesso liquidato con un valore tabellato: ne vedremo tre stime indipendenti e le confronteremo.
- La sezione 6 insegna a *leggere* una polare: efficienza massima, assetto e velocità ottimi, condizione di minima potenza.
- Le sezioni 7 e 8 applicano il metodo, con tutti i passaggi in chiaro, a due velivoli scelti agli antipodi tecnologici; la sezione 9 li mette a confronto.
- La sezione 10 dichiara con precisione i confini di validità del modello e mostra come si estende oltre di essi (resistenza d'onda, parabola traslata, incrementi di configurazione).
- La sezione 11 traduce tutto in codice.

Due parole sul metodo di lavoro, che è poi il metodo dell'ingegnere. Ogni valore numerico che comparirà in queste pagine è stato calcolato da uno script Python indipendente, riportato nella sezione 11 e nell'appendice A: i numeri non sono *trascritti*, sono *verificati*. E ogni stima, una volta ottenuta, viene sottoposta a un collaudo statistico contro i dati tipici della sua classe di velivoli. Una stima di *avanprogetto* che non superi questo collaudo, o è sbagliata, o nasconde una ragione fisica che il progettista ha il dovere di individuare e dichiarare. Non esistono terze possibilità.

2 Nomenclatura e convenzioni

Si adotta la notazione aeronautica internazionale. Tutti i coefficienti adimensionali di forza sono riferiti alla *superficie alare* S_W , anche quando descrivono il contributo di un componente che con l'ala non ha nulla a che vedere: è la convenzione che rende additivi i contributi e va tenuta ben presente.

Simbolo	Grandezza	Simbolo	Grandezza
C_L	coefficiente di portanza	S_{wet}	area bagnata del componente
C_D	coefficiente di resistenza	S_W	superficie alare di riferimento
C_{D_0}	coeff. di resistenza a portanza nulla	S_{ref}	superficie in pianta del componente
$C_{D_{min}}$	coeff. di resistenza minimo	S_{BASE}	area della base tronca
C_{D_i}	coeff. di resistenza indotta	L	lunghezza di riferimento del componente
C_{D_w}	coeff. di resistenza d'onda	$\bar{c}$	corda media aerodinamica
C_f	coeff. d'attrito medio	b	apertura alare
e	fattore di Oswald del velivolo	h, d	dimensioni trasversali del componente
e_{inv}	efficienza di apertura non viscosa	FR	snellezza (<i>fineness ratio</i>)
AR	allungamento alare, b^2/S_W	τ	spessore percentuale medio, (t/c)
K	$1/(\pi AR e)$, fattore di resistenza indotta	c_{ld}	curvatura di progetto del profilo
E	efficienza aerodinamica, C_L/C_D	Λ	angolo di freccia
E_{max}	efficienza aerodinamica massima	k	rugosità ammissibile del rivestimento
M_∞	numero di Mach asintotico	FF	fattore di forma
Re_∞	numero di Reynolds asintotico	IF	fattore di interferenza
Re_L	Reynolds del componente	R_{W-B}	fattore di correlazione ala-fusoliera
Re_{L_1}, Re_{L_2}	Reynolds geometrico e di <i>cut-off</i>	R_{LS}	fattore di correlazione di superficie portante
M_{cc}	Mach critico di cresta	Hf	fattore di cerniera
M_{dd}	Mach di divergenza della resistenza	t, f	fattori di comprimibilità
ρ, μ	densità e viscosità dinamica	r	fattore di recupero, $r = 0,89$
a, V	velocità del suono e di volo	γ	rapporto dei calori specifici, 1,4
W, D, Π	peso, resistenza, potenza	K_1, K_L	costanti empiriche

Counts. Il coefficiente di resistenza si esprime abitualmente in *counts*, con $1 \text{ count} = 0,0001$. La convenzione non è un vezzo: ricorda che C_D è una grandezza significativa fino alla quarta cifra decimale, e che una lamiera mal raccordata “vale” qualche count. Nel seguito i risultati saranno sistematicamente dati in entrambe le forme.

Separatore decimale. Si usa la virgola nel testo e nelle formule composte (convenzione italiana); il punto compare soltanto nei listati Python, dove è imposto dalla sintassi del linguaggio.

3 La polare del velivolo e il modello parabolico

3.1 Che cos'è la polare

Le caratteristiche aerodinamiche fondamentali di un aeromobile sono racchiuse nella funzione parametrica

$$C_L = C_L(C_D). \quad (1)$$

Non esiste però *una* polare: ne esistono infinite, perché la (1) dipende da tutti i parametri che individuano sia il regime di moto sia la configurazione dell'aeromobile. Tra i fondamentali:

- M_∞ , numero di Mach di volo, che dipende dalla velocità ma anche dalla quota (attraverso la velocità del suono);

- Re_∞ , numero di Reynolds asintotico, definito con le grandezze di volo e una lunghezza di riferimento del velivolo, tipicamente la corda media aerodinamica;
- AR , allungamento alare — e, più in generale, tutta la geometria esterna;
- la *configurazione*: carrello esteso o retratto, angolo di deflessione di flap e timone;
- il numero di propulsori funzionanti e il coefficiente di spinta: l'aerodinamica del velivolo è profondamente influenzata dalla scia dei propulsori, tanto che per i plurimotori il dimensionamento avviene spesso nelle condizioni critiche di *one engine out*.

Un'immagine concreta

Pensate alla polare come alla “carta d'identità aerodinamica” del velivolo: per ogni assetto (cioè per ogni C_L) essa dichiara quanto si paga in resistenza (il corrispondente C_D). Un Cessna 172 in crociera e lo stesso Cessna con flap a 30° e carrello esteso sono, dal punto di vista della polare, *due velivoli diversi*. Ecco perché il progettista lavora sempre con una *famiglia* di polari, non con una sola curva.

3.2 Il modello di polare parabolica

Teoria — resistenza indotta e polare parabolica

Per ali non svergolate la teoria della linea portante di Prandtl fornisce il coefficiente di resistenza indotta

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi AR e}, \quad (2)$$

dove e è il *fattore di Oswald*. Sommando alla (2) il contributo di resistenza di profilo, presente anche a portanza nulla, si ottiene l'espressione parabolica della polare del velivolo completo:

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi AR e} \quad (3)$$

con C_{D_0} coefficiente di resistenza a portanza nulla. Tutti i coefficienti sono riferiti alla superficie alare S_W . Ponendo per compattezza $K = 1/(\pi AR e)$, la (3) si scrive $C_D = C_{D_0} + K C_L^2$.

Due precisazioni importanti sul significato dei termini.

3.2.1 Il fattore di Oswald

Il fattore e nasce come indicatore dello scostamento del carico alare da quello ellittico: per $e = 1$ si ritrova la resistenza indotta minima dell'ala ellittica. Nel velivolo completo, però, e ingloba di più: la resistenza indotta calcolabile per l'ala isolata in flusso ideale è in larga misura (il 75–85 %) del termine quadratico complessivo; il resto proviene dall'aumento della resistenza di profilo con l'assetto, dovuto all'ispessimento dello strato limite non solo sull'ala ma anche su fusoliera e piani di coda. Per questo il fattore di Oswald del velivolo completo è sistematicamente più basso di quello della sola ala. Alla sua stima è dedicata l'intera sezione 5.

Il fattore di Oswald visto con la Teoria Globale

Una lettura fisica suggestiva viene dalla Teoria Globale [9]: la portanza si genera deviando verso il basso la portata d'aria contenuta in un ideale “condotto” di diametro pari all'apertura alare. Per l'ala ellittica il condotto ha esattamente il diametro b ; per ogni altra ala il

condotto *efficace* è più stretto: minore portata elaborata, maggiore deviazione necessaria a parità di portanza, dunque maggiore resistenza indotta. Il fattore $e < 1$ misura proprio questo restringimento efficace.

3.2.2 I limiti del modello parabolico

Il confronto della (3) con i dati sperimentali è buono per valori di C_L non elevati, cioè per assetti lontani dallo stallo. Le approssimazioni insite nel modello sono essenzialmente due:

1. si ipotizza che il coefficiente di resistenza *minimo* si realizzi all'assetto di portanza nulla, ossia $C_{D_{min}} = C_{D_0}$. Nella realtà il progettista minimizza la resistenza nell'intorno del C_L di *crociera*, non a portanza nulla: la parabola vera è leggermente traslata (si veda il §10.2);
2. non si tiene conto del comportamento reale dei coefficienti in prossimità dello stallo, dove la funzione $C_L(C_D)$ non è affatto parabolica (allo stallo presenta addirittura un massimo).

La (3) descrive quindi con buona approssimazione la *crociera* e il decollo, ma *non* l'atterraggio (dove C_L è prossimo a quello di stallo) né le manovre ad alto fattore di carico dei velivoli acrobatici o da combattimento. Ricordiamo inoltre che il C_D da solo non misura la resistenza: è il prodotto $C_D S_W$, a parità di quota e velocità, a farlo. Confrontare i C_D di due velivoli con superfici alari diverse è, in sé, privo di significato fisico.

3.3 $C_{D_{min}}$ ed e come indicatori tecnologici

Soprattutto per i velivoli da trasporto, la coppia $(C_{D_{min}}, e)$ fotografa il livello tecnologico dell'aeromobile: i valori migliori appartengono ai velivoli commerciali a getto o turboelica, quelli che assorbono i maggiori costi di ricerca e sviluppo. La tabella 1 riporta i valori tipici per classi di velivoli: la useremo sia per scegliere e quando la geometria alare non è nota in dettaglio, sia — ed è l'uso più importante — come *controllo di plausibilità* dei nostri risultati.

Tabella 1: Valori tipici del coefficiente di resistenza minimo e del fattore di Oswald per classi di velivoli. Sono i dati statistici con cui va confrontata ogni stima di avanprogetto.

Tipo di velivolo	$C_{D_{min}}$	e
Jet di linea a crociera transonica	0,014 – 0,020	0,75 – 0,85
Plurimotore turboelica di linea	0,018 – 0,024	0,80 – 0,85
Aviazione generale (bimotore)	0,022 – 0,028	0,75 – 0,85
Aviazione generale (monomotore, carr. retrattile)	0,020 – 0,030	0,75 – 0,80
Aviazione generale (monomotore, carr. fisso)	0,025 – 0,040	0,65 – 0,75

Si osservi la struttura della tabella: passando dal monomotore con carrello fisso al jet di linea, il $C_{D_{min}}$ si dimezza abbondantemente e il fattore di Oswald guadagna una decina di punti percentuali. Le due colonne raccontano due storie diverse. La prima è la storia della *pulizia esterna*: carrello retracts, rivetti annegati, raccordi curati, assenza di protuberanze. La seconda è la storia della *qualità della distribuzione di carico*: forma in pianta, svergolamento, alette d'estremità.

3.4 Effetto delle condizioni di volo

Gli effetti di M_∞ e Re_∞ sulla polare meritano un commento, perché delimitano il campo di validità del metodo che studieremo.

- **Numero di Mach.** L'effetto è generalmente trascurabile per $M_\infty < 0,5$, mentre diventa significativo in campo transonico: compare una componente di *resistenza d'onda*, inizialmente solo alle incidenze più alte, che aumenta il C_D . Il metodo di build-up *non* è in grado di stimare questo aggravo; alla sua valutazione separata è dedicato il §10.1.
- **Numero di Reynolds.** Ha impatto modesto agli assetti di basso C_L , ma caratterizza fortemente il comportamento alle alte incidenze e allo stallo, che viene ritardato al crescere di Re .
- **Propulsore.** La scia dei propulsori altera profondamente il campo aerodinamico; per i plurimotori le polari in condizione di *one engine out* sono tra le più importanti del progetto.

La determinazione delle polari di un velivolo completo resta, ancora oggi, complessa: non può prescindere dalle prove sperimentali, specie alle alte incidenze, nonostante la difficoltà delle gallerie del vento di riprodurre simultaneamente i valori di volo di Re_∞ e M_∞ . Il metodo che studieremo nella prossima sezione è rapido, ha un fabbisogno minimo di dati geometrici ed è adatto alla configurazione di crociera e agli assetti medio-bassi di un'ampia classe di velivoli: esattamente ciò che serve in avanprogetto, né più né meno.

↪ Raccordo — che cosa portiamo con noi

Portiamo con noi tre idee: (i) la polare di avanprogetto è la parabola $C_D = C_{D_0} + K C_L^2$ con $K = 1/(\pi A R e)$, valida lontano dallo stallo; (ii) le incognite da stimare sono soltanto $C_{D_{min}}$ (che assumeremo coincidente con C_{D_0}) ed e ; (iii) la tabella 1 è il nostro metro di giudizio: qualunque stima che ne esca fuori senza una ragione fisica precisa va rimessa in discussione.

4 Il metodo di *build-up* per componenti

⊙ Bussola — dove siamo e dove andiamo

Qui costruiamo, pezzo per pezzo, la macchina di calcolo del $C_{D_{min}}$: prima le due ipotesi fondamentali (additività dei contributi e resistenza dominata dall'attrito), poi i quattro ingredienti della formula del singolo componente — coefficiente d'attrito C_f , area bagnata S_{wet} , fattore di forma FF e fattore di interferenza IF — e infine i due termini correttivi: resistenza di base e resistenze aggiuntive. La sezione si chiude con la sinossi operativa, in sei passi, che applicheremo poi due volte.

4.1 Le due ipotesi fondamentali

Nel seguito assumeremo $C_{D_{min}}$ equivalente al coefficiente di resistenza a portanza nulla; è un'approssimazione, di cui si può eventualmente tener conto trasladando l'asse della parabola (§10.2).

Teoria — additività e corpi affusolati

Ipotesi 1 (additività). Il coefficiente di resistenza minimo del velivolo completo è la somma dei coefficienti di resistenza di profilo dei suoi N componenti (ala, fusoliera, piano orizzontale, piano verticale, gondole motrici, ...):

$$C_{D_{min}} = \sum_{k=1}^N C_{D_k}, \quad (4)$$

dove *tutti* i C_{D_k} sono riferiti alla stessa superficie, in genere quella alare S_W .

Ipotesi 2 (corpi affusolati). Ogni componente è un corpo affusolato: per definizione, la sua resistenza di profilo — che in campo incomprimibile si divide in attrito e forma — è *dominata dall'attrito*. È allora naturale partire da un coefficiente d'attrito medio C_{f_k} , riferito alla superficie su cui l'attrito andrebbe integrato: l'*area bagnata* S_{wet} , cioè la superficie esterna del componente direttamente a contatto con l'aria. L'espressione del coefficiente di resistenza del singolo componente è

$$C_{D_k} = \left(C_{f_k} \cdot \frac{S_{wet_k}}{S_W} \right) \cdot FF_k \cdot IF_k \quad (5)$$

dove FF_k e IF_k sono i fattori di *forma* e di *interferenza*, che correggono il modello di pura lastra piana.

La logica della (5) in una riga

$C_f S_{wet}/S_W$ è la resistenza che il componente avrebbe se fosse una lastra piana “srotolata” della stessa superficie; FF paga il fatto che il corpo è tridimensionale (il flusso accelera sui fianchi e può separare in coda); IF paga il fatto che il componente non vola da solo, ma immerso nel campo di moto generato dagli altri. È lo stesso schema logico “valore base × coefficienti correttivi” già incontrato nel dimensionamento dei chiodi e dei longheroni.

! Un'ipotesi che sappiamo essere falsa

L'ipotesi di additività (4) è, in senso stretto, *sbagliata*: il campo di moto attorno a un velivolo è fortemente non lineare e non vale alcun principio di sovrapposizione degli effetti, men che meno per la resistenza. Il metodo lo sa, e ripara con il fattore IF , che è precisamente la misura dell'errore commesso. Questa è una lezione di metodo che vale ben oltre l'aerodinamica: un modello semplice più una correzione calibrata sperimentalmente batte, in avanprogetto, un modello esatto ma inutilizzabile.

Un limite dichiarato del metodo: in regime transonico non è in grado di stimare, in maniera semplice, l'aggravio dovuto alla resistenza d'onda. Nel seguito, per brevità, ometteremo il pedice k .

4.2 Calcolo del coefficiente d'attrito

L'evidenza sperimentale mostra che, al crescere della snellezza del corpo, il coefficiente di attrito medio tende asintoticamente a quello di una lastra piana nelle stesse condizioni di Re_∞ e M_∞ . Per flusso *totalmente turbolento* vale la correlazione

$$C_f = t \cdot f^2 \frac{0,430}{[\log_{10}(Re_L \cdot t^{1.67} \cdot f)]^{2.56}} \quad (6)$$

con i fattori di comprimibilità

$$t = \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)^{-1}, \quad r = 0,89, \quad \gamma = 1,4, \quad f = 1 + 0,03916 \cdot M_\infty^2 \cdot t. \quad (7)$$

Il fattore t è il rapporto fra la temperatura asintotica e la temperatura di recupero in parete (per questo compare il *recovery factor* r); il fattore f realizza il conseguente aggiustamento delle proprietà del fluido nello strato limite compressibile. Per $M_\infty \rightarrow 0$ si ha $t \rightarrow 1$ e $f \rightarrow 1$, e la (6) si riduce alla classica correlazione di lastra piana turbolenta incomprimibile.

Perché la comprimibilità *riduce* l'attrito

Sembra un paradosso: si vola più veloci e l'attrito specifico diminuisce. La spiegazione sta in parete. L'energia cinetica del flusso si dissipa nello strato limite e ne innalza la temperatura fino al valore di recupero $T_r = T_\infty (1 + r \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2)$. Un gas più caldo, a pressione sostanzialmente invariata attraverso lo strato limite, è un gas *meno denso*: la quantità di moto trasportata verso la parete diminuisce, e con essa lo sforzo tangenziale. Il fattore $t < 1$ della (7) è esattamente T_∞/T_r . A $M_\infty = 0,78$ si ha $t = 0,902$ e $t f^2 = 0,9415$: quasi il 6% di prefattore in meno.

4.2.1 Quale Reynolds usare: il Reynolds di *cut-off*

Nella (6), Re_L è il Reynolds del componente, da scegliere come il **minimo** tra i due valori

$$Re_{L_1} = Re_\infty \cdot \frac{L}{L_\infty}, \quad Re_{L_2} = K_1 \cdot \left(\frac{L}{k}\right)^{1.0489}, \quad (8)$$

$$K_1 = 37,587 + 4,615 M_\infty + 2,949 M_\infty^2 + 4,132 M_\infty^3, \quad (9)$$

dove L è la lunghezza di riferimento del componente (la corda media per le superfici portanti, la lunghezza totale per i corpi affusolati), L_∞ è la lunghezza usata nella definizione di Re_∞ , e k è la *rugosità ammissibile* del rivestimento.

Il significato fisico di Re_{L_2} va capito bene, perché è un'idea che si ritrova identica in idraulica. Al di sopra di un certo Reynolds la parete cessa di essere "idraulicamente liscia": gli elementi di rugosità sporgono oltre il sottostrato viscoso, e l'attrito non diminuisce più al crescere di Re come sulla lastra liscia, ma resta inchiodato al valore dettato dalla rugosità. Il *cut-off* Re_{L_2} realizza questo comportamento in modo elegante: se $Re_{L_1} > Re_{L_2}$, nella (6) si entra con Re_{L_2} , ottenendo il C_f (più alto) del regime dominato dalla rugosità. È il diagramma di Moody, tradotto per la lastra piana.

! Sui valori di rugosità ammissibile

I valori di k riportati in letteratura oscillano molto e vanno usati con attenzione. Un ordine di grandezza da tenere a mente [3]: lamiera aeronautica levigata e verniciata a spruzzo $k \sim$ da $4 \cdot 10^{-6}$ m a $1 \cdot 10^{-5}$ m; lamiera con rivettatura a testa svasata e vernice ordinaria $k \sim$ da $2 \cdot 10^{-5}$ m a $5 \cdot 10^{-5}$ m; costruzione rivettata con teste tonde e finiture ordinarie $k \sim 1 \cdot 10^{-4}$ m.

Alcuni testi riportano, per l'aviazione generale e militare, il valore $k = 0,0009$ m. È un valore fisicamente implausibile: una rugosità di quasi un millimetro produrrebbe, per l'ala dell'applicazione della sezione 7, un Reynolds di cut-off $Re_{L_2} \approx 9 \cdot 10^4$, dunque un C_f irrealisticamente alto e un $C_{D_{min}} \approx 0,038$, fuori dall'intervallo statistico della tabella 1 per quella classe. Il valore coerente con le tabelle di rugosità è $k = 9 \cdot 10^{-5}$ m: uno zero, evidentemente, cade in stampa. In tutto l'articolo adotteremo quindi

$$k = 9 \cdot 10^{-5} \text{ m (aviazione generale e militare)}, \quad k = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ m (jet commerciale)}.$$

4.2.2 Flusso laminare

Se il flusso è totalmente laminare vale la relazione di Blasius, corretta per la comprimibilità:

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}} \left(1 + 0,1256 M_\infty^2\right)^{-0.12}. \quad (10)$$

Ai Reynolds di volo dei velivoli reali lo strato limite è quasi ovunque turbolento: nelle applicazioni useremo sempre la (6), che è anche la scelta conservativa. La (10) torna utile per i velivoli a flusso laminare esteso (alianti, velivoli sportivi in composito), dove si può ragionevolmente assumere laminare la prima porzione di corda e turbolento il resto, pesando i due C_f sulle rispettive frazioni di area bagnata.

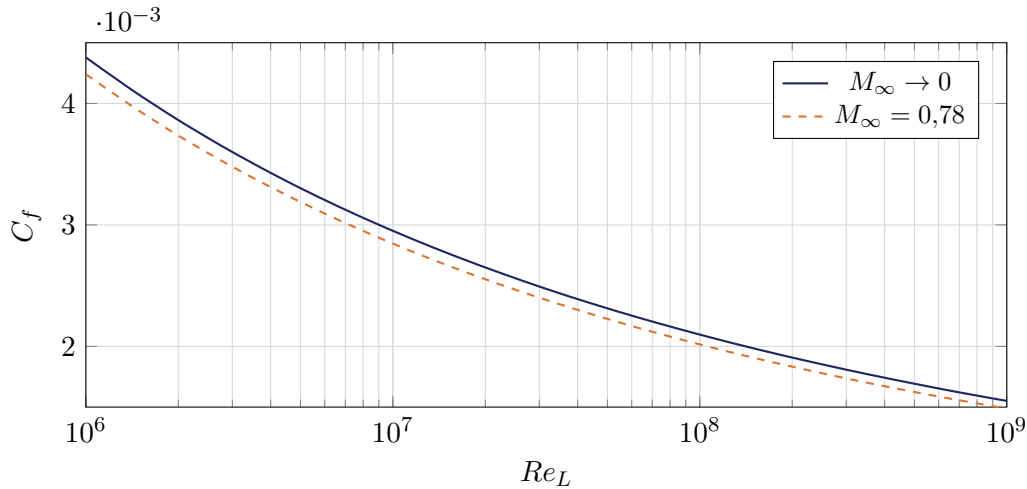


Figura 1: Coefficiente d'attrito medio di lastra piana turbolenta secondo la (6): la comprimibilità *riduce* il C_f a parità di Reynolds (strato limite riscaldato, minore densità in parete). A $M_\infty = 0,78$ la riduzione è dell'ordine del 4%.

4.3 Calcolo dell'area bagnata

La determinazione esatta dell'area bagnata non è banale, vista la complessità delle superfici aeronautiche; per un metodo rapido bastano però approssimazioni grossolane ma efficaci.

Per l'ala e per tutte le superfici portanti (piani di coda):

$$S_{wet} = 2 \cdot S_{ref}, \quad (11)$$

dove S_{ref} è la superficie in pianta del componente; l'errore commesso è tipicamente del 2-3% (le due facce del profilo sono, per spessori usuali, appena più lunghe della corda). Per fusoliera e gondole motrici, corpi essenzialmente assialsimmetrici:

$$S_{wet} = 0,75 \cdot \pi \sqrt{h \cdot d} L, \quad (12)$$

con h e d le due dimensioni trasversali del componente: $\sqrt{h \cdot d}$ è il diametro equivalente della sezione ellittica e il fattore 0,75 sconta il rastremarsi di prua e coda rispetto al cilindro. Se note, si possono sottrarre le superfici immerse in altri componenti: per esempio la porzione d'ala nascosta nella fusoliera.

Verifica dimensionale della (12)

Un cilindro circolare di diametro D e lunghezza L ha superficie laterale πDL . Il coefficiente 0,75 dice dunque che una fusoliera reale, con prua ogivale e coda rastremata, bagna il 75% della superficie del cilindro circoscritto. Provate su una fusoliera nota: la stima cade quasi sempre entro il 5% del valore vero. Non male, per una formula con un solo numero.

4.4 Calcolo del fattore di forma

Il fattore di forma FF tiene conto degli incrementi di resistenza dovuti alle sovravelocità locali del flusso (lo scostamento dal comportamento di lastra piana) e delle eventuali zone di flusso separato, presenti soprattutto nelle parti posteriori dei corpi.

Teoria — fattori di forma consigliati

Fusoliera:

$$FF = 1 + 60 \cdot \frac{1}{FR^3} + 0,0025 \cdot FR, \quad FR = \frac{L}{\sqrt{h \cdot d}}, \quad (13)$$

dove FR è la *snellezza* (*fineness ratio*) della fusoliera.

Gondola motrice o installazione subalare (serbatoio esterno):

$$FF = 1 + 0,35 \cdot \frac{1}{FR}. \quad (14)$$

Superfici portanti, in funzione dello spessore percentuale medio τ :

$$\text{profili NACA serie 6: } FF = 1 + 1,44 \tau + 2 \tau^2 \quad (15)$$

$$\text{profili NACA serie 4: } FF = 1 + 1,68 \tau + 3 \tau^2 \quad (16)$$

$$\text{profili biconvessi: } FF = 1 + 1,20 \tau + 100 \tau^4 \quad (17)$$

$$\text{profili supercritici: } FF = 1 + K_L c_{ld} + 1,44 \tau + 2 \tau^2 \quad (18)$$

Nella (18), c_{ld} è la curvatura di progetto del profilo (valori tipici 0,02–0,03) e K_L vale 0,3 per M_∞ subcritici, 0,5 per M_∞ supercritici: il termine aggiuntivo modifica il fattore di forma della serie 6 per tenere conto delle maggiori espansioni che si generano attorno ai profili supercritici.

Il minimo della (13) è un principio di progetto

La (13) è la somma di due termini di segno opposto nel loro effetto: $60/FR^3$ punisce i corpi *tozzi* (separazione in coda, resistenza di forma), $0,0025 FR$ punisce i corpi eccessivamente *allungati* (più superficie bagnata sotto sovravelocità). Annullando la derivata,

$$\frac{dFF}{d(FR)} = -\frac{180}{FR^4} + 0,0025 = 0 \quad \implies \quad FR^* = \left(\frac{180}{0,0025} \right)^{1/4} = 16,38.$$

Il minimo teorico cade a snellezze molto elevate — e infatti le fusoliere dei velivoli da trasporto sono lunghe. Ma il minimo è *piatto*: fra $FR = 9$ e $FR = 16,4$ il fattore di forma passa da 1,105 a 1,055, appena cinque punti percentuali. Il progettista, che deve anche trasportare passeggeri e sostenere un momento flettente di fusoliera, si ferma molto prima dell'ottimo aerodinamico. Ogni ottimo, in aeronautica, è un ottimo vincolato.

! Attenzione al primo membro della (14)

La formula della gondola compare in alcuni testi stampata come $FR = 1 + 0,35 / FR$: il primo membro è evidentemente un refuso per FF , come si deduce sia dal contesto sia dalla struttura di tutte le altre formule di fattore di forma. La forma corretta è quella della (14). Una gondola con $FR = 2$ ha dunque $FF = 1,175$, non $FR = 1,175$: sarebbe una contraddizione in termini.

4.5 Calcolo del fattore di interferenza

Il mutuo effetto del campo indotto da un componente sulle resistenze delle altre parti viene recuperato, come si è detto, dal fattore di interferenza IF .

Fusoliera. Si considera la sola interferenza dell'ala:

$$IF = R_{W-B}(Re_L, M_\infty), \quad (19)$$

con R_{W-B} diagrammato in figura 2 in funzione del Reynolds della fusoliera, parametrato con il Mach asintotico.

Ala:

$$IF = R_{LS}(\Lambda, M_\infty) \cdot R_{W-B}(Re_L, M_\infty), \quad (20)$$

dove R_{LS} tiene conto dell'effetto della freccia dell'ala, misurata nel punto di massimo spessore percentuale del profilo, ed è diagrammato in figura 3 al variare di M_∞ per profili convenzionali. Per profili *supercritici* si usa invece $R_{LS} = 1$.

Piani di coda:

$$IF = R_{LS}(\Lambda, M_\infty) \cdot Hf, \quad (21)$$

con Hf *fattore di cerniera*: vale 1,0 per un piano completamente mobile (*all-moving*), 1,1 per un piano costituito da parte fissa e parte mobile (la fessura di cerniera e il gradino di deflessione costano resistenza).

Gondole e corpi assialsimmetrici esterni, in assenza di dati sperimentali più precisi:

- $IF = 1,0$ per gondole o serbatoi in zone non influenzate dal campo indotto dall'ala;
- $IF = 1,25$ per serbatoi esterni alle estremità alari;
- $IF = 1,3$ per gondole o serbatoi in zone moderatamente influenzate dal campo alare;
- $IF = 1,5$ per gondole o serbatoi molto vicini all'ala.

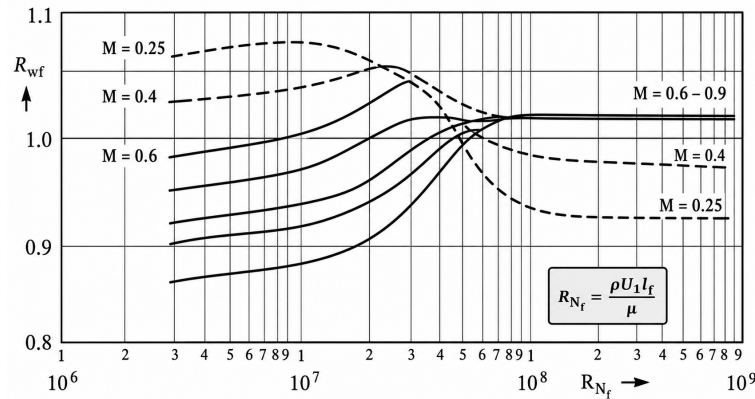
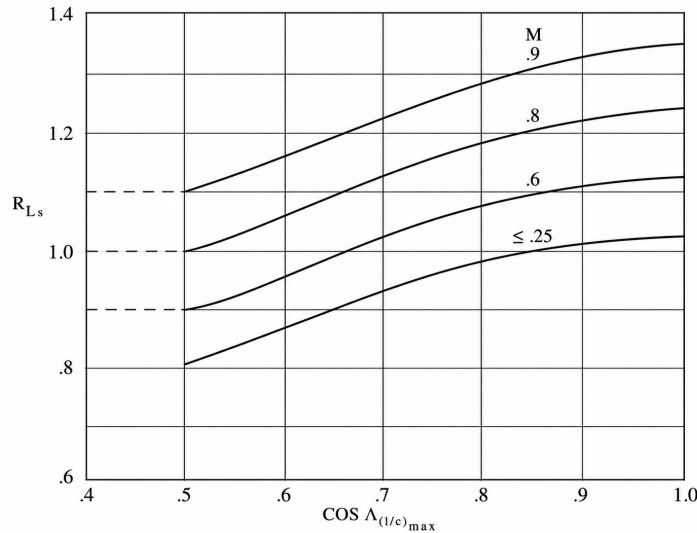


Figura 2: Fattore di correlazione ala-fusoliera R_{W-B} .

Leggere il segno di R_{W-B}

Nella figura 2 le curve scendono *sotto l'unità* ai Reynolds e ai Mach elevati: l'interferenza ala-fusoliera, in quelle condizioni, *riduce* la resistenza rispetto alla somma dei componenti isolati. Non è magia: la presenza dell'ala modifica la distribuzione di pressione sulla fusoliera in modo tale da ritardarne la separazione posteriore. Un fattore correttivo minore di uno non è un errore del metodo, è un'informazione fisica.

Figura 3: Fattore di correlazione di superficie portante R_{LS} .

4.6 Resistenza di base

I corpi affusolati che terminano con una *coda tronca* (si pensi all'ugello di scarico di una gondola, o alla poppa mozzata di certe fusoliere) generano a valle una scia forte e spessa: la depressione che si instaura sulla base produce una resistenza aggiuntiva, detta *resistenza di base*, con comportamento diverso al variare del Mach. Il termine da sommare al C_{D_k} del componente è:

$$\text{subsonico: } C_{D_{BASE}} = (0,1 + 1222 \cdot M_\infty^8) \cdot \frac{S_{BASE}}{S_W}, \quad (22)$$

$$\text{supersonico moderato } (M_\infty \leq 1,8): C_{D_{BASE}} = 0,2222 \cdot \frac{S_{BASE}}{S_W}, \quad (23)$$

$$\text{Mach superiori: } C_{D_{BASE}} = \frac{1,42}{3,15 + M_\infty^2} \cdot \frac{S_{BASE}}{S_W}, \quad (24)$$

con S_{BASE} superficie della base tronca. Si noti l'esponente 8 nella (22): a $M_\infty = 0,5$ il secondo addendo vale 4,8 contro il 0,1 del primo; a $M_\infty = 0,8$ vale già 205. La resistenza di base “esplode” solo in prossimità di $M_\infty = 1$, restando modesta in tutto il campo subsonico basso — ed è la ragione per cui, nelle nostre applicazioni con ugelli propulsivi in flusso, la trascureremo.

4.7 Resistenze aggiuntive

In avanprogetto occorre infine stimare gli incrementi di resistenza dovuti a irregolarità delle superfici, piccole protuberanze, antenne, tubi di Pitot, generatori di vortici, prese d'aria di raffreddamento, luci, scarichi. Questa resistenza aggiuntiva si stima come frazione percentuale del $C_{D_{min}}$ calcolato con la (4): varia dal **5 al 20 %** a seconda del tipo di velivolo e del suo livello tecnologico — poco per un jet di linea curatissimo, molto per un monomotore con antenne, tiranti e prese d'aria a vista.

! Il 15 % che decide tutto

Si osservi il peso di questa maggiorazione forfettaria: su un $C_{D_{min}}$ di 200 counts, la differenza fra il 5 % e il 20 % vale 30 counts, cioè più del contributo dell'intero piano di coda orizzontale, calcolato con quattro cifre significative. È un'ottima lezione di *onestà epistemica*: non ha senso raffinare all'infinito il calcolo dei singoli componenti quando

l'incertezza maggiore risiede in un coefficiente scelto a giudizio. In una relazione tecnica, la percentuale adottata va sempre dichiarata e motivata.

4.8 Sinossi operativa

↪ Raccordo — che cosa portiamo con noi

La ricetta completa, componente per componente:

1. condizioni di volo $\rightarrow M_\infty, Re_\infty$, fattori t ed f dalla (7) (atmosfera standard: appendice A);
2. per ogni componente: $Re_L = \min(Re_{L_1}, Re_{L_2})$ dalla (8) $\rightarrow C_f$ dalla (6);
3. S_{wet} dalle (11)–(12); FF dalle (13)–(18); IF dalle (19)–(21) o dai valori tabellati;
4. C_{D_k} dalla (5), eventuale resistenza di base, somma (4);
5. maggiorazione del 5–20 % per le resistenze aggiuntive $\rightarrow C_{D_{min}}$;
6. e dalla sezione 5 $\rightarrow$ polare (3) $\rightarrow$ collaudo statistico contro la tabella 1.

5 Il fattore di Oswald: tre stime indipendenti

⊙ Bussola — dove siamo e dove andiamo

Il metodo di build-up fornisce $C_{D_{min}}$; per chiudere la polare serve e . Troppo spesso il fattore di Oswald viene liquidato con un numero letto in tabella. In questa sezione lo affrontiamo di petto: ne vedremo tre stime indipendenti — una statistica, una empirica, una semi-analitica — e le confronteremo sui due velivoli delle applicazioni. Vedremo anche che due di esse, in un caso, litigano apertamente: e capire *perché* vale più di qualsiasi formula.

5.1 Prima strada: il dato statistico di classe

È la strada dell'avanprogetto puro, quando la geometria alare non è ancora definita in dettaglio: si sceglie e nell'intervallo della tabella 1, posizionandosi in base al livello tecnologico atteso del velivolo. Per un monomotore metallico rivettato con carrello retrattile si sceglierà il valore centrale della classe, $e \simeq 0,78$; per un jet di linea di generazione recente, con ala molto studiata e alette d'estremità, si potrà salire a $e \simeq 0,82$ – $0,85$.

Il pregio è la robustezza: quei valori sintetizzano centinaia di velivoli reali. Il difetto è l'ovvio: la stima non dipende dalla geometria, dunque non può guidare alcuna scelta di progetto.

5.2 Seconda strada: le correlazioni empiriche

Teoria — correlazioni di Raymer

Per ali *diritte* ($\Lambda_{LE} \simeq 0$) [3]:

$$e = 1,78 \left(1 - 0,045 AR^{0,68} \right) - 0,64. \quad (25)$$

Per ali a freccia con $\Lambda_{LE} > 30^\circ$:

$$e = 4,61 \left(1 - 0,045 AR^{0,68}\right) (\cos \Lambda_{LE})^{0,15} - 3,1. \quad (26)$$

Per $0 < \Lambda_{LE} < 30^\circ$ si interpola linearmente fra i due valori.

Applichiamo le (25)–(26) ai due velivoli delle sezioni 7 e 8.

Calcolo esplicito per il monomotore, $AR = 7,469$

$$AR^{0,68} = e^{0,68 \ln 7,469} = e^{1,3673} = 3,9248; \quad 1 - 0,045 \cdot 3,9248 = 0,8234;$$

$$e = 1,78 \cdot 0,8234 - 0,64 = 0,8256.$$

La tabella 1 suggerisce 0,75–0,80 per questa classe: la correlazione dà un valore appena superiore, plausibile per un'ala rastremata ben disegnata. Nell'applicazione adotteremo il più prudente $e = 0,78$.

Per il bimotore a getto ($AR = 9,412$, $\Lambda_{LE} = 27^\circ$) i conti danno un risultato che merita una discussione seria.

Tabella 2: Fattore di Oswald del bimotore a getto secondo le correlazioni di Raymer. Il salto fra le due formule al confine $\Lambda_{LE} = 30^\circ$ è la spia di un problema.

Formula	Ipotesi	e
(25)	ala dritta di riferimento, $AR = 9,412$	0,772
(26)	ala a freccia, $\Lambda_{LE} = 30^\circ$	0,479
interpolazione lineare	$\Lambda_{LE} = 27^\circ$	0,508
tabella 1	classe “jet di linea”	0,75–0,85

! Quando due formule si contraddicono

La tabella 2 mostra un fatto sgradevole: la (26), applicata al nostro jet, restituisce $e \simeq 0,5$, un valore che nessun jet di linea moderno esibisce; e al confine $\Lambda_{LE} = 30^\circ$ le due correlazioni saltano da 0,772 a 0,479, con una discontinuità del 38 %. Le formule empiriche non sono teoremi: sono *fit* statistici, validi entro il campione da cui sono state ricavate. La (26) fu calibrata su ali a forte freccia di allungamento moderato (velivoli da combattimento e jet della prima generazione); estrapolarla a un narrow-body moderno, con AR elevato e alette d'estremità, significa uscire dal suo dominio di validità.

Regola di condotta. Quando due stime indipendenti divergono di più del 10 %, non si sceglie la più comoda: si cerca una *terza* stima, e si capisce quale delle prime due è fuori dominio. È esattamente ciò che facciamo nel prossimo paragrafo.

5.3 Terza strada: la decomposizione viscosa

L'idea, dovuta a Kroo [6], parte dall'osservazione fisica già anticipata al §3: il termine quadratico della polare non è solo resistenza indotta. Esso contiene anche la crescita della resistenza *viscosa* con l'assetto (lo strato limite si inspessisce al crescere di C_L). Si scrive allora

Teoria — decomposizione del fattore di Oswald

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{e_{inv}} + K_{visc} \cdot C_{D_0} \cdot \pi AR, \quad K_{visc} \simeq 0,38, \quad (27)$$

dove e_{inv} è l'efficienza di apertura non viscosa, funzione della sola distribuzione di carico (vale 1 per l'ala ellittica, tipicamente 0,95–0,99 per ali rastremate ben disegnate), e il secondo termine raccoglie il contributo viscoso, proporzionale al C_{D_0} stesso.

La (27) è concettualmente superiore alle correlazioni empiriche per tre ragioni. Primo, *separa* ciò che dipende dalla forma in pianta (e_{inv}) da ciò che dipende dalla pulizia esterna (C_{D_0}). Secondo, spiega perché il fattore di Oswald del velivolo completo è sempre minore di quello dell'ala isolata: il termine viscoso è positivo, quindi $e < e_{inv}$. Terzo, spiega perché e e $C_{D_{min}}$ non sono indipendenti, come invece la tabella 1 lascerebbe credere: un velivolo sporco è penalizzato *due volte*, sul termine costante e sul termine quadratico.

Applicazione ai due velivoli

Assumiamo $e_{inv} = 0,95$ per il monomotore (ala rastremata semplice) e $e_{inv} = 0,97$ per il jet (ala ottimizzata con alette d'estremità), e usiamo i $C_{D_{min}}$ che ricaveremo nelle sezioni 7 e 8.

Monomotore ($C_{D_0} = 0,0234$, $AR = 7,469$):

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{0,95} + 0,38 \cdot 0,0234 \cdot \pi \cdot 7,469 = 1,0526 + 0,2086 = 1,2613 \quad \Rightarrow \quad e = 0,793.$$

Bimotore a getto ($C_{D_0} = 0,0189$, $AR = 9,412$):

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{0,97} + 0,38 \cdot 0,0189 \cdot \pi \cdot 9,412 = 1,0309 + 0,2124 = 1,2433 \quad \Rightarrow \quad e = 0,804.$$

✓ Verdetto sul fattore di Oswald

Il confronto delle tre strade è riassunto nella tabella 3. La decomposizione viscosa e il dato statistico concordano entro il 2–3 % su entrambi i velivoli; la correlazione empirica per ali a freccia è l'unica fuori riga, ed è quella che va scartata. Nelle applicazioni adotteremo $e = 0,78$ (monomotore) ed $e = 0,82$ (jet): valori statistici, confermati dalla (27).

Tabella 3: Le tre stime del fattore di Oswald a confronto. La colonna “scarto” è riferita al valore adottato.

Velivolo	statistica	Raymer	Kroo (27)	adottato
Monomotore AG	0,75 – 0,80	0,826	0,793	0,78
Bimotore a getto	0,75 – 0,85	0,508 ^(*)	0,804	0,82

^(*) fuori dal dominio di validità della correlazione: si veda l'avviso al §5.2.

5.4 Quando la geometria è nota: il metodo di Multhopp

Se la forma in pianta, la legge delle corde e lo svergolamento sono definiti in dettaglio, la stima deterministica di e_{inv} si ottiene risolvendo l'equazione integro-differenziale di Prandtl con il metodo di collocazione di Multhopp: si calcola il coefficiente δ di scostamento dal carico ellittico

e si pone $e_{inv} = 1/(1 + \delta)$. Il valore così ottenuto va poi inserito nella (27) per passare dall'ala isolata al velivolo completo. Il metodo, oggetto di altra monografia della serie, è la strada da percorrere quando l'avanprogetto lascia il posto al progetto preliminare.

↪ Raccordo — che cosa portiamo con noi

Tre stime, un solo numero. La lezione di metodo è che il fattore di Oswald non è un parametro da leggere, ma da *argomentare*: la (27) ci dice che e e $C_{D_{min}}$ sono legati, e che un velivolo pulito è premiato due volte. La tabella statistica resta il giudice di ultima istanza — ma ora sappiamo perché i suoi numeri sono quelli.

6 Dalla polare alle prestazioni

⊙ Bussola — dove siamo e dove andiamo

Una polare stimata deve poter essere *letta*. In questa sezione ricaviamo, con dimostrazioni complete, l'efficienza aerodinamica massima e l'assetto a cui si realizza; poi passiamo dall'assetto alla *velocità*, e mostriamo che la condizione di minima resistenza e quella di minima potenza necessaria sono due condizioni diverse. Saranno i numeri con cui giudicheremo la qualità delle polari costruite nelle applicazioni.

6.1 Efficienza aerodinamica e suo massimo

L'*efficienza aerodinamica* è il rapporto

$$E = \frac{C_L}{C_D} = \frac{L}{D}, \quad (28)$$

cioè, in volo librato, il numero di metri percorsi per ogni metro di quota perduta; in volo propulso rettilineo uniforme, l'inverso della frazione di peso che il propulsore deve “rimborsare” come spinta ($T = D = W/E$). Con la polare parabolica (3) si ha

$$E(C_L) = \frac{C_L}{C_{D_0} + K C_L^2}. \quad (29)$$

Teoria — dimostrazione: massimo dell'efficienza

Deriviamo la (29) rispetto a C_L e annulliamo la derivata:

$$\frac{dE}{dC_L} = \frac{(C_{D_0} + K C_L^2) - C_L \cdot 2K C_L}{(C_{D_0} + K C_L^2)^2} = \frac{C_{D_0} - K C_L^2}{(C_{D_0} + K C_L^2)^2} = 0 \implies K C_L^2 = C_{D_0}. \quad (30)$$

Il massimo dell'efficienza si realizza dunque quando la resistenza indotta eguaglia la resistenza parassita: $C_{D_i} = C_{D_0}$. Ne seguono l'assetto ottimo, il corrispondente coefficiente di resistenza e il valore del massimo:

$$\boxed{C_L^* = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{K}} = \sqrt{\pi A R e C_{D_0}}, \quad C_D^* = 2 C_{D_0}, \quad E_{max} = \frac{C_L^*}{2 C_{D_0}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi A R e}{C_{D_0}}}. \quad (31)}$$

Che si tratti di un massimo (e non di un minimo) è evidente dal segno della derivata: il numeratore $C_{D_0} - K C_L^2$ è positivo per $C_L < C_L^*$ e negativo oltre, mentre il denominatore è sempre positivo.

Interpretazione geometrica

Sul piano (C_D, C_L) l'efficienza di un assetto è la pendenza della retta che congiunge l'origine con il punto della polare: E_{max} corrisponde alla retta *tangente* alla parabola condotta dall'origine. La costruzione è visibile nella figura 5. È lo stesso ragionamento grafico che si usa, in meccanica del volo, per individuare sul diagramma delle potenze la velocità di massima autonomia chilometrica.

6.2 Dall'assetto alla velocità

L'assetto ottimo si traduce in una velocità imponendo l'equilibrio alla portanza, $W = \frac{1}{2}\rho V^2 S_W C_L$:

$$V^* = \sqrt{\frac{2W}{\rho S_W C_L^*}} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S_W}} \left(\frac{K}{C_{D_0}} \right)^{1/4}, \quad (32)$$

alla quale corrisponde la *minima resistenza* in assoluto

$$D_{min} = \frac{W}{E_{max}} = 2W \sqrt{K C_{D_0}}. \quad (33)$$

Si osservi la struttura della (32): V^* dipende dal carico alare W/S_W (che il progettista sceglie) e dalla quota (attraverso ρ). Un velivolo più carico vola più veloce alla sua massima efficienza; lo stesso velivolo, in quota, vola più veloce a parità di assetto. La (33), invece, è *indipendente dalla quota*: la resistenza minima di un velivolo è una sua proprietà, non una proprietà del volo.

6.3 Minima resistenza e minima potenza non coincidono

La potenza necessaria al volo orizzontale uniforme è $\Pi = D V$. Sostituendo la polare e l'equilibrio alla portanza:

$$D(V) = \underbrace{\frac{1}{2}\rho V^2 S_W C_{D_0}}_{\text{parassita}} + \underbrace{\frac{2K W^2}{\rho V^2 S_W}}_{\text{indotta}}. \quad (34)$$

Teoria — dimostrazione: condizione di minima potenza

Minimizzare $\Pi = D V$ equivale a minimizzare $C_D/C_L^{3/2}$, poiché $\Pi = \sqrt{\frac{2W^3}{\rho S_W}} \frac{C_D}{C_L^{3/2}}$. Posto

$$g(C_L) = (C_{D_0} + K C_L^2) C_L^{-3/2}:$$

$$\frac{dg}{dC_L} = 2K C_L^{-1/2} - \frac{3}{2}(C_{D_0} + K C_L^2) C_L^{-5/2} = 0 \implies 2K C_L^2 = \frac{3}{2}C_{D_0} + \frac{3}{2}K C_L^2 \implies K C_L^2 = 3 C_{D_0}.$$

Alla minima potenza la resistenza indotta vale dunque *tre volte* la parassita:

$$C_{L\Pi} = \sqrt{\frac{3 C_{D_0}}{K}} = \sqrt{3} C_L^*, \quad C_{D\Pi} = 4 C_{D_0}, \quad E_{\Pi} = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{1}{K C_{D_0}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} E_{max} \simeq 0,866 E_{max}, \quad (35)$$

e la corrispondente velocità è

$$V_{\Pi} = \frac{V^*}{3^{1/4}} \simeq 0,760 V^*. \quad (36)$$

Due velocità, due missioni

I rapporti $E_{\Pi}/E_{max} = 0,866$ e $V_{\Pi}/V^* = 0,760$ sono *universali*: non dipendono dal velivolo, ma solo dalla forma parabolica della polare. Il loro significato operativo è netto:

- a V^* si vola con la minima resistenza, dunque con la minima *spinta*: è la condizione di massima autonomia chilometrica per un velivolo a getto, e di massima distanza di planata per tutti;
- a $V_{\Pi} < V^*$ si vola con la minima *potenza*, dunque con il minimo consumo orario: è la condizione di massima autonomia oraria per un velivolo a elica, e di minima velocità di discesa in planata.

Il pilota di aliante che vuole restare in aria il più a lungo possibile vola a V_{Π} ; quello che vuole raggiungere il campo più lontano vola a V^* . La stessa polare, due letture diverse.

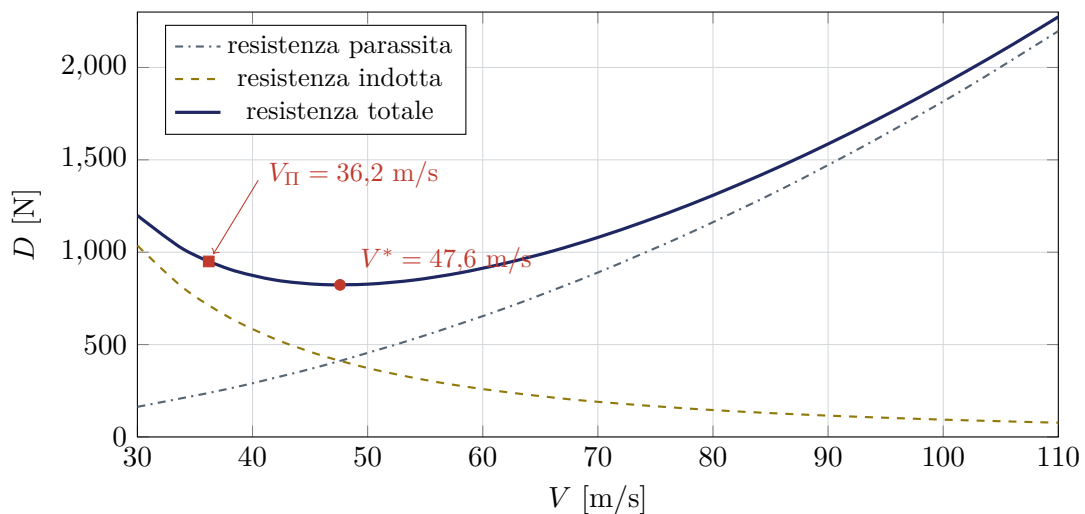


Figura 4: Decomposizione della resistenza del monomotore dell'applicazione I ($W = 11\,500\text{ N}$, $2\,500\text{ m ISA}$), equazione (34). Il minimo della curva totale cade dove le due componenti si incrociano: è la *condizione di massima efficienza*. La condizione di minima potenza ($\square$) cade a velocità inferiore, dove la curva $D(V)$ è già risalita.

La figura 4 merita di essere guardata a lungo. Il ramo parassita cresce con V^2 , il ramo indotto decresce con $1/V^2$: la loro somma ha un minimo dove le due curve si intersecano, e questa intersezione è la traduzione grafica della condizione $C_{D_i} = C_{D_0}$ trovata analiticamente. A sinistra del minimo il velivolo si trova nel cosiddetto *regime di comando inverso*: per volare più lentamente occorre *più* spinta, non meno. È la regione in cui si vola in avvicinamento finale, ed è la ragione per cui il pilota controlla la traiettoria con la manetta e la velocità con l'equilibratore.

6.4 Lettura tecnologica

La (31) spiega in una riga la strategia del progettista: per aumentare E_{max} si può *ridurre* C_{D_0} (superfici curate, giunzioni annegate, carrello retrattile) oppure *aumentare* il prodotto ARe (ali allungate e con carico prossimo all'ellittico). Poiché E_{max} cresce solo con la radice quadrata, dimezzare il C_{D_0} “vale” quanto raddoppiare l'allungamento: ma il secondo intervento costa in peso strutturale — il momento flettente in radice cresce con l'apertura, come sappiamo dal dimensionamento dei longheroni — e il compromesso tra aerodinamica e strutture è, come sempre, il cuore del progetto.

C'è però un dettaglio che la (27) ci ha insegnato e che qui torna: C_{D_0} ed e non sono indipendenti. Ridurre il C_{D_0} fa crescere anche e , e quindi E_{max} migliora *due volte*. La pulizia aerodinamica è, in avanprogetto, l'investimento a rendimento più alto.

↪ Raccordo — che cosa portiamo con noi

D'ora in poi, per ogni polare stimata calcoleremo sistematicamente la terna (C_L^*, C_D^*, E_{max}) della (31) e, dove il peso è noto, le velocità V^* e V_{II} delle (32) e (36): è il modo più rapido per confrontare velivoli e per accorgersi di eventuali errori di stima.

7 Applicazione I: monomotore di aviazione generale

⊙ Bussola — dove siamo e dove andiamo

Primo banco di prova del metodo: un monomotore a pistoncini con carrello retrattile, la classe di velivoli su cui la tabella 1 prevede $C_{D_{min}} = 0,020\text{--}0,030$ ed $e = 0,75\text{--}0,80$. Svolgeremo *tutti* i passaggi, senza salti, seguendo la sinossi del §4.8: alla fine confronteremo il risultato con l'intervallo statistico, che è il vero collaudo di ogni stima di avanprogetto.

Dati del velivolo e della condizione di volo

Velivolo monomotore quadriposto, carrello retrattile, costruzione metallica rivettata (geometria ispirata alla classe Mooney/Piper Arrow):

Superficie alare	$S_W = 16,2 \text{ m}^2$	Apertura alare	$b = 11,0 \text{ m}$
Profilo alare	NACA serie 4, $\tau = 0,12$	Sup. alare in fusoliera	$1,5 \text{ m}^2$
Lunghezza fusoliera	$L_f = 8,30 \text{ m}$	Sezione fusoliera	$h = 1,40 \text{ m}$, $d = 1,10 \text{ m}$
Piano orizzontale	$S_h = 3,0 \text{ m}^2$, $\bar{c}_h = 0,90 \text{ m}$	Profilo coda	serie 4, $\tau = 0,09$
Piano verticale	$S_v = 1,3 \text{ m}^2$, $\bar{c}_v = 1,10 \text{ m}$	Piani di coda	parte fissa + mobile
Quota di crociera	2 500 m (ISA)	Velocità	$V = 60 \text{ m/s}$
Peso	$W = 11\,500 \text{ N}$	Ala e coda	senza freccia ($\Lambda \simeq 0$)
Rugosità ammissibile	$k = 9 \cdot 10^{-5} \text{ m}$		

Ipotesi di lavoro

- Flusso totalmente turbolento su tutti i componenti: useremo la (6) (scelta conservativa e realistica per una costruzione rivettata).
- Letture dai diagrammi: dalla figura 2, per $Re_{fus} \approx 28$ milioni e $M_\infty < 0,25$, assumiamo $R_{W-B} = 1,05$; dalla figura 3, per $\cos \Lambda = 1$ e $M_\infty \leq 0,25$, assumiamo $R_{LS} = 1,05$.
- Fattore di Oswald: $e = 0,78$, valore centrale della classe, confermato dalla decomposizione viscosa del §5.3.
- Resistenze aggiuntive al 15 % (antenne, prese d'aria di raffreddamento del motore, tiranti, luci: livello tecnologico medio).
- Resistenza di base trascurabile: la fusoliera termina con coda rastremata.

Fase 1 — Condizioni di volo

Dall'atmosfera standard a 2500 m (appendice A):

$$T = 271,90 \text{ K}, \quad p = 74\,683 \text{ Pa}, \quad \rho = 0,9569 \text{ kg/m}^3, \quad a = 330,56 \text{ m/s}.$$

Con la legge di Sutherland, $\mu = 1,7099 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$. Ne seguono

$$M_\infty = \frac{V}{a} = \frac{60}{330,56} = 0,182, \quad \frac{Re}{L} = \frac{\rho V}{\mu} = \frac{0,9569 \cdot 60}{1,7099 \cdot 10^{-5}} = 3,358 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}.$$

I fattori di comprimibilità della (7):

$$t = \left(1 + 0,89 \cdot 0,2 \cdot 0,182^2\right)^{-1} = 0,99417, \quad f = 1 + 0,03916 \cdot 0,182^2 \cdot t = 1,00128 :$$

come previsto, a questo Mach la comprimibilità è del tutto trascurabile ($t f^2 \simeq 0,997$). La geometria alare fornisce

$$AR = \frac{b^2}{S_W} = \frac{11^2}{16,2} = 7,469, \quad \bar{c} = \frac{S_W}{b} = 1,473 \text{ m}, \quad Re_\infty = 3,358 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1} \cdot \bar{c} = 4,945 \cdot 10^6.$$

Fase 2 — Ala

Area bagnata. Sottraiamo la porzione nascosta in fusoliera: $S_{exp} = 16,2 - 1,5 = 14,7 \text{ m}^2$, quindi dalla (11) $S_{wet} = 2 \cdot 14,7 = 29,40 \text{ m}^2$.

Reynolds e cut-off. $Re_{L_1} = Re_\infty = 4,945 \cdot 10^6$ (la lunghezza di riferimento è la stessa corda media). Dalla (9), con $M_\infty = 0,182$, $K_1 = 38,55$; dalla (8)

$$Re_{L_2} = 38,55 \cdot \left(\frac{1,473}{9 \cdot 10^{-5}}\right)^{1,0489} = 1,014 \cdot 10^6.$$

Poiché $Re_{L_2} < Re_{L_1}$, **il cut-off è attivo**: il rivestimento rivettato si comporta da parete scabra e l'attrito è fissato dalla rugosità. Entriamo nella (6) con $Re_L = 1,014 \cdot 10^6$ e otteniamo $C_f = 0,00436$.

Fattore di forma (serie 4, $\tau = 0,12$), dalla (16):

$$FF = 1 + 1,68 \cdot 0,12 + 3 \cdot 0,12^2 = 1,2448.$$

Fattore di interferenza, dalla (20): $IF = R_{LS} \cdot R_{W-B} = 1,05 \cdot 1,05 = 1,103$.

Contributo, dalla (5):

$$C_{D_{ata}} = 0,00436 \cdot \frac{29,40}{16,2} \cdot 1,2448 \cdot 1,103 = 0,01086 (= 108,6 \text{ counts}).$$

Fase 3 — Fusoliera

Area bagnata, dalla (12) con $\sqrt{hd} = \sqrt{1,40 \cdot 1,10} = 1,241 \text{ m}$:

$$S_{wet} = 0,75 \cdot \pi \cdot 1,241 \cdot 8,30 = 24,27 \text{ m}^2.$$

Snellezza e fattore di forma, dalla (13):

$$FR = \frac{8,30}{1,241} = 6,688, \quad FF = 1 + \frac{60}{6,688^3} + 0,0025 \cdot 6,688 = 1,2173.$$

Reynolds. $Re_{L_1} = 3,358 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1} \cdot 8,30 = 2,787 \cdot 10^7$; $Re_{L_2} = 38,55 \cdot (8,30/9 \cdot 10^{-5})^{1,0489} = 6,217 \cdot 10^6$. Anche qui il cut-off è attivo: $Re_L = 6,217 \cdot 10^6$, da cui $C_f = 0,00318$.

Interferenza: $IF = R_{W-B} = 1,05$.

Contributo:

$$C_{D_{fus}} = 0,00318 \cdot \frac{24,27}{16,2} \cdot 1,2173 \cdot 1,05 = 0,00609 (= 60,9 \text{ counts}).$$

Fase 4 — Piani di coda

Piano orizzontale. $S_{wet} = 2 \cdot 3,0 = 6,00 \text{ m}^2$; $Re_{L_1} = 3,358 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1} \cdot 0,90 = 3,022 \cdot 10^6$; $Re_{L_2} = 6,048 \cdot 10^5$ (cut-off attivo) $\Rightarrow C_f = 0,00481$. Fattore di forma (serie 4, $\tau = 0,09$): $FF = 1 + 1,68 \cdot 0,09 + 3 \cdot 0,09^2 = 1,1755$. Interferenza dalla (21), con parte fissa + mobile: $IF = R_{LS} \cdot Hf = 1,05 \cdot 1,1 = 1,155$. Quindi

$$C_{D_{po}} = 0,00481 \cdot \frac{6,00}{16,2} \cdot 1,1755 \cdot 1,155 = 0,00242 (= 24,2 \text{ counts}).$$

Piano verticale. $S_{wet} = 2 \cdot 1,3 = 2,60 \text{ m}^2$; $Re_{L_1} = 3,693 \cdot 10^6$; $Re_{L_2} = 7,464 \cdot 10^5$ $\Rightarrow C_f = 0,00462$; $FF = 1,1755$; $IF = 1,155$:

$$C_{D_{pv}} = 0,00462 \cdot \frac{2,60}{16,2} \cdot 1,1755 \cdot 1,155 = 0,00101 (= 10,1 \text{ counts}).$$

Fase 5 — Somma, resistenze aggiuntive e polare

$$\sum_k C_{D_k} = 0,01086 + 0,00609 + 0,00242 + 0,00101 = 0,02038 (\simeq 204 \text{ counts}).$$

Con la maggiorazione del 15 % per le resistenze aggiuntive:

$$C_{D_{min}} = 1,15 \cdot 0,02038 \simeq 0,0234 (\simeq 234 \text{ counts}).$$

Con $e = 0,78$:

$$K = \frac{1}{\pi A R e} = \frac{1}{\pi \cdot 7,469 \cdot 0,78} = 0,05464.$$

✓ Polare di avanprogetto del monomotore

$$C_D = 0,0234 + 0,0546 C_L^2 \quad (37)$$

Ripartizione del $C_{D_{min}}$: ala 53,3 %, fusoliera 29,9 %, piano orizzontale 11,9 %, piano verticale 4,9 % (più la maggiorazione forfettaria). Prestazioni dalle (31), (32) e (36):

$$C_L^* = \sqrt{\frac{0,0234}{0,0546}} = 0,655, \quad C_D^* = 2 C_{D_{min}} \simeq 0,0469, \quad E_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{0,0546 \cdot 0,0234}} \simeq 14,0;$$

$$V^* = 47,6 \text{ m/s}, \quad D_{min} = 823 \text{ N}, \quad V_{II} = 36,2 \text{ m/s}, \quad \Pi_{min} = 34,4 \text{ kW}.$$

Collaudo statistico: $C_{D_{min}} = 0,0234$ cade nell'intervallo 0,020–0,030 della tabella 1 per la classe “monomotore, carrello retrattile”, ed $E_{max} \simeq 14$ è coerente con i valori pubblicati per questa categoria (12–14). La stima è plausibile.

Il velivolo non vola alla sua massima efficienza

La crociera assegnata è a $V = 60 \text{ m/s}$, ben oltre $V^* = 47,6 \text{ m/s}$. Verifichiamolo: dall'equilibrio alla portanza

$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S_W} = \frac{2 \cdot 11500}{0,9569 \cdot 60^2 \cdot 16,2} = 0,412,$$

da cui $C_D = 0,0234 + 0,0546 \cdot 0,412^2 = 0,0327$ ed $E = 12,6$, contro un massimo di 14,0. Si perde il 10 % di efficienza — e si guadagna il 26 % di velocità. Nessun velivolo da trasporto, di linea o privato, vola alla propria massima efficienza: il tempo, in aeronautica, ha un prezzo. La resistenza in crociera vale $D = \frac{1}{2} \rho V^2 S_W C_D = 913 \text{ N}$, cui corrisponde una potenza necessaria di 54,8 kW: con un rendimento di elica $\eta_p \simeq 0,8$, servono circa 68 kW all'albero, ossia una novantina di cavalli. Il conto torna, per un quadriposto di questa classe.

Che cosa ci dice la ripartizione

Più di metà della resistenza parassita viene dall'ala: non sorprende, perché l'ala possiede da sola metà dell'area bagnata totale ed è penalizzata dal cut-off di rugosità ($Re_{L_2} \approx 1 \cdot 10^6$ contro un Reynolds di volo di $4,9 \cdot 10^6$). È la giustificazione quantitativa di due scelte costruttive ben note: la chiodatura a testa svasata sul rivestimento alare e la finitura accurata del bordo d'attacco. Provate, con lo script della sezione 11, a dimezzare la rugosità k della sola ala: vedrete il $C_{D_{min}}$ scendere di circa 15 counts — il “costo aerodinamico” di una lamiera trascurata. Se dimezzate k su *tutti* i componenti il guadagno sale a circa 28 counts.

8 Applicazione II: bimotore a getto in crociera transonica

⊙ Bussola — dove siamo e dove andiamo

Secondo banco di prova, agli antipodi del primo: un bimotore a getto da trasporto in crociera a $M_\infty = 0,78$ e 11 000 m. Qui entrano in gioco tutti gli ingredienti “avanzati” del metodo: correzioni di comprimibilità non trascurabili, profili supercritici, freccia alare, gondole subalari e un Reynolds di fusoliera da oltre 200 milioni che rende protagonista il cut-off di rugosità. Lo svolgimento è più asciutto di quello precedente: i passaggi ormai li conosciamo.

Dati del velivolo e della condizione di volo

Bimotore a getto da trasporto a corridoio singolo (geometria ispirata alla classe A320/B737):

Superficie alare	$S_W = 125 \text{ m}^2$	Apertura	$b = 34,3 \text{ m}$
Profili alari	supercritici, $\tau = 0,11$, $c_{ld} = 0,02$	Sup. alare in fusoliera	22 m^2
Freccia alare	$\Lambda_{(t/c)_{max}} = 25^\circ$, $\Lambda_{LE} = 27^\circ$	Massa	$m = 64\,000 \text{ kg}$
Fusoliera	$L_f = 38,0 \text{ m}$, $h = 4,1 \text{ m}$, $d = 4,0 \text{ m}$	Freccia P.O.	$\Lambda_h = 28^\circ$ ($\cos = 0,883$)
Piano orizzontale	$S_h = 31 \text{ m}^2$, $\bar{c}_h = 2,9 \text{ m}$, serie 6, $\tau = 0,10$	Freccia P.V.	$\Lambda_v = 35^\circ$ ($\cos = 0,819$)
Piano verticale	$S_v = 21 \text{ m}^2$, $\bar{c}_v = 4,0 \text{ m}$, serie 6, $\tau = 0,10$	Gondole ($\times 2$)	$L_n = 4,3 \text{ m}$, $d_n = 2,1 \text{ m}$
Crociera	$M_\infty = 0,78$ a 11 000 m (ISA)	Rugosità	$k = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

Ipotesi di lavoro

- Ci poniamo *al di sotto* del Mach critico di cresta: i profili supercritici e la freccia sono scelti proprio per questo. Il metodo, lo ricordiamo, non stima la resistenza d'onda; l'ipotesi verrà verificata *a posteriori* nel §10.1.
- Letture dai diagrammi: figura 2, con $Re_{fus} \approx 224$ milioni e $M_\infty = 0,78$: $R_{W-B} = 0,95$; figura 3: $R_{LS} = 1,18$ per il piano orizzontale ($\cos \Lambda = 0,88$) e $R_{LS} = 1,14$ per il verticale ($\cos \Lambda = 0,82$). Per l'ala, essendo i profili supercritici, $R_{LS} = 1$.
- Gondole subalari su pilone: zona *moderatamente* influenzata dal campo alare, $IF = 1,3$. Piani di coda con parte fissa e mobile: $Hf = 1,1$.
- Fattore di Oswald: $e = 0,82$, confermato dalla decomposizione viscosa del §5.3. Resistenze aggiuntive all'8 % (velivolo commerciale molto curato).

Fase 1 — Condizioni di volo e comprimibilità

A 11 000 m ISA: $T = 216,65$ K, $\rho = 0,3639$ kg/m³, $a = 295,07$ m/s, quindi $V = M_\infty a = 230,2$ m/s e, con $\mu = 1,4216 \cdot 10^{-5}$ Pa s,

$$\frac{Re}{L} = \frac{\rho V}{\mu} = 5,892 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}.$$

Fattori di comprimibilità (7):

$$t = (1 + 0,89 \cdot 0,2 \cdot 0,78^2)^{-1} = 0,90229, \quad f = 1 + 0,03916 \cdot 0,78^2 \cdot t = 1,02150.$$

Questa volta $t f^2 = 0,9415$: il prefattore riduce l'attrito di quasi il 6 %, in parte compensato dallo spostamento del Reynolds efficace nel logaritmo; l'effetto netto sul C_f è un taglio del 4 % circa (figura 1) e *non* è trascurabile. Coefficiente K_1 della (9): $K_1 = 44,94$. Geometria: $AR = 34,3^2/125 = 9,412$, $\bar{c} = 125/34,3 = 3,644$ m.

Fase 2 — Contributi dei componenti

Procediamo componente per componente, applicando ogni volta la sequenza $Re_{L_1}-Re_{L_2}-C_f-FF-IF-CD_k$; si noti che il cut-off risulta attivo su *tutti* i componenti.

Ala. $S_{exp} = 125 - 22 = 103 \text{ m}^2$, $S_{wet} = 206 \text{ m}^2$. $Re_{L_1} = 2,147 \cdot 10^7$; $Re_{L_2} = 44,94 (3,644/4,5 \cdot 10^{-5})^{1,0489} = 6,325 \cdot 10^6 \Rightarrow C_f = 0,00307$. Fattore di forma supercritico (18) con $K_L = 0,5$ (Mach supercritico):

$$FF = 1 + 0,5 \cdot 0,02 + 1,44 \cdot 0,11 + 2 \cdot 0,11^2 = 1,1926; \quad IF = 1 \cdot 0,95 = 0,95.$$

$$C_{D_{ala}} = 0,00307 \cdot \frac{206}{125} \cdot 1,1926 \cdot 0,95 = 0,00573 \text{ (57,3 counts)}.$$

Fusoliera. $\sqrt{hd} = 4,050$ m; $S_{wet} = 0,75 \pi \cdot 4,050 \cdot 38,0 = 362,6 \text{ m}^2$; $FR = 38,0/4,050 = 9,383$; $FF = 1 + 60/FR^3 + 0,0025 FR = 1,0961$. $Re_{L_1} = 2,239 \cdot 10^8$ (224 milioni!); $Re_{L_2} = 7,397 \cdot 10^7 \Rightarrow C_f = 0,00210$; $IF = 0,95$:

$$C_{D_{fus}} = 0,00210 \cdot \frac{362,6}{125} \cdot 1,0961 \cdot 0,95 = 0,00635 \text{ (63,5 counts)}.$$

Piano orizzontale. $S_{wet} = 62 \text{ m}^2$; $Re_{L_1} = 1,709 \cdot 10^7$; $Re_{L_2} = 4,977 \cdot 10^6 \Rightarrow C_f = 0,00319$; $FF = 1 + 1,44 \cdot 0,10 + 2 \cdot 0,10^2 = 1,1640$; $IF = 1,18 \cdot 1,1 = 1,298$:

$$C_{D_{po}} = 0,00319 \cdot \frac{62}{125} \cdot 1,1640 \cdot 1,298 = 0,00239 \text{ (23,9 counts)}.$$

Piano verticale. $S_{wet} = 42 \text{ m}^2$; $Re_{L_1} = 2,357 \cdot 10^7$; $Re_{L_2} = 6,974 \cdot 10^6 \Rightarrow C_f = 0,00302$; $FF = 1,1640$; $IF = 1,14 \cdot 1,1 = 1,254$:

$$C_{D_{pv}} = 0,00302 \cdot \frac{42}{125} \cdot 1,1640 \cdot 1,254 = 0,00148 \text{ (14,8 counts)}.$$

Gondole motrici ($\times 2$, corpi assialsimmetrici: $h = d = d_n$). $S_{wet} = 0,75\pi \cdot 2,1 \cdot 4,3 = 21,28 \text{ m}^2$ ciascuna; $FR = 4,3/2,1 = 2,048$; dalla (14) $FF = 1 + 0,35/2,048 = 1,1709$; $Re_{L_1} = 2,533 \cdot 10^7$, $Re_{L_2} = 7,524 \cdot 10^6 \Rightarrow C_f = 0,00298$; $IF = 1,3$:

$$C_{D_{gon}} = 2 \cdot 0,00298 \cdot \frac{21,28}{125} \cdot 1,1709 \cdot 1,3 = 0,00154 \text{ (15,4 counts)}.$$

Fase 3 — Somma e polare

$$\sum_k C_{D_k} = 57,3 + 63,5 + 23,9 + 14,8 + 15,4 = 174,9 \text{ counts} = 0,01749.$$

Con la maggiorazione dell'8%: $C_{D_{min}} = 1,08 \cdot 0,01749 = 0,01889 \simeq 189 \text{ counts}$. Con $e = 0,82$: $K = 1/(\pi \cdot 9,412 \cdot 0,82) = 0,04124$.

✓ Polare di avanprogetto del bimotore a getto

$$C_D = 0,0189 + 0,0412 C_L^2 \quad (38)$$

Ripartizione: fusoliera 36,3%, ala 32,7%, piano orizzontale 13,7%, gondole 8,8%, piano verticale 8,5%. Prestazioni:

$$C_L^* = 0,677, \quad C_D^* = 0,0378, \quad E_{max} = 17,9, \quad V^* = 202 \text{ m/s}.$$

Collaudo statistico: $C_{D_{min}} = 0,0189$ è nell'intervallo 0,014–0,020 della classe “jet di linea” (parte alta: coerente con la presenza di gondole vicine all'ala e con l'8% forfettario), ed $E_{max} \approx 18$ è tipico dei narrow-body di generazione recente.

La crociera economica non è la crociera efficiente

Con $m = 64000 \text{ kg}$ si ha $W = 627,6 \text{ kN}$ e, a 11000 m ,

$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S_W} = \frac{2 \cdot 627,6 \cdot 10^3}{0,3639 \cdot 230,2^2 \cdot 125} = 0,521, \quad C_D = 0,0301, \quad E = 17,3.$$

La spinta necessaria in crociera è $T = D = W/E = 36,2 \text{ kN}$, cioè $18,1 \text{ kN}$ per motore: un valore del tutto realistico per un turbofan di questa categoria in quota. La velocità di massima efficienza sarebbe $V^* = 202 \text{ m/s}$ contro i 230 m/s di crociera: anche qui il velivolo vola più veloce del suo ottimo aerodinamico, rinunciando a mezzo punto di efficienza per guadagnare il 14% di velocità. La differenza rispetto al monomotore è che il jet vola *molto vicino* al suo E_{max} (17,3 contro 17,9, il 97%): il progetto della crociera transonica è, in

sostanza, l'arte di far coincidere il punto di crociera con il punto di massima efficienza a quella quota.

9 Confronto critico e sintesi

⊙ Bussola — dove siamo e dove andiamo

Due velivoli, due polari, un solo metodo. In questa sezione mettiamo i risultati uno accanto all'altro e ci chiediamo *perché* sono quelli che sono. È il passaggio che trasforma un esercizio di calcolo in una lettura progettuale.

9.1 Il quadro d'insieme

Tabella 4: Sintesi delle due applicazioni. Tutti i coefficienti sono riferiti alla rispettiva superficie alare; i contributi C_{D_k} sono espressi in counts, prima della maggiorazione forfettaria.

	Monomotore AG	Bimotore a getto
Quota / Mach	2 500 m / 0,182	11 000 m / 0,78
S_W / AR	16,2 m ² / 7,469	125 m ² / 9,412
Area bagnata totale	62,3 m ²	715,2 m ²
Re_∞ (su $\bar{c}$)	$4,95 \cdot 10^6$	$2,15 \cdot 10^7$
Rugosità k	$9 \cdot 10^{-5}$ m	$4,5 \cdot 10^{-5}$ m
Ala	108,6	57,3
Fusoliera	60,9	63,5
Piano orizzontale	24,2	23,9
Piano verticale	10,1	14,8
Gondole ($\times 2$)	—	15,4
Somma $\sum C_{D_k}$	204,0	174,9
Maggiorazione	+15 %	+8 %
$C_{D_{min}}$	0,023 4 (234 counts)	0,018 9 (189 counts)
e adottato	0,78	0,82
$K = 1/(\pi AR e)$	0,054 6	0,041 2
C_L^* / C_D^*	0,655 / 0,046 9	0,677 / 0,037 8
E_{max}	14,0	17,9
E in crociera	12,6 (90 % di E_{max})	17,3 (97 % di E_{max})
Intervallo statistico $C_{D_{min}}$	0,020 – 0,030 ✓	0,014 – 0,020 ✓

9.2 Il paradosso apparente e la sua soluzione

Due velivoli, due fisiche diverse

Il jet ha un $C_{D_{min}}$ più basso del monomotore *nonostante* un'area bagnata totale di oltre 700 m² contro i 62 m² del monomotore: un rapporto di 11:1. Il paradosso si scioglie non appena si ricorda che i coefficienti sono riferiti alla superficie alare, e che il rapporto S_{wet}/S_W vale 3,85 per il monomotore e 5,72 per il jet: il jet è dunque *penalizzato* sul rapporto di aree, e vince lo stesso. Le ragioni sono tre, e vanno sapute argomentare:

1. **Reynolds.** I Reynolds di volo enormi abbattano i C_f (figura 1): il C_f della fusoliera

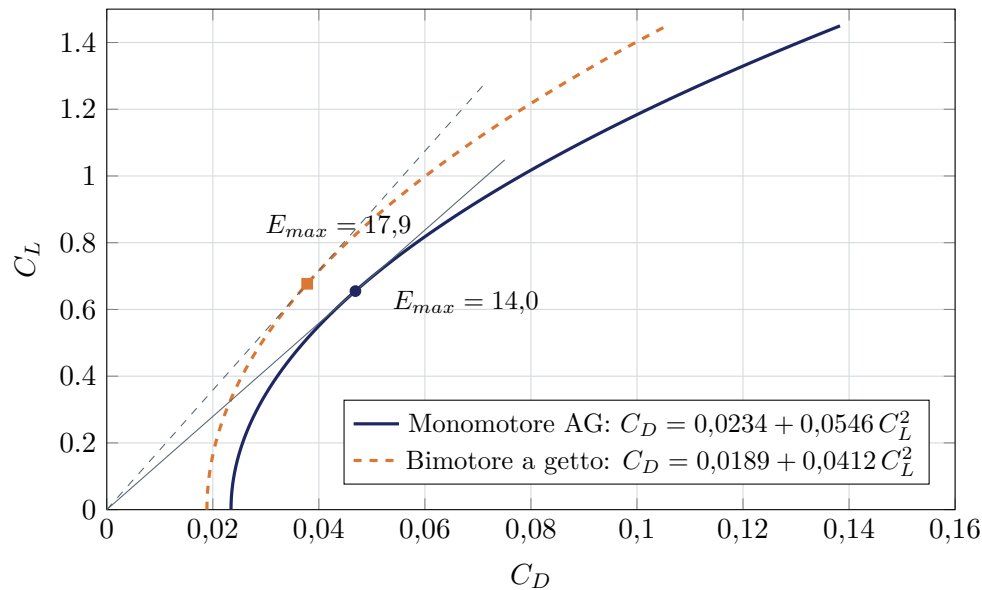


Figura 5: Le due polari di avanprogetto a confronto. I punti evidenziano l'assetto di massima efficienza; le rette per l'origine, tangenti alle parabole, ne visualizzano la costruzione geometrica (§6).

del jet vale 0,002 10 contro 0,003 18 del monomotore, il 34 % in meno.

2. **Finitura superficiale.** La rugosità dimezzata sposta il cut-off verso Reynolds più alti, consentendo di sfruttare davvero il vantaggio precedente. Senza finitura, il primo punto sarebbe inutile: il cut-off taglierebbe comunque il beneficio.
3. **Snellezza.** $FR = 9,38$ contro $6,69$: il fattore di forma della fusoliera scende da 1,217 a 1,096, dieci punti percentuali.

A ciò si aggiunge, sul *termine quadratico*, l'allungamento maggiore ($AR = 9,4$ contro $7,5$) con e più alto: K scende del 25 %. Il risultato composto è un E_{max} superiore del 28 %.

9.3 Che cosa insegna la ripartizione

La figura 6 mostra un ribaltamento istruttivo. Sul monomotore l'ala domina (53 % del totale); sul jet il primato passa alla fusoliera (36 %), con l'ala subito dietro. La ragione è che l'ala del monomotore, con la sua corda media di appena 1,47 m e la sua rugosità, lavora a un Reynolds efficace di un milione scarso — lo stesso ordine di grandezza di una galleria del vento didattica — mentre l'ala del jet, con corda 3,64 m e finitura doppia, arriva a sei milioni. Il C_f ne risente in modo drammatico: 0,004 36 contro 0,003 07.

! Un errore ricorrente all'Esame di Stato

Lo studente, chiamato a giustificare il basso $C_{D_{min}}$ di un jet, risponde spesso “perché ha le superfici più lisce”. È vero solo per metà. La finitura, da sola, non spiegherebbe nulla: serve *insieme* al Reynolds elevato. Un jet costruito con la rugosità del monomotore ($k = 9 \cdot 10^{-5}$ m) vedrebbe il proprio cut-off scendere e perderebbe gran parte del vantaggio; viceversa, lucidare a specchio l'ala del monomotore non lo porterebbe mai ai C_f del jet, perché il Reynolds di volo resta un ordine di grandezza più basso. **Reynolds e rugosità agiscono in coppia:** è questo il messaggio del §4.2.1, ed è ciò che il commissario vuole

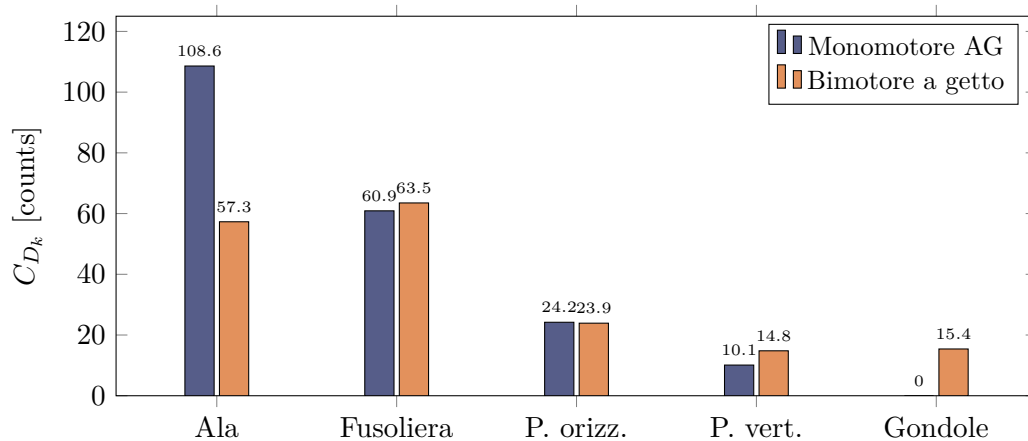


Figura 6: Ripartizione del $C_{D_{min}}$ (prima della maggiorazione forfettaria) tra i componenti, in counts. Sul jet il primato passa alla fusoliera: enorme area bagnata, ma snellezza elevata e C_f bassissimo grazie al Reynolds altissimo.

sentirsi dire.

~~ Raccordo — che cosa portiamo con noi

Il metodo ha superato entrambi i collaudi statistici. Attenzione però ai suoi confini, che a questo punto sappiamo dichiarare con precisione: niente resistenza d'onda, niente assetti prossimi allo stallo, $C_{D_{min}}$ assunto a portanza nulla, configurazione pulita. La prossima sezione affronta questi quattro limiti uno per uno — e mostra che tre di essi si possono superare.

10 Limiti del modello ed estensioni

⊙ Bussola — dove siamo e dove andiamo

Ogni modello vale entro un dominio, e l'ingegnere è responsabile di conoscerne i confini. I limiti del metodo di build-up sono quattro: (i) non stima la resistenza d'onda; (ii) assume $C_{D_{min}}$ a portanza nulla; (iii) descrive la sola configurazione pulita; (iv) ignora la resistenza di equilibratura. Vediamo come si supera ciascuno di essi, con il grado di approssimazione che l'avanprogetto consente.

10.1 Il primo limite: la resistenza d'onda

Superata una certa velocità di volo, sul dorso dell'ala compaiono zone di flusso localmente supersonico che si richiudono con un'onda d'urto. La perdita di pressione totale attraverso l'urto, e l'ispessimento (fino alla separazione) dello strato limite a valle, si traducono in un contributo aggiuntivo C_{D_w} che il metodo di build-up non è in grado di prevedere. Occorre un modello separato.

Teoria — equazione di Korn e modello di resistenza d'onda

Si definisce *Mach critico di cresta* M_{cc} (*crest-critical Mach*) il numero di Mach asintotico al quale il flusso raggiunge la condizione sonica nel punto di cresta del profilo. L'equazione

di Korn, nella formulazione estesa alle ali a freccia [7], lo lega alla geometria e all'assetto:

$$M_{cc} = \frac{\kappa_A}{\cos \Lambda} - \frac{\tau}{\cos^2 \Lambda} - \frac{C_L}{10 \cos^3 \Lambda}, \quad (39)$$

dove κ_A è il *fattore tecnologico del profilo*: $\kappa_A \simeq 0,87$ per profili convenzionali (NACA serie 6), $\kappa_A \simeq 0,95$ per profili supercritici. La resistenza d'onda si modella allora come

$$C_{D_w} = \begin{cases} 0, & M_\infty \leq M_{cc} \\ 20 (M_\infty - M_{cc})^4, & M_\infty > M_{cc} \end{cases} \quad (40)$$

e la polare completa diventa $C_D = C_{D_{min}} + K C_L^2 + C_{D_w}(M_\infty, C_L)$. Il *Mach di divergenza* M_{dd} , definito dalla condizione $dC_D/dM_\infty = 0,1$, discende dalla (40): $80(M_{dd} - M_{cc})^3 = 0,1$, ossia

$$M_{dd} = M_{cc} + \left(\frac{0,1}{80}\right)^{1/3} = M_{cc} + 0,108. \quad (41)$$

La (39) è, in tre termini, l'intero manifesto del progetto dell'ala transonica. Il primo termine premia la **freccia**: dividere per $\cos \Lambda$ innalza M_{cc} . Il secondo penalizza lo **spessore**: un profilo grosso raggiunge prima la condizione sonica. Il terzo penalizza il **carico**: volare a C_L elevato accelera di più il flusso sul dorso. E κ_A misura quanto la forma del profilo sappia distribuire quell'accelerazione: è precisamente ciò che i profili supercritici, con il loro dorso appiattito, ottimizzano.

Applicazione al bimotore a getto: l'ipotesi era lecita?

Verifichiamo *a posteriori* l'ipotesi fatta nella sezione 8. Dati: $\tau = 0,11$, $\Lambda = 25^\circ$ ($\cos \Lambda = 0,9063$), $C_L = 0,50$ (valore di crociera), profili supercritici ($\kappa_A = 0,95$):

$$M_{cc} = \frac{0,95}{0,9063} - \frac{0,11}{0,9063^2} - \frac{0,50}{10 \cdot 0,9063^3} = 1,0482 - 0,1339 - 0,0672 = 0,847.$$

Poiché $M_\infty = 0,78 < M_{cc} = 0,847$, la (40) restituisce $C_{D_w} = 0$: **l'ipotesi era lecita** e la polare (38) è valida in crociera. Il margine è di 0,067 in Mach, circa il 9%: un margine di progetto ragionevole, che copre le escursioni di C_L in turbolenza e le variazioni di quota. Ora la controprova. Se la stessa ala montasse profili convenzionali ($\kappa_A = 0,87$) si avrebbe $M_{cc} = 0,759 < M_\infty$, dunque

$$C_{D_w} = 20 (0,78 - 0,759)^4 = 20 \cdot 1,982 \cdot 10^{-7} = 3,96 \cdot 10^{-6}$$

— ancora trascurabile, appena 0,04 counts. Ma se *anche* la freccia venisse eliminata ($\Lambda = 0$, $M_{cc} = 0,710$):

$$C_{D_w} = 20 (0,78 - 0,710)^4 = 4,80 \cdot 10^{-4} = 4,8 \text{ counts},$$

e a $M_\infty = 0,85$ si arriverebbe già a 77 counts, cioè un aumento del 40% del $C_{D_{min}}$ complessivo. La quarta potenza della (40) è spietata: è il muro che l'ala a freccia e il profilo supercritico servono ad allontanare.

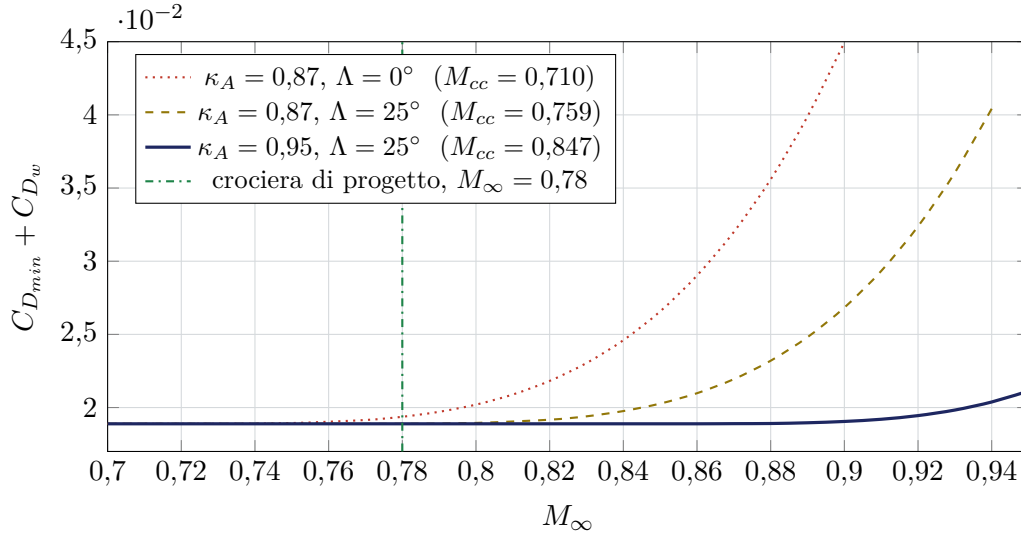


Figura 7: *Drag rise* del bimotore a getto secondo le (39) e (40), a $C_L = 0,50$. Freccia e profilo supercritico spostano il ginocchio della curva verso destra: alla crociera di progetto la sola configurazione reale (curva blu) è ancora sul tratto piatto.

! Il modello di Korn va calibrato, non venerato

La (41) applicata al nostro jet fornisce $M_{dd} = 0,955$, un valore palesemente ottimistico: i narrow-body reali di questa classe hanno $M_{MO} \approx 0,82$ e un M_{dd} dell'ordine di $0,83\text{--}0,85$. Il modello è di primo ordine e sensibilissimo a κ_A , che dipende dal profilo specifico e andrebbe tarato su dati sperimentali; inoltre τ dovrebbe essere lo spessore *in radice*, non quello medio. **Uso corretto:** la (39) serve a stabilire se siamo lontani o vicini al ginocchio della curva — e quindi se il metodo di build-up è applicabile — non a certificare un valore di M_{dd} da inserire in un manuale di volo. È una bussola, non un cronometro.

10.2 Il secondo limite: la parabola traslata

L'ipotesi $C_{D_{min}} = C_{D_0}$ suppone che la resistenza minima si realizzi a portanza nulla. Nessun progettista lo accetta: la resistenza va minimizzata dove il velivolo passa la maggior parte della sua vita, cioè in crociera. Un profilo con curvatura ha il minimo di resistenza a un C_L positivo. Il modello si estende senza alcuna difficoltà:

$$C_D = C_{D_{min}} + K (C_L - C_{L_{minD}})^2, \quad (42)$$

con $C_{L_{minD}}$ assetto di minima resistenza (tipicamente $0,1\text{--}0,3$ per un velivolo da trasporto). Sviluppando il quadrato si ritrova la forma canonica:

$$C_D = \underbrace{(C_{D_{min}} + K C_{L_{minD}}^2)}_{C_{D_0}} - 2K C_{L_{minD}} C_L + K C_L^2,$$

che contiene un termine *lineare* in C_L : la parabola non è più simmetrica rispetto all'asse $C_L = 0$. Si noti che $C_{D_0} > C_{D_{min}}$: il coefficiente di resistenza a portanza nulla è *maggiore* del minimo, e i due coincidono solo se $C_{L_{minD}} = 0$. Confondere i due simboli, come talvolta accade, è un errore concettuale, non una svista di notazione.

Quanto si sbaglia trascurando la traslazione?

Per il nostro jet, con $C_{L_{minD}} = 0,2$ e $K = 0,0412$: $C_{D_0} = C_{D_{min}} + K C_{L_{minD}}^2 = 0,0189 + 0,00165 = 0,0205$, cioè 16,5 counts di differenza — quasi il 9%. All'assetto di crociera ($C_L = 0,52$), però, le due polari danno rispettivamente $C_D = 0,0301$ (simmetrica) e $C_D = 0,0189 + 0,0412 \cdot (0,52 - 0,20)^2 = 0,0231$ (traslata): la differenza è vistosa. Il modello simmetrico, calibrato imponendo $C_{D_{min}}$ a portanza nulla, *sovrastima* la resistenza in crociera. In avanprogetto è una scelta conservativa e accettabile; in progetto preliminare non lo è più.

10.3 Il terzo limite: gli incrementi di configurazione

Il $C_{D_{min}}$ calcolato descrive la configurazione *pulita (clean)*: carrello retracts, ipersostentatori chiusi, superfici di governo neutre. Per le altre configurazioni si sommano incrementi tabellati, tutti riferiti a S_W :

$$C_{D_0}^{(config)} = C_{D_0}^{(clean)} + \sum_j \Delta C_{D_0}^{(j)}. \quad (43)$$

Tabella 5: Incrementi indicativi di C_{D_0} per configurazione, riferiti alla superficie alare [5, 3]. Gli intervalli sono ampi: dipendono fortemente dal disegno delle carenature e dei portelloni.

Elemento	ΔC_{D_0}	in counts
Carrello esteso, velivolo leggero	0,015 – 0,025	150 – 250
Carrello esteso, velivolo da trasporto	0,015 – 0,020	150 – 200
Portelloni del vano carrello aperti	0,002 – 0,005	20 – 50
Flap in configurazione di decollo ($\sim 15^\circ$)	0,010 – 0,020	100 – 200
Flap in configurazione di atterraggio ($\sim 40^\circ$)	0,055 – 0,075	550 – 750
Aerofreni / spoiler estesi	0,020 – 0,060	200 – 600
Elica in bandiera (motore fermo)	0,002 – 0,005	20 – 50
Elica in autorotazione (<i>windmilling</i>)	0,010 – 0,030	100 – 300

L'ordine di grandezza che spiega l'atterraggio

Si guardi la tabella 5 con gli occhi del nostro monomotore, che ha $C_{D_0}^{(clean)} = 234$ counts. In configurazione di atterraggio, con carrello esteso (+200) e flap a 40° (+600), il coefficiente di resistenza a portanza nulla diventa ≈ 1034 counts: si *quadruplica*. Ecco perché il velivolo in configurazione di atterraggio ha bisogno di potenza per mantenere la traiettoria, ed ecco perché l'estensione dei flap è la manovra che, sola, consente di scendere ripidi senza accelerare. La polare di atterraggio, si badi, non è più descritta bene dalla (3): siamo vicini allo stallo, dove il modello parabolico cessa di valere. Il valore va usato per ordini di grandezza, non per calcoli di certificazione.

10.4 Il quarto limite: la resistenza di equilibratura

Il metodo tratta il piano orizzontale come una superficie portante a portanza nulla: ne calcola l'attrito, non la resistenza indotta. In volo equilibrato, però, il piano orizzontale genera una deportanza L_h per bilanciare il momento di beccheggio, e quella deportanza ha un costo: l'ala deve produrre una portanza *maggiore* del peso, e il piano stesso genera resistenza indotta. La somma dei due effetti è la *resistenza di equilibratura (trim drag)*, che vale tipicamente l'1–3% del C_D totale in crociera, ma può salire oltre il 5% in condizioni di centraggio anteriore.

La sua stima esula da un metodo di avanprogetto, perché richiede la conoscenza del margine statico e della posizione del baricentro — che a quel punto del progetto non sono ancora fissati. È però un contributo che va *dichiarato* come non computato: rientra, in prima approssimazione, nella maggiorazione forfettaria del 5–20%. Non è un caso che i velivoli moderni, con centraggio arretrato e controllo attivo, riducano il margine statico proprio per risparmiare trim drag.

↪ Raccordo — che cosa portiamo con noi

Quattro limiti, quattro atteggiamenti diversi. La resistenza d'onda si stima con un modello separato (Korn) e va *verificata* ogni volta che $M_\infty > 0,6$. La parabola traslata si adotta appena si conosce $C_{L_{minD}}$. Gli incrementi di configurazione si sommano da tabella. La resistenza di equilibratura si dichiara e si assorbe nella maggiorazione forfettaria. In nessun caso si tace: il confine di validità di un modello fa parte del risultato, e va scritto nella relazione tecnica accanto al numero.

11 Implementazione Python del metodo

⦿ Bussola — dove siamo e dove andiamo

Un metodo di avanprogetto serve davvero solo se permette di esplorare *rapidamente* le alternative: che succede se allungo la fusoliera? Se passo a profili più sottili? Se miglioro la finitura? In questa sezione traduciamo la ricetta del §4.8 in poche funzioni Python — le stesse con cui è stato verificato ogni numero di questo articolo — e le usiamo per due studi parametrici.

11.1 Le funzioni di base

Cominciamo dai tre mattoni fisici: i fattori di comprimibilità (7), il coefficiente d'attrito turbolento (6) e il Reynolds di cut-off (8)–(9). Si noti la corrispondenza riga per riga con le formule del testo: è il modo giusto di scrivere codice tecnico, perché rende il codice *ispezionabile* da chi conosce la teoria e non il linguaggio.

```

1 import math
2
3 GAMMA, R_REC = 1.4, 0.89
4
5 def fattori_tf(M):
6     """Fattori di comprimibilita' t ed f -- eq. (7)."""
7     t = 1.0 / (1.0 + R_REC * (GAMMA - 1.0) / 2.0 * M**2)
8     f = 1.0 + 0.03916 * M**2 * t
9     return t, f
10
11 def cf_turbolento(ReL, M):
12     """Cf medio di lastra piana turbolenta -- eq. (6)."""
13     t, f = fattori_tf(M)
14     return t * f**2 * 0.430 / (math.log10(ReL * t**1.67 * f))**2.56
15
16 def re_cutoff(L, k, M):
17     """Reynolds di cut-off legato alla rugosita' k -- eq. (8)–(9)."""
18     K1 = 37.587 + 4.615*M + 2.949*M**2 + 4.132*M**3
19     return K1 * (L / k)**1.0489

```

11.2 Il contributo del singolo componente

La (5) diventa una funzione che riceve la geometria del componente e i suoi fattori correttivi, sceglie il Reynolds corretto e restituisce il C_{D_k} riferito alla superficie alare:

```

1 def CD_componente(L, Swet, FF, IF, Re_per_metro, k, M, SW):
2     """C_Dk del componente -- eq. (5), con cut-off di rugosita'."""
3     ReL = min(Re_per_metro * L, re_cutoff(L, k, M))
4     Cf = cf_turbolento(ReL, M)
5     return Cf * Swet / SW * FF * IF

```

11.3 Il velivolo della sezione 7 in dieci righe

```

1 # --- condizioni di volo: 2500 m ISA, V = 60 m/s ---
2 M, Re_m, SW, k = 0.182, 3.358e6, 16.2, 9e-5
3
4 componenti = [
5     # nome          L          Swet      FF          IF
6     ("ala",         1.473,    29.40,   1.2448, 1.05*1.05),
7     ("fusoliera",   8.30,    24.27,   1.2173, 1.05),
8     ("p.orizz.",    0.90,    6.00,   1.1755, 1.05*1.10),
9     ("p.vert.",     1.10,    2.60,   1.1755, 1.05*1.10),
10 ]
11
12 somma = 0.0
13 for nome, L, Swet, FF, IF in componenti:
14     cd = CD_componente(L, Swet, FF, IF, Re_m, k, M, SW)
15     somma += cd
16     print(f"{nome:10s} C_Dk = {cd:.5f} ({cd*1e4:5.1f} counts)")
17
18 CDmin = 1.15 * somma          # resistenze aggiuntive: +15%
19 AR, e = 7.469, 0.78
20 K = 1.0 / (math.pi * AR * e)
21 Emax = 0.5 * math.sqrt(1.0 / (K * CDmin))
22 print(f"CDmin = {CDmin:.5f} polare: CD = {CDmin:.4f} + {K:.4f} CL^2")
23 print(f"E_max = {Emax:.1f} a CL* = {math.sqrt(CDmin/K):.3f}")

```

L'output riproduce esattamente i valori della sezione 7:

```

1 ala          C_Dk = 0.01086 (108.6 counts)
2 fusoliera    C_Dk = 0.00609 ( 60.9 counts)
3 p.orizz.     C_Dk = 0.00242 ( 24.2 counts)
4 p.vert.      C_Dk = 0.00101 ( 10.1 counts)
5 CDmin = 0.02343 polare: CD = 0.0234 + 0.0546 CL^2
6 E_max = 14.0 a CL* = 0.655

```

! La quinta cifra e la propagazione degli arrotondamenti

Si guardi la quinta cifra decimale di $C_{D_{min}}$: lo script, che non arrotonda mai i passaggi intermedi, fornisce 0,023 43; se invece si sommano a mano i quattro contributi già arrotondati e si moltiplica per 1,15 si ottiene $1,15 \cdot 0,02038 = 0,02344$. La differenza — un decimo di count — è del tutto irrilevante per l'avanprogetto, ma è una lezione permanente: gli arrotondamenti intermedi si *propagano*, e in una relazione tecnica va sempre dichiarato a quale cifra ci si ferma. Per questo il risultato finale è dato con quattro decimali, $C_{D_{min}} \simeq 0,0234$: è la precisione onesta di un metodo che, come discusso al §4.8, porta con sé incertezze ben maggiori di un count.

11.4 Primo studio parametrico: la finitura superficiale

Con le funzioni in mano, uno studio di sensibilità è questione di un ciclo `for`. L'effetto della finitura sull'ala del monomotore:

```

1 for k_test in (4.5e-5, 9e-5, 1.8e-4):
2     cd_ala = CD_componente(1.473, 29.40, 1.2448, 1.05*1.05,
3                           3.358e6, k_test, 0.182, 16.2)
4     ReL = min(3.358e6*1.473, re_cutoff(1.473, k_test, 0.182))
5     print(f"k = {k_test*1e6:6.1f} micron -> Re_L = {ReL:.3e}, "
6           f"C_D ala = {cd_ala*1e4:.1f} counts")

```

Il risultato è istruttivo. Dimezzando k il Reynolds di cut-off raddoppia (cresce come $k^{-1.0489}$, quasi linearmente) e il contributo dell'ala scende da 108,6 a 95,2 counts; raddoppiando la rugosità si sale a 124,7. Ogni *dimezzamento* vale dunque una quindicina di counts sulla sola ala — il prezzo, tradotto in numeri, di una lamiera trascurata. Si noti che la sensibilità non è simmetrica: peggiorare la finitura costa più di quanto migliorarla renda, perché il C_f dipende dal *logaritmo* del Reynolds.

11.5 Secondo studio parametrico: la snellezza di fusoliera

Un caso più sottile, perché due effetti si oppongono. Allungando la fusoliera a parità di volume interno — cioè imponendo $L \propto FR^{2/3}$ e $\sqrt{hd} \propto FR^{-1/3}$ — l'area bagnata *cresce* come $FR^{1/3}$ mentre il fattore di forma (13) *diminuisce*. Dove sta l'ottimo?

```

1 V_fus = 24.27          # area bagnata di riferimento [m^2] a FR = 6.688
2 FR_rif = 6.688
3
4 for FR in (5, 6, 6.688, 8, 10, 12, 14):
5     scala = (FR / FR_rif)**(1.0/3.0)    # Swet ~ FR^(1/3) a volume costante
6     Swet = V_fus * scala
7     L = 8.30 * (FR / FR_rif)**(2.0/3.0)
8     FF = 1.0 + 60.0/FR**3 + 0.0025*FR
9     cd = CD_componente(L, Swet, FF, 1.05, 3.358e6, 9e-5, 0.182, 16.2)
10    print(f"FR = {FR:5.2f} L = {L:5.2f} m FF = {FF:.4f} "
11          f"C_D fus = {cd*1e4:.1f} counts")

```

Lettura del risultato

Il ciclo mostra un minimo *piatto* intorno a $FR \approx 8-10$ (59,2 counts contro i 60,9 del valore nominale $FR = 6,69$): meno di due counts di guadagno, e una perdita altrettanto modesta procedendo oltre (62,2 counts a $FR = 14$). Sotto $FR = 6$, invece, la penalità esplode (70,1 counts a $FR = 5$): il termine $60/FR^3$ non perdona i corpi tozzi. La ragione è quella già vista nella discussione della (13): il fattore di forma migliora, ma l'area bagnata peggiora, e i due effetti quasi si annullano. La conclusione progettuale è che, per un monomotore, la snellezza di fusoliera va scelta in base a criteri *non* aerodinamici — abitabilità, braccio di leva dei piani di coda, peso strutturale — perché l'aerodinamica, in quell'intervallo, è indifferente. Sapere *quando un parametro non conta* è prezioso quanto saperlo ottimizzare.

11.6 Proposte di lavoro

Esercizi per casa e tracce d'esame

1. Riprodurre l'applicazione della sezione 8 completando la lista **componenti** con le gondole; verificare i 189 counts.
2. Tracciare con **matplotlib** le due polari e i punti di massima efficienza (figura 5), aggiungendo le rette tangenti per l'origine.
3. Implementare l'equazione di Korn (39) e riprodurre la figura 7. Determinare, per il jet, il C_L massimo ammissibile in crociera a $M_\infty = 0,80$ affinché C_{D_w} resti sotto i 5 counts.
4. Implementare la (27) e diagrammare e in funzione di C_{D_0} per AR fissato: quanto guadagna in fattore di Oswald un velivolo che dimezza la propria resistenza parassita?
5. **Traccia d'esame.** Assegnati $W = 11\,500\text{ N}$ e la polare (37), calcolare resistenza e potenza necessaria in crociera a 2500 m e 60 m/s, e confrontarle con quelle all'assetto di massima efficienza e a quello di minima potenza. Discutere quale delle tre condizioni conviene per un volo di trasferimento e quale per una ricerca aerea.
6. **Traccia d'esame.** Il monomotore della sezione 7 viene riprogettato con carrello fisso carenato ($\Delta C_{D_0} = +0,018$). Calcolare la nuova polare, il nuovo E_{max} e verificare che il velivolo rientri nella classe "monomotore, carrello fisso" della tabella 1. Di quanto si riduce l'autonomia chilometrica, a parità di combustibile?

~ Raccordo — che cosa portiamo con noi

Il codice non sostituisce la teoria: la *esegue*. Ogni funzione di questa sezione è la traduzione letterale di un'equazione, e ogni numero dell'articolo è stato prodotto da essa. È la regola aurea del calcolo tecnico: nessun valore entra in una relazione se non è stato ottenuto, almeno una volta, per via indipendente.

12 Conclusioni

Il percorso di questo articolo può essere riassunto in una sola frase: la polare di un velivolo che non esiste ancora si costruisce sommando gli attriti dei suoi pezzi, corretti per la forma e per l'interferenza, e chiudendo il termine quadratico con un fattore di Oswald argomentato.

Le conclusioni operative sono cinque.

1. **Il metodo funziona.** Applicato a due velivoli distanti quarant'anni di tecnologia, ha restituito $C_{D_{min}} = 0,0234$ e $C_{D_{min}} = 0,0189$, entrambi all'interno degli intervalli statistici delle rispettive classi, con efficienze massime (14,0 e 17,9) coerenti con i dati pubblicati. Il fabbisogno di dati è minimo: poche lunghezze, poche superfici, il tipo di profilo, la finitura.
2. **Reynolds e rugosità agiscono in coppia.** Il Reynolds di cut-off (8) è il cuore fisico del metodo, e la ragione per cui il vantaggio dei grandi velivoli non è automatico: serve una finitura all'altezza dei loro Reynolds. Su entrambe le applicazioni il cut-off è risultato attivo su *tutti* i componenti — vale a dire che nessuno dei due velivoli lavora, in nessun punto, su parete idraulicamente liscia.
3. $C_{D_{min}}$ **ed e non sono indipendenti.** La decomposizione viscosa (27) lo dimostra: un velivolo pulito è premiato due volte, sul termine costante e su quello quadratico. È il motivo

per cui la pulizia aerodinamica resta, in avanprogetto, l'investimento a rendimento più alto, e per cui le due colonne della tabella 1 si muovono insieme.

4. **I confini vanno dichiarati.** Niente resistenza d'onda (da verificare ogni volta con l'equazione di Korn), niente assetti prossimi allo stallo, $C_{D_{min}}$ assunto a portanza nulla, configurazione pulita, resistenza di equilibratura non computata. Tre di questi quattro limiti si superano con modelli separati; il quarto si assorbe nella maggiorazione forfettaria. In nessun caso si tace: il dominio di validità di un risultato è parte del risultato.
5. **Ogni numero va verificato per via indipendente.** La sezione 11 non è un'appendice informatica: è il metodo di lavoro. Un calcolo a mano e uno script che concordano alla quinta cifra sono, in pratica, una dimostrazione di correttezza; e uno script che si può modificare è uno strumento di progetto, non un esercizio.

↪ Raccordo — che cosa portiamo con noi

Resta, in filigrana, la lezione di metodo più generale, che vale ben oltre l'aerodinamica. Il metodo di build-up si fonda su un'ipotesi che sappiamo falsa (l'additività dei contributi) e la ripara con coefficienti calibrati sperimentalmente. Non è una debolezza: è la struttura di quasi tutta l'ingegneria applicata. Un modello semplice, con i suoi errori dichiarati e le sue correzioni misurate, batte in avanprogetto un modello esatto ma inutilizzabile. La bravura del progettista non sta nel non sbagliare: sta nel sapere *di quanto* e *da che parte* sta sbagliando.

A Atmosfera standard e legge di Sutherland

Il metodo di build-up richiede, come dato d'ingresso, le proprietà dell'aria alla quota di volo. Questa appendice le richiama, rendendo l'articolo autoconsistente.

A.1 Il modello di atmosfera standard internazionale

L'atmosfera standard internazionale (ISA) [10] è un modello convenzionale di atmosfera in equilibrio idrostatico, con aria trattata come gas perfetto:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g_0, \quad p = \rho R T, \quad R = 287,053 \text{ J/(kg K)}, \quad g_0 = 9,806 65 \text{ m/s}^2. \quad (44)$$

Nella *troposfera* ($0 \leq z \leq 11\,000 \text{ m}$) la temperatura decresce linearmente con gradiente $\lambda = -6,5 \cdot 10^{-3} \text{ K/m}$:

$$T(z) = T_0 + \lambda z, \quad T_0 = 288,15 \text{ K}. \quad (45)$$

Sostituendo nella (44) e separando le variabili,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0}{RT} dz = -\frac{g_0}{R\lambda} \frac{dT}{T} \implies$$

$$p(z) = p_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-g_0/(\lambda R)}, \quad p_0 = 101\,325 \text{ Pa}. \quad (46)$$

L'esponente vale $-g_0/(\lambda R) = 5,2559$. Nella *bassa stratosfera* ($11\,000 \text{ m} \leq z \leq 20\,000 \text{ m}$) la temperatura è costante, $T = 216,65 \text{ K}$, e l'integrazione della (44) fornisce la ben nota legge esponenziale:

$$p(z) = p_{11} \exp \left[-\frac{g_0 (z - 11000)}{RT} \right], \quad p_{11} = 22\,632 \text{ Pa}. \quad (47)$$

Densità e velocità del suono seguono da

$$\rho = \frac{p}{RT}, \quad a = \sqrt{\gamma RT}, \quad \gamma = 1,4. \quad (48)$$

A.2 La viscosità dinamica: legge di Sutherland

Il numero di Reynolds richiede la viscosità dinamica, che per l'aria dipende dalla sola temperatura secondo la legge di Sutherland:

$$\mu(T) = \frac{\beta T^{3/2}}{T + S}, \quad \beta = 1,458 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m s K}^{1/2}\text{)}, \quad S = 110,4 \text{ K.} \quad (49)$$

La (49) traduce un fatto microscopico: nei gas la viscosità *crece* con la temperatura (l'agitazione termica trasporta quantità di moto fra strati adiacenti), al contrario di quanto avviene nei liquidi. È la ragione per cui, salendo di quota, non solo la densità ma anche la viscosità diminuisce — e il numero di Reynolds ne risente in modo meno drastico di quanto si potrebbe credere.

I due valori usati nell'articolo

A 2500 m: $T = 271,90 \text{ K}$, quindi

$$\mu = \frac{1,458 \cdot 10^{-6} \cdot 271,90^{3/2}}{271,90 + 110,4} = \frac{1,458 \cdot 10^{-6} \cdot 4483,3}{382,30} = 1,7099 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s.}$$

A 11000 m: $T = 216,65 \text{ K}$, quindi $\mu = 1,4216 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$. Fra le due quote la temperatura scende del 20 % e la viscosità del 17 %, ma la densità crolla del 62 %: è la densità, non la viscosità, a comandare la variazione del Reynolds con la quota.

A.3 Implementazione

```

1 import math
2
3 T0, p0, LAM = 288.15, 101325.0, -6.5e-3
4 R, G0, GAMMA = 287.053, 9.80665, 1.4
5
6 def isa(h):
7     """Atmosfera standard ISA fino a 20 km: T, p, rho, a."""
8     if h <= 11000.0:
9         T = T0 + LAM * h
10        p = p0 * (T / T0)**(-G0 / (LAM * R))
11    else:
12        T = 216.65
13        p11 = p0 * (T / T0)**(-G0 / (LAM * R))
14        p = p11 * math.exp(-G0 * (h - 11000.0) / (R * T))
15        rho = p / (R * T)
16        a = math.sqrt(GAMMA * R * T)
17    return T, p, rho, a
18
19 def sutherland(T):
20     """Viscosità dinamica dell'aria [Pa s]."""
21     return 1.458e-6 * T**1.5 / (T + 110.4)
22
23 for h in (2500.0, 11000.0):
24     T, p, rho, a = isa(h)
25     print(f"h = {h:6.0f} m:  T = {T:6.2f} K    p = {p:8.0f} Pa    "
26           f"rho = {rho:.4f} kg/m3    a = {a:6.2f} m/s    "
27           f"mu = {sutherland(T):.4e} Pa s")

```

Output:

```

1 h =    2500 m:  T = 271.90 K    p =    74683 Pa    rho = 0.9569 kg/m3    a = 330.56
   m/s    mu = 1.7099e-05 Pa s

```

$$h = 11000 \text{ m}; \quad T = 216.65 \text{ K} \quad p = 22632 \text{ Pa} \quad \rho = 0.3639 \text{ kg/m}^3 \quad a = 295.07 \text{ m/s} \\ \mu = 1.4216 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$$

! Quota geopotenziale e quota geometrica

Le formule precedenti usano la *quota geopotenziale*, definita in modo che l'accelerazione di gravità vi risulti costante e pari a g_0 . Fino a 20 km la differenza rispetto alla quota geometrica è inferiore allo 0,3 % e in avanprogetto si trascura. Per il volo ipersonico, o per la meccanica orbitale, la distinzione diventa essenziale.

B Formulario riassuntivo

Tutte le formule dell'articolo, in un solo prospetto, nell'ordine in cui si applicano. I numeri fra parentesi rimandano alle equazioni nel testo.

Passo 0 — Condizioni di volo

$$M_\infty = \frac{V}{a}, \quad \frac{Re}{L} = \frac{\rho V}{\mu}, \quad Re_\infty = \frac{Re}{L} \cdot \bar{c}, \quad AR = \frac{b^2}{S_W}, \quad \bar{c} = \frac{S_W}{b}.$$

Atmosfera e viscosità: (46), (47), (49). Fattori di comprimibilità (7):

$$t = \left(1 + 0,89 \cdot 0,2 M_\infty^2\right)^{-1}, \quad f = 1 + 0,03916 M_\infty^2 t.$$

Passo 1 — Reynolds del componente (8)–(9)

$$Re_L = \min(Re_{L_1}, Re_{L_2}), \quad Re_{L_1} = \frac{Re}{L} \cdot L, \quad Re_{L_2} = K_1 \left(\frac{L}{k}\right)^{1.0489},$$

$$K_1 = 37,587 + 4,615 M_\infty + 2,949 M_\infty^2 + 4,132 M_\infty^3.$$

Rugosità: $k = 9 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ (AG/militare), $k = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ (jet commerciale).

Passo 2 — Coefficiente d'attrito (6), (10)

$$\text{turbolento: } C_f = t f^2 \frac{0,430}{[\log_{10}(Re_L t^{1.67} f)]^{2.56}}; \quad \text{laminare: } C_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}} \left(1 + 0,1256 M_\infty^2\right)^{-0.12}.$$

Passo 3 — Area bagnata (11)–(12)

$$\text{superfici portanti: } S_{wet} = 2 S_{ref}; \quad \text{corpi assialsimmetrici: } S_{wet} = 0,75 \pi \sqrt{h d} L.$$

Passo 4 — Fattore di forma (13)–(18)

Fusoliera	$FF = 1 + \frac{60}{FR^3} + 0,0025 FR, \quad FR = L/\sqrt{h d}$
Gondola / serbatoio	$FF = 1 + \frac{0,35}{FR}$
Profili NACA serie 6	$FF = 1 + 1,44 \tau + 2 \tau^2$
Profili NACA serie 4	$FF = 1 + 1,68 \tau + 3 \tau^2$
Profili biconvessi	$FF = 1 + 1,20 \tau + 100 \tau^4$
Profili supercritici	$FF = 1 + K_L c_{ld} + 1,44 \tau + 2 \tau^2, \quad K_L = 0,3 \text{ (sub.) o } 0,5 \text{ (super.)}$

Passo 5 — Fattore di interferenza (19)–(21)

Fusoliera	$IF = R_{W-B}$ (fig. 2)
Ala	$IF = R_{LS} \cdot R_{W-B}$ ($R_{LS} = 1$ per profili supercritici)
Piani di coda	$IF = R_{LS} \cdot Hf$, $Hf = 1,0$ (mobile) o $1,1$ (fisso + mobile)
Gondole	$IF = 1,0 / 1,25 / 1,3 / 1,5$ (interferenza nulla / estremità / moderata / forte)

Passo 6 — Contributo del componente e somma (5), (4)

$$C_{D_k} = C_{f_k} \frac{S_{wet_k}}{S_W} FF_k IF_k + \underbrace{C_{D_{BASE,k}}}_{\text{se coda tronca}}, \quad C_{D_{min}} = (1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^N C_{D_k}, \quad \varepsilon = 0,05 \div 0,20.$$

Resistenza di base (22)–(24): $C_{D_{BASE}} = (0,1 + 1222 M_\infty^8) S_{BASE} / S_W$ in subsonico.

Passo 7 — Fattore di Oswald (25)–(27)

statistica: tab. 1; Raymer (ala dritta): $e = 1,78 (1 - 0,045 AR^{0.68}) - 0,64$;

decomposizione viscosa: $\frac{1}{e} = \frac{1}{e_{inv}} + 0,38 C_{D_0} \pi AR$.

Passo 8 — Polare e prestazioni (3), (31), (32), (35)

$$C_D = C_{D_{min}} + K C_L^2, \quad K = \frac{1}{\pi AR e}; \quad C_D = C_{D_{min}} + K (C_L - C_{L_{minD}})^2 \text{ (parabola traslata)}.$$

$$C_L^* = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{K}}, \quad C_D^* = 2 C_{D_0}, \quad E_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi AR e}{C_{D_0}}}, \quad V^* = \sqrt{\frac{2W}{\rho S_W C_L^*}}, \quad D_{min} = \frac{W}{E_{max}};$$

$$C_{L_{II}} = \sqrt{3} C_L^*, \quad C_{D_{II}} = 4 C_{D_0}, \quad E_{II} = 0,866 E_{max}, \quad V_{II} = 0,760 V^*.$$

Passo 9 — Verifica del dominio di validità (39)–(41)

$$M_{cc} = \frac{\kappa_A}{\cos \Lambda} - \frac{\tau}{\cos^2 \Lambda} - \frac{C_L}{10 \cos^3 \Lambda}, \quad \kappa_A = 0,87 \text{ (convenzionale)}, 0,95 \text{ (supercritico)};$$

$$C_{D_w} = \begin{cases} 0 & M_\infty \leq M_{cc} \\ 20 (M_\infty - M_{cc})^4 & M_\infty > M_{cc} \end{cases} \quad M_{dd} = M_{cc} + 0,108.$$

Se $C_{D_w} > 0$ in crociera, il metodo di build-up da solo *non* è sufficiente.

Collaudo finale

$C_{D_{min}}$ dentro l'intervallo della tab. 1? E_{max} coerente con la classe? $C_{D_w} = 0$ in crociera?

Tre sì: la stima è consegnabile. Un no: si torna indietro e si cerca il perché.

Riferimenti bibliografici

- [1] J. D. Anderson, *Aircraft Performance and Design*, McGraw–Hill, New York, 1999.
- [2] J. D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*, 6^a ed., McGraw–Hill, 2017.
- [3] D. P. Raymer, *Aircraft Design: A Conceptual Approach*, AIAA Education Series, Reston (VA).
- [4] E. Torenbeek, *Synthesis of Subsonic Airplane Design*, Delft University Press, 1982.
- [5] J. Roskam, *Airplane Design, Part VI: Preliminary Calculation of Aerodynamic, Thrust and Power Characteristics*, DARcorporation, Lawrence (KS).
- [6] I. Kroo, *Aircraft Design: Synthesis and Analysis*, Desktop Aeronautics, Stanford (CA).
- [7] W. H. Mason, *Configuration Aerodynamics*, Virginia Polytechnic Institute and State University — per la formulazione dell’equazione di Korn e del modello di resistenza d’onda.
- [8] *USAF Stability and Control DATCOM*, Flight Dynamics Laboratory, Wright–Patterson AFB — per i fattori di forma e di interferenza.
- [9] V. Losito, *Fondamenti di Aeronautica Generale*, Accademia Aeronautica, Pozzuoli — per la lettura fisica del fattore di Oswald tramite la Teoria Globale.
- [10] *ISO 2533:1975 — Standard Atmosphere*, International Organization for Standardization, Ginevra.