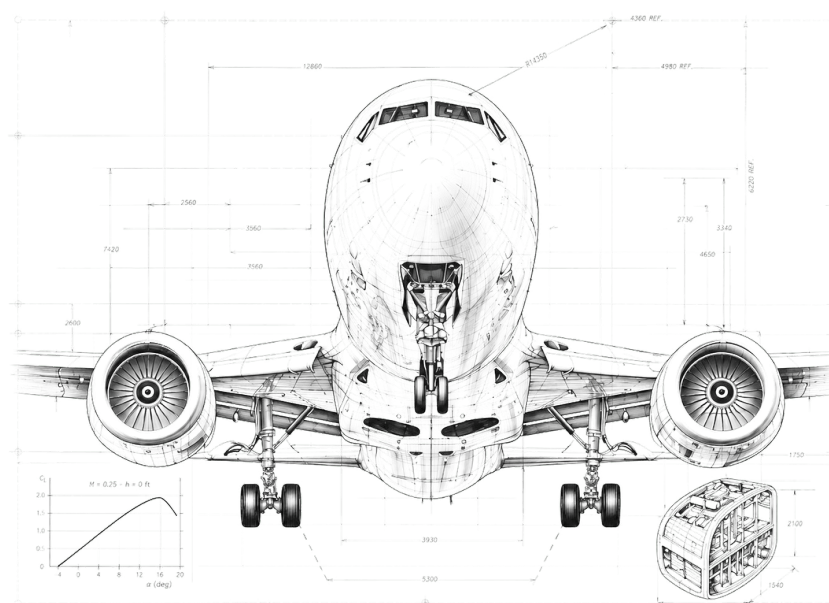


Teoria dei vettori

Fondamenti operativi per il corso di Strutture Aeronautiche



Sommario

Questa monografia introduce la notazione vettoriale e le operazioni fondamentali (somma, prodotto per scalare, prodotto scalare e prodotto vettoriale), con esempi guidati e richiami geometrici utili per le applicazioni in ambito aeronautico.

Come leggere questa monografia

Il testo procede sempre dallo stesso schema didattico: prima l'*intuizione fisica* del concetto, poi la sua *formalizzazione matematica*, infine l'*applicazione operativa* attraverso esercizi svolti passo passo. I riquadri colorati hanno una funzione precisa:

- **viola** – richiami teorici e definizioni;
- **blu** – procedure operative;
- **giallo** – ipotesi di lavoro;
- **grigio** – dati di un problema;
- **arancio** – esempi ed esercizi svolti;
- **verde** – risultati;
- **rosso** – avvertenze ed errori comuni.

Indice

1	Introduzione: perché i vettori	4
	Il “mattoncino zero” del corso di strutture	4
	Un esempio che avremo sempre davanti	4
2	Grandezze scalari e grandezze vettoriali	6
2.1	Scalari e vettori	6
2.2	Rappresentazione grafica del vettore	6
2.3	Vettori liberi, applicati e cursori	7
3	Versori e sistemi di riferimento	8
3.1	I versori	8
3.1.1	Il versore di una retta	8
3.2	Il sistema di assi cartesiani	8
3.2.1	Terna destrorsa e regola della mano destra	9
4	Operazioni tra vettori: i metodi grafici	11
4.1	Somma di vettori sulla stessa retta	11
4.1.1	Il modulo con segno	11
4.2	La regola del parallelogramma	11
4.3	La regola del poligono	12
4.4	Vettore opposto e differenza	13
4.5	Prodotto di un vettore per uno scalare	13
4.6	Un primo esercizio svolto	13
5	Componenti e rappresentazione analitica	15
5.1	Scomporre un vettore lungo due direzioni	15
5.2	Componenti cartesiane	15
5.3	Algebra dei vettori per componenti	16
5.4	Estensione allo spazio: coseni direttori	17
6	Vettori posizione, spostamento e velocità	19
6.1	Il vettore posizione	19
6.2	Il vettore spostamento	19
6.3	Il vettore velocità	20
6.4	Il triangolo del vento	21
6.5	Variazione di velocità e accelerazione: un cenno	22
7	Il prodotto scalare	24
7.1	Definizione e doppia faccia	24
7.2	Angolo tra due vettori e proiezioni	24
7.3	Interpretazione fisica: il lavoro	25
8	Il prodotto vettoriale	27
8.1	Definizione	27
8.2	Significato geometrico: un'area	27
8.3	Il caso piano: la componente z	27
8.4	Formula per componenti nello spazio	28
8.5	Interpretazione fisica: il momento di una forza	28

9 Applicazioni alle strutture	30
9.1 Sistemi di forze concorrenti: la risultante	30
9.2 Scomposizione di carichi lungo assi strutturali	30
9.3 Momento risultante e coppia	31
9.4 Reazioni vincolari: un cenno operativo	32
10 Statica: forze, vincoli e il teorema di Varignon	34
10.1 Forza, vincolo, corpo libero	34
10.2 I due postulati della statica	34
10.3 Il momento di una forza: ripasso operativo	35
10.4 Il teorema di Varignon	35
10.5 La coppia e il momento di trasporto	36
10.6 Due applicazioni aeronautiche	37
10.7 Un cenno alla riduzione a un punto	39
11 Un tema d'esame svolto	40
11.1 La traccia	40
11.2 Prima parte: il sistema a due forze	40
11.3 Seconda parte: il sistema a tre forze	42
11.4 Quadro d'insieme: i momenti rispetto ai vari poli	42
12 Esercizi di consolidamento	44
12.1 Testi	44
12.2 Risposte	45
A Alfabeto greco	47

1 Introduzione: perché i vettori

Il “mattone zero” del corso di strutture

Ogni volta che, nel corso di Strutture, scriveremo un'equazione di equilibrio, scomporremo un carico lungo il longherone, valuteremo il momento flettente in una sezione o costruiremo il diagramma di manovra, staremo in realtà *manipolando vettori*. La forza aerodinamica, il peso, la reazione di un vincolo, il momento torcente: sono tutte grandezze che non si lasciano descrivere da un semplice numero. Hanno un'**intensità**, ma anche una **direzione** e un **verso**, e spesso conta anche il punto in cui sono applicate.

Per questo la teoria dei vettori non è una sezione introduttiva da sbrigare in fretta: è la *grammatica* con cui parleremo per tutto l'anno. Chi la padroneggia affronta il resto del corso in autonomia; chi la trascura si trova a inciampare non sulla fisica delle strutture, ma sull'algebra elementare che la descrive.

Che cosa impareremo a fare

Al termine di questa monografia lo studente saprà:

- distinguere con sicurezza grandezze scalari e vettoriali;
- rappresentare un vettore graficamente e analiticamente (per componenti);
- sommare, sottrarre e scomporre vettori con metodi grafici e algebrici;
- calcolare e interpretare il *prodotto scalare* (lavoro, proiezioni) e il *prodotto vettoriale* (momenti, aree);
- usare questi strumenti per determinare la *risultante* di un sistema di forze e il *momento* di una forza rispetto a un polo.

Un esempio che avremo sempre davanti

Immaginiamo un velivolo in volo rettilineo uniforme. Su di esso agiscono almeno quattro grandezze vettoriali: la **portanza** $\vec{L}$, diretta perpendicolarmente alla velocità; la **resistenza** $\vec{D}$, parallela e opposta alla velocità; il **peso** $\vec{W}$, sempre verticale verso il basso; la **spinta** $\vec{T}$ del propulsore. La condizione di volo equilibrato non è altro che l'affermazione, in linguaggio vettoriale, che la *somma* di questi quattro vettori è nulla:

$$\vec{L} + \vec{D} + \vec{W} + \vec{T} = \vec{0}.$$

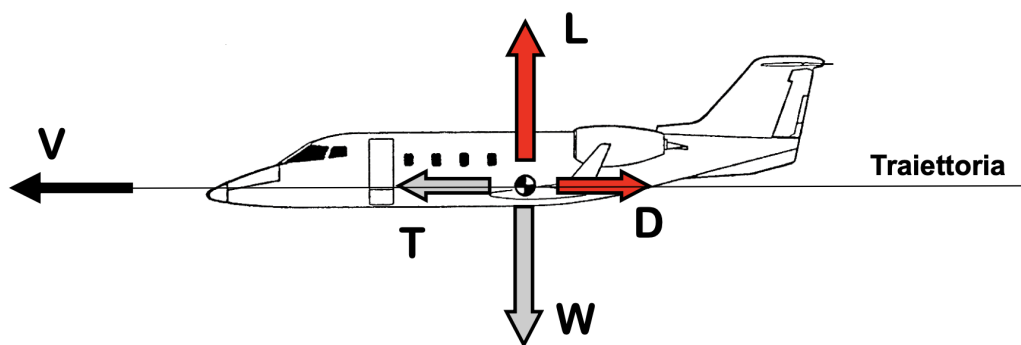


Figura 1: Le quattro forze fondamentali sul velivolo in volo livellato: portanza $\vec{L}$, peso $\vec{W}$, spinta $\vec{T}$, resistenza $\vec{D}$.

Dietro quel semplice “= $\vec{0}$ ” si nasconde tutto il programma dell’anno: per scriverlo dovremo saper *sommare* vettori; per risolverlo dovremo saper *scomporre* ciascuna forza lungo assi opportuni; per passare dalle forze ai momenti dovremo introdurre il *prodotto vettoriale*. Cominciamo, dunque, dalle fondamenta.

Una convenzione che useremo ovunque

In tutta la monografia i vettori sono indicati con la freccia, $\vec{A}$, e il loro *modulo* (o intensità) con la notazione $\|\vec{A}\|$ oppure, più brevemente, con la lettera priva di freccia, $A = \|\vec{A}\|$. I vettori (vettori di modulo unitario) portano il cappuccio, $\hat{a}$. Il rispetto scrupoloso di questa notazione evita la maggior parte degli errori di segno che si incontrano nei problemi di strutture.

2 Grandezze scalari e grandezze vettoriali

2.1 Scalari e vettori

La fisica descrive il mondo attraverso *grandezze*, cioè proprietà che si possono misurare. Una prima, fondamentale distinzione riguarda la quantità di informazione necessaria a individuarle completamente.

Definizioni

Grandezza scalare

è una grandezza completamente individuata da un *numero* associato a una *unità di misura*. Esempi: la massa ($m = 750 \text{ kg}$), la temperatura, il tempo, l'area di una superficie alare ($S = 16 \text{ m}^2$).

Grandezza scalare adimensionale

è una grandezza espressa da un *numero puro*, priva di unità di misura. Esempi tipicamente aeronautici: il numero di Mach M , il coefficiente di portanza C_L , l'allungamento alare AR , il fattore di carico n .

Grandezza vettoriale (vettore)

è una grandezza che, per essere definita, ha bisogno di *tre* informazioni: **intensità** (o *modulo*), **direzione** e **verso**.

Perché tre informazioni? Perché sapere “quanto vale” una forza non basta. Una spinta di 2000 N che agisce orizzontalmente in avanti produce un effetto completamente diverso dalla stessa spinta rivolta all'indietro, o verso l'alto. Servono dunque la *direzione* (la retta lungo cui la forza agisce), il *verso* (in quale dei due sensi, su quella retta) e infine il *modulo* (l'intensità dell'azione).

Scalare o vettore?

Classifichiamo alcune grandezze del nostro corso.

Grandezza	Tipo
Massa m	scalare
Quota di volo h	scalare
Numero di Mach M	scalare adimensionale
Coefficiente di resistenza C_D	scalare adimensionale
Velocità $\vec{V}$	vettore
Forza aerodinamica $\vec{R}$	vettore
Peso $\vec{W}$	vettore
Momento di una forza $\vec{M}$	vettore

La regola pratica è semplice: se per usare la grandezza in un problema ho bisogno di dire “in che direzione e verso”, allora è un vettore.

2.2 Rappresentazione grafica del vettore

Un vettore si rappresenta con una **freccia** (un segmento orientato). La freccia porta con sé, in modo naturale, tutte e tre le informazioni.

Anatomia di un vettore

- la **retta** su cui giace la freccia individua la *direzione*;
- la **punta** della freccia indica il *verso*;
- la **lunghezza** della freccia fornisce, in un'opportuna scala, il *modulo*;
- il **punto di applicazione** è il punto da cui la freccia ha origine.



Figura 2: Rappresentazione grafica di un vettore: direzione, verso, modulo (lunghezza) e punto di applicazione.

Modulo: sempre non negativo

Il modulo $\|\vec{A}\|$ è, per definizione, un numero *non negativo*: è una lunghezza. Non ha senso scrivere “ $\|\vec{A}\| = -5 \text{ N}$ ”. Il segno, quando comparirà, riguarderà le *componenti* del vettore (che introdurremo più avanti), non il suo modulo. Terremo però da conto una comoda eccezione operativa – il *modulo con segno* – di cui parliamo nella prossima sezione.

2.3 Vettori liberi, applicati e cursori

Nelle applicazioni non tutti i vettori si comportano allo stesso modo rispetto alla posizione. Conviene distinguere tre categorie, perché nel corso di strutture le incontreremo tutte.

Tre tipi di vettore

Vettore libero

può essere traslato liberamente nello spazio mantenendo modulo, direzione e verso: ciò che conta è solo “quanto, dove punta e in che verso”. Esempio: il momento di una coppia (lo vedremo).

Vettore applicato

è legato a un preciso *punto di applicazione*. Esempio: la reazione di un vincolo, che nasce in un punto ben determinato della struttura.

Vettore cursore (o scorrevole)

può scorrere solo lungo la propria retta d'azione. Esempio tipico: una *forza* applicata a un corpo rigido, il cui effetto non cambia se la spostiamo lungo la sua linea d'azione (principio di trasmissibilità).

Per gran parte della teoria che segue – somma, scomposizione, prodotti – ragioneremo su vettori *applicati in uno stesso punto* O . Questo non è riduttivo: è proprio la situazione delle forze concorrenti, quella da cui partono quasi tutti i problemi di equilibrio.

3 Versori e sistemi di riferimento

3.1 I versori

Fra tutti i vettori ce ne sono alcuni “speciali”, che useremo come unità di misura delle direzioni: i **versori**.

Definizione di versore

Un vettore $\vec{v}$ è un *versore* se e solo se il suo modulo vale uno:

$$v = \|\vec{v}\| = 1.$$

I versori sono dunque vettori di **modulo unitario** e **adimensionale**: servono a indicare una direzione e un verso, non una quantità.

Su questa definizione si gioca una piccola ma istruttiva sottigliezza logica.

Un versore è un vettore? Un vettore è un versore?

- “Un versore è un vettore?” Sì, sempre: un versore possiede modulo (che vale 1), direzione e verso, dunque è a tutti gli effetti un vettore.
- “Un vettore è un versore?” No, in generale: un vettore qualunque non ha necessariamente modulo unitario, quindi non è detto che sia un versore.

In linguaggio insiemistico: l'insieme dei versori è *contenuto* in quello dei vettori, ma non coincide con esso.

3.1.1 Il versore di una retta

Assegnata una retta a e scelto su di essa un verso positivo, esiste sempre uno e un solo vettore che

1. giace sulla retta a (ne ha cioè la direzione);
2. ha modulo unitario;
3. è orientato secondo il verso assunto come positivo su a .

Questo vettore si indica con $\hat{a}$ ed è detto **versore della retta** a . Grazie ad esso qualunque vettore $\vec{A}$ giacente su a si scrive in modo compatto come

$$\vec{A} = A \hat{a},$$

dove A è il *modulo con segno* (positivo se $\vec{A}$ è concorde con $\hat{a}$, negativo se discorde). È il primo, potentissimo, uso operativo dei versori: *separare* l'informazione “quanto” (il numero A) da quella “in che direzione e verso” (il versore $\hat{a}$).

3.2 Il sistema di assi cartesiani

Terna cartesiana $Oxyz$

Un *sistema di assi cartesiani* è costituito da tre rette x, y, z tra loro **ortogonali**, che si intersecano in un punto O detto *origine*. A ciascun asse si associa un verso positivo (indicato dalla punta della freccia) e il relativo versore:

$$\hat{x} \equiv \hat{i}, \quad \hat{y} \equiv \hat{j}, \quad \hat{z} \equiv \hat{k}.$$

I versori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ costituiscono una **base**: ogni vettore dello spazio si esprime come loro combinazione.

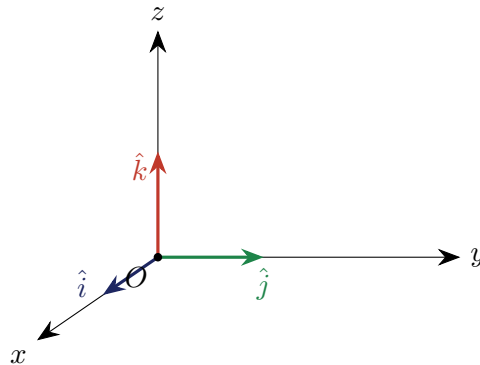


Figura 3: La terna cartesiana $Oxyz$ e i suoi versori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, disposta secondo la regola della mano destra.

3.2.1 Terna destrorsa e regola della mano destra

Terna destrorsa

I versi degli assi si scelgono, di norma, in modo che la terna $Oxyz$ sia **destrorsa** (o *destrogiro*). Una terna è destrorsa quando segue la *regola della mano destra*: disponendo pollice, indice e medio della mano destra mutuamente ortogonali, se il pollice indica x , l'indice y , allora il medio indica z . Equivalentemente: ruotando x verso y (di 90°), una vite destrorsa avanza nel verso di z .

La scelta della terna destrorsa non è un vezzo: è ciò che rende *coerenti* i segni nel prodotto vettoriale (Sezione 8) e, di conseguenza, nel calcolo dei momenti. Una terna sinistrorsa (levogiro) segue invece la regola della mano sinistra e cambierebbe il segno a tutti i momenti: per questo la eviteremo sistematicamente.

Perché insistiamo tanto sulla terna

Nel corso di strutture il momento flettente e il momento torcente sono vettori il cui verso dipende dalla convenzione di terna adottata. Fissare una volta per tutte una terna *destrorsa* garantisce che una stessa struttura, analizzata da due studenti diversi, produca gli stessi segni. Il “disordine di segno” è la fonte numero uno di errori nei temi d’esame.

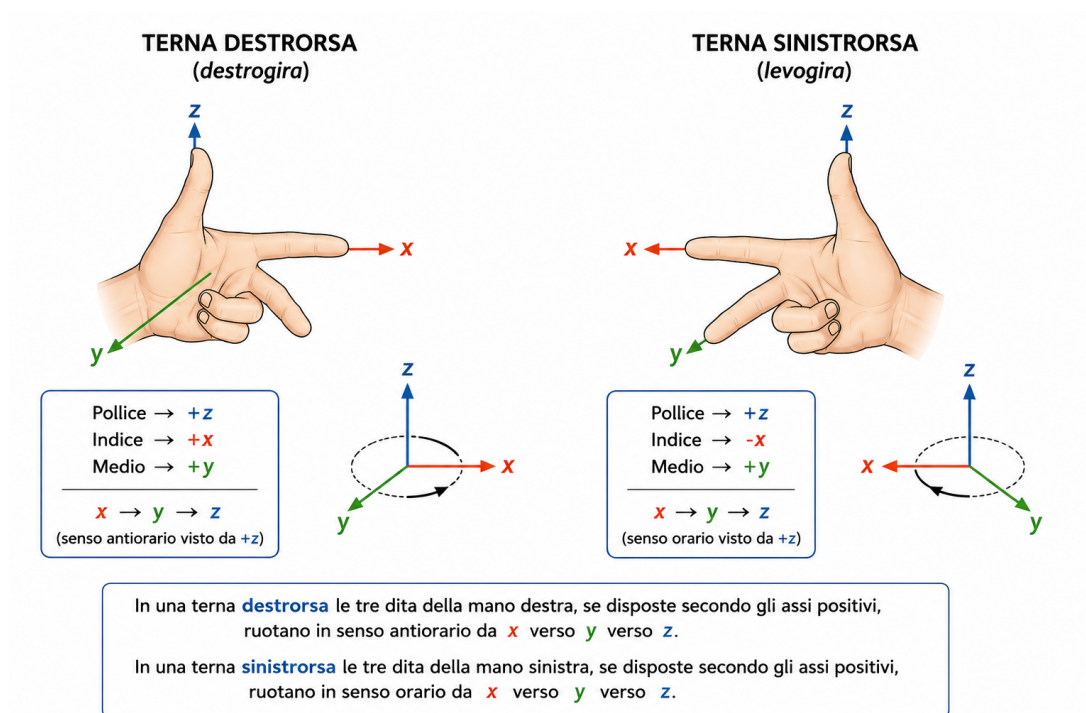


Figura 4: Regola della mano destra applicata agli assi x, y, z : confronto tra terna destrorsa (destrogiro) e terna sinistrorsa (levogiro).

4 Operazioni tra vettori: i metodi grafici

Prima di tradurre tutto in numeri (Sezione 5), è essenziale *vedere* che cosa significano le operazioni tra vettori. I metodi grafici non sono un ripiego “da disegnatori”: sono lo strumento con cui, in fase di progetto, si stima rapidamente una risultante e se ne controlla l’ordine di grandezza.

4.1 Somma di vettori sulla stessa retta

Consideriamo due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ applicati nello stesso punto O . Sia a la retta d’azione di $\vec{A}$ e $\hat{a}$ il suo versore, orientato nel verso di $\vec{A}$. Il caso più semplice è quello in cui anche $\vec{B}$ giace sulla retta a .

Somma sulla stessa retta

Il vettore $\vec{A} + \vec{B}$ ha la direzione della retta a . Distinguiamo:

- **versi concordi** ($\vec{B}$ nello stesso verso di $\vec{A}$):

$$\|\vec{A} + \vec{B}\| = \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|, \quad \text{verso: concorde con } \hat{a}.$$

- **versi discordi** ($\vec{B}$ verso opposto ad $\vec{A}$): si valuta la differenza $\|\vec{A}\| - \|\vec{B}\|$:

$$- \text{ se } \|\vec{A}\| - \|\vec{B}\| > 0: \quad \|\vec{A} + \vec{B}\| = \|\vec{A}\| - \|\vec{B}\|, \text{ verso concorde con } \hat{a};$$

$$- \text{ se } \|\vec{A}\| - \|\vec{B}\| < 0: \quad \|\vec{A} + \vec{B}\| = \|\vec{B}\| - \|\vec{A}\|, \text{ verso discorde con } \hat{a}.$$

4.1.1 Il modulo con segno

La casistica precedente si compatta elegantemente con un’unica convenzione.

Modulo con segno (intensità con segno)

Fissato il versore $\hat{a}$ di una retta, si attribuisce a ogni vettore su quella retta un’*intensità con segno*:

$$\vec{A} = A \hat{a}, \quad A = \begin{cases} +\|\vec{A}\| & \text{se } \vec{A} \text{ è concorde con } \hat{a}, \\ -\|\vec{A}\| & \text{se } \vec{A} \text{ è discorde da } \hat{a}. \end{cases}$$

Con questa convenzione la somma di vettori collineari diventa una *semplice somma algebrica* dei moduli con segno: $A + B$ (col loro segno) fornisce direttamente l’intensità con segno della risultante. È la base del “metodo delle proiezioni” che useremo per tutte le equazioni di equilibrio.

4.2 La regola del parallelogramma

Quando $\vec{B}$ non giace sulla retta di $\vec{A}$, la somma si costruisce con la **regola del parallelogramma**.

Regola del parallelogramma

Con $\vec{A}$ e $\vec{B}$ applicati nello stesso punto O :

1. si traccia la parallela ad a passante per l’estremo di $\vec{B}$;

2. si traccia la parallela a $\vec{b}$ passante per l'estremo di $\vec{A}$;
3. il vettore somma $\vec{A} + \vec{B}$ è la *diagonale* del parallelogramma uscente da O .

La regola vale *sempre*, comunque siano disposti $\vec{A}$ e $\vec{B}$, e anche nello spazio: basta portarsi nel piano π che contiene O , $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e ragionare lì.

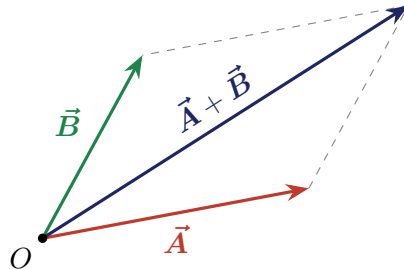


Figura 5: Regola del parallelogramma: la somma è la diagonale uscente da O .

4.3 La regola del poligono

Un modo equivalente e più rapido di sommare, soprattutto con *più di due* vettori, è la **regola del poligono** (o del “testa-coda”).

Regola del poligono

Per sommare $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, ...:

1. si disegna $\vec{A}$ a partire da O ;
2. si disegna $\vec{B}$ con il punto di applicazione sull'*estremo libero* di $\vec{A}$;
3. si disegna $\vec{C}$ sull'estremo libero di $\vec{B}$; e così via;
4. la somma è il vettore che parte da O e *chiude* il poligono, raggiungendo l'ultimo estremo libero.

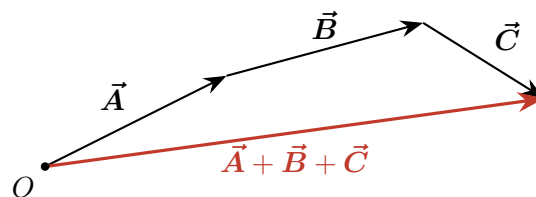


Figura 6: Regola del poligono: il vettore che chiude la spezzata, da O all'ultimo estremo, è la somma.

4.4 Vettore opposto e differenza

Opposto e differenza

L'**opposto** di $\vec{B}$, indicato con $-\vec{B}$, ha stessa direzione e stesso modulo di $\vec{B}$ ma *verso opposto*. La **differenza** si riconduce a una somma:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}).$$

Graficamente: si costruisce $-\vec{B}$ e si somma ad $\vec{A}$ con parallelogramma o poligono.

La differenza “punta verso il minuendo”

Un modo mnemonico infallibile: il vettore $\vec{A} - \vec{B}$, disegnati $\vec{A}$ e $\vec{B}$ dallo stesso punto O , è il vettore che va *dall'estremo di $\vec{B}$ all'estremo di $\vec{A}$* . In simboli, se $\vec{A} = \overrightarrow{OP_A}$ e $\vec{B} = \overrightarrow{OP_B}$, allora $\vec{A} - \vec{B} = \overrightarrow{P_B P_A}$. Lo useremo per gli spostamenti e le variazioni di velocità.

4.5 Prodotto di un vettore per uno scalare

Prodotto per uno scalare

Dato $\vec{A}$ e un numero reale k , il prodotto $k\vec{A}$ è il vettore che ha:

- **modulo** $\|k\vec{A}\| = |k| \|\vec{A}\|$;
- **direzione** uguale a quella di $\vec{A}$;
- **verso** concorde con $\vec{A}$ se $k > 0$, opposto se $k < 0$.

Se $k = 0$ si ottiene il vettore nullo $\vec{0}$. Un caso notevole: $\hat{a} = \frac{1}{\|\vec{A}\|} \vec{A}$ è il versore di $\vec{A}$ (si dice che $\vec{A}$ è stato *normalizzato*).

4.6 Un primo esercizio svolto

Esercizio svolto 4.1 – somma grafica e stima della risultante

Due cavi tirano il gancio di traino di un ariante applicando in O due forze complanari: $\vec{F}_1$ orizzontale, di modulo 300 N, e $\vec{F}_2$ inclinata di 60° sull'orizzontale verso l'alto, di modulo 200 N. Stimare graficamente modulo e direzione della risultante, poi commentare.

Impostazione grafica. Applichiamo $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ in O e costruiamo il parallelogramma. Fissata la scala $100 \text{ N} \rightarrow 1 \text{ cm}$, $\vec{F}_1$ è lungo 3 cm, $\vec{F}_2$ è lungo 2 cm e inclinato di 60° . La diagonale uscente da O è la risultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Controllo con il teorema di Carnot. L'angolo interno del parallelogramma adiacente a $\vec{F}_1$ vale 60° ; il lato opposto sottende l'angolo supplementare 120° . Applicando il teorema del coseno al triangolo formato da $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{R}$:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos 60^\circ} = \sqrt{300^2 + 200^2 + 2 \cdot 300 \cdot 200 \cdot 0,5} \text{ N.}$$

$$R = \sqrt{90000 + 40000 + 60000} = \sqrt{190000} \approx 435,9 \text{ N.}$$

La direzione di $\vec{R}$ rispetto all'orizzontale si ottiene dal teorema dei seni o, più direttamente, per componenti (Sezione 5); anticipiamo il risultato: $\vartheta \approx 23,4^\circ$.

Esercizio 3.1

$R \approx 435,9\text{ N}$, inclinata di circa $23,4^\circ$ sull'orizzontale. La costruzione grafica e il calcolo analitico concordano: il disegno serve a *prevedere* il risultato e a intercettare errori grossolani.

5 Componenti e rappresentazione analitica

I metodi grafici sono insostituibili per l'intuizione, ma per i calcoli servono i numeri. Il ponte tra i due mondi è l'idea di **scomposizione**: spezzare un vettore nella somma di vettori diretti lungo direzioni assegnate.

5.1 Scomporre un vettore lungo due direzioni

Vettori componenti e componenti

Dato un vettore $\vec{v}$ e due direzioni a e b (non parallele) del suo piano, la regola del parallelogramma *a rovescio* individua due vettori $\vec{v}_a$ e $\vec{v}_b$, diretti rispettivamente lungo a e b , tali che

$$\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_b.$$

- $\vec{v}_a, \vec{v}_b$ si dicono **vettori componenti** di $\vec{v}$ nelle direzioni a e b ;
- i loro *moduli* $v_a = \|\vec{v}_a\|$, $v_b = \|\vec{v}_b\|$ (con segno, se orientati) si dicono **componenti** di $\vec{v}$.

5.2 Componenti cartesiane

Quando le due direzioni sono gli assi coordinati x e y , i vettori componenti si dicono **componenti cartesiane**.

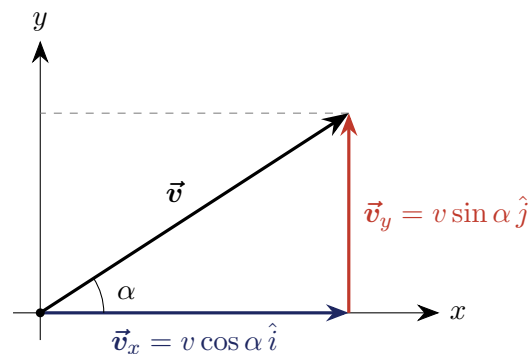


Figura 7: Componenti cartesiane di $\vec{v}$ e loro relazione con il modulo e l'angolo α .

Le formule fondamentali (nel piano)

Detto α l'angolo tra l'asse x e il vettore $\vec{v}$, e $v = \|\vec{v}\|$ il suo modulo, si scrive equivalentemente:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y, \quad \vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}, \quad \vec{v} = (v_x, v_y).$$

Valgono le **relazioni trigonometriche fondamentali**:

$$\boxed{v_x = v \cos \alpha}, \quad \boxed{v_y = v \sin \alpha}.$$

Viceversa, dalle componenti si risale a modulo e direzione con il *teorema di Pitagora* e l'*arcotangente*:

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}, \quad \boxed{\alpha = \text{atan2}(v_y, v_x)}.$$

Perché atan2 e non arctan “liscio”

La formula ingenua $\alpha = \arctan(v_y/v_x)$ restituisce sempre un angolo tra -90° e $+90^\circ$ e *perde il quadrante*: non distingue $\vec{v} = (3, 4)$ da $\vec{v} = (-3, -4)$. La funzione $\text{atan2}(v_y, v_x)$, disponibile su ogni calcolatrice scientifica e in ogni linguaggio, tiene conto dei segni di *entrambe* le componenti e fornisce il quadrante corretto. Nei problemi di equilibrio, sbagliare quadrante significa sbagliare il verso di una reazione: un errore che si paga caro.

5.3 Algebra dei vettori per componenti

Tutte le operazioni grafiche della sezione precedente diventano, in componenti, semplici operazioni sui numeri. È questo il grande vantaggio operativo.

Operazioni in componenti

Siano $\vec{A} = (A_x, A_y)$, $\vec{B} = (B_x, B_y)$ e $k \in \mathbb{R}$:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y), \quad \vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y),$$

$$k\vec{A} = (kA_x, kA_y).$$

Sommare vettori diventa sommare le rispettive componenti, *ciascuna per conto proprio*: le x con le x , le y con le y .

Esercizio svolto 5.1 – somma, differenza, modulo e angoli per componenti

Siano $\vec{A} = (3, 4)$ e $\vec{B} = (-1, 2)$ (unità arbitrarie). Determinare $\vec{A} + \vec{B}$, $\vec{A} - \vec{B}$, i moduli $\|\vec{A}\|$, $\|\vec{B}\|$, $\|\vec{A} + \vec{B}\|$ e gli angoli che $\vec{A}$, $\vec{B}$ e la somma formano con l'asse x .

Somma e differenza.

$$\vec{A} + \vec{B} = (3 - 1, 4 + 2) = (2, 6), \quad \vec{A} - \vec{B} = (3 - (-1), 4 - 2) = (4, 2).$$

Moduli (teorema di Pitagora).

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2,236,$$

$$\|\vec{A} + \vec{B}\| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} \approx 6,325.$$

Angoli (con atan2).

$$\alpha_A = \text{atan2}(4, 3) \approx 53,13^\circ, \quad \alpha_B = \text{atan2}(2, -1) \approx 116,57^\circ,$$

$$\alpha_{A+B} = \text{atan2}(6, 2) \approx 71,57^\circ.$$

Esercizio 4.1

$\vec{A} + \vec{B} = (2, 6)$, $\vec{A} - \vec{B} = (4, 2)$; $\|\vec{A}\| = 5$, $\|\vec{B}\| \approx 2,24$, $\|\vec{A} + \vec{B}\| \approx 6,32$; $\alpha_A \approx 53,1^\circ$, $\alpha_B \approx 116,6^\circ$, $\alpha_{A+B} \approx 71,6^\circ$. Si noti che $\|\vec{A} + \vec{B}\| \neq \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$: i moduli *non* si sommano, se non quando i vettori sono concordi e collineari.

Esercizio svolto 5.2 – scomposizione cartesiana di una velocità

Un velivolo vola con velocità di modulo $V = 10 \text{ m/s}$ (valore scelto per semplicità numerica), inclinata di $\alpha = 30^\circ$ sull'orizzontale in salita. Determinare le componenti orizzontale e verticale.

$$V_x = V \cos \alpha = 10 \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 8,660 \text{ m/s},$$

$$V_y = V \sin \alpha = 10 \sin 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5,000 \text{ m/s}.$$

Verifica. $\sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{8,66^2 + 5^2} = \sqrt{75 + 25} = \sqrt{100} = 10$: torna.

Esercizio 4.2

$V_x \approx 8,66 \text{ m/s}$ (avanzamento), $V_y = 5,00 \text{ m/s}$ (rateo di salita). La verifica con Pitagora restituisce esattamente $V = 10 \text{ m/s}$: è il controllo che va *sempre* eseguito dopo una scomposizione.

5.4 Estensione allo spazio: coseni direttori

Nello spazio un vettore ha tre componenti, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$, e il suo modulo generalizza Pitagora:

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Coseni direttori

La direzione di $\vec{v}$ nello spazio è individuata dai tre angoli $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ che esso forma con gli assi. I loro coseni,

$$\cos \theta_x = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \theta_y = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \theta_z = \frac{v_z}{v},$$

si dicono **coseni direttori** e sono, di fatto, le componenti del versore $\hat{v}$. Godono dell'identità fondamentale

$$\boxed{\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1},$$

che è l'affermazione " $\|\hat{v}\| = 1$ " scritta per componenti.

Esercizio svolto 5.3 – coseni direttori nello spazio

Determinare modulo, versore e angoli direttori di $\vec{v} = (2, 3, 6)$.

Modulo. $v = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$.

Versore (coseni direttori).

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right) \approx (0,286, 0,429, 0,857).$$

Verifica identità. $\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{4+9+36}{49} = 1$.

Angoli.

$$\theta_x = \arccos \frac{2}{7} \approx 73,40^\circ, \quad \theta_y = \arccos \frac{3}{7} \approx 64,62^\circ, \quad \theta_z = \arccos \frac{6}{7} \approx 31,00^\circ.$$

Esercizio 4.3

$v = 7$; $\hat{v} = (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7})$; $\theta_x \approx 73,4^\circ$, $\theta_y \approx 64,6^\circ$, $\theta_z \approx 31,0^\circ$. La terna scelta $(2, 3, 6)$ è una “pitagorica spaziale”: dà modulo intero 7, comodissima per verificare a mano l’identità dei coseni direttori.

6 Vettori posizione, spostamento e velocità

Fino a questo punto abbiamo trattato i vettori come enti algebrici: li abbiamo sommati, sottratti, scomposti in componenti. Ora quei conti prendono corpo. Le tre grandezze di questa sezione — posizione, spostamento, velocità — sono la prima vera *applicazione fisica* dei vettori, e non a caso sono anche le prime che un pilota utilizza in navigazione. Vedremo, in particolare, che la somma vettoriale non è un'astrazione: è ciò che lega la velocità di un velivolo rispetto all'aria, il vento e la velocità effettiva rispetto al suolo nel cosiddetto *triangolo del vento*.

6.1 Il vettore posizione

Per dire *dove* si trova un punto, non basta un numero: serve individuarlo rispetto a un'origine. È il compito del vettore posizione.

Vettore posizione

Fissata un'origine O , il **vettore posizione** di un punto P è il vettore che ha origine in O ed estremo libero in P :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}.$$

Le sue componenti cartesiane coincidono con le coordinate del punto:

$$P = (x, y) \iff \vec{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y) = x\hat{i} + y\hat{j}.$$

Si misura in unità di lunghezza, tipicamente il metro [m] (o il miglio nautico [NM] in navigazione).

Il vettore posizione è dunque il ponte fra la *geometria* (un punto nel piano o nello spazio) e l'*algebra* (una coppia o una terna di numeri). Ogni volta che scriviamo le coordinate di un punto, stiamo in realtà scrivendo le componenti del suo vettore posizione.

6.2 Il vettore spostamento

Se un punto materiale si muove da una posizione iniziale P_1 a una posizione finale P_2 , ciò che interessa non è tanto *dove* è passato, ma di *quanto* e in *quale direzione* si è spostato complessivamente.

Vettore spostamento

Il **vettore spostamento** di un punto che passa da P_1 a P_2 è la differenza dei due vettori posizione:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{P_1P_2}.$$

Anch'esso si misura in unità di lunghezza [m].

Ritroviamo qui, in veste fisica, una regola grafica che avevamo enunciato parlando della differenza di vettori: *la differenza punta verso il minuendo*. Lo spostamento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ è infatti il vettore che va dall'estremo di $\vec{r}_1$ (cioè da P_1) all'estremo di $\vec{r}_2$ (cioè P_2): parte dalla posizione *iniziale* e punta a quella *finale*, esattamente come ci si aspetta da uno spostamento.

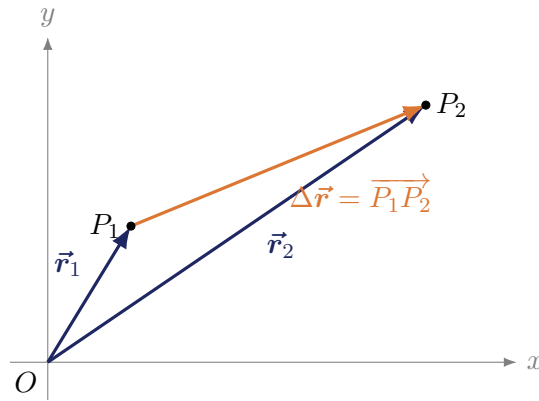


Figura 8: Il vettore spostamento $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ va dalla posizione iniziale P_1 alla posizione finale P_2 : è la differenza dei due vettori posizione e “punta verso il minuendo”.

Esercizio svolto 6.1 – navigazione tra due waypoint

Dati

In un sistema di riferimento locale (x verso Est, y verso Nord, unità in miglia nautiche) un velivolo è sul waypoint $A = (10, 5)$ NM e deve raggiungere il waypoint $B = (40, 45)$ NM. Determinare il vettore spostamento, la distanza da percorrere e il tempo di volo, sapendo che la velocità rispetto al suolo (ground speed) è 300 kt.

Passo 1 — Vettore spostamento.

$$\Delta \vec{r} = \overrightarrow{AB} = B - A = (40 - 10, 45 - 5) = (30, 40) \text{ NM.}$$

Passo 2 — Distanza (modulo dello spostamento).

$$\|\Delta \vec{r}\| = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50 \text{ NM.}$$

(È un triangolo 3–4–5 scalato $\times 10$: modulo intero, comodo per la verifica a mano.)

Passo 3 — Rotta e tempo di volo. La rotta rispetto all'Est è $\vartheta = \text{atan2}(40, 30) \approx 53,13^\circ$. Il tempo di volo, alla ground speed data, è

$$t = \frac{\|\Delta \vec{r}\|}{V_g} = \frac{50 \text{ NM}}{300 \text{ kt}} = 0,1667 \text{ h} = 10,0 \text{ min.}$$

Risultato

$\Delta \vec{r} = (30, 40)$ NM; distanza = 50 NM; rotta $\approx 53,1^\circ$ da Est; tempo di volo = 10 min.

6.3 Il vettore velocità

Lo spostamento ci dice *quanto* ci si è mossi; per sapere *quanto rapidamente* occorre rapportarlo al tempo impiegato.

Velocità media e velocità istantanea

Se nel tempo Δt il punto compie lo spostamento $\Delta \vec{r}$, si definisce la **velocità media**

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Facendo tendere l'intervallo a zero si ottiene la **velocità istantanea**

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Il vettore velocità è sempre *tangente alla traiettoria* nel punto considerato e si misura in [m/s].

Essendo Δt uno scalare positivo, il vettore velocità ha la stessa direzione e verso dello spostamento (per la regola del prodotto di un vettore per uno scalare): cambia solo il modulo, diviso per il tempo. Questa è la ragione profonda per cui la velocità è un vettore, e non basta un numero a descriverla.

Velocità non è rapidità

Nel linguaggio comune “velocità” e “rapidità” si confondono, ma in fisica la **velocità** $\vec{v}$ è un vettore (modulo, direzione, verso), mentre la **rapidità** (lo *speed* inglese) è il suo solo modulo $\|\vec{v}\|$, uno scalare. Un velivolo in virata a velocità costante ha rapidità costante ma velocità che cambia in continuazione, perché ne cambia la direzione. È una distinzione tutt'altro che accademica: proprio da questo cambiamento nasce l'accelerazione centripeta, e con essa il fattore di carico.

6.4 Il triangolo del vento

Ecco l'applicazione che dà senso operativo a tutta la sezione. Un velivolo si muove rispetto all'aria, ma l'aria stessa si muove rispetto al suolo (il vento). La velocità che conta per la navigazione — quella rispetto al suolo — è la *somma vettoriale* delle due.

Composizione delle velocità

La velocità del velivolo rispetto al suolo (*ground speed* vettoriale) è la somma della sua velocità rispetto all'aria (*true airspeed*, diretta secondo la prua) e della velocità del vento:

$$\vec{V}_g = \vec{V}_{\text{air}} + \vec{V}_{\text{wind}}.$$

La costruzione grafica di questa somma — testa-coda dei tre vettori — è il **triangolo del vento**. L'angolo fra la prua ($\vec{V}_{\text{air}}$) e la rotta effettiva ($\vec{V}_g$) è l'**angolo di deriva** (*drift*).

Esercizio svolto 6.2 – il triangolo del vento**Dati**

Un velivolo tiene la prua verso Est con velocità rispetto all'aria (TAS) $\vec{V}_{\text{air}} = (150, 0)$ kt. Soffia un vento $\vec{V}_{\text{wind}} = (-30, -40)$ kt (sistema: x Est, y Nord). Determinare la velocità rispetto al suolo, la ground speed e l'angolo di deriva.

Passo 1 — Somma vettoriale delle velocità.

$$\vec{V}_g = \vec{V}_{\text{air}} + \vec{V}_{\text{wind}} = (150 - 30, 0 - 40) = (120, -40) \text{ kt.}$$

Passo 2 — Ground speed (modulo).

$$\|\vec{V}_g\| = \sqrt{120^2 + 40^2} = \sqrt{16000} \approx 126,49 \text{ kt.}$$

Passo 3 — Angolo di deriva. La rotta effettiva forma con l'Est l'angolo $\text{atan2}(-40, 120) \approx -18,43^\circ$: il velivolo, pur con la prua a Est, deriva di circa $18,4^\circ$ verso Sud.

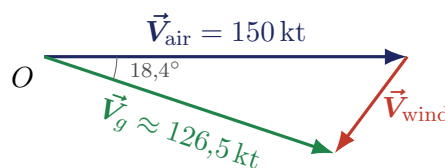


Figura 9: Il triangolo del vento: la velocità rispetto al suolo $\vec{V}_g$ (verde) è la somma testa-coda della velocità rispetto all'aria $\vec{V}_{\text{air}}$ (prua, blu) e della velocità del vento $\vec{V}_{\text{wind}}$ (rosso). L'angolo fra prua e rotta effettiva è la deriva.

Risultato

$\vec{V}_g = (120, -40) \text{ kt}$; ground speed $\approx 126,5 \text{ kt}$; deriva $\approx 18,4^\circ$ a Sud.

Il vento, con componente contraria alla prua di 30 kt (headwind) e trasversale di 40 kt (crosswind), riduce la velocità al suolo sotto la TAS e fa “sbandare” la traiettoria: per raggiungere un punto a Est, il pilota dovrà correggere la prua verso Nord.

Convenzioni di navigazione

In navigazione reale le direzioni si misurano in gradi bussola (da Nord, in senso orario) e occorre distinguere *heading* (prua), *track* (rotta al suolo), *TAS* e *ground speed*. Qui abbiamo lavorato in componenti cartesiane ($x = \text{Est}$, $y = \text{Nord}$) per mettere a fuoco la sola somma vettoriale; la conversione in gradi bussola è un cambio di convenzione angolare che non altera la fisica del triangolo.

6.5 Variazione di velocità e accelerazione: un cenno

Se la velocità è un vettore, la sua *variazione* è a sua volta un vettore, e dà origine all'accelerazione. Il caso più istruttivo per un aeronautico è la virata a velocità (rapidità) costante.

Accelerazione come variazione di velocità

Detta $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ la variazione di velocità nel tempo Δt , l'**accelerazione** è

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

In una traiettoria curva, anche se il *modulo* della velocità resta costante, il *vettore* velocità cambia direzione: nasce così un'accelerazione diretta verso il centro della curva, detta **centripeta**, di modulo $a_c = V^2/R$.

Esercizio svolto 6.3 – la virata corretta e il fattore di carico**Dati**

Un velivolo esegue una virata corretta (coordinata), in volo livellato, a velocità $V = 50 \text{ m/s}$ ($= 180 \text{ km/h}$) con angolo di inclinazione laterale (bank) $\varphi = 45^\circ$. Determinare l'accelerazione centripeta, il raggio di virata e il fattore di carico.

Passo 1 — Accelerazione centripeta. Nella virata corretta, l'equilibrio fra portanza, peso e forza centripeta porta alla relazione $a_c = g \tan \varphi$:

$$a_c = g \tan 45^\circ = 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1 = 9,81 \text{ m/s}^2 (= 1 g).$$

Passo 2 — Raggio di virata.

$$R = \frac{V^2}{a_c} = \frac{50^2}{9,81} \approx 254,8 \text{ m}.$$

Passo 3 — Fattore di carico. La portanza deve equilibrare sia il peso sia la componente centripeta; ne segue $n = 1/\cos \varphi$:

$$n = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

Risultato

$$a_c = 9,81 \text{ m/s}^2 = 1 g; \quad R \approx 254,8 \text{ m}; \quad n = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

A 45° di bank il velivolo “pesa” $\sqrt{2}$ volte il proprio peso: è la traduzione strutturale del fatto che il vettore velocità sta cambiando direzione a $1 g$. Da qui parte lo studio del diagramma di manovra.

Rapidità costante non significa accelerazione nulla

Nella virata dell'esempio il modulo della velocità è costante (50 m/s), eppure l'accelerazione *non* è nulla: vale un intero g . L'errore di ritenere “fermo” ciò che ha modulo costante è frequente e insidioso. Il calcolo vettoriale lo smaschera: è la *direzione* di $\vec{v}$ a cambiare, e ogni cambiamento del vettore velocità — di modulo *o* di direzione — è accelerazione.

7 Il prodotto scalare

Fin qui abbiamo sommato vettori e li abbiamo moltiplicati per numeri. Esistono però due modi di “moltiplicare tra loro due vettori”, profondamente diversi per natura e per risultato. Il primo, il **prodotto scalare**, restituisce un *numero* e misura “quanto due vettori vanno d’accordo”.

7.1 Definizione e doppia faccia

Prodotto scalare

Il prodotto scalare di $\vec{A} = (A_x, A_y)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y)$ è lo *scalare*

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y \quad (\text{forma per componenti}).$$

Detto γ l’angolo tra i due vettori, vale l’equivalente *forma geometrica*

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \gamma = AB \cos \gamma.$$

Nello spazio la forma per componenti si estende naturalmente: $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$.

Le due forme sono la stessa cosa vista da due lati: la prima si calcola *a occhi chiusi* con i numeri, la seconda *spiega* che cosa significa.

Proprietà

- **Commutativo:** $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$.
- **Distributivo:** $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$.
- **Modulo:** $\vec{A} \cdot \vec{A} = \|\vec{A}\|^2$, da cui $\|\vec{A}\| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$.
- **Ortogonalità:** $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ (con $\vec{A}, \vec{B}$ non nulli) $\iff \vec{A} \perp \vec{B}$, perché $\cos 90^\circ = 0$.
- **Segno:** il prodotto è positivo se $\gamma < 90^\circ$ (vettori “concordi”), negativo se $\gamma > 90^\circ$ (“discordi”), nullo se perpendicolari.

7.2 Angolo tra due vettori e proiezioni

Uguagliando le due forme si ottiene la formula più usata in pratica, quella che misura l’angolo tra due direzioni note per componenti:

$$\cos \gamma = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|} = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2}}.$$

Il prodotto scalare misura anche la **proiezione** di un vettore su una direzione. La componente di $\vec{A}$ lungo il versore $\hat{u}$ è

$$A_u = \vec{A} \cdot \hat{u} = \|\vec{A}\| \cos \gamma.$$

È il modo rigoroso di dire “quanto di $\vec{A}$ è diretto come $\hat{u}$ ”: lo useremo di continuo per scomporre carichi lungo assi strutturali.

Esercizio svolto 7.1 – angolo tra due vettori

Determinare l'angolo γ tra $\vec{A} = (3, 4)$ e $\vec{B} = (4, 3)$.

Prodotto scalare. $\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 12 + 12 = 24$.

Moduli. $\|\vec{A}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$, $\|\vec{B}\| = \sqrt{16 + 9} = 5$.

Coseno e angolo.

$$\cos \gamma = \frac{24}{5 \cdot 5} = \frac{24}{25} = 0,96, \quad \gamma = \arccos 0,96 \approx 16,26^\circ.$$

Esercizio 5.1

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 24$, $\gamma \approx 16,3^\circ$. I due vettori sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo quadrante (uno è “lo specchio” dell'altro): è ragionevole che formino un angolo piccolo.

7.3 Interpretazione fisica: il lavoro

Il prodotto scalare non è un'astrazione: è esattamente la grandezza con cui la fisica definisce il **lavoro** di una forza.

Lavoro di una forza costante

Se una forza costante $\vec{F}$ sposta il proprio punto di applicazione di un vettore spostamento $\vec{s}$, il lavoro compiuto è

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = \|\vec{F}\| \|\vec{s}\| \cos \gamma.$$

Solo la componente di $\vec{F}$ *lungo lo spostamento* compie lavoro: una forza perpendicolare al moto ($\gamma = 90^\circ$) ha lavoro nullo. È il motivo per cui la *portanza* non compie lavoro nel volo orizzontale, mentre lo compiono spinta e resistenza.

Esercizio svolto 7.2 – lavoro di una forza

Una forza $\vec{F} = (300, 200)$ N agisce mentre il punto di applicazione compie uno spostamento orizzontale $\vec{s} = (5, 0)$ m. Calcolare il lavoro compiuto.

Con la forma per componenti.

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = 300 \cdot 5 + 200 \cdot 0 = 1500 \text{ J.}$$

Con la forma geometrica (controllo). $\|\vec{F}\| = \sqrt{300^2 + 200^2} = \sqrt{130000} \approx 360,6 \text{ N}$; l'angolo di $\vec{F}$ con l'orizzontale è $\gamma = \text{atan2}(200, 300) \approx 33,69^\circ$; dunque

$$L = \|\vec{F}\| \|\vec{s}\| \cos \gamma \approx 360,6 \cdot 5 \cdot \cos 33,69^\circ \approx 1500 \text{ J.}$$

Le due strade coincidono: solo la componente *orizzontale* di $\vec{F}$ (300 N) compie lavoro lungo lo spostamento orizzontale.

Esercizio 5.2

$L = 1500 \text{ J}$. La componente verticale della forza (200 N), perpendicolare allo spostamento, non contribuisce: è la traduzione operativa di “ $\cos 90^\circ = 0$ ”.

Scalare, non vettore

Il risultato di un prodotto scalare è un *numero*, non un vettore: non ha direzione né verso. Scrivere “ $\vec{A} \cdot \vec{B} = (\dots, \dots)$ ” è un errore concettuale. Se il risultato dell’operazione ha una direzione, allora non stiamo facendo un prodotto scalare, ma un prodotto vettoriale – il prossimo argomento.

8 Il prodotto vettoriale

Il secondo modo di moltiplicare due vettori restituisce un *vettore*, non un numero. È lo strumento con cui, in strutture, si passa dalle *forze* ai *momenti*: senza di esso non sapremmo scrivere l'equilibrio alla rotazione.

8.1 Definizione

Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale $\vec{A} \times \vec{B}$ è il *vettore* che ha:

- **modulo** $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin \gamma = AB \sin \gamma$, dove γ è l'angolo tra i due vettori;
- **direzione** ortogonale al piano individuato da $\vec{A}$ e $\vec{B}$;
- **verso** tale che la terna $\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \times \vec{B}\}$ sia *destrorsa* (regola della mano destra).

Non commutativo!

A differenza del prodotto scalare, il prodotto vettoriale **non è commutativo**: scambiando l'ordine si inverte il verso,

$$\vec{B} \times \vec{A} = -(\vec{A} \times \vec{B}).$$

Questo perché la terna $\{\vec{B}, \vec{A}, \dots\}$ diventerebbe sinistrorsa. Nei momenti l'ordine dei fattori è $\vec{r} \times \vec{F}$ e *non* il contrario: invertirlo cambia il segno del momento.

8.2 Significato geometrico: un'area

Il modulo $AB \sin \gamma$ non è un numero qualunque: è l'**area del parallelogramma** costruito su $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Infatti $B \sin \gamma$ è l'altezza del parallelogramma rispetto alla base A .

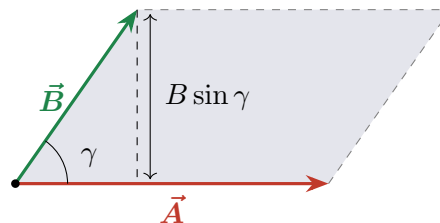


Figura 10: Il modulo di $\vec{A} \times \vec{B}$ è l'area del parallelogramma (base A , altezza $B \sin \gamma$).

Conseguenza: vettori paralleli

Se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sono *paralleli* ($\gamma = 0$ o $\gamma = 180^\circ$), allora $\sin \gamma = 0$ e $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$: il parallelogramma degenera in un segmento, area nulla. In particolare $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$.

8.3 Il caso piano: la componente z

Nei problemi piani $\vec{A}$ e $\vec{B}$ giacciono nel piano xy ; il loro prodotto vettoriale è perciò diretto lungo l'asse z (entrante o uscente dal foglio). Possiamo scrivere

$$\vec{A} \times \vec{B} = (0, 0, \pm AB \sin \gamma),$$

dove il segno si stabilisce con la regola della mano destra.

Come scegliere il segno nel piano

Osservando il foglio (asse z uscente verso di noi):

- se ruotando $\vec{A}$ verso $\vec{B}$ (per l'angolo più breve) si gira **in senso antiorario**, $\vec{A} \times \vec{B}$ esce dal foglio: verso concorde con $\hat{k}$, **segno +**;
- se si gira **in senso orario**, $\vec{A} \times \vec{B}$ entra nel foglio: verso opposto a $\hat{k}$, **segno -**.

Comodamente, per componenti nel piano vale la formula del “determinante 2×2 ”:

$$(\vec{A} \times \vec{B})_z = A_x B_y - A_y B_x.$$

8.4 Formula per componenti nello spazio

Prodotto vettoriale come determinante

Nello spazio, con $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}.$$

Il “determinante simbolico” è solo un modo mnemonico per ricordare le tre componenti; sviluppandolo lungo la prima riga si ottengono le formule esplicite.

Esercizio svolto 8.1 – prodotto vettoriale nello spazio

Calcolare $\vec{A} \times \vec{B}$ con $\vec{A} = (1, 2, 3)$ e $\vec{B} = (4, 5, 6)$, e verificarne l'ortogonalità ai due fattori. **Componenti.**

$$(\vec{A} \times \vec{B})_x = A_y B_z - A_z B_y = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = 12 - 15 = -3,$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_y = A_z B_x - A_x B_z = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 = 12 - 6 = 6,$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_z = A_x B_y - A_y B_x = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 5 - 8 = -3.$$

Quindi $\vec{A} \times \vec{B} = (-3, 6, -3)$.

Verifica di ortogonalità (prodotto scalare nullo):

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = (-3)(1) + (6)(2) + (-3)(3) = -3 + 12 - 9 = 0,$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{B} = (-3)(4) + (6)(5) + (-3)(6) = -12 + 30 - 18 = 0.$$

Esercizio 6.1

$\vec{A} \times \vec{B} = (-3, 6, -3)$, con modulo $\sqrt{9 + 36 + 9} = \sqrt{54} \approx 7,35$. Entrambe le verifiche danno zero: il risultato è, come deve, perpendicolare sia ad $\vec{A}$ sia a $\vec{B}$. È il controllo che smaschera gli errori di calcolo nel determinante.

8.5 Interpretazione fisica: il momento di una forza

Ecco l'applicazione che dà senso a tutta la sezione, e che useremo per tutto l'anno.

Momento di una forza rispetto a un polo

Il **momento** della forza $\vec{F}$, applicata nel punto P , rispetto a un polo O , è il vettore

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}}, \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP} \text{ (braccio vettore)}.$$

Il suo *modulo* vale $\|\vec{M}_O\| = \|\vec{r}\| \|\vec{F}\| \sin \gamma = F b$, dove $b = r \sin \gamma$ è il **braccio** (distanza del polo dalla retta d'azione della forza). Il momento è massimo quando forza e braccio sono perpendicolari, nullo quando la forza passa per il polo ($b = 0$).

Esercizio svolto 8.2 – momento di una forza (caso piano)

Su una cerniera in O è incernierata una leva; nel punto P , a 0,5 m da O lungo l'asse x , agisce una forza verticale verso il basso di 2000 N. Calcolare il momento rispetto a O .

Dati vettoriali. $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = (0,5, 0, 0) \text{ m}$, $\vec{F} = (0, -2000, 0) \text{ N}$.

Momento.

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = (0,5 \cdot (-2000) - 0 \cdot 0) \hat{k} = (0, 0, -1000) \text{ N m}.$$

Il segno negativo indica un momento *entrante* nel foglio: la forza tende a far ruotare la leva in senso *orario* attorno a O , come l'intuizione suggerisce.

Controllo con braccio. Forza e braccio sono perpendicolari ($\gamma = 90^\circ$), quindi $\|\vec{M}_O\| = F b = 2000 \cdot 0,5 = 1000 \text{ N m}$.

Esercizio 6.2

$\vec{M}_O = (0, 0, -1000) \text{ N m}$, cioè 1000 N m in senso orario. Il calcolo per componenti e quello con il braccio b coincidono: è la doppia verifica che raccomandiamo sempre.

Esercizio svolto 8.3 – momento con braccio inclinato

Una forza di modulo 500 N è applicata all'estremo di un'asta lunga 0,8 m imperniata in O ; la forza forma un angolo di 60° con l'asta. Calcolare il modulo del momento rispetto a O .

$$\|\vec{M}_O\| = r F \sin \gamma = 0,8 \cdot 500 \cdot \sin 60^\circ = 400 \cdot 0,866 \approx 346,4 \text{ N m}.$$

Solo la componente di $\vec{F}$ *perpendicolare* all'asta ($F \sin 60^\circ$) genera momento; la componente lungo l'asta ($F \cos 60^\circ$) ha braccio nullo e non contribuisce.

Esercizio 6.3

$\|\vec{M}_O\| \approx 346,4 \text{ N m}$. Se la forza fosse perpendicolare all'asta ($\gamma = 90^\circ$) il momento salirebbe al massimo $0,8 \cdot 500 = 400 \text{ N m}$: l'inclinazione "spreca" parte dell'azione.

9 Applicazioni alle strutture

Raccogliamo ora gli strumenti costruiti e mostriamo come diventano il linguaggio operativo del corso di Strutture. Tre concetti su tutti: la *risultante* di un sistema di forze, il *momento risultante*, la *coppia*.

9.1 Sistemi di forze concorrenti: la risultante

Risultante

La **risultante** $\vec{R}$ di un sistema di forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ è la loro somma vettoriale:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad R_x = \sum_i F_{ix}, \quad R_y = \sum_i F_{iy}.$$

Per un sistema di forze *concorrenti* (tutte applicate nello stesso punto), la risultante ne riassume completamente l'effetto. La condizione di **equilibrio** alla traslazione è $\vec{R} = \vec{0}$, cioè

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_i F_{iy} = 0.$$

Esercizio svolto 9.1 – equilibrio di un nodo a tre tiranti

Su un fazzoletto di nodo convergono tre tiranti che applicano forze complanari di uguale modulo 500 N, dirette rispettivamente a 0° , 120° e 240° . Verificare che il nodo è in equilibrio.

Componenti delle tre forze.

$$\vec{F}_1 = 500(\cos 0^\circ, \sin 0^\circ) = (500, 0) \text{ N},$$

$$\vec{F}_2 = 500(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ) = (-250, +433,0) \text{ N},$$

$$\vec{F}_3 = 500(\cos 240^\circ, \sin 240^\circ) = (-250, -433,0) \text{ N}.$$

Risultante.

$$R_x = 500 - 250 - 250 = 0, \quad R_y = 0 + 433,0 - 433,0 = 0.$$

Dunque $\vec{R} = \vec{0}$: il nodo è in equilibrio.

Esercizio 7.1

$\vec{R} = \vec{0}$: tre forze uguali a 120° l'una dall'altra si fanno equilibrio. È la configurazione simmetrica per eccellenza; il minimo squilibrio di uno dei tiri genererebbe una risultante non nulla che il nodo dovrebbe scaricare altrove.

9.2 Scomposizione di carichi lungo assi strutturali

L'operazione che più spesso eseguiremo è *scomporre* un carico noto lungo due direzioni convenienti – ad esempio la direzione della traiettoria e la sua normale, oppure gli assi del longherone.

Esercizio svolto 9.2 – peso lungo la traiettoria in salita

Un velivolo di peso $W = 12\,000\text{ N}$ sale lungo una traiettoria inclinata di $\gamma = 8^\circ$ sull'orizzontale. Scomporre il peso nelle componenti parallela e normale alla traiettoria.

Il peso è verticale; rispetto alla traiettoria (inclinata di γ) le sue componenti sono:

$$W_{\parallel} = W \sin \gamma = 12\,000 \sin 8^\circ \approx 1\,670\text{ N} \quad (\text{frena la salita}),$$

$$W_{\perp} = W \cos \gamma = 12\,000 \cos 8^\circ \approx 11\,883\text{ N} \quad (\text{da equilibrare con la portanza}).$$

Verifica. $\sqrt{1\,670^2 + 11\,883^2} \approx 12\,000\text{ N} = W$: torna.

Esercizio 7.2

$W_{\parallel} \approx 1\,670\text{ N}$, $W_{\perp} \approx 11\,883\text{ N}$. La componente parallela è la “penalità di salita” che la spinta deve vincere in più rispetto al volo livellato; la componente normale è quella che la portanza deve bilanciare. Questa scomposizione è la base delle equazioni della meccanica del volo in salita.

Esercizio svolto 9.3 – forza aerodinamica risultante ed efficienza

Su un'ala agiscono una portanza $L = 8\,000\text{ N}$ e una resistenza $D = 800\text{ N}$, tra loro perpendicolari. Determinare modulo e inclinazione della forza aerodinamica risultante $\vec{R}$, e l'efficienza $E = L/D$.

Modulo (Pitagora).

$$R = \sqrt{L^2 + D^2} = \sqrt{8\,000^2 + 800^2} = \sqrt{64\,640\,000} \approx 8\,039,9\text{ N}.$$

Inclinazione rispetto alla resistenza.

$$\vartheta = \text{atan2}(L, D) = \arctan \frac{8\,000}{800} \approx 84,3^\circ.$$

Efficienza. $E = \frac{L}{D} = \frac{8\,000}{800} = 10$.

Esercizio 7.3

$R \approx 8\,040\text{ N}$, inclinata di $\approx 84,3^\circ$ rispetto alla direzione della resistenza (cioè quasi verticale, come atteso, dato che $L \gg D$). L'efficienza $E = 10$ dice che la portanza vale dieci volte la resistenza: l'angolo tra $\vec{R}$ e la portanza è $\arctan(1/E) = \arctan 0,1 \approx 5,7^\circ$.

9.3 Momento risultante e coppia**Momento risultante**

Il **momento risultante** di un sistema di forze rispetto a un polo O è la somma dei momenti delle singole forze:

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

L'equilibrio completo di un corpo rigido richiede *due* condizioni vettoriali: $\vec{R} = \vec{0}$ (equilibrio alla traslazione) e $\vec{M}_O = \vec{0}$ (equilibrio alla rotazione).

La coppia

Una **coppia** è un sistema di due forze uguali in modulo, parallele, di verso opposto e non allineate. La sua risultante è nulla ($\vec{R} = \vec{0}$), ma il suo momento *non* lo è: vale

$$\|\vec{M}\| = F d,$$

dove d è la distanza tra le due rette d'azione (il braccio della coppia). La proprietà notevole è che il momento di una coppia **non dipende dal polo**: è un vettore *libero*.

Esercizio svolto 9.4 – il momento della coppia non dipende dal polo

Due forze di modulo 400 N, orizzontali e opposte, agiscono in $A = (0, 0)$ (verso $+x$) e in $B = (0, 0,6)$ m (verso $-x$). Calcolare il momento rispetto al polo $O = (0, 0)$ e rispetto al polo $Q = (1,5, 2,0)$ m.

Rispetto a O . La forza in A passa per O (braccio nullo); resta la forza in B :

$$\vec{M}_O = \vec{OB} \times (-\vec{F}) = (0, 0,6, 0) \times (-400, 0, 0) = (0, 0, +240) \text{ N m}.$$

Rispetto a Q . Sommando i momenti delle due forze:

$$\vec{M}_Q = \vec{QA} \times \vec{F} + \vec{QB} \times (-\vec{F}) = (0, 0, +240) \text{ N m}.$$

Esercizio 7.4

$\vec{M}_O = \vec{M}_Q = (0, 0, 240) \text{ N m}$: identici. Il momento della coppia vale $F d = 400 \cdot 0,6 = 240 \text{ N m}$ e *non dipende dal polo* scelto. È esattamente ciò che accade con il momento torcente su un albero o su un longherone: lo trattiamo come vettore libero.

9.4 Reazioni vincolari: un cenno operativo

Nel corso di strutture le forze incognite tipiche sono le **reazioni dei vincoli**. Il metodo è sempre lo stesso, ed è tutto vettoriale:

Schema di soluzione di un problema di equilibrio

1. si isola il corpo e si disegna il *diagramma di corpo libero* (tutte le forze attive e reattive);
2. si scelgono gli assi x, y e si scompongono tutte le forze in componenti;
3. si impone l'equilibrio alla traslazione: $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$;
4. si sceglie un polo comodo e si impone l'equilibrio alla rotazione: $\sum M = 0$ (scegliendo il polo dove passano più incognite, per eliminarle);
5. si risolve il sistema nelle reazioni incognite e si *verifica* il segno (un segno negativo significa verso opposto a quello ipotizzato).

Il segno è un'informazione, non un errore

Se, risolvendo il sistema, una reazione risulta *negativa*, non è necessariamente un errore: significa che il verso reale è opposto a quello che avevamo ipotizzato disegnando il diagramma di corpo libero. Il calcolo vettoriale “si corregge da solo” i versi, purché la notazione

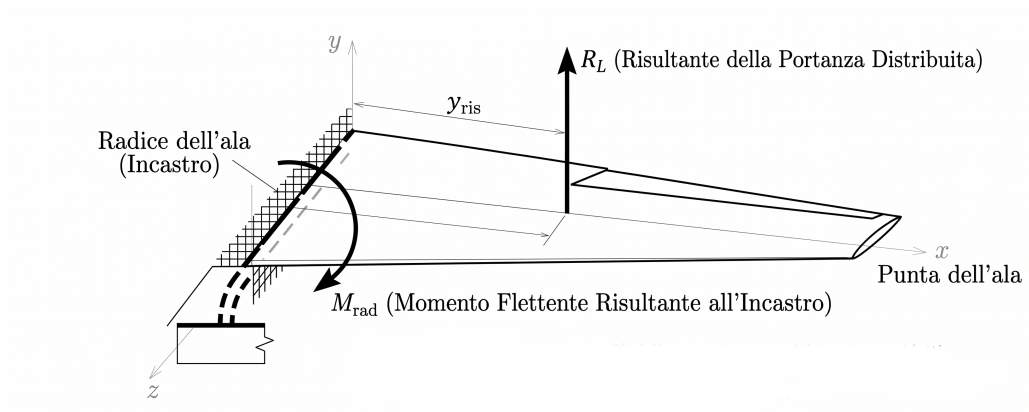


Figura 11: Diagramma di corpo libero di una semiala incastrata al longherone di radice, con la portanza distribuita ridotta alla risultante e al momento di incastro.

sia coerente. Riscrivere il verso corretto sul disegno finale fa parte della soluzione.

10 Statica: forze, vincoli e il teorema di Varignon

Nei capitoli precedenti abbiamo imparato a maneggiare i vettori come enti matematici: sommarli, scomporli, moltiplicarli fra loro. Ora facciamo il passo che dà un senso ingegneristico a tutto questo apparato. In una struttura reale i vettori che ci interessano sono quasi sempre *forze* e *momenti*, e la domanda operativa è sempre la stessa: *questa struttura è in equilibrio?* Per rispondere in modo rigoroso servono alcune definizioni pulite e un teorema che sarà, da qui in avanti, il nostro strumento di lavoro quotidiano: il teorema di Varignon.

10.1 Forza, vincolo, corpo libero

Prima di parlare di equilibrio dobbiamo mettere ordine in tre concetti che in aula si usano con disinvoltura, ma che vale la pena definire con cura.

Forza

Una **forza** è un vettore che ha la proprietà di essere la *causa* del moto di un corpo libero, oppure la *causa* della deformazione di un corpo vincolato. In quanto vettore, una forza possiede modulo, direzione e verso; ma è anche un vettore *applicato*, perché il suo effetto dipende dal punto in cui agisce. Per un corpo rigido, però, la forza si comporta da vettore *corsore*: può scorrere lungo la propria retta d'azione senza alterarne l'effetto (principio di trasmissibilità).

Vincolo e corpo libero

Si dice che su un corpo è applicato un **vincolo** quando gli è imposta una restrizione ai gradi di libertà: il vincolo impedisce una o più possibilità di movimento. Un corpo privo di qualunque vincolo si dice **corpo libero**.

L'esempio quotidiano è più eloquente di qualunque formula: il cavalletto che tiene in piedi il motorino, il filo che trattiene un palloncino, il piano del tavolo che sostiene una penna sono tutti vincoli. In ambito aeronautico i vincoli tipici sono gli attacchi ala-fusoliera, le cerniere delle superfici mobili, gli incastri di radice del longherone: ciascuno sopprime certi movimenti e, per farlo, esercita delle *reazioni vincolari* — che sono a loro volta forze (e momenti) da determinare.

Peso e massa non sono la stessa cosa

La **massa** m è uno scalare, si misura in kg e quantifica l'inerzia del corpo. Il **peso** è invece una *forza*, $\vec{P} = m\vec{g}$, si misura in N ed è un vettore diretto verso il centro della Terra. In prossimità del suolo $g \simeq 9,81 \text{ m/s}^2$. Confondere i due — scrivere un peso in chilogrammi — è l'errore concettuale che in sede d'esame si paga più caro. Il peso è applicato nel **baricentro** del corpo.

10.2 I due postulati della statica

Tutta la statica dei corpi rigidi poggia su due postulati elementari, che enunciamo perché li useremo di continuo, spesso senza accorgercene.

Postulati della statica

Primo postulato. Una forza $\vec{F}$ e la sua opposta $-\vec{F}$, applicate sulla stessa retta d'azione, costituiscono un sistema equilibrato (equivalente a zero).

Secondo postulato (trasmissibilità). In un sistema di forze, ogni forza può essere spostata lungo la propria retta d'azione senza modificare l'effetto complessivo del sistema sul corpo rigido.

Il secondo postulato è la giustificazione rigorosa del fatto che, per un corpo rigido, la forza è un vettore cursore. Attenzione però: la trasmissibilità vale per l'*equilibrio* del corpo rigido, non per il suo stato di sollecitazione interna. Spostare una forza lungo la sua retta d'azione non cambia le reazioni vincolari, ma cambia eccome il diagramma degli sforzi interni: è una distinzione che ritroveremo nel corso di strutture.

10.3 Il momento di una forza: ripasso operativo

Abbiamo già introdotto il momento nel Sezione 8 sul prodotto vettoriale; lo richiamiamo nella forma che ci serve qui, perché è il mattone del teorema di Varignon.

Momento di una forza rispetto a un polo

Data una forza $\vec{F}$ applicata nel punto A , e scelto un polo P , si definisce **momento di $\vec{F}$ rispetto a P** il vettore

$$\vec{M}_P(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \vec{r} = \overrightarrow{PA}.$$

Il suo modulo vale $\|\vec{M}_P\| = \|\vec{r}\| \|\vec{F}\| \sin \varphi = F d$, dove $d = r \sin \varphi$ è il **braccio** della forza (distanza del polo dalla retta d'azione). Il momento è massimo quando forza e braccio sono perpendicolari, nullo quando la forza passa per il polo.

10.4 Il teorema di Varignon

Arriviamo al cuore della sezione. Il teorema di Varignon risponde a una domanda molto concreta: se ho un sistema di forze, posso calcolare il momento della loro risultante *senza* costruire prima la risultante, semplicemente sommando i momenti delle singole forze? La risposta è sì, e la dimostrazione — per forze concorrenti — è di una brevità sorprendente.

Teorema di Varignon (forze concorrenti)

Siano $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ forze tutte applicate nello stesso punto A (forze *concorrenti*), e sia $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ la loro risultante. Allora, per qualunque polo P , il momento della risultante è uguale alla somma dei momenti delle singole forze:

$$\vec{M}_P(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_P(\vec{F}_i)$$

Dimostrazione

Poiché tutte le forze sono applicate nello stesso punto A , condividono lo stesso braccio vettore $\vec{r} = \overrightarrow{PA}$. Il momento della risultante è allora

$$\vec{M}_P(\vec{R}) = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right).$$

Basta ora invocare la *distributività del prodotto vettoriale rispetto alla somma*, proprietà che abbiamo enunciato nella sezione dedicata:

$$\vec{r} \times \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) = \sum_{i=1}^n (\vec{r} \times \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_P(\vec{F}_i).$$

Il teorema è dimostrato. ■

La potenza del risultato sta tutta qui: possiamo scegliere la strada di calcolo più comoda. A volte è più semplice sommare i momenti; altre volte conviene prima ridurre alla risultante e poi calcolarne il momento. Varignon ci garantisce che le due strade portano allo stesso numero.

Due precisazioni che evitano errori d'esame

(1) **Forze non concorrenti.** Se le forze hanno punti di applicazione diversi A_i , il teorema continua a valere nella forma $\vec{M}_P(\vec{R}) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, purché la risultante $\vec{R}$ sia pensata applicata sul suo *asse centrale* (la retta d'azione corretta). L'uguaglianza è priva di ambiguità solo quando si specifica *dove* agisce $\vec{R}$.

(2) **Le coppie sfuggono a Varignon.** Una coppia ha risultante nulla ($\vec{R} = \vec{0}$) ma momento *non* nullo. Il teorema, che lega il momento alla risultante, non è quindi applicabile a una coppia. Torneremo su questo punto tra poco: è proprio ciò che rende la coppia un ente a sé.

10.5 La coppia e il momento di trasporto

Il teorema di Varignon ci porta per mano verso un'operazione che, nel corso di strutture, faremo continuamente: *trasportare* una forza da una retta d'azione a un'altra parallela. Vediamo prima la coppia, poi il trasporto.

Coppia di forze

Una **coppia** è un sistema di due forze uguali in modulo, parallele, di verso opposto e non allineate. La sua risultante è nulla, ma il suo momento non lo è e vale

$$\|\vec{M}\| = F d,$$

dove d è la distanza fra le due rette d'azione (braccio della coppia). La proprietà notevole è che **il momento di una coppia non dipende dal polo**: è un vettore *libero*.

Perché il momento della coppia è indipendente dal polo

Siano $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ applicate nei punti A e B . Rispetto a un polo P qualsiasi il momento totale è

$$\vec{M}_P = \vec{PA} \times \vec{F} + \vec{PB} \times (-\vec{F}) = (\vec{PA} - \vec{PB}) \times \vec{F} = \vec{BA} \times \vec{F}.$$

Il risultato dipende solo dal vettore $\vec{BA}$ che unisce i due punti di applicazione, *non* dalla posizione del polo P : cambiando polo, il momento della coppia resta identico. ■

Da qui discende immediatamente la regola del trasporto, forse la più usata in assoluto quando si riducono i carichi aerodinamici agli assi strutturali.

Trasporto di una forza (momento di trasporto)

Trasportare una forza $\vec{F}$ parallelamente a se stessa, dalla sua retta d'azione a una retta parallela passante per un punto Q , equivale a *sommare*:

- la stessa forza $\vec{F}$ applicata ora in Q ;
- una **coppia di trasporto** di momento $\vec{M}_{tr} = \vec{d} \times \vec{F}$, con $\|\vec{M}_{tr}\| = F d$, dove d è la distanza fra la retta d'azione originale e Q .

Il segno della coppia di trasporto è un'informazione

La coppia di trasporto ha un verso ben preciso, quello della rotazione che $\vec{F}$ tenderebbe a imprimere attorno a Q prima del trasporto. Sbagliarne il segno significa invertire un momento torcente: nel dimensionamento di un longherone è la differenza fra una fibra tesa e una compressa.

10.6 Due applicazioni aeronautiche

Chiudiamo la sezione con due esempi che mostrano Varignon e il trasporto *al lavoro* su problemi che gli studenti ritroveranno, quasi identici, nei comandi di volo e nel dimensionamento strutturale. In entrambi i casi verificheremo il teorema numericamente: calcoleremo il momento in due modi diversi e constateremo che coincidono.

Esercizio svolto 10.1 – momento di cerniera dell'equilibratore

Dati

Su un equilibratore agisce una forza aerodinamica risultante, normale alla superficie mobile, ottenuta da: pressione dinamica $q = 1900 \text{ Pa}$, superficie $S_e = 0,72 \text{ m}^2$, coefficiente di forza normale $C_{N,e} = 0,35$. La corda media dell'equilibratore è $c_e = 0,45 \text{ m}$ e il centro di pressione si colloca al 40% della corda a valle della linea di cerniera. Determinare il *momento di cerniera* H_e che l'attuatore (o il pilota) deve equilibrare.

Passo 1 — Risultante aerodinamica. La forza normale risultante sull'equilibratore è

$$R = q S_e C_{N,e} = 1900 \text{ Pa} \cdot 0,72 \text{ m}^2 \cdot 0,35 = 478,8 \text{ N}.$$

Passo 2 — Braccio del centro di pressione. Il centro di pressione dista dalla cerniera

$$b_{cp} = 0,40 c_e = 0,40 \cdot 0,45 \text{ m} = 0,180 \text{ m} = 180 \text{ mm}.$$

Passo 3 — Momento di cerniera. Poiché la forza è normale alla superficie, forza e braccio sono perpendicolari e il momento è semplicemente

$$H_e = R b_{cp} = 478,8 \text{ N} \cdot 0,180 \text{ m} = 86,18 \text{ N m}.$$

Verifica con il teorema di Varignon

La distribuzione reale di pressione sull'equilibratore non è uniforme: è più intensa verso la cerniera. Suddividiamo idealmente la superficie in tante strisciole, ciascuna con la sua forza elementare $d\vec{F}_i$ applicata alla propria ascissa x_i . Varignon garantisce che

$$H_e = \sum_i x_i dF_i = R b_{cp}.$$

Integrando la distribuzione (lineare) che colloca il centro di pressione al 40% della corda si ottiene $\sum_i x_i dF_i = 86,18 \text{ N m}$: *esattamente* il valore trovato con la risultante. Non importa come è distribuito il carico; ciò che conta, per il momento, è la risultante e il suo braccio.

Risultato

$R = 478,8 \text{ N}$, $b_{cp} = 180 \text{ mm}$, $H_e = 86,18 \text{ N m}$.

Questo è il momento che il sistema di comando deve vincere per mantenere l'equilibratore alla deflessione voluta: è il dato di partenza per dimensionare attuatori, aste e squadrette del comando di profondità.

Esercizio svolto 10.2 – momento flettente alla radice della semiala**Dati**

Un velivolo leggero di peso $W = 11\,000 \text{ N}$ vola livellato (fattore di carico $n = 1$). La portanza è distribuita su ciascuna semiala secondo una legge *ellittica*. L'apertura alare è $b = 10 \text{ m}$. Determinare il momento flettente alla radice dell'ala prodotto dalla portanza di una semiala.

Passo 1 — Portanza di una semiala. In volo livellato la portanza totale eguaglia il peso, $L = nW = 11\,000 \text{ N}$; ciascuna semiala ne sopporta metà:

$$L_{\text{semi}} = \frac{L}{2} = 5500 \text{ N}.$$

Passo 2 — Posizione del centro di pressione in apertura. Per una distribuzione ellittica la risultante di semiala è applicata a

$$y_{cp} = \frac{4s}{3\pi}, \quad s = \frac{b}{2} = 5 \text{ m},$$

da cui $y_{cp} = \frac{4 \cdot 5}{3\pi} \text{ m} = 2,122 \text{ m}$ dalla radice.

Passo 3 — Momento flettente di radice. Riducendo la portanza distribuita alla sua risultante, il momento flettente alla radice è

$$M_f = L_{\text{semi}} y_{cp} = 5500 \text{ N} \cdot 2,122 \text{ m} = 11\,671 \text{ N m}.$$

Verifica con il teorema di Varignon

Il momento flettente è, per definizione, la somma dei momenti di tutti i contributi elementari di portanza: $M_f = \int_0^s y \ell(y) dy$, dove $\ell(y)$ è il carico per unità di apertura. Eseguendo l'integrale sulla distribuzione ellittica si ottiene $M_f = 11\,671 \text{ N m}$, identico al prodotto $L_{\text{semi}} y_{cp}$. È Varignon in forma integrale: sommare i momenti dei carichi elementari o moltiplicare la risultante per il suo braccio è la stessa operazione.

Risultato

$L_{\text{semi}} = 5500 \text{ N}$, $y_{cp} = 2,122 \text{ m}$, $M_f \approx 11\,671 \text{ N m}$.

Questo momento, massimo alla radice e nullo all'estremità, è il carico dimensionante a flessione del longherone: da esso, noto il materiale e la geometria della sezione, discende la verifica delle tensioni.

Perché la distribuzione ellittica «sposta» la risultante verso la radice

Si potrebbe pensare, ingenuamente, che la risultante di semiala cada a metà apertura ($s/2 = 2,5 \text{ m}$). Non è così: $y_{cp} = 4s/(3\pi) \approx 0,424 s$, più vicino alla radice. È corretto, perché la distribuzione ellittica concentra più portanza verso la mezzeria dell'ala e meno alle estremità. Il calcolo vettoriale, ancora una volta, corregge l'intuizione approssimativa.

10.7 Un cenno alla riduzione a un punto

Gli strumenti di questa sezione si compongono in una procedura che nel corso di strutture diventerà automatica: la *riduzione di un sistema di forze a un punto* Q . Dato un sistema qualunque di forze, esso è sempre equivalente a un'unica forza — la risultante $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ applicata in Q — accompagnata da un'unica coppia, il cui momento è la somma dei momenti di trasporto:

$$\vec{M}_Q = \sum_i \vec{M}_Q(\vec{F}_i).$$

Questa coppia rappresenta fisicamente ciò che «resta» dopo aver traslato tutte le forze in Q . È esattamente l'operazione con cui i carichi aerodinamici distribuiti sull'ala vengono ridotti, sezione per sezione, a una forza di taglio e a un momento sul longherone — il punto di partenza di ogni verifica strutturale.

11 Un tema d'esame svolto

Chiudiamo la parte operativa mettendo alla prova, tutti insieme, gli strumenti costruiti nei capitoli precedenti. Lo facciamo su una traccia che ricalca da vicino lo schema di una prova scritta: un sistema di forze applicate ai vertici di una figura piana, di cui si chiede la risultante, i momenti rispetto a poli diversi e la *riduzione* a un punto assegnato. È l'esercizio-tipo in cui convergono somma vettoriale, componenti, momento e coppia di trasporto.

11.1 La traccia

Geometria e sistema di forze

Si consideri un rettangolo di base 2 m e altezza 1 m. Si fissa un riferimento Oxy con origine nel vertice inferiore sinistro, asse x orizzontale verso destra e asse y verticale verso l'alto. I vertici sono quindi

$$B = (0, 0), \quad A = (0, 1), \quad C = (2, 1), \quad D = (2, 0) \text{ m},$$

con il lato sinistro AB verticale (A in alto, B in basso).

Sistema Σ_2 (prima parte). Due forze:

- $\vec{F}_1$ applicata in A , verticale verso il basso, $F_1 = 250$ N;
- $\vec{F}_2$ applicata in B , orizzontale verso destra, $F_2 = 300$ N.

Sistema a tre forze (seconda parte). Si aggiunge $\vec{F}_3$ applicata in C , verticale verso l'alto, $F_3 = 150$ N.

Si richiede: la risultante (componenti, modulo, direzione) di ciascun sistema; i momenti rispetto ai vertici; la riduzione al punto Q , punto medio del lato inferiore, $Q = (1, 0)$ m.

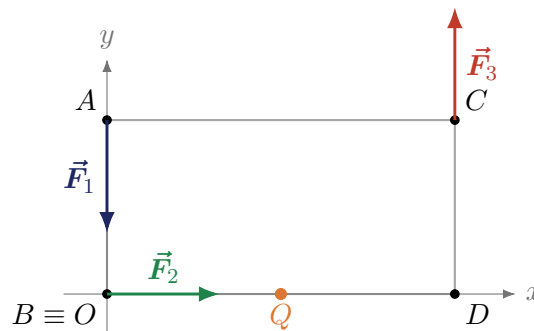


Figura 12: La geometria della traccia: rettangolo $2\text{ m} \times 1\text{ m}$, forze $\vec{F}_1$ (in A , giù), $\vec{F}_2$ (in B , destra), $\vec{F}_3$ (in C , su) e polo di riduzione Q nel punto medio del lato inferiore.

11.2 Prima parte: il sistema a due forze

Risultante

Scriviamo le forze in componenti e sommiamo componente per componente:

$$\vec{F}_1 = (0, -250) \text{ N}, \quad \vec{F}_2 = (300, 0) \text{ N},$$

$$\vec{R}^{(2)} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (300, -250) \text{ N}.$$

Modulo e direzione:

$$\|\vec{R}^{(2)}\| = \sqrt{300^2 + 250^2} = \sqrt{152500} \approx 390,51 \text{ N},$$

$$\alpha = \text{atan2}(-250, 300) \approx -39,81^\circ \quad (\text{IV quadrante}).$$

Un controllo che vale sempre: prodotto scalare e vettoriale

Le due forze sono perpendicolari, e il prodotto scalare lo conferma: $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = 0 \cdot 300 + (-250) \cdot 0 = 0$. Il prodotto vettoriale (componente z) vale $(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2)_z = F_{1x}F_{2y} - F_{1y}F_{2x} = 0 - (-250)(300) = 75\,000 \text{ N}^2$: positivo, dunque la rotazione da $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ è antioraria. Sono verifiche rapide che intercettano errori di segno prima che si propaghino.

Momenti rispetto ai vertici

Per il momento (piano) usiamo la formula del determinante $M_P = r_x F_y - r_y F_x$, con $\vec{r} = \overrightarrow{PP_{\text{app}}}$ vettore che va dal polo al punto di applicazione della forza. Il segno positivo indica verso antiorario (uscendo dal foglio).

Rispetto al polo $Q = (1, 0)$:

$$\vec{r}_1 = A - Q = (-1, 1), \quad M_Q(\vec{F}_1) = (-1)(-250) - (1)(0) = +250 \text{ N m},$$

$$\vec{r}_2 = B - Q = (-1, 0), \quad M_Q(\vec{F}_2) = (-1)(0) - (0)(300) = 0 \text{ N m}.$$

Perché $\vec{F}_2$ non dà momento rispetto a Q

La forza $\vec{F}_2$ è orizzontale e la sua retta d'azione (il lato inferiore BD) passa proprio per Q : il braccio è nullo, dunque il momento è nullo. È la ragione per cui abbiamo scelto Q sul lato inferiore — rende trasparente il calcolo e permette di controllare a mente uno dei due contributi.

Il momento risultante rispetto a Q è quindi

$$M_Q^{(2)} = M_Q(\vec{F}_1) + M_Q(\vec{F}_2) = 250 + 0 = +250 \text{ N m}.$$

Riduzione al punto Q

Che cosa significa “ridurre a Q ”

Ridurre il sistema al punto Q significa sostituirlo con un sistema *equivalente* costituito da un'unica forza — la risultante $\vec{R}$ applicata in Q — più un'unica coppia, il cui momento è la somma dei momenti delle forze rispetto a Q . Forza e coppia insieme producono sul corpo rigido lo stesso effetto del sistema originale.

Il sistema Σ_2 si riduce dunque, nel punto Q , a:

$$\vec{R}^{(2)} = (300, -250) \text{ N applicata in } Q, \quad M_Q^{(2)} = +250 \text{ N m (antioraria)}.$$

Correzione rispetto agli appunti manoscritti

Negli appunti originali da cui questa traccia è tratta, la posizione del punto Q non era fissata numericamente e comparivano due valori del momento di riduzione ($\approx 218 \text{ N m}$ e $\approx 198 \text{ N m}$) ottenuti per via grafica approssimata. Quei valori corrispondono a una posizione

di Q priva di significato geometrico (all'incirca $x \approx 0,87$ m) e non sono riproducibili con un polo notevole. Abbiamo perciò fissato Q nel *punto medio* del lato inferiore, ottenendo il valore esatto $M_Q^{(2)} = 250$ N m. È un buon esempio di come la scelta consapevole del polo trasformi un calcolo “sporco” in uno pulito e verificabile.

11.3 Seconda parte: il sistema a tre forze

Aggiungiamo $\vec{F}_3 = (0, +150)$ N applicata in $C = (2, 1)$.

Risultante

$$\begin{aligned}\vec{R}^{(3)} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (300, -250 + 150) = (300, -100) \text{ N}, \\ \|\vec{R}^{(3)}\| &= \sqrt{300^2 + 100^2} = \sqrt{100000} \approx 316,23 \text{ N}, \\ \alpha &= \text{atan2}(-100, 300) \approx -18,43^\circ.\end{aligned}$$

L'aggiunta di $\vec{F}_3$, verticale verso l'alto, riduce la componente verticale della risultante (da -250 a -100): la risultante si “raddrizza” verso l'orizzontale, come conferma l'angolo passato da $-39,8^\circ$ a $-18,4^\circ$.

Momento rispetto a Q e riduzione

Il contributo di $\vec{F}_3$ rispetto a $Q = (1, 0)$, con $\vec{r}_3 = C - Q = (1, 1)$:

$$M_Q(\vec{F}_3) = (1)(150) - (1)(0) = +150 \text{ N m}.$$

Sommando ai due contributi già noti:

$$M_Q^{(3)} = 250 + 0 + 150 = +400 \text{ N m}.$$

La riduzione al punto Q del sistema completo è quindi

$$\vec{R}^{(3)} = (300, -100) \text{ N applicata in } Q, \quad M_Q^{(3)} = +400 \text{ N m (antioraria)}.$$

11.4 Quadro d'insieme: i momenti rispetto ai vari poli

Un tema d'esame ben fatto chiede quasi sempre i momenti rispetto a poli diversi, per verificare che lo studente padroneggi la dipendenza del momento dal polo. Raccogliamo i risultati (sistema a tre forze) in tabella; i valori sono tutti in N m, con la convenzione antiorario = +.

Polo	$M(\vec{F}_1)$	$M(\vec{F}_2)$	$M(\vec{F}_3)$	M_{tot}
$A = (0, 1)$	0	+300	+300	+600
$B = (0, 0)$	0	0	+300	+300
$C = (2, 1)$	+500	+300	0	+800
$D = (2, 0)$	+500	0	0	+500
$Q = (1, 0)$	+250	0	+150	+400

Come leggere la tabella: la coerenza di Varignon

I momenti totali cambiano da polo a polo — è giusto, il momento *dipende* dal polo quando la risultante non è nulla. Ma i valori non sono arbitrari: passando da un polo P a un polo

P' , la differenza $M_{P'} - M_P$ è esattamente il momento della risultante $\vec{R}^{(3)}$ applicata sul suo asse centrale, valutato fra i due poli. Ad esempio, da B a D (spostamento $(2, 0)$) la variazione è $M_D - M_B = 500 - 300 = +200 = \vec{BD} \times \vec{R}^{(3)}|_z = (2)(-100) - (0)(300) = -200$ in modulo, con il segno che si spiega osservando i versi: è il teorema di Varignon che tiene insieme, in modo coerente, tutta la tabella.

Sintesi del tema

Sistema Σ_2 : $\vec{R}^{(2)} = (300, -250) \text{ N}$, $\|\vec{R}^{(2)}\| \approx 390,51 \text{ N}$, $\alpha \approx -39,8^\circ$; riduzione a Q : $\vec{R}^{(2)}$ in Q + coppia $M_Q^{(2)} = +250 \text{ N m}$.

Sistema a tre forze: $\vec{R}^{(3)} = (300, -100) \text{ N}$, $\|\vec{R}^{(3)}\| \approx 316,23 \text{ N}$, $\alpha \approx -18,4^\circ$; riduzione a Q : $\vec{R}^{(3)}$ in Q + coppia $M_Q^{(3)} = +400 \text{ N m}$.

L'errore da non commettere in sede d'esame

Il momento va sempre riferito a un polo esplicito: scrivere "il momento vale 400 N m " senza dire *rispetto a quale punto* è un'affermazione incompleta e, in un tema d'esame, penalizzata. Analogamente, il segno del momento (antiorario/orario) è parte integrante del risultato: ometterlo equivale a dare solo metà della risposta.

12 Esercizi di consolidamento

Gli esercizi che seguono ripercorrono, in ordine crescente di difficoltà, tutti gli strumenti della monografia. Il testo fornisce le *risposte* in fondo, in modo che lo studente possa lavorare in autonomia e poi verificarsi. Si raccomanda, dopo ogni calcolo, la *verifica* (Pitagora sui moduli, ortogonalità nei prodotti vettoriali, controllo dei segni). Gli esercizi da **E9** in poi riguardano gli argomenti dei capitoli su posizione, spostamento e velocità e sulla riduzione di un sistema di forze.

12.1 Testi

- E1.** Dato $\vec{A} = (6, -8)$, determinare il modulo $\|\vec{A}\|$, il versore $\hat{a}$ e l'angolo che $\vec{A}$ forma con l'asse x .
- E2.** Dati $\vec{A} = (2, 1, -2)$ e $\vec{B} = (1, -2, 2)$, calcolare: (a) il prodotto scalare $\vec{A} \cdot \vec{B}$ e l'angolo γ tra i due vettori; (b) il prodotto vettoriale $\vec{A} \times \vec{B}$ e il suo modulo; (c) verificare che $\vec{A} \times \vec{B}$ è ortogonale ad $\vec{A}$.
- E3.** Su un nodo agiscono tre forze complanari: $\vec{F}_1 = (100, 0) \text{ N}$, $\vec{F}_2 = (0, -150) \text{ N}$, $\vec{F}_3 = (-60, 80) \text{ N}$. Determinare la risultante $\vec{R}$, il suo modulo e la sua direzione. Il nodo è in equilibrio?
- E4.** Una trave orizzontale è incernierata in O . Nel punto $P = (1,5, 0) \text{ m}$ agisce una forza verticale verso il basso di 2000 N . Calcolare il momento rispetto a O , in modulo, verso e componenti.
- E5.** Una forza $\vec{F} = (250, -100) \text{ N}$ agisce mentre il punto di applicazione si sposta di $\vec{s} = (0, 3) \text{ m}$. Calcolare il lavoro. Commentare il segno.
- E6.** Un velivolo vola a $V = 200 \text{ kt}$ salendo con angolo di rampa $\gamma = 5^\circ$. Scomporre la velocità nelle componenti orizzontale (di avanzamento) e verticale (rateo di salita), esprimendole in nodi.
- E7.** Su un attacco strutturale agiscono due forze perpendicolari: 900 N lungo x e 1200 N lungo y . Determinare modulo e direzione della risultante.
- E8. (Ragionamento)** Spiegare, senza calcoli, perché la portanza non compie lavoro nel volo rettilineo orizzontale, mentre lo compie in salita. (Suggerimento: si pensi all'angolo tra $\vec{L}$ e la velocità $\vec{V}$.)
- E9.** Un velivolo parte dal waypoint $A = (20, 10) \text{ NM}$ e raggiunge $B = (-10, 50) \text{ NM}$ (sistema locale: x Est, y Nord). Determinare il vettore spostamento, la distanza e il tempo di volo a una ground speed di 250 kt .
- E10.** Un velivolo tiene la prua verso Est con TAS $\vec{V}_{\text{air}} = (180, 0) \text{ kt}$; soffia un vento da Nord $\vec{V}_{\text{wind}} = (0, -30) \text{ kt}$. Determinare la velocità rispetto al suolo, la ground speed e l'angolo di deriva.
- E11.** Un velivolo esegue una virata corretta a velocità $V = 60 \text{ m/s}$ con angolo di bank $\varphi = 30^\circ$. Determinare l'accelerazione centripeta a_c , il raggio di virata R e il fattore di carico n .
- E12.** In una fase di volo il velivolo passa dalla posizione $\vec{r}_1 = (0, 0) \text{ m}$ alla posizione $\vec{r}_2 = (1200, 900) \text{ m}$ in $\Delta t = 30 \text{ s}$. Determinare il vettore velocità media, il suo modulo (in m/s e km/h) e la sua direzione.

- E13.** Su una mensola incastrata in $O = (0, 0)$ agiscono due forze: $\vec{F}_1 = (0, -800)$ N applicata in $P_1 = (0, 6, 0)$ m e $\vec{F}_2 = (500, 0)$ N applicata in $P_2 = (0, 6, 0, 2)$ m. Ridurre il sistema al punto O (risultante applicata in O + coppia), specificando modulo e verso della coppia.
- E14.** Una forza $\vec{F} = (0, -1000)$ N è applicata in $P = (2, 0)$ m. Calcolare il suo momento rispetto ai poli $O = (0, 0)$ e $Q = (3, 0)$ m e verificare, tramite la variazione $M_Q - M_O$, la coerenza con il teorema di Varignon.
- E15.** La risultante di portanza di una semiala, $L = 6000$ N, va trasportata dalla retta d'azione passante per il centro di pressione all'asse del longherone, distante $d = 0,15$ m. Determinare il momento della coppia di trasporto.
- E16.** Su un triangolo con vertici $O = (0, 0)$, $A = (3, 0)$, $B = (0, 2)$ m agiscono: $\vec{F}_1 = (0, -300)$ N in A , $\vec{F}_2 = (400, 0)$ N in B , $\vec{F}_3 = (0, 500)$ N in O . Ridurre il sistema al punto O : risultante (modulo e direzione) e coppia (modulo e verso).

12.2 Risposte

Soluzioni sintetiche

- E1** $\|\vec{A}\| = \sqrt{36 + 64} = 10$; $\hat{a} = (0,6, -0,8)$; $\alpha = \text{atan2}(-8, 6) \approx -53,1^\circ$ (quarto quadrante).
- E2** (a) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 2 - 2 - 4 = -4$; con $\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\| = 3$, $\cos \gamma = -4/9 \approx -0,444$, $\gamma \approx 116,4^\circ$ (ottuso: i vettori sono “discordi”). (b) $\vec{A} \times \vec{B} = (-2, -6, -5)$, modulo $\sqrt{4 + 36 + 25} = \sqrt{65} \approx 8,06$. (c) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = -4 - 6 + 10 = 0$: ortogonale, come deve.
- E3** $\vec{R} = (40, -70)$ N; $\|\vec{R}\| = \sqrt{1600 + 4900} = \sqrt{6500} \approx 80,6$ N; direzione $\text{atan2}(-70, 40) \approx -60,3^\circ$. No, non è in equilibrio: $\vec{R} \neq \vec{0}$.
- E4** $\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{F} = (1,5, 0, 0) \times (0, -2000, 0) = (0, 0, -3000)$ N m: 3000 N m in senso orario (verso entrante nel foglio).
- E5** $L = \vec{F} \cdot \vec{s} = 250 \cdot 0 + (-100) \cdot 3 = -300$ J. Il segno *negativo* indica lavoro *resistente*: la componente della forza lungo lo spostamento è opposta ad esso.
- E6** $V_x = 200 \cos 5^\circ \approx 199,2$ kt (avanzamento); $V_y = 200 \sin 5^\circ \approx 17,4$ kt (rateo di salita). Verifica: $\sqrt{199,2^2 + 17,4^2} \approx 200$.
- E7** $\|\vec{R}\| = \sqrt{900^2 + 1200^2} = \sqrt{2\,250\,000} = 1500$ N (triangolo 3-4-5 scalato $\times 300$); direzione $\text{atan2}(1200, 900) \approx 53,1^\circ$.
- E8** Nel volo orizzontale la portanza $\vec{L}$ è perpendicolare alla velocità $\vec{V}$ ($\gamma = 90^\circ$), quindi $L = \vec{L} \cdot \vec{V} = 0$: lavoro nullo. In salita la traiettoria è inclinata; $\vec{L}$ resta perpendicolare alla velocità (è definita così), dunque *anche in salita* il lavoro della portanza è rigorosamente nullo. Ciò che cambia è il peso: in salita la sua componente lungo la traiettoria diventa non nulla e compie lavoro resistente. (La domanda è volutamente “a trabocchetto”: la portanza, essendo per definizione normale alla velocità, non compie mai lavoro; è il peso a farlo.)

- E9** $\Delta \vec{r} = B - A = (-30, 40) \text{ NM}$; distanza $\|\Delta \vec{r}\| = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ NM}$ (triangolo 3-4-5); rotta $\text{atan2}(40, -30) \approx 126,9^\circ$ (secondo quadrante: verso Nord-Ovest); tempo $t = 50/250 = 0,2 \text{ h} = 12 \text{ min}$.
- E10** $\vec{V}_g = (180, -30) \text{ kt}$; ground speed $\sqrt{180^2 + 30^2} = \sqrt{33300} \approx 182,5 \text{ kt}$; deriva $\text{atan2}(-30, 180) \approx -9,5^\circ$ (a Sud della prua). Il vento da Nord, puramente trasversale, fa *aumentare* lievemente la ground speed e introduce una piccola deriva.
- E11** $a_c = g \tan 30^\circ \approx 5,66 \text{ m/s}^2$ ($\approx 0,58 g$); $R = V^2/a_c = 60^2/5,66 \approx 635,6 \text{ m}$; $n = 1/\cos 30^\circ \approx 1,15$. Bank moderato: fattore di carico contenuto, raggio ampio.
- E12** $\vec{v}_m = \Delta \vec{r}/\Delta t = (1200, 900)/30 = (40, 30) \text{ m/s}$; $\|\vec{v}_m\| = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ m/s} = 180 \text{ km/h}$ (triangolo 3-4-5 $\times 10$); direzione $\text{atan2}(30, 40) \approx 36,9^\circ$.
- E13** $\vec{R} = (500, -800) \text{ N}$, $\|\vec{R}\| = \sqrt{500^2 + 800^2} = \sqrt{890000} \approx 943,4 \text{ N}$, $\alpha \approx -58,0^\circ$; $M_O = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) = (-480) + (-100) = -580 \text{ N m}$ (segno negativo: coppia oraria). Riduzione: $\vec{R}$ in O + coppia 580 N m oraria.
- E14** $M_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{F} = (2, 0) \times (0, -1000)|_z = -2000 \text{ N m}$; $M_Q = \overrightarrow{QP} \times \vec{F} = (-1, 0) \times (0, -1000)|_z = 1000 \text{ N m}$. Variazione $M_Q - M_O = +3000 = \overrightarrow{OQ} \times (-\vec{F})|_z$: coerente con Varignon (la differenza è il momento della risultante nel passaggio di polo).
- E15** $M_{tr} = L d = 6000 \cdot 0,15 = 900 \text{ N m}$. È il momento torcente che nasce trasportando la portanza sull'asse del longherone: va sommato alla flessione nel dimensionamento della sezione.
- E16** $\vec{R} = (400, 200) \text{ N}$, $\|\vec{R}\| = \sqrt{400^2 + 200^2} = \sqrt{200000} \approx 447,2 \text{ N}$, $\alpha \approx 26,6^\circ$; $M_O = (-900) + (-800) + 0 = -1700 \text{ N m}$ (oraria). Riduzione: $\vec{R}$ in O + coppia 1700 N m oraria. ($\vec{F}_3$, passando per O , non dà momento.)

Nota didattica sull'esercizio E8

L'esercizio E8 mostra l'importanza di ragionare sull'*angolo* prima che sui numeri. Molti studenti rispondono d'istinto "in salita la portanza compie lavoro"; il prodotto scalare, con il suo $\cos 90^\circ = 0$, corregge l'intuizione sbagliata. È il tipo di controllo concettuale che il calcolo vettoriale rende automatico.

A Alfabeto greco

Le lettere greche ricorrono ovunque in fisica e in aeronautica: α per l'angolo d'attacco, ρ per la densità, γ per l'angolo di rampa, Λ per la freccia alare, σ e τ per gli sforzi. Riportiamo l'alfabeto completo, minuscole e maiuscole, come riferimento rapido.

Nome	min.	MAIUSC.	Nome	min.	MAIUSC.
Alfa	α	A	Ni	ν	N
Beta	β	B	Xi	ξ	Ξ
Gamma	γ	Γ	Omicron	o	O
Delta	δ	Δ	Pi	π	Π
Epsilon	ϵ, ε	E	Rho	ρ	P
Zeta	ζ	Z	Sigma	σ, ς	Σ
Eta	η	H	Tau	τ	T
Theta	θ, ϑ	Θ	Upsilon	υ	Υ
Iota	ι	I	Phi	ϕ, φ	Φ
Kappa	κ	K	Chi	χ	X
Lambda	λ	Λ	Psi	ψ	Ψ
Mi	μ	M	Omega	ω	Ω

Convenzioni di notazione usate in questa monografia

- Vettore: $\vec{A}$ (freccia). Modulo: $\|\vec{A}\|$ oppure A .
- Versore (modulo unitario): $\hat{a}, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.
- Prodotto scalare: $\vec{A} \cdot \vec{B}$ (risultato: uno scalare).
- Prodotto vettoriale: $\vec{A} \times \vec{B}$ (risultato: un vettore).
- Coefficienti aeronautici in notazione americana: C_L, C_D, AR .
- Separatore decimale: la *virgola*, secondo la convenzione italiana.