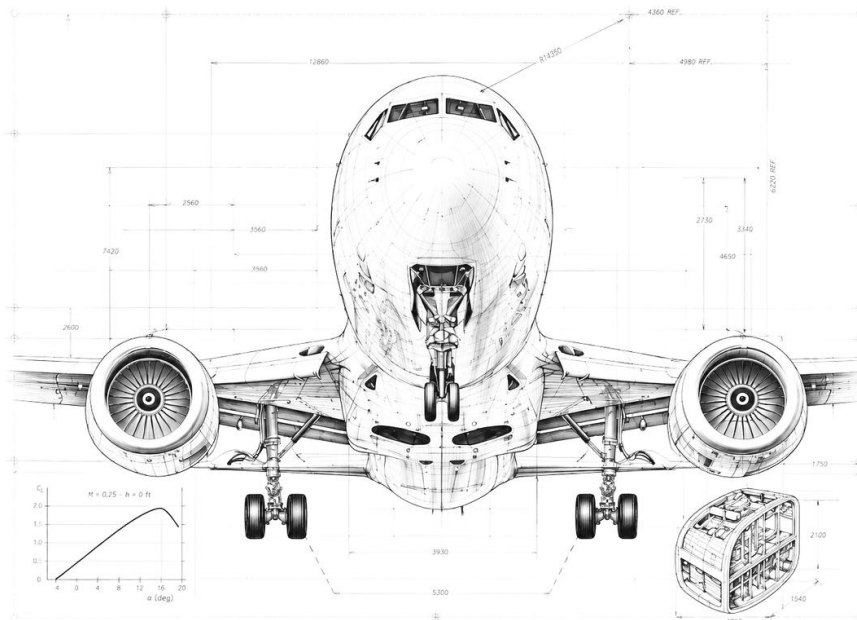


Cinematica dei Fluidi

*Descrizione del moto, derivata materiale
e analisi cinematica nell'intorno di un punto*



Prof. B. Raucci

Monografia didattica — uso interno

1 luglio 2026

Indice

Introduzione	I
1 Descrizione del moto: approccio lagrangiano ed euleriano	3
1.1 Il problema: perché i fluidi sono diversi dai solidi	3
1.2 Le due descrizioni	3
1.2.1 Punto di vista lagrangiano	3
1.2.2 Punto di vista euleriano	3
1.3 Immagini fisiche per fissare le idee	4
1.3.1 Il senso dell'approccio euleriano nell'ipotesi di continuo	4
1.4 Quale descrizione si usa in pratica	5
2 Le linee caratteristiche del campo di moto	7
2.1 Traiettorie	7
2.2 Linee di corrente	7
2.3 Streaklines (linee di fumo)	8
2.3.1 Espressione matematica delle streaklines	9
2.4 * La funzione di corrente	9
2.4.1 La funzione di corrente misura la portata	10
3 La derivata materiale	11
3.1 Velocità e accelerazione lungo la traiettoria (lagrangiane)	11
3.2 Dal lagrangiano all'euleriano: costruzione dell'accelerazione	12
3.3 Accelerazione locale e accelerazione convettiva	12
3.4 Espressione per componenti e sue implicazioni	13
3.5 Perché l'accelerazione "vive" in un intorno, non in un punto	14
3.6 * Accelerazione di Lagrange e vorticità	15
4 Analisi cinematica del moto nell'intorno di un punto	17
4.1 Sviluppo del campo di velocità nell'intorno di un punto	17
4.2 Decomposizione del gradiente di velocità	17
4.3 Caso bidimensionale semplificato	18
4.4 * Caso generale tridimensionale	20
4.5 I moti elementari attraverso esempi	21
4.5.1 Rotazione pura	21
4.5.2 Dilatazione pura	21
4.5.3 Deformazione angolare pura	22
4.6 Divergenza e variazione di volume; incomprimibilità	22
4.7 Dalla cinematica alla dinamica: gradiente di velocità e sforzi viscosi	22
4.8 Sintesi del capitolo	23

Introduzione

La *cinematica* si occupa della descrizione del moto — posizione, velocità e accelerazione — indipendentemente dalle forze che lo generano. Per un corpo rigido questa descrizione è relativamente semplice: poiché le deformazioni sono piccole rispetto alle dimensioni prevalenti del corpo, per sapere dove esso si trovi e come sia orientato è sufficiente seguire nel tempo il suo baricentro e tre angoli (per esempio gli angoli di Eulero). Se poi interessa anche la deformazione, le equazioni dell'elasticità tridimensionale forniscono spostamenti comunque piccoli rispetto alla configurazione indeformata.

Per un fluido le cose cambiano radicalmente. Un fluido si deforma di quantità *grandi* rispetto alle sue dimensioni: un volume inizialmente compatto può allungarsi, frammentarsi in goccioline, ricongiungersi, e così via. Seguire ciascuna particella come se fosse un piccolo corpo rigido è teoricamente possibile ma praticamente inutile, perché le particelle sono troppe: già in un bicchiere d'acqua, se si assume come unità minima la scala al di sotto della quale vale l'ipotesi di continuo, se ne contano quantità dell'ordine di milioni di miliardi di miliardi. Tracciare per ognuna baricentro e orientamento è impensabile.

Serve allora un punto di vista diverso. La strada che si rivelerà vincente consiste nel rinunciare a inseguire le singole particelle e nell'osservare invece il fluido da *punti fissi* nello spazio, registrando come le grandezze variano nel tempo in quei punti. È l'approccio *euleriano*, contrapposto a quello *lagrangiano* che segue le particelle. Come vedremo, questo cambio di prospettiva ha un prezzo: l'accelerazione non è più la semplice derivata temporale della velocità, ma assume la forma della *derivata materiale*, un operatore non lineare e spazialmente accoppiato che sta alla radice della difficoltà di risolvere le equazioni della fluidodinamica.

La cinematica dei fluidi non è soltanto un preliminare formale. È lo strumento con cui si interpretano le *visualizzazioni* di un flusso, sia in laboratorio (fili di fumo, inchiostro in acqua, tracce luminose) sia nelle simulazioni numeriche. Ed è la base su cui si costruirà la dinamica: la decomposizione del gradiente di velocità in dilatazione, rotazione rigida e deformazione angolare permetterà, nei capitoli successivi, di definire in modo naturale gli sforzi viscosi in un fluido.

Perché ne parliamo in un corso per aeronautici

Molti concetti di questo capitolo hanno un riscontro diretto nella pratica aeronautica. Le *streaklines* sono ciò che si osserva quando si visualizza il flusso attorno a un modello in galleria del vento; l'*accelerazione convettiva* spiega perché l'aria acceleri sul dorso di un profilo anche in volo perfettamente stazionario; la parte antisimmetrica del gradiente di velocità è la *vorticità*, la stessa che ritroviamo nei vortici di estremità alare; la parte simmetrica, infine, è ciò che governa lo sforzo tangenziale nello strato limite. Terremo costantemente presenti questi legami.

Convenzioni e notazione. Salvo diverso avviso indicheremo con $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ il campo di velocità euleriano, funzione del punto di osservazione $\mathbf{x}$ e del tempo t , con $\mathbf{r}(t)$ la posizione di una particella fluida (grandezza lagrangiana) e con $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{u}$ la vorticità. La derivata materiale sarà scritta D/Dt , i tensori in carattere sans-serif (per esempio $\mathbf{E}$, $\mathbf{W}$), i vettori in grassetto. Il simbolo d indica il differenziale. Le sezioni contrassegnate con l'asterisco (*) raccolgono approfondimenti che possono essere omessi in una prima lettura senza compromettere la comprensione del seguito.

Descrizione del moto: approccio lagrangiano ed euleriano

1.1 Il problema: perché i fluidi sono diversi dai solidi

Analizzando il moto di un solido si considera abitualmente il moto del suo baricentro e il suo orientamento nel tempo. La descrizione del moto di un fluido è invece più ambigua, perché il sistema è composto da un numero enorme di *particelle fluide* in continuo moto relativo: la sola informazione sul baricentro e sugli angoli di Eulero non basta a caratterizzare la distribuzione del fluido nello spazio.

Si presentano allora due alternative:

1. seguire il moto di *tutte* le particelle fluide nel tempo, mantenendo separata la loro identità;
2. descrivere il moto considerando dei *punti fissi* nello spazio, indipendentemente dalle particelle che li attraversano.

Particella fluida

La particella fluida non va confusa con l'atomo o la molecola: è un'astrazione che indica un insieme di molecole abbastanza grande da rendere valide le ipotesi di continuo (cioè da poter definire in modo stabile quantità statistiche come densità, pressione, temperatura) e allo stesso tempo abbastanza piccolo da poter considerare tali grandezze costanti al suo interno, cioè caratterizzate da un unico valore.

1.2 Le due descrizioni

1.2.1 Punto di vista lagrangiano

Nella descrizione *lagrangiana* si fissa la particella e la si segue nel tempo. Tutte le grandezze relative a quella particella dipendono allora dal solo tempo: la sua posizione è il raggio vettore $\mathbf{r}_A(t)$ che la particella A occupa all'istante t . Al variare del tempo la particella percorre una successione di posizioni che prende il nome di *traiettoria*. Descrivere il moto del sistema significa, in questo quadro, conoscere le funzioni $\mathbf{r}_A(t)$, $\mathbf{r}_B(t)$, ... per *tutte* le particelle.

1.2.2 Punto di vista euleriano

Nella descrizione *euleriana* si fissa un punto P (di posizione $\mathbf{x}$) nello spazio e si registra la variazione nel tempo delle grandezze *in quel punto*, indipendentemente da quale particella lo stia attraversando. La velocità euleriana $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ è definita come la velocità della particella che all'istante t si trova a passare proprio per $\mathbf{x}$: se la particella A passa per P al tempo t (cioè $\mathbf{r}_A(t) = \mathbf{x}$) allora

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_A(t);$$

se un istante dopo per lo stesso punto passa la particella B (cioè $\mathbf{r}_B(t') = \mathbf{x}$), allora $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t') = \mathbf{u}_B(t')$, che con $\mathbf{u}_A$ non ha più nulla a che vedere.

Attenzione alle preposizioni

$\mathbf{u}_A(t)$ è la velocità *della* particella A : la velocità di un oggetto fisico identificato. $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ è la velocità *nel* punto $\mathbf{x}$: non appartiene ad alcun oggetto in particolare, ma è la velocità di quella particella che *in quell'istante* si trova a transitare in $\mathbf{x}$. La coincidenza $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_A(t)$ vale solo nell'istante in cui $\mathbf{r}_A(t) = \mathbf{x}$.

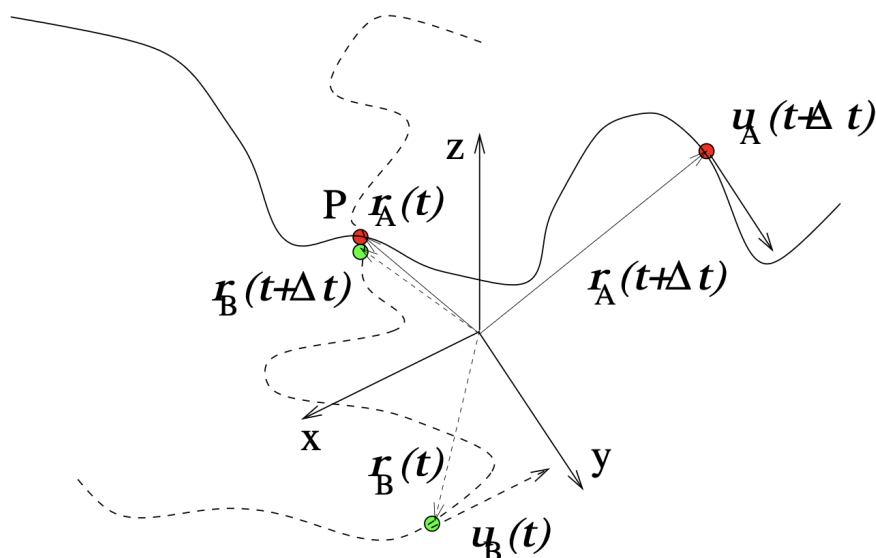


Figura 1.1. Traiettorie lagrangiane di due particelle fluide A e B e descrizione euleriana nel punto fisso P : la particella A transita per P al tempo t , la particella B al tempo $t + \Delta t$.

1.3 Immagini fisiche per fissare le idee

Due immagini aiutano a distinguere i due punti di vista. Seguire con lo sguardo il volo di una rondine nel cielo è un atto *lagrangiano*: si fissa un oggetto a un certo istante e lo si insegue nel tempo. Osservare il mare attraverso un foro praticato nel ghiaccio da un pescatore è invece *euleriano*: si dispone di un punto di osservazione fisso, attraverso cui passano di continuo particelle di fluido diverse.

Due strumenti, due descrizioni

Un *pallone sonda* meteorologico, che si lascia trasportare dal vento e ne segue il moto, restituisce una misura lagrangiana: è “a cavallo” della stessa massa d’aria. Un *anemometro* montato su un palo fisso fornisce invece una misura euleriana: registra la velocità del vento in un punto, qualunque sia la porzione d’aria che vi transita. Lo stesso fenomeno, letto dai due strumenti, produce funzioni diverse: $\mathbf{u}(t)$ per il pallone, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ a $\mathbf{x}$ fissato per l’anemometro.

1.3.1 Il senso dell’approccio euleriano nell’ipotesi di continuo

Verrebbe da obiettare che, mettendo un sensore in $\mathbf{x}$, si rischi di “non misurare niente” finché non passa una particella. Immaginando le particelle come oggetti discreti, il segnale di velocità in $\mathbf{x}$ sarebbe fatto di rari impulsi separati da vuoti, e la scelta euleriana sarebbe rovinosa: passeremmo da una situazione in cui, seguendo gli oggetti, disponiamo sempre di grandezze definite, a una in cui dobbiamo *sperare* che qualcosa transiti per $\mathbf{x}$.

Questo però non è il contesto in cui operiamo. Avendo adottato una volta per tutte l’*ipotesi di continuo*, in $\mathbf{x}$ non ci sono “due particelle”, ma infinite: appena una se ne va, un’altra ne prende il posto (eventualmente con

velocità nulla, ma sempre con un valore *definito* su cui misurare). Il sensore non restituisce quindi un insieme discreto di valori, bensì una *curva continua*: fissato un particolare istante, quel valore è la velocità della specifica particella che allora transitava per il punto.

Osservazione

Ecco allora la sintesi: l'approccio euleriano — osservare punti fissi indipendentemente dalle particelle — *ha senso proprio grazie all'ipotesi di continuo*. L'approccio che si focalizza sugli oggetti e sulle loro traiettorie, e non sulle posizioni fisse, è invece quello lagrangiano.

1.4 Quale descrizione si usa in pratica

Essendo di fatto impossibile identificare e inseguire le singole particelle fluide di un flusso reale, la descrizione lagrangiana non viene quasi mai usata operativamente, pur avendo il pregio teorico di fornire espressioni di immediata interpretazione per molte grandezze. La fluidodinamica adotta perciò, salvo eccezioni, la descrizione *euleriana*. Il resto del capitolo, e i successivi, mostrano come tradurre in linguaggio euleriano le grandezze cinematiche (a partire dall'accelerazione) e quali conseguenze ciò comporti.

Nota

Il passaggio dal lagrangiano all'euleriano ha un costo formale importante: nella descrizione lagrangiana ogni grandezza dipende solo dal tempo, e le sue leggi di evoluzione sono *equazioni differenziali ordinarie*; nella descrizione euleriana le grandezze dipendono da spazio e tempo, e le leggi diventano *equazioni alle derivate parziali*. Vedremo nel Capitolo 3 da dove nasce questa complicazione.

Le linee caratteristiche del campo di moto

Nel capitolo precedente abbiamo parlato di traiettoria senza darne una definizione rigorosa. È il momento di farlo, perché in un flusso si possono definire diverse “linee”, in generale *non coincidenti*, ciascuna con un significato proprio. Distinguerle è essenziale per interpretare correttamente le visualizzazioni sperimentali e numeriche.

2.1 Traiettorie

Traiettoria

La *traiettoria* di una particella fluida è il luogo geometrico dei punti che essa occupa in istanti di tempo successivi.

È un concetto intrinsecamente *lagrangiano*, legato all’identificazione e al tracciamento di una singola particella. Poiché la particella si muove con la propria velocità, in generale funzione dello spazio e del tempo, la traiettoria è la soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t). \quad (2.1)$$

L’integrazione della (2.1) fornisce $\mathbf{r}(t)$ a partire dal valore iniziale $\mathbf{r}(0)$: se la particella n -esima si trova in $\mathbf{r}(0)$ al tempo $t = 0$, la curva $\mathbf{r}(t)$ ne descrive la traiettoria.

Osservazione

La (2.1) è un problema di Cauchy: assegnata la posizione di partenza, il campo di velocità determina univocamente la storia della particella. Questo è il modo naturale di “leggere” il campo dal punto di vista lagrangiano.

2.2 Linee di corrente

Linea di corrente

Una *linea di corrente* è una linea che in ogni suo punto è tangente al vettore locale di velocità, *a un fissato istante di tempo*.

È un concetto *euleriano*: fissato l’istante, si considera la distribuzione spaziale di velocità e si tracciano le curve tangenti punto per punto al vettore $\mathbf{u}$. La condizione di tangenza $d\mathbf{r} \parallel \mathbf{u}$ si scrive

$$\frac{d\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{u(\mathbf{r}, t)} = \frac{dy}{v(\mathbf{r}, t)} = \frac{dz}{w(\mathbf{r}, t)}, \quad (2.2)$$

dove dx, dy, dz sono le componenti di $d\mathbf{r}$ e u, v, w quelle di $\mathbf{u}$.

Se il campo è *non stazionario*, le linee di corrente cambiano da istante a istante: nei punti in cui due configurazioni si intersecano, le tangenti sono diverse, proprio perché la velocità dipende dal tempo (Fig. 2.1). Le traiettorie, in generale, *intersecano* le linee di corrente, perché in uno stesso punto, in istanti diversi, transitano particelle diverse.

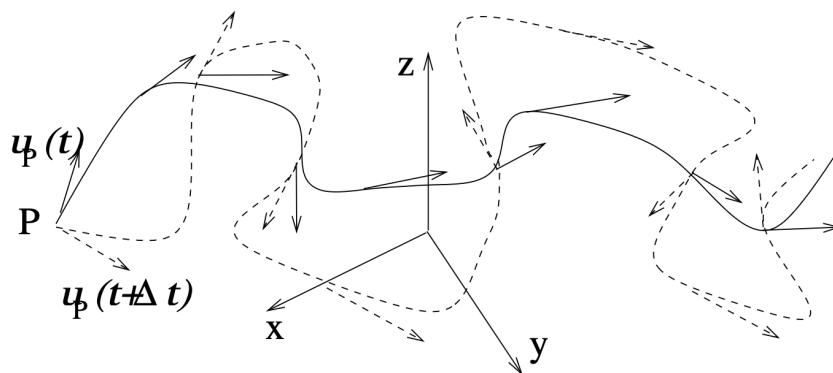


Figura 2.1. Linee di corrente in due diversi istanti di tempo per un campo non stazionario: nel punto di intersezione le tangenti differiscono perché $\mathbf{u}$ dipende dal tempo.

2.3 Streaklines (linee di fumo)

Streakline

La *streakline* è il luogo dei punti occupato a un dato istante da *tutte* le particelle fluide che, in un istante precedente, sono transitate per una posizione prefissata.

È un concetto essenzialmente *operativo*, legato agli esperimenti: si rilascia con continuità un tracciante (fumo, inchiostro) da una posizione fissa e si segue la traccia che l'emissione lascia nello spazio. Nella Fig. 2.2 dalla sorgente S vengono rilasciate particelle per tempi successivi $t_6 > t_5 > \dots > t_0$: il loro luogo geometrico, a un dato istante, forma la streakline.

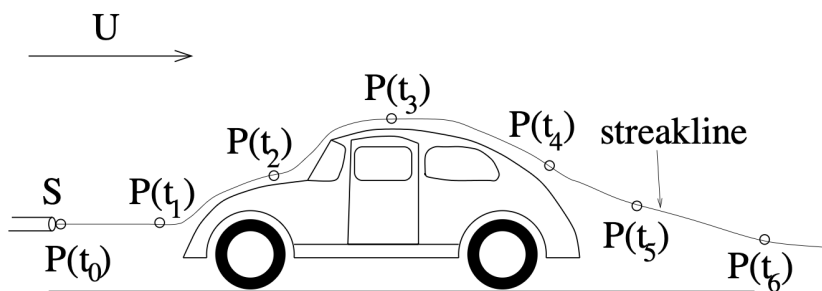


Figura 2.2. Costruzione di una streakline: le particelle emesse con continuità dalla sorgente S agli istanti $t_0, \dots, t_6$ formano, a un dato istante, un'unica linea.

Il caso stazionario: le tre linee coincidono

A meno di casi speciali le streaklines non hanno un particolare significato fisico. C'è però un'eccezione fondamentale: se il flusso è *stazionario* (velocità in ogni punto indipendente dal tempo), allora *traiettorie*, *linee di corrente* e *streaklines* coincidono. In questo caso una singola visualizzazione con tracciante restituisce, in modo economico e immediato, sia la direzione del vettore velocità in ogni punto sia la traiettoria delle particelle.

Fili di fumo in galleria del vento

È il caso tipico delle prove aerodinamiche. Attorno a un modello (un profilo alare, un'ala, la carrozzeria di un veicolo) si immettono filetti di fumo o, in vasca idrodinamica, di colorante. Se le condizioni di prova sono stazionarie, le tracce visibili coincidono con le linee di corrente e con le traiettorie: si “vede” così il campo di moto. Quando invece il flusso diventa non stazionario — per esempio a valle di un corpo tozzo, dove si forma una scia di vortici alternati — le streaklines assumono forme intricate che non vanno confuse né con le traiettorie né con le linee di corrente istantanee.



Figura 2.3. Esempio di streaklines attorno a un modello in galleria (o in vasca idrodinamica): la traccia continua del tracciante rende visibile la struttura del campo di moto.

2.3.1 Espressione matematica delle streaklines

La definizione delle streaklines è più macchinosa delle precedenti: si tratta del luogo geometrico di tutte le posizioni $\mathbf{r}_i(t)$ delle particelle i che, per un qualche tempo $t_i \leq t$, sono transitate per una posizione fissata $\mathbf{r}_0$. Occorre dunque, caso per caso e in funzione del campo di velocità, individuare tale luogo e descriverlo in forma parametrica $\mathbf{r}(l)$ (con l parametro) per ogni tempo t .

2.4 * La funzione di corrente

Avendo definito le linee di corrente come le curve ovunque tangenti a $\mathbf{u}$, è naturale introdurre la *funzione di corrente* ψ come quella funzione le cui isolinee (in due dimensioni) sono proprio le linee di corrente. Limitiamoci al caso bidimensionale. Dalla (2.2) si ha

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad \Rightarrow \quad u \, dy - v \, dx = 0, \quad (2.3)$$

cioè lungo una linea di corrente la quantità $u \, dy - v \, dx$ non varia. Ponendo allora

$$d\psi = u \, dy - v \, dx, \quad (2.4)$$

si ottiene che ψ non varia lungo una linea di corrente: ψ è proprio la funzione cercata. In particolare, confrontando la (2.4) con il differenziale totale $d\psi = \partial_x \psi \, dx + \partial_y \psi \, dy$, si identifica

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.5)$$

2.4.1 La funzione di corrente misura la portata

La ψ è particolarmente utile per calcolare la portata in volume tra due punti. Con riferimento alla Fig. 2.4, detto ds l'elemento di lunghezza del segmento che unisce A e B e $\mathbf{n}$ la sua normale, la portata elementare vale

$$dQ = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = u dy - v dx = d\psi,$$

e integrando tra A e B

$$Q = \int_A^B dQ = \int_A^B (u dy - v dx) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A. \quad (2.6)$$

La differenza $\psi_B - \psi_A$ fornisce dunque la portata in volume (per unità di lunghezza nella direzione ortogonale al piano) che passa tra i due punti.

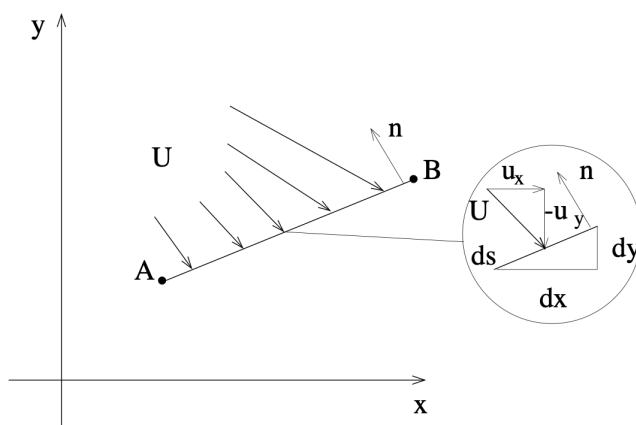


Figura 2.4. Determinazione della portata in volume tra due punti A e B : la portata che attraversa una qualunque linea che li congiunge vale $\psi_B - \psi_A$.

Osservazione

Dalla (2.6) discendono due conseguenze notevoli. Primo: la portata è *indipendente dal percorso* scelto per andare da A a B , quindi $d\psi$ è un differenziale esatto. Secondo: se A e B giacciono sulla *stessa* linea di corrente allora $Q = 0$. Ciò è coerente col fatto che una linea di corrente è ovunque tangente a $\mathbf{u}$ e si comporta quindi come una *superficie impermeabile*, attraverso cui non passa portata.

La derivata materiale

È questo il capitolo in cui il cambio di prospettiva dal lagrangiano all'euleriano rivela le sue conseguenze più profonde. Vedremo che l'accelerazione, letta in un punto fisso, non è la semplice derivata temporale della velocità, ma contiene un secondo contributo legato ai *gradienti spaziali* del campo. Questo termine è all'origine sia della non linearità delle equazioni del moto, sia del loro accoppiamento spaziale.

3.1 Velocità e accelerazione lungo la traiettoria (lagrangiane)

Consideriamo la traiettoria di una particella (Fig. 3.1): al tempo t occupa la posizione $\mathbf{r}(t)$, al tempo $t + \Delta t$ la posizione $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. Velocità e accelerazione della particella si ottengono dalle definizioni consuete

$$\mathbf{u}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}, \quad \mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

Poiché il numeratore della velocità è una differenza di vettori e Δt uno scalare positivo, $\mathbf{u}$ risulta *tangente* alla traiettoria. L'accelerazione, ottenuta come limite della differenza di due velocità tangenti, possiede in generale una componente *centripeta* (dovuta alla curvatura della traiettoria) e una componente *tangenziale* (dovuta alla variazione del modulo di velocità lungo il percorso).

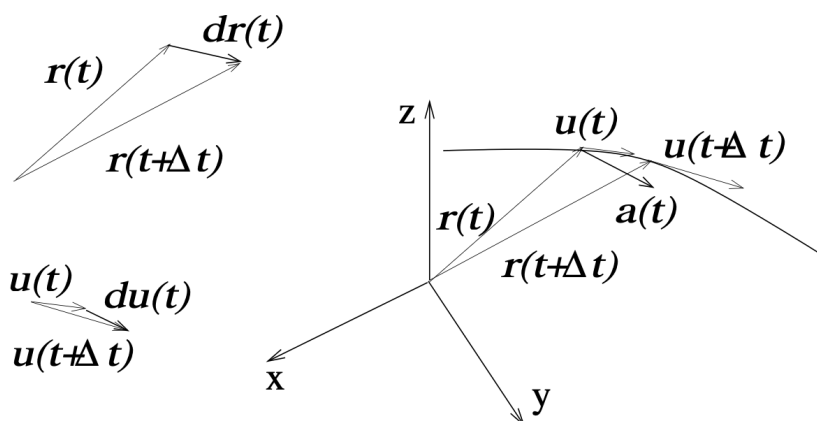


Figura 3.1. Posizione, velocità e accelerazione lungo la traiettoria di una particella fluida. La velocità è tangente; l'accelerazione ha componente centripeta e tangenziale.

Attenzione

Le (3.1) sono definizioni *lagrangiane*: seguono le variazioni di una particella lungo la sua traiettoria. Poiché in fluidodinamica ci serve la descrizione euleriana, dobbiamo capire come tradurre queste grandezze in funzione del punto di osservazione $\mathbf{x}$ e del tempo t .

3.2 Dal lagrangiano all'euleriano: costruzione dell'accelerazione

Per la posizione $\mathbf{r}(t)$ non esiste una controparte euleriana: nell'ottica euleriana non ci sono particelle da seguire, ma “stazioni di osservazione” fisse. La *velocità*, invece, si definisce in modo analogo nei due quadri, pur avendo significato fisico diverso: lagrangiana $\mathbf{u}(t)$ (misurata a cavallo della stessa particella), euleriana $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ (misurata in un punto fisso, quindi funzione anche della stazione $\mathbf{x}$).

La differenza diventa cruciale per l'accelerazione. Definiamola dal punto di vista euleriano come la variazione di velocità subita dalla particella che al tempo t occupa proprio il punto $\mathbf{x}$. Poiché la posizione di tale particella dipende dal tempo, sviluppando la derivata totale si ha

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt}. \quad (3.2)$$

Il passaggio delicato è riconoscere che cosa sia $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$. Verrebbe da dire che, essendo $\mathbf{x}$ un punto *fisso*, questa derivata sia nulla. In realtà $\mathbf{x}$ non è solo il punto di osservazione: è anche la posizione che la particella occupa *proprio in quell'istante*. È anzi solo grazie a questa coincidenza che la velocità nel punto risulta definita. Dunque $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ è la velocità della particella che si trova in $\mathbf{x}$ al tempo t , cioè la velocità euleriana $\mathbf{u}$ stessa. Sostituendo nella (3.2) si ottiene

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \quad (3.3)$$

dove

$$\frac{D\bullet}{Dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \bullet \quad (3.4)$$

è detto *operatore di derivata materiale*.

Derivata materiale

La derivata materiale $\frac{D\bullet}{Dt}$ misura la variazione nel tempo di una grandezza *posseduta dalla particella*, valutata nel momento in cui la particella transita per il punto $\mathbf{x}$, muovendosi lungo la propria traiettoria. È come osservare la grandezza spostandosi *insieme* alla particella, “congelandone” il valore nell'istante di passaggio per $\mathbf{x}$. Se al posto del “pallino” $\bullet$ si mette la velocità $\mathbf{u}$ si ottiene l'accelerazione; se si mette la temperatura ϑ si ottiene $D\vartheta/Dt = \partial_t \vartheta + \mathbf{u} \cdot \nabla \vartheta$, e così via.

Le due $\mathbf{u}$ non hanno la stessa natura

Nell'espressione $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ compaiono formalmente due velocità identiche, ma di ruolo diverso. Quella “esterna” ($\mathbf{u} \cdot$) nasce dall'operazione di derivazione lungo la traiettoria (è la $d\mathbf{x}/dt$ che abbiamo sostituito) ed è la stessa per qualunque grandezza trasportata; quella “interna” (dentro $\nabla \mathbf{u}$) è la grandezza di cui si calcola il gradiente. Non a caso, ripetendo il ragionamento per la temperatura, la prima $\mathbf{u}$ ricompare identica ($\mathbf{u} \cdot \nabla \vartheta$), mentre dentro il gradiente c'è ora ϑ .

3.3 Accelerazione locale e accelerazione convettiva

La (3.3) distingue due contributi:

- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ — *accelerazione locale*: la variazione esplicita nel tempo, presente solo nei flussi *non stazionari*;
- $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ — *accelerazione convettiva*: legata al *trasporto* della particella attraverso un campo di velocità spazialmente disomogeneo. È diversa da zero ogni volta che $\nabla \mathbf{u} \neq 0$, *anche in regime stazionario*.

Stazionario non vuol dire “senza accelerazione”

Mentre nel moto di un punto materiale eravamo abituati ad associare l'accelerazione alla sola non stazionarietà, qui scopriamo che può esistere accelerazione anche quando $\partial_t \mathbf{u} = 0$. Il motivo è fisicamente trasparente: una particella che percorra a velocità costante in modulo una traiettoria curva possiede comunque l'accelerazione centripeta v^2/r prodotta dalla curvatura. Tale accelerazione deve comparire anche nella descrizione euleriana, ed è proprio il termine convettivo a contenerla.

Aria sul dorso di un profilo in volo stazionario

Un velivolo in crociera rettilinea uniforme genera, nel riferimento solidale al velivolo, un campo *stazionario*: in ogni punto la velocità non cambia nel tempo, quindi $\partial_t \mathbf{u} = 0$. Eppure una particella d'aria che scorra lungo il dorso del profilo *accelera* nel tratto in cui i filetti si infittiscono (dove la velocità locale supera V_∞) e *decelera* verso il bordo d'uscita. Tutta questa accelerazione è *convettiva*: nasce dal gradiente spaziale $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, non da una variazione temporale. È lo stesso meccanismo che, tramite l'equazione di Bernoulli, si tradurrà nella depressione responsabile della portanza. Un analogo perfetto è il condotto convergente di un venturimetro, dove il fluido accelera pur essendo il regime stazionario.

3.4 Espressione per componenti e sue implicazioni

In assi cartesiani, indicando con a_x, a_y, a_z le componenti di $\mathbf{a}$ e con u_x, u_y, u_z quelle di $\mathbf{u}$, la (3.3) si scrive

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad (3.5)$$

$$a_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad (3.6)$$

$$a_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (3.7)$$

Da questa forma esplicita si leggono tre “cattive notizie”, che sono in realtà la sostanza della difficoltà fluidodinamica.

1. **Non linearità.** Il termine convettivo è *quadratico* nella velocità (prodotti $u_i \partial u_j / \partial x_k$), con termini misti. Le equazioni del moto, che non sono altro che $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ scritta per un fluido, ereditano questa non linearità. La conseguenza pratica è severa: non è più lecito costruire soluzioni generali come *combinazione lineare* di soluzioni note, tecnica che funziona solo per equazioni lineari.
2. **Accoppiamento spaziale.** Nella componente a_x compaiono anche u_y e u_z : non è possibile risolvere la dinamica lungo una direzione ignorando le altre. Anche volendo conoscere la sola u_x , siamo costretti a risolvere l'intero sistema.
3. **Impossibilità di soluzione analitica generale.** La combinazione di non linearità e accoppiamento rende impossibile, salvo problemi molto semplificati o condizioni particolari, la soluzione analitica delle equazioni del moto, e rimanda l'analisi dei casi complessi al calcolo numerico (CFD) o all'esperimento.

Un contrasto illuminante: il moto del proiettile

Nel moto parabolico di un grave, in assenza di resistenza dell'aria, la dinamica verticale e quella orizzontale sono *disaccoppiate*: per sapere *quando* l'oggetto tocca terra basta risolvere il solo moto verticale, perché la gittata non influisce sul tempo di caduta. Nel moto di un fluido, al contrario, le direzioni sono *sempre* accoppiate, per la struttura stessa del termine convettivo, indipendentemente dalla presenza di forzanti

esterne. È una differenza qualitativa, non di dettaglio.

3.5 Perché l'accelerazione “vive” in un intorno, non in un punto

La comparsa del gradiente $\nabla \mathbf{u}$ nella (3.3) ha una conseguenza epistemologica importante: se una grandezza dipende da un gradiente, non la si può valutare osservando il campo *in un solo punto*. Occorre conoscere anche come la grandezza varia *nell'intorno* di quel punto.

L'esperimento dello schermo con il foro

Immaginiamo uno schermo con un piccolo foro che lasci vedere un solo punto. Sbirciando, osserviamo che a intervalli regolari passa un pallino con velocità orizzontale costante V , sempre la stessa. Domanda: quel pallino *ha o non ha* accelerazione? Nelle condizioni date *non possiamo rispondere*, perché due realtà fisicamente diversissime produrrebbero lo stesso segnale:

- *un nastro trasportatore* con pallini equispaziati che scorre a velocità costante: traiettoria rettilinea, *nessuna* accelerazione;
- *un piatto rotante* (un giradischi) con pallini equispaziati e velocità angolare Ω : ogni pallino ha velocità tangenziale V ma percorre una circonferenza, quindi possiede accelerazione centripeta V^2/r .

I due casi sono indistinguibili *finché guardiamo un solo punto*. Solo allargando l'osservazione a una piccola *superficie* — basta apprezzare la curvatura della traiettoria, al limite un angolo infinitesimo — distinguiamo la retta dall'arco di circonferenza. Morale: nella descrizione euleriana è cruciale conoscere i *gradienti*, e i gradienti non si apprezzano da un punto isolato.

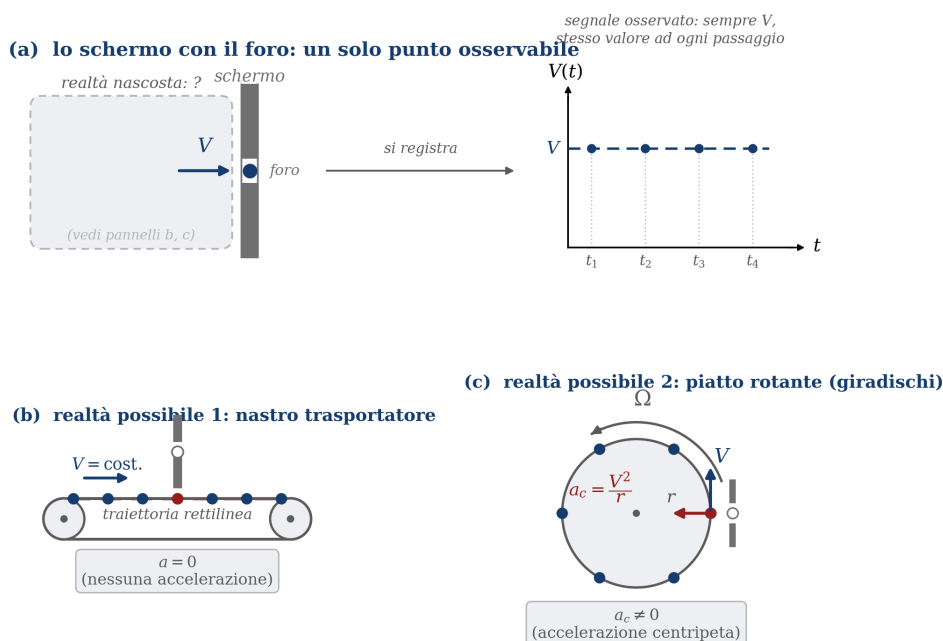


Figura 3.2. Esperimento ideale dello schermo con il foro: il nastro traslante (nessuna accelerazione) e il piatto rotante (accelerazione centripeta) danno lo stesso segnale puntuale. Solo l'informazione sull'intorno permette di distinguerli.

Questa osservazione motiva il capitolo successivo: se ciò che conta è il gradiente di velocità, dobbiamo imparare a “leggerlo”, separandolo nei contributi che agiscono in modo diverso sul fluido.

3.6 * Accelerazione di Lagrange e vorticità

Chiudiamo con un'identità vettoriale che tornerà utile nel seguito (in particolare per l'equazione di Bernoulli e per la dinamica della vorticità). Ripartiamo dalla derivata materiale della velocità

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad (3.8)$$

e introduciamo la *vorticità* $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$. Sussiste allora l'identità

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla(|\mathbf{u}|^2) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}, \quad (3.9)$$

da cui

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(|\mathbf{u}|^2) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}. \quad (3.10)$$

Osservazione

L'identità (3.9) si dimostra come semplice esercizio scrivendo $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{u}$ per componenti in un sistema di assi cartesiani. La forma (3.10) è preziosa perché isola il ruolo della vorticità: il termine $\frac{1}{2} \nabla(|\mathbf{u}|^2)$ è un gradiente puro (dunque conservativo), mentre $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$ è il contributo genuinamente rotazionale. Nei flussi *irrotazionali* ($\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$) quest'ultimo si annulla, ed è ciò che rende così maneggevole la teoria dei flussi potenziali.

Analisi cinematica del moto nell'intorno di un punto

Concludiamo lo studio della cinematica analizzando lo stato di moto nell'intorno di un punto. Abbiamo visto che l'accelerazione euleriana dipende in modo essenziale dal gradiente di velocità $r\mathbf{u}$: impariamo ora a leggerlo. Scopriremo che $r\mathbf{u}$ si decompone in tre contributi indipendenti — *dilatazione*, *rotazione rigida* e *deformazione angolare* — e che questa decomposizione permette di capire che cosa faccia un assegnato campo di velocità al fluido *senza risolvere alcuna equazione*. È inoltre il ponte verso la dinamica: la parte di deformazione è ciò che, in un fluido newtoniano, genera gli sforzi viscosi.

4.1 Sviluppo del campo di velocità nell'intorno di un punto

Sia $\mathbf{u}_0$ la velocità in un punto O e supponiamo che in un suo intorno la velocità esista e sia derivabile, così da poterne calcolare il gradiente. Per uno spostamento $\mathbf{x}$ sufficientemente piccolo, lo sviluppo in serie di Taylor troncato al primo ordine fornisce la velocità nel punto $P = O + \mathbf{x}$:

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + r\mathbf{u}|_O \cdot \mathbf{x} + O(|\mathbf{x}|^2). \quad (4.1)$$

Nel limite $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ il termine quadratico si annulla più rapidamente della correzione lineare, e la (4.1) diventa esatta.

Osservazione

Essendo $\mathbf{u}$ un vettore, $r\mathbf{u}$ è un *tensore*: la velocità ha tre componenti e ciascuna può variare lungo tre direzioni, per un totale di nove grandezze. Il prodotto $r\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}$ è il prodotto (“righe per colonne”) tra un tensore e un vettore, e restituisce un vettore. È la generalizzazione tridimensionale e vettoriale dello sviluppo scalare $u(x) = u_0 + u'(0)x + O(x^2)$.

Il tensore gradiente di velocità, in componenti cartesiane, è la matrice 3×3

$$r\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

4.2 Decomposizione del gradiente di velocità

Separiamo $r\mathbf{u}$ in contributi che agiscono in modo fisicamente distinto sul fluido.

Parte isotropa (traccia). La traccia del tensore è la somma degli elementi diagonali, ossia la *divergenza* del campo di velocità:

$$\text{tr}(r\mathbf{u}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = r \cdot \mathbf{u}. \quad (4.3)$$

Il tensore isotropo associato è $\frac{1}{3}(r \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}$, con $\mathbf{I}$ il tensore identità. Sottraendo $\frac{1}{3}(r \cdot \mathbf{u})$ da *ciascun* elemento diagonale si ottiene un tensore a traccia nulla (deviatorico); il fattore $1/3$ è necessario perché, sottraendo l'intera divergenza da tutti e tre gli elementi, la traccia risulterebbe $-2 r \cdot \mathbf{u}$ anziché nulla.

Parti simmetrica e antisimmetrica. Ogni tensore si scrive come somma di una parte simmetrica e di una antisimmetrica. Applicando questa separazione si giunge alla decomposizione fondamentale

$$\mathbf{r}\mathbf{u} = \underbrace{\frac{1}{3}(r \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}}_{\text{isotropa}} + \underbrace{\mathbf{E}'}_{\substack{\text{simmetrica} \\ \text{a traccia nulla}}} + \underbrace{\mathbf{W}}_{\text{antisimmetrica}} \quad (4.4)$$

dove, indicando con $\mathbf{r}\mathbf{u}^T$ il tensore trasposto,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}\mathbf{u} + \mathbf{r}\mathbf{u}^T), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}\mathbf{u} - \mathbf{r}\mathbf{u}^T), \quad (4.5)$$

e $\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \frac{1}{3}(r \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}$ è la parte deviatorica di $\mathbf{E}$. Il tensore simmetrico $\mathbf{E}$ è detto *tensore velocità di deformazione*; il tensore antisimmetrico $\mathbf{W}$ (spesso indicato con Ω) è il *tensore velocità di rotazione*.

Il significato dei tre pezzi, in anticipo

La parte isotropa produce una *dilatazione o compressione* (variazione di volume); la parte antisimmetrica $\mathbf{W}$ produce una *rotazione rigida*; la parte simmetrica a traccia nulla $\mathbf{E}'$ produce una *deformazione angolare* (di taglio). Nel moto di un corpo rigido eravamo abituati a separare la velocità in traslazione più rotazione rigida (il primo e l'ultimo termine); in un fluido compaiono in più le componenti di dilatazione e di deformazione angolare. È proprio quest'ultima, come vedremo, a definire gli sforzi viscosi.

Inserendo la (4.4) nello sviluppo (4.1) si ottiene la forma compatta

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \frac{1}{3}(r \cdot \mathbf{u})\mathbf{x} + \mathbf{E}' \cdot \mathbf{x} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{x}, \quad (4.6)$$

dove si è usato $\mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

4.3 Caso bidimensionale semplificato

Consideriamo, per fissare le idee, una regione fluida inizialmente rettangolare che dopo un tempo Δt viene deformata dal campo di velocità (Fig. 4.1). La deformazione complessiva si decompone in tre moti elementari (Fig. 4.2): una *traslazione rigida*, una *dilatazione pura* e la coppia *rotazione rigida + deformazione angolare*.

Dilatazione lineare. Detta l_x la lunghezza in x dell'elemento indeformato e l'_x quella dopo la deformazione, si ha $l'_x = l_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} l_x \Delta t$, da cui la *velocità di dilatazione relativa* in x

$$\dot{\epsilon}_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{l_x} \frac{\Delta l_x}{\Delta t} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (4.7)$$

e analogamente $\dot{\epsilon}_y = \partial u_y / \partial y$.

Rotazione e deformazione angolare. I lati l_x e l_y ruotano rispettivamente degli angoli $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$; con uno sviluppo al primo ordine

$$\Delta\alpha \simeq \frac{\partial u_y}{\partial x} \Delta t, \quad \Delta\beta \simeq \frac{\partial u_x}{\partial y} \Delta t. \quad (4.8)$$

Poiché l'angolo retto iniziale diventa $\Delta\theta = \pi/2 + \Delta\alpha + \Delta\beta$, la *velocità di deformazione angolare* è

$$\dot{\theta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (4.9)$$

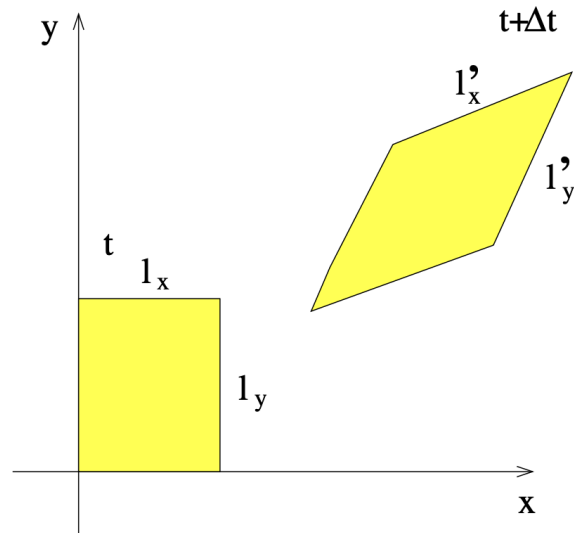


Figura 4.1. Deformazione di un elemento fluido, inizialmente rettangolare, in un tempo Δt .

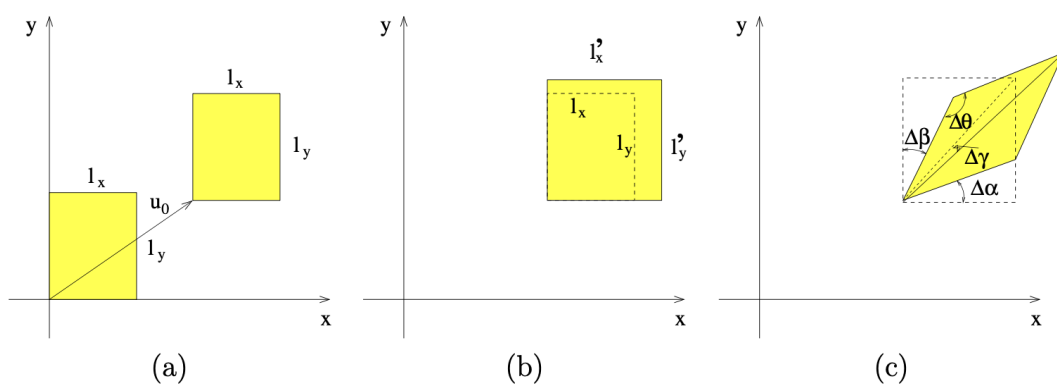


Figura 4.2. Decomposizione della deformazione di un elemento fluido nei moti elementari: (a) traslazione rigida, (b) dilatazione pura, (c) rotazione rigida e deformazione angolare.

mentre la *velocità di rotazione rigida* risulta

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (4.10)$$

Riscrivendo lo sviluppo di Taylor delle componenti u_x e u_y in modo da far comparire questi termini, si giunge alla forma vettoriale

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{x0} \\ u_{y0} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_x & \dot{\theta}/2 \\ \dot{\theta}/2 & \dot{\epsilon}_y \end{pmatrix}}_E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} & 0 \end{pmatrix}}_W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

La (4.11) mostra esplicitamente che lo stato di moto nell'intorno di un punto è dato da una traslazione rigida, da una rotazione rigida (tensore *antisimmetrico* W) e da una dilatazione con deformazione angolare (tensore *simmetrico* E).

Osservazione

Si noti che l'elemento fuori diagonale di E vale $\dot{\theta}/2$: la componente E_{xy} è pari alla *metà* della velocità di deformazione angolare. Ed è proprio questo elemento — il taglio — che, in un fluido newtoniano, sarà proporzionale allo sforzo viscoso.

4.4 * Caso generale tridimensionale

Le stesse conclusioni valgono in tre dimensioni. Posto il baricentro della particella al tempo t nell'origine O e detto $\mathbf{x}$ lo spostamento in Δt (Fig. 4.3), lo sviluppo al primo ordine è la (4.1). Decomponendo $r\mathbf{u}$ come nella (4.5) e trascurando i termini di ordine superiore,

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + E \cdot \mathbf{x} + W \cdot \mathbf{x}. \quad (4.12)$$

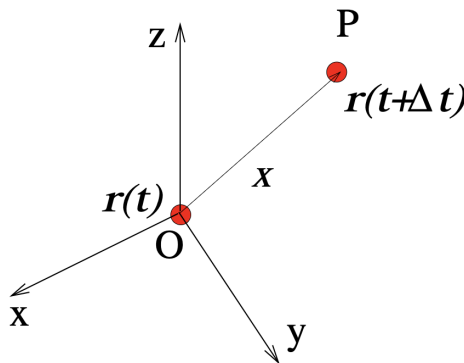


Figura 4.3. Spostamento $\mathbf{x}$ di una particella fluida in un tempo Δt dall'origine O al punto P .

Il termine antisimmetrico è una rotazione rigida. Essendo W antisimmetrico e a traccia nulla, in tre dimensioni esso possiede solo tre componenti indipendenti: è cioè *isomorfo a un vettore*. Introdotta la vorticità $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{u}$, si verifica l'identità

$$W \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}, \quad (4.13)$$

che è esattamente la velocità di un moto di *rotazione rigida* con velocità angolare $|\boldsymbol{\omega}|/2$. La vorticità misura dunque quanto il campo stia ruotando “come un corpo rigido”.

Il termine simmetrico è una deformazione pura. Poiché E è simmetrico, i suoi autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono reali; nella terna principale (autovettori di E) il tensore è diagonale e $E \cdot \mathbf{x} = \lambda_1 x' \hat{\mathbf{x}}' + \lambda_2 y' \hat{\mathbf{y}}' + \lambda_3 z' \hat{\mathbf{z}}'$. Un punto che si trovi inizialmente su uno degli assi principali vi rimane indefinitamente: è la firma di una *deformazione pura* (senza rotazione). In conclusione

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + E \cdot \mathbf{x} \quad (4.14)$$

con $\mathbf{u}_O$ traslazione pura, $\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$ rotazione rigida ed $E \cdot \mathbf{x}$ deformazione pura.

4.5 I moti elementari attraverso esempi

Assegnando semplici campi di moto si vede in dettaglio la natura dei tre termini (Fig. 4.4).

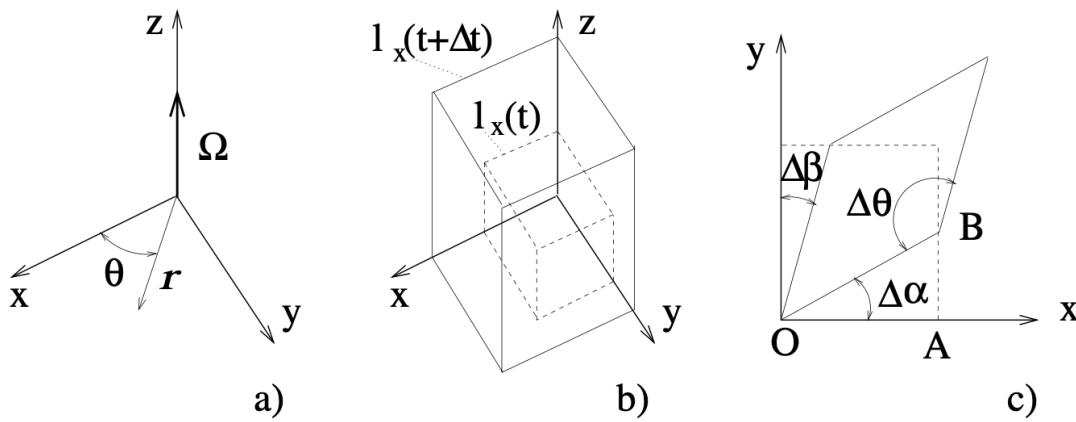


Figura 4.4. Esempi di moto nell'intorno di un punto: (a) rotazione pura, (b) dilatazione pura, (c) deformazione angolare pura.

4.5.1 Rotazione pura

Per una rotazione con velocità angolare Ω costante attorno all'asse z si ha $\theta = \Omega t$ e quindi

$$u_x = -\Omega y, \quad u_y = \Omega x, \quad u_z = 0. \quad (4.15)$$

Calcolando i tensori si trova $E \equiv 0$, mentre W è non nullo. La vorticità vale

$$\omega_x = \omega_y \equiv 0, \quad \omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\Omega : \quad (4.16)$$

in una rotazione rigida la vorticità ha *stessa direzione e verso* del vettore rotazione e *modulo doppio*.

4.5.2 Dilatazione pura

Un moto senza rotazione né deformazione angolare ha componenti del tipo

$$u_x = a_x x, \quad u_y = a_y y, \quad u_z = a_z z. \quad (4.17)$$

Qui $W \equiv 0$ (dunque $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{0}$) e E è diagonale: $E_{ij} = 0$ per $i \neq j$ ed $E_{ii} = a_i$. È il punto fisso dell'origine (dove tutte le velocità si annullano) a rimanere immobile, mentre gli estremi si allontanano tanto più quanto più sono lontani (estensione se $a_i > 0$, compressione se $a_i < 0$).

4.5.3 Deformazione angolare pura

Se un elemento inizialmente rettangolare si trasforma in un rombo, con sviluppi al primo ordine

$$\Delta\alpha \simeq \frac{\partial u_y}{\partial x} \Delta t, \quad \Delta\beta \simeq \frac{\partial u_x}{\partial y} \Delta t,$$

la velocità di deformazione angolare è

$$\dot{\theta} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2E_{xy} = 2E_{yx}, \quad (4.18)$$

mentre tutti gli altri elementi di E e l'intero W sono nulli. Gli elementi *fuori diagonale* di E sono dunque legati alla velocità di deformazione angolare: E_{ij} è pari alla metà della velocità di deformazione angolare misurata con i lati inizialmente paralleli agli assi i e j .

4.6 Divergenza e variazione di volume; incomprimibilità

Torniamo alla dilatazione pura e calcoliamo la variazione di volume di un parallelepipedo di lati $l_i(t)$, con $V(t) = l_x l_y l_z$. Poiché $l_i(t + \Delta t) = l_i(t) (1 + a_i \Delta t)$,

$$V(t + \Delta t) = \prod_i l_i (1 + a_i \Delta t) = V(t) + (a_x + a_y + a_z) V(t) \Delta t + O(\Delta t^2), \quad (4.19)$$

avendo trascurato i prodotti di due o più fattori Δt . Dividendo per $V \Delta t$ e passando al limite si ottiene il risultato cardine

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = a_x + a_y + a_z = \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \quad (4.20)$$

La *divergenza del campo di velocità coincide con la velocità di dilatazione relativa del volume*. Ciò conferma l'interpretazione della parte isotropa del gradiente come compressione o dilatazione.

Il vincolo di incomprimibilità

Se il flusso è *incomprimibile*, il volume di un qualunque elemento fluido si conserva nel tempo, dunque per la (4.20)

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (4.21)$$

Questa è l'equazione di conservazione della massa in forma differenziale per i flussi incomprimibili, che ritroveremo per altra via nel capitolo sulla dinamica. Da $a_x + a_y + a_z = 0$ segue anche che le a_i non possono avere tutte lo stesso segno: se due lati si dilatano, il terzo deve accorciarsi.

4.7 Dalla cinematica alla dinamica: gradiente di velocità e sforzi viscosi

L'analisi svolta non è fine a sé stessa: la parte simmetrica del gradiente di velocità è esattamente ciò che, in un fluido newtoniano, genera gli sforzi viscosi. Ricordiamo dalla definizione stessa di fluido che, sollecitato tangenzialmente, esso risponde con una *velocità* di deformazione angolare $\dot{\gamma}$ che cresce indefinitamente nel tempo. Nel classico moto di scorrimento (flusso di Couette) tra due lastre, con la lastra superiore che trasla a velocità u e uno spessore di fluido h , la velocità di deformazione angolare vale

$$\dot{\gamma} = \frac{u}{h} = \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (4.22)$$

avendo posto y nella direzione dello spessore e u_x la componente di velocità. Questo $\partial u_x / \partial y$ è, in questo problema, l'*unico* termine non nullo della parte simmetrica (deviatorica) del tensore gradiente di velocità.

Perché conta per l'aeronautica

In un fluido newtoniano lo sforzo tangenziale è proporzionale a questa velocità di deformazione angolare, $\tau = \mu \dot{\gamma} = \mu \partial u_x / \partial y$. Ne segue un criterio operativo: *se la parte simmetrica (di taglio) del gradiente di velocità è nulla, non ci sono sforzi viscosi*. È la ragione per cui gli sforzi viscosi si concentrano nello *strato limite*, dove $\partial u / \partial y$ è intenso a causa dell'aderenza alla parete, e sono trascurabili nella corrente esterna, dove il profilo di velocità è quasi uniforme. La parte antisimmetrica, la *vorticità*, non produce invece sforzi: è la stessa vorticità concentrata nei vortici di estremità alare, responsabili della resistenza indotta ma non del taglio viscoso locale.

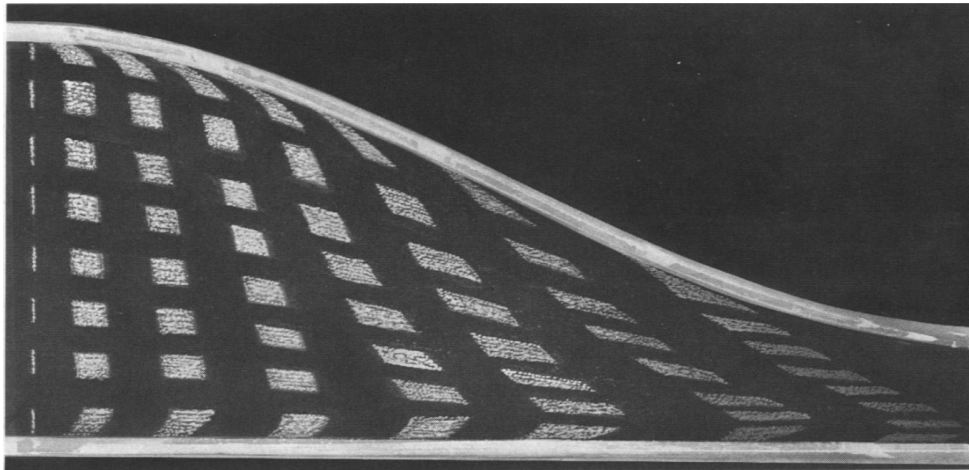


Figura 4.5. Deformazione di elementi di fluido (marcati con un tracciante) durante il moto in un canale convergente: la deformazione è più marcata vicino alle pareti, dove i gradienti di velocità dello strato limite sono intensi.

4.8 Sintesi del capitolo

Il gradiente di velocità gioca un ruolo fondamentale nella caratterizzazione cinematica di un fluido e si separa in tre contributi:

- la *parte isotropa* $\frac{1}{3}(r \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}$, che dà compressioni o dilatazioni; la sua ampiezza è la divergenza, pari alla velocità di dilatazione relativa del volume (nulla nei flussi incomprimibili);
- la *parte antisimmetrica* $\mathbf{W}$, che dà la rotazione rigida ed è isomorfa alla vorticità $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{u}$ tramite $\mathbf{W} \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$;
- la *parte simmetrica a traccia nulla* $\mathbf{E}'$, che dà la deformazione angolare (di taglio) ed è responsabile, in un fluido newtoniano, degli sforzi viscosi.

Assegnato un campo di velocità, basta calcolare queste parti per sapere *che cosa* accada a una particella fluida — se subisca compressioni, rotazioni o deformazioni angolari — *prima ancora* di risolvere le equazioni del moto. Con questi strumenti cinematici disponiamo di tutti gli ingredienti per affrontare la dinamica dei fluidi, oggetto dei capitoli successivi.