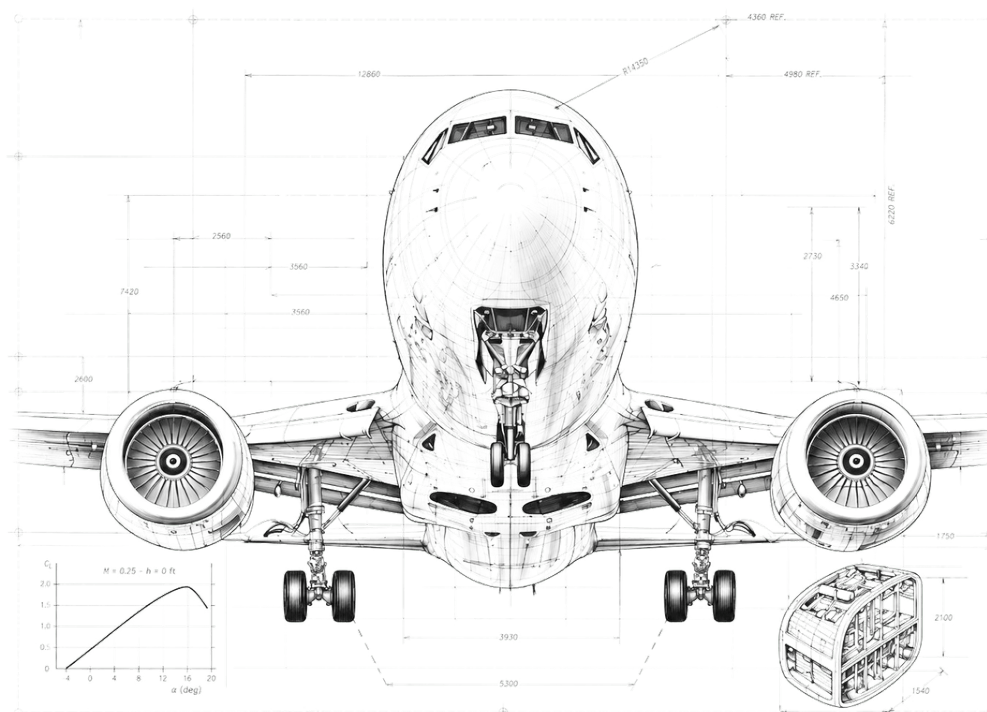


Le equazioni dell'aria in movimento

Aerodinamica di base: continuità, Bernoulli, flusso isentropico,
energia, velocità del suono, gallerie del vento, tubo di Pitot,
ugelli supersonici e strato limite



Monografia per il corso di Costruzioni Aeronautiche

Serie Raucci — Costruzioni Aeronautiche

Prof. Ing. Biagio Raucci

ITIS "E. Majorana" — Somma Vesuviana (NA)

Sommario

Questa monografia costruisce, passo dopo passo, l'*aerodinamica di base*: le tre leggi di conservazione (massa, quantità di moto, energia) tradotte nel linguaggio del gas in movimento, e le loro applicazioni più importanti per chi progetta e fa volare le macchine. Dalla semplice equazione di continuità arriveremo all'equazione di Bernoulli e alle relazioni del flusso isentropico; scopriremo perché la velocità del suono dipende solo dalla temperatura e perché il numero di Mach governa tutta l'aerodinamica delle alte velocità; impareremo come funziona una galleria del vento subsonica e una supersonica, come si misura la velocità di un aeroplano con il tubo di Pitot (nei tre regimi: incomprimibile, subsonico comprimibile, supersonico) e perché gli ugelli dei razzi hanno quella forma a campana. Nell'ultima parte entra in scena l'attrito: lo strato limite di Prandtl, i regimi laminare e turbolento, la transizione, la separazione del flusso e il grande compromesso progettuale tra resistenza d'attrito e resistenza di pressione. Il taglio è volutamente disteso e operativo: **41 esercizi svolti passo passo** e **65 problemi proposti con risultato**, tutti in unità SI, mettono alla prova ogni concetto appena introdotto.

Indice

1	La mappa dell'aerodinamica di base	5
2	L'equazione di continuità	5
2.1	Il tubo di flusso	5
2.2	Flusso incomprimibile e flusso comprimibile	8
3	L'equazione della quantità di moto: Eulero e Bernoulli	8
3.1	Dalla seconda legge di Newton all'equazione di Eulero	8
3.2	L'equazione di Bernoulli	9
3.3	Caso di studio: la forza aerodinamica su una barra semicircolare	11
4	Un po' di termodinamica	14
4.1	Il primo principio	14
4.2	Entalpia e processi	14
4.3	I calori specifici	15
5	Il flusso isentropico	16
5.1	Le relazioni isentropiche	16
6	L'equazione dell'energia	18
6.1	Derivazione	18
7	Il quadro delle equazioni	22
8	La velocità del suono e il numero di Mach	22
8.1	Che cos'è un'onda sonora	22
8.2	Il numero di Mach e i regimi di volo	23
9	Le gallerie del vento subsoniche	25
9.1	Il principio: un Venturi con il modello dentro	25
9.2	Come si misura $p_1 - p_2$: il manometro a U	26
10	La misura della velocità di volo	28
10.1	Pressione statica e pressione totale	28
10.2	Regime incomprimibile ($M < 0,3$)	28
10.3	Regime subsonico comprimibile ($0,3 < M < 1$)	30
10.4	Regime supersonico: la formula di Rayleigh	33
10.5	Riepilogo: tre regimi, tre formule	35
10.6	Due approfondimenti utili	35
11	Gallerie supersoniche e motori a razzo	37
11.1	La relazione area-velocità	37
11.2	L'ugello convergente-divergente	37
11.3	Il diffusore supersonico e la seconda gola	40
11.4	Cenno alle gallerie ipersoniche	41
12	Quando serve davvero la comprimibilità?	42
13	Il flusso viscoso: lo strato limite	42
13.1	Il paradosso e la condizione di aderenza	43
13.2	Il numero di Reynolds	43
13.3	Laminare o turbolento	44
14	Lo strato limite laminare	45
15	Lo strato limite turbolento	46
16	Comprimibilità e attrito	47
17	La transizione	49

18	La separazione del flusso	51
18.1	Il meccanismo: gradiente di pressione avverso	51
18.2	Perché il turbolento resiste meglio	52
19	La resistenza di profilo	53
20	Note storiche: le persone dietro le equazioni	53
21	Sintesi finale	54
22	Esercizi proposti	55
	Formulario essenziale	58
A	Soluzioni degli esercizi proposti	60

Bussola

Come leggere questa monografia. Ogni sezione si apre con una piccola mappa (dove siamo, cosa impariamo, dove andiamo) e si chiude con una sintesi nei riquadri *Osservazione*. La teoria essenziale sta nei riquadri *Definizione*; i riquadri *Attenzione* segnalano gli errori più frequenti; i riquadri *Nota* dichiarano le ipotesi e i *limiti di validità* dei modelli — in aerodinamica, usare una formula fuori dal suo campo di validità è l'errore più pericoloso di tutti. Gli *Esercizi svolti* sono il cuore operativo: svolgeteli con carta, penna e calcolatrice *prima* di leggere la soluzione; i sessantacinque problemi proposti dell'ultima sezione sono tutti risolti, passo passo, nell'appendice A. Tutti i valori numerici sono stati verificati con script Python indipendenti.

Simboli usati in questa monografia

Simbolo	Grandezza	Unità SI
p	pressione statica	Pa
p_0	pressione totale (di ristagno)	Pa
q	pressione dinamica ($= \frac{1}{2}\rho V^2$)	Pa
ρ	densità	kg/m ³
T, T_0	temperatura statica, totale	K
V	velocità del flusso	m/s
v	volume specifico ($= 1/\rho$)	m ³ /kg
A	area della sezione	m ²
$\dot{m}$	portata massica	kg/s
e, h	energia interna, entalpia (per unità di massa)	J/kg
c_v, c_p	calori specifici (aria: 720 e 1008)	J/(kg K)
γ	rapporto dei calori specifici (c_p/c_v ; aria: 1,4)	—
R	costante specifica del gas (aria: 287)	J/(kg K)
a	velocità del suono	m/s
M	numero di Mach ($= V/a$)	—
μ	viscosità dinamica	kg/(m s)
Re	numero di Reynolds ($= \rho Vx/\mu$)	—
δ	spessore dello strato limite	m
τ_w	sforzo di taglio a parete	Pa
c_{f_x}, C_f	coefficiente d'attrito locale, totale	—
D_f, D_p	resistenza d'attrito, di pressione	N

Dati. Valori di riferimento (aria standard al livello del mare, ISA):

$$p_s = 101\,325 \text{ Pa} \quad \rho_s = 1,225 \text{ kg/m}^3 \quad T_s = 288,15 \text{ K} \quad a_s = 340,3 \text{ m/s}$$

$$\mu_s = 1,7894 \times 10^{-5} \text{ kg/(m s)} \quad 1 \text{ atm} = 1,013\,25 \times 10^5 \text{ Pa} \quad R_{\text{aria}} = 287 \text{ J/(kg K)} \quad \gamma_{\text{aria}} = 1,4$$

I La mappa dell'aerodinamica di base

Bussola

Dove siamo. All'ingresso dell'aerodinamica vera e propria: conosciamo già il vocabolario (p, ρ, T, V) e l'equazione di stato.

Cosa impariamo. Il piano di lavoro dell'intera monografia: tre principi fisici, due famiglie di flussi (senza e con attrito), una collana di applicazioni.

Dove andremo. Alla prima delle tre leggi: la conservazione della massa.

Considera un aeroplano in volo a 3 km di quota a 112 m/s. In ogni punto dell'ala la pressione e la velocità dell'aria assumono valori ben precisi, dettati dalle leggi della natura. Compito dell'aerodinamica è *decifrare* queste leggi e trasformarle in metodi di calcolo: dalle proprietà locali del flusso si risale a grandezze praticissime come portanza e resistenza. Lo stesso vale per un motore a razzo sulla rampa di lancio: fissati la geometria dell'ugello e le condizioni in camera di combustione, velocità e pressione allo scarico sono determinate — e da esse la spinta.

Tutta l'aerodinamica di base poggia su **tre principi fisici**:

1. la massa si conserva;
2. vale la seconda legge di Newton, $F = ma$;
3. l'energia si conserva.

Applicati a un gas in movimento, questi principi generano tre equazioni — *continuità, quantità di moto ed energia* — da cui discende, in un modo o nell'altro, praticamente ogni altra formula di questa monografia. Un vecchio professore diceva: "l'aerodinamica è facile, perché usa solo tre equazioni". È una battuta con un fondo profondo di verità.

C'è però una distinzione preliminare da fare. Ogni flusso reale ha *attrito interno* (viscosità): i filetti fluidi strisciano gli uni sugli altri e sulle pareti. In molti problemi pratici questo attrito è così piccolo da poter essere trascurato: si parla allora di **flusso inviscido** (senza attrito), un'idealizzazione che semplifica enormemente i conti. In altri problemi, invece, l'attrito è il protagonista assoluto: è il regno del **flusso viscoso**. La conservazione della massa vale in entrambi i casi; le altre equazioni le svilupperemo prima nell'ipotesi inviscida, per poi dedicare l'ultima parte della monografia proprio agli effetti dell'attrito.

Raccordo

Tre principi (massa, $F = ma$, energia), due famiglie di flussi (inviscido, viscoso), una collana di applicazioni. Partiamo dal principio più semplice e più universale: la massa non si crea e non si distrugge.

2 L'equazione di continuità

Bussola

Dove siamo. Al primo dei tre principi: la conservazione della massa.

Cosa impariamo. Il concetto di tubo di flusso, la portata massica $\dot{m} = \rho AV$ e l'equazione di continuità $\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$.

Dove andremo. Alla distinzione fondamentale tra flusso incomprimibile e comprimibile.

2.1 Il tubo di flusso

Disegniamo, in un flusso stazionario, una circonferenza immaginaria perpendicolare alla direzione della corrente e consideriamo tutte le linee di corrente che passano per essa: queste linee formano un **tubo di flusso** (*stream tube*). Per definizione di linea di corrente, *nessuna particella può attraversare la parete laterale del tubo*:

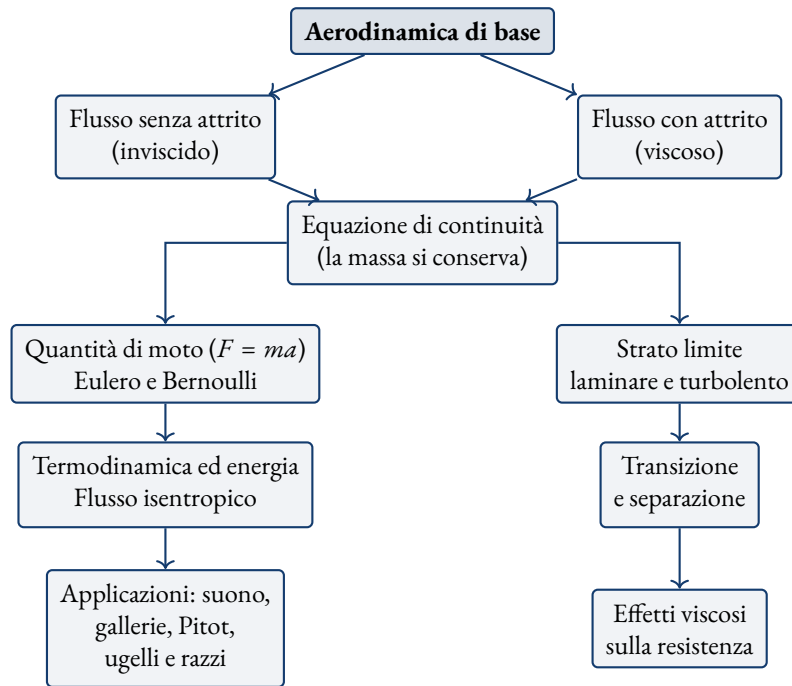


Figura 1. La mappa della monografia: dai tre principi di conservazione alle applicazioni. Il ramo di sinistra (inviscido) occupa le sezioni 2–12; il ramo di destra (viscoso) le sezioni 13–19.

il fluido che entra dalla sezione 1 può solo uscire dalla sezione 2, come l'acqua in un tubo di gomma. “Quello che entra da una parte deve uscire dall'altra.”

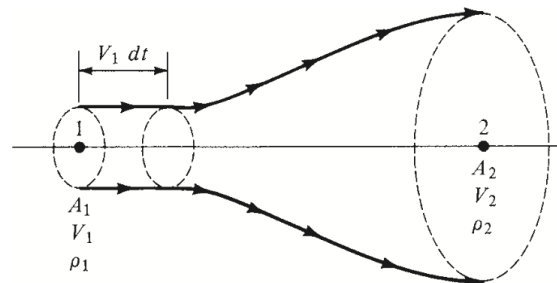


Figura 2. Tubo di flusso: le linee di corrente fanno da parete impermeabile. In regime stazionario la portata massica che attraversa A_1 è la stessa che attraversa A_2 .

Quanta massa attraversa la sezione 1 nell'unità di tempo? In un intervallo dt le particelle che si trovavano sul piano di A_1 percorrono la distanza $V_1 dt$, spazzando un volume $A_1 V_1 dt$. La massa contenuta in quel volume è $dm = \rho_1 A_1 V_1 dt$, quindi la massa *per unità di tempo* — la **portata massica** — vale

$$\dot{m} \equiv \frac{dm}{dt} = \rho A V \quad [\text{kg/s}].$$

Equazione di continuità (flusso stazionario)

Poiché la massa non si crea né si distrugge, la portata attraverso ogni sezione del tubo di flusso è la stessa: $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$, ossia

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$

È un'equazione algebrica semplicissima che lega densità, area e velocità di una sezione alle stesse grandezze

di qualunque altra sezione. È il “cavallo da tiro” del calcolo dei flussi nei condotti: gallerie del vento, prese d'aria, ugelli di razzi.

Ipotesi e limiti di validità

Nell'equazione di continuità V e ρ sono *valori medi* sulla sezione: in un condotto reale la velocità varia da punto a punto della sezione (è nulla a parete, come vedremo nella parte sul flusso viscoso), ma per il calcolo delle portate il valore medio è più che adeguato. L'ipotesi di stazionarietà (nulla cambia nel tempo) è essenziale: durante un transitorio la massa può temporaneamente accumularsi nel tubo.

Il tubo di flusso non deve essere per forza delimitato da pareti solide: anche lo spazio tra due linee di corrente adiacenti sopra un'ala è un tubo di flusso, e l'equazione di continuità vale identica. Questa osservazione, apparentemente banale, è la chiave per capire perché l'aria *accelera* sul dorso di un profilo alare: le linee di corrente si stringono, l'area del tubo diminuisce e la velocità aumenta.

Esercizio 1 — Condotto convergente: area di uscita

Un condotto convergente ha area d'ingresso $A_1 = 5 \text{ m}^2$. L'aria entra a $V_1 = 10 \text{ m/s}$ ed esce a $V_2 = 30 \text{ m/s}$. Quanto vale l'area di uscita?

Dati. $A_1 = 5 \text{ m}^2$; $V_1 = 10 \text{ m/s}$; $V_2 = 30 \text{ m/s}$.

— Fase A — Scelta del modello

Le velocità in gioco sono molto inferiori a 100 m/s : come dimostreremo nella sezione 12, a queste velocità la densità dell'aria è praticamente costante e il flusso può essere trattato come *incomprimibile* ($\rho_1 = \rho_2$). L'equazione di continuità si riduce allora a $A_1 V_1 = A_2 V_2$.

— Fase B — Calcolo

$$A_2 = A_1 \frac{V_1}{V_2} = 5 \times \frac{10}{30} = 1,67 \text{ m}^2.$$

Risultato. $A_2 = 1,67 \text{ m}^2$. Per triplicare la velocità, l'area deve ridursi a un terzo: in regime incomprimibile area e velocità sono inversamente proporzionali.

Esercizio 2 — Condotto ad alta velocità: densità in uscita

In un condotto convergente l'aria entra con $A_1 = 0,30 \text{ m}^2$, $V_1 = 215 \text{ m/s}$ e $\rho_1 = 1,00 \text{ kg/m}^3$, ed esce da $A_2 = 0,26 \text{ m}^2$ con $V_2 = 325 \text{ m/s}$. Calcolare la densità all'uscita.

Dati. $A_1 = 0,30 \text{ m}^2$; $V_1 = 215 \text{ m/s}$; $\rho_1 = 1,00 \text{ kg/m}^3$; $A_2 = 0,26 \text{ m}^2$; $V_2 = 325 \text{ m/s}$.

— Fase A — Scelta del modello

Qui $V_1 = 215 \text{ m/s}$: siamo ben oltre la soglia dei 100 m/s . Il flusso va trattato come *comprimibile*: la densità può variare da sezione a sezione, e dobbiamo usare la continuità nella forma generale $\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$.

— Fase B — Calcolo

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{A_1 V_1}{A_2 V_2} = 1,00 \times \frac{0,30 \times 215}{0,26 \times 325} = 0,763 \text{ kg/m}^3.$$

Risultato. $\rho_2 = 0,763 \text{ kg/m}^3$: la densità è *diminuita* di circa il 24 %. Se il flusso fosse stato davvero incomprimibile, il calcolo avrebbe restituito $\rho_2 \approx \rho_1$; il forte scostamento conferma che a queste velocità

l'ipotesi incompressibile sarebbe stata sbagliata.

Unità consistenti

In tutti gli esercizi lavoriamo in unità SI *consistenti*: aree in m^2 , velocità in m/s , densità in kg/m^3 , pressioni in Pa. Così i risultati escono automaticamente nelle unità giuste, senza fattori di conversione nascosti. Se un dato arriva in unità diverse (km/h , atm , $\text{cm}^2 \dots$) va convertito *prima* di entrare nelle formule.

2.2 Flusso incompressibile e flusso comprimibile

Tutta la materia è comprimibile: se strizziamo un elemento di materia con una pressione sufficiente, il suo volume diminuisce (e la densità aumenta, perché la massa resta la stessa). Ma *quanto* si comprime dipende dal materiale: per un solido o un liquido la variazione è trascurabile; per un gas può essere enorme.

Le due famiglie di flussi

- **Flusso comprimibile:** la densità varia da punto a punto ($\rho_1 \neq \rho_2$). È il caso dei velivoli subsonici veloci, di tutti i velivoli supersonici e dei motori a razzo.
- **Flusso incompressibile:** densità costante ovunque ($\rho = \text{cost}$). È un'idealizzazione — a rigore non esiste in natura — ma è un'ottima approssimazione per i liquidi e per l'aria a bassa velocità, indicativamente $V < 100 \text{ m/s}$ (dimostreremo questo criterio, in termini di numero di Mach, nella sezione 12).

Per il flusso incompressibile la continuità si semplifica in $A_1 V_1 = A_2 V_2$.

L'aerodinamica dei primi quarant'anni del volo — dal Flyer dei Wright alla fine degli anni Trenta — fu tutta aerodinamica incompressibile: quelle erano le velocità dei velivoli dell'epoca. Esiste per questo un'enorme letteratura sul flusso incompressibile, ancora oggi preziosa.

La forma $A_1 V_1 = A_2 V_2$ spiega, tra l'altro, un oggetto di uso quotidiano: la lancia dell'idrante (o il beccuccio della canna da giardino) è *convergente* perché, riducendo l'area, aumenta la velocità del getto. Lo stesso principio guida il disegno degli ugelli delle gallerie del vento subsoniche, che incontreremo nella sezione 9.

Raccordo

La conservazione della massa ci dà una relazione tra ρ , A e V — ma non dice nulla sulla *pressione*, che pure sappiamo essere protagonista. Per legare pressione e velocità serve il secondo principio: $F = ma$.

3 L'equazione della quantità di moto: Eulero e Bernoulli

Bussola

Dove siamo. Abbiamo la continuità; manca il legame tra pressione e velocità.

Cosa impariamo. L'equazione di Eulero $dp = -\rho V dV$ e, per il flusso incompressibile, l'equazione di Bernoulli.

Dove andremo. A un caso di studio completo (la forza aerodinamica su una barra semicircolare) e poi alla termodinamica, indispensabile per le alte velocità.

3.1 Dalla seconda legge di Newton all'equazione di Eulero

Le differenze di pressione da un punto all'altro del flusso generano forze che agiscono sugli elementi fluidi e li fanno accelerare: deve quindi esistere una relazione tra pressione e velocità. Per trovarla applichiamo $F = ma$

a un elemento fluido infinitesimo che si muove lungo una linea di corrente, con l'asse x orientato come la corrente nel punto considerato.

Su questo elemento agiscono, in generale, tre tipi di forze: la *pressione*, normale alle sei facce; l'*attrito*, tangente alle facce; la *gravità*, sul volume. Trascuriamo attrito (flusso inviscido) e gravità (contributo piccolo per i gas): resta la sola pressione.

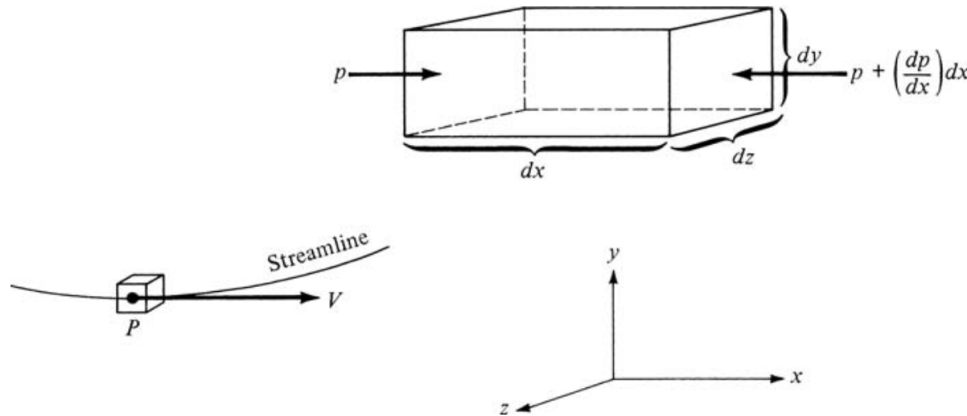


Figura 3. Bilancio delle forze di pressione sull'elemento fluido.

Sia $dx dy dz$ l'elemento. Sulla faccia sinistra (area $dy dz$) agisce la forza $p (dy dz)$ verso destra; sulla faccia destra, dove la pressione è cambiata di $(dp/dx) dx$, agisce $[p + (dp/dx) dx] (dy dz)$ verso sinistra. La forza netta lungo x è

$$F = -\frac{dp}{dx} (dx dy dz).$$

La massa dell'elemento è $m = \rho (dx dy dz)$ e la sua accelerazione, usando la regola della catena con $V = dx/dt$,

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = V \frac{dV}{dx}.$$

Sostituendo F , m e a in $F = ma$ e semplificando il volume $dx dy dz$:

Equazione di Eulero (quantità di moto)

$$dp = -\rho V dV$$

Vale per flusso *stazionario* e *inviscido*, comprimibile o incomprimibile. È la seconda legge di Newton scritta per un fluido: dice che dove la velocità aumenta ($dV > 0$) la pressione diminuisce ($dp < 0$), e viceversa. Pressione e velocità si muovono sempre in direzioni opposte lungo una linea di corrente.

3.2 L'equazione di Bernoulli

L'equazione di Eulero è differenziale: descrive cosa accade in un intorno infinitesimo di un punto. Per collegare due punti *lontani* 1 e 2 sulla stessa linea di corrente dobbiamo integrarla, e qui la strada si biforca: se il flusso è comprimibile, ρ varia e serve altra informazione (la forniremo con la termodinamica); se è *incomprimibile*, ρ esce dall'integrale e il risultato è immediato:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp + \rho \int_{V_1}^{V_2} V dV = 0 \quad \Rightarrow \quad p_2 - p_1 + \rho \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = 0.$$

Equazione di Bernoulli

Per flusso *inviscido, incompressibile e stazionario*, lungo una linea di corrente:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \quad \text{ossia} \quad p + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{cost.}$$

Se la corrente a monte è uniforme (volo in atmosfera, camera di prova di una buona galleria), la costante è la stessa per *tutte* le linee di corrente e l'equazione vale tra due punti qualsiasi del campo di moto.

Bernoulli è un bilancio di energia meccanica

Vale la pena rileggere l'equazione appena ricavata con occhi diversi. Moltiplichiamo idealmente ogni termine per un volumetto unitario di fluido: p è allora il *lavoro per unità di volume* che le forze di pressione possono compiere, e $\frac{1}{2}\rho V^2$ è l'*energia cinetica per unità di volume*. L'equazione di Bernoulli dice che la loro somma non cambia lungo la linea di corrente: è il teorema dell'energia cinetica applicato a un fluido senza attrito, dove l'unica forza che compie lavoro è la pressione. Da questa lettura discendono, gratis, i suoi limiti di validità: se c'è attrito (strato limite, scie) parte del lavoro si dissipa e la “costante” cala lungo il percorso — è esattamente la perdita di pressione totale che misureremo nella sezione 13; se il flusso è comprimibile, il lavoro di compressione scambia energia con lo stato interno del gas e il bilancio va rifatto con l'entalpia (sezione 6). Un'equazione, tre sezioni della monografia già annunciate.

L'errore più classico dell'aerodinamica

Bernoulli vale **solo per flusso incompressibile** (in pratica: aria a $M < 0,3$, cioè $V \lesssim 100$ m/s in condizioni standard). Applicarla a un flusso ad alta velocità dà risultati sbagliati anche del 10 % e oltre, come toccheremo con mano nell'esercizio 12. Per il flusso comprimibile useremo le relazioni isentropiche e l'equazione dell'energia.

Esercizio 3 — Velocità in un punto di un profilo alare

Un profilo alare investe una corrente d'aria che, molto a monte, ha $p_\infty = 101\,325$ Pa, $V_\infty = 45$ m/s e $\rho = 1,225$ kg/m³. In un punto A del dorso la pressione misurata è $p_A = 100\,200$ Pa. Quanto vale la velocità in A ?

Dati. $p_\infty = 101\,325$ Pa; $V_\infty = 45$ m/s; $\rho = 1,225$ kg/m³; $p_A = 100\,200$ Pa.

— Fase A — Scelta del modello

$V_\infty = 45$ m/s $\ll 100$ m/s: flusso incompressibile, Bernoulli applicabile. La corrente a monte è uniforme, quindi possiamo scrivere Bernoulli tra l'infinito a monte e il punto A anche se non sono sulla stessa linea di corrente.

— Fase B — Impostazione e calcolo

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 \Rightarrow V_A = \sqrt{\frac{2(p_\infty - p_A)}{\rho} + V_\infty^2}$$

$$V_A = \sqrt{\frac{2 \times 1125}{1,225} + 45^2} = 62,1 \text{ m/s.}$$

Risultato. $V_A \approx 62$ m/s. In A la pressione è più bassa che a monte (di appena 1125 Pa, circa l'1 %) e la velocità è più alta: è la firma di Bernoulli, ed è esattamente il meccanismo con cui il dorso di un'ala “succhia” verso l'alto.

Esercizio 4 — Pressione all'uscita del condotto convergente

Riprendiamo il condotto dell'esercizio 1 ($V_1 = 10$ m/s, $V_2 = 30$ m/s). All'ingresso $p_1 = 1,2 \times 10^5$ Pa e $T_1 = 330$ K. Calcolare la pressione all'uscita.

Dati. $p_1 = 1,2 \times 10^5$ Pa; $T_1 = 330$ K; $V_1 = 10$ m/s; $V_2 = 30$ m/s; $R = 287$ J/(kg K).

— Fase A — Densità dall'equazione di stato

$$\rho = \frac{p_1}{R T_1} = \frac{1,2 \times 10^5}{287 \times 330} = 1,267 \text{ kg/m}^3.$$

Nota il ruolo diverso delle equazioni: l'equazione di stato lega p, ρ, T *nello stesso punto*; continuità e Bernoulli legano punti *diversi* del flusso. Tenere distinta questa differenza è metà del lavoro nell'impostare i problemi.

— Fase B — Bernoulli tra ingresso e uscita

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (V_1^2 - V_2^2) = 1,2 \times 10^5 + \frac{1}{2} \times 1,267 \times (100 - 900) = 1,195 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Risultato. $p_2 = 1,195 \times 10^5$ Pa: accelerando da 10 a 30 m/s la pressione cala di appena lo 0,4 %. È una caratteristica dei flussi a bassa velocità: bastano differenze di pressione piccolissime per produrre variazioni di velocità considerevoli.

3.3 Caso di studio: la forza aerodinamica su una barra semicircolare

Prima di proseguire, fermiamoci a *costruire* una forza aerodinamica da zero, integrando una distribuzione di pressione su una superficie. È il cuore concettuale di tutta l'aerodinamica applicata: la forza risultante su *qualsiasi* corpo immerso in un fluido — da una barretta a un Boeing 747 — nasce soltanto dall'integrale della pressione e dello sforzo di taglio su tutta la superficie.

Consideriamo una lunga barra a sezione semicircolare di raggio $R = 0,15$ m, con la faccia curva rivolta contro una corrente di velocità $V_\infty = 30$ m/s e densità $\rho = 1,225$ kg/m³ (flusso inviscido). Sulla faccia curva anteriore la velocità sulla superficie varia con l'angolo θ (misurato dall'asse della corrente) secondo la legge teorica

$$V = 2 V_\infty \sin \theta,$$

mentre sulla faccia piana posteriore agisce una pressione costante

$$p_B = p_\infty - 0,7 \rho V_\infty^2,$$

valore fornito dall'esperienza (è la "base pressure" della scia).

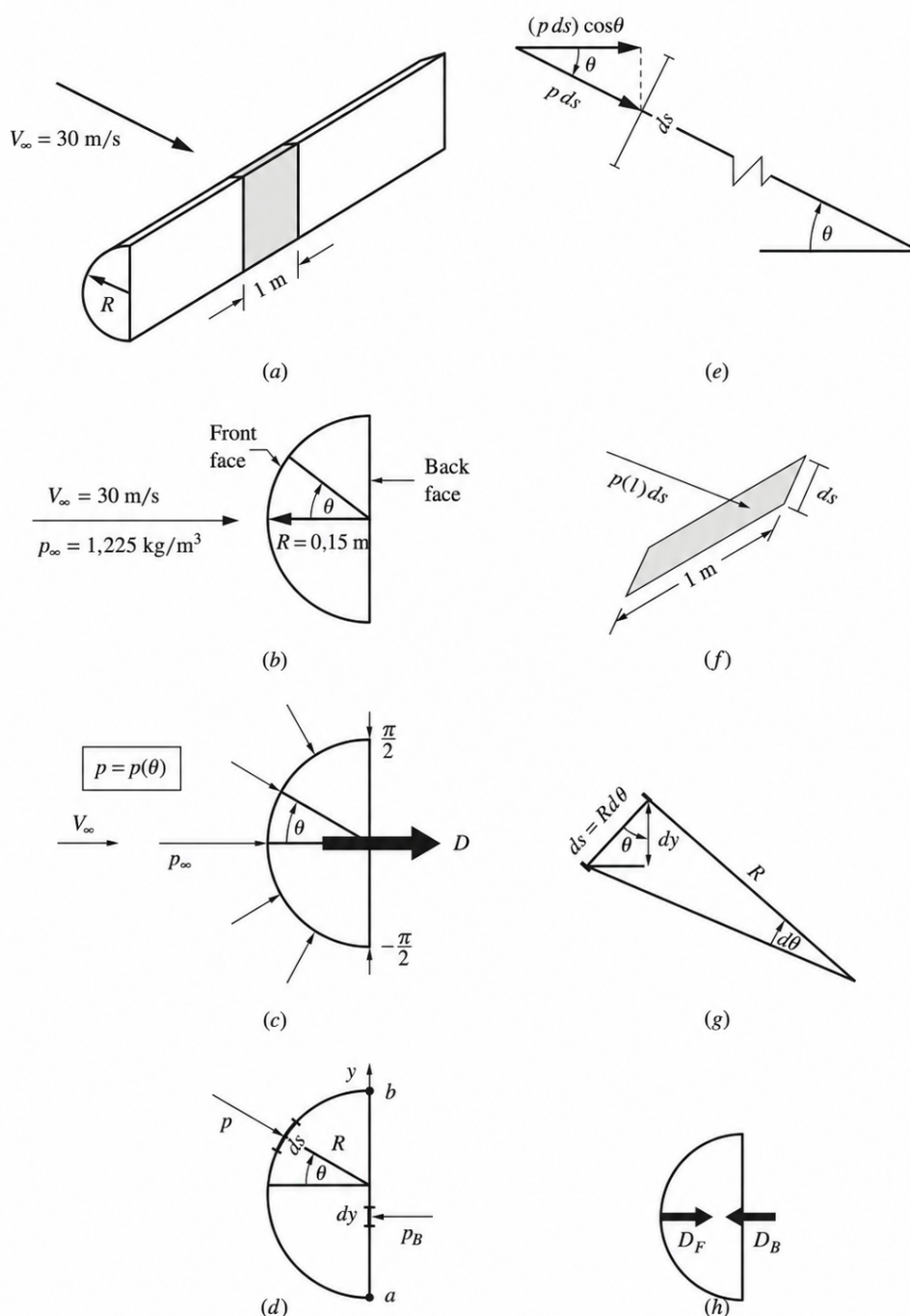


Figura 4. Geometria del caso di studio.

Esercizio 5 — Resistenza per metro di barra semicircolare

Calcolare la forza aerodinamica per unità di lunghezza esercitata dalla distribuzione di pressione sulla barra.

Dati. $R = 0,15 \text{ m}$; $V_\infty = 30 \text{ m/s}$; $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$; $V(\theta) = 2V_\infty \sin \theta$ sulla faccia curva; $p_B = p_\infty - 0,7\rho V_\infty^2$ sulla faccia piana.

— Fase A — Simmetria: la forza è tutta resistenza

La distribuzione di pressione è simmetrica rispetto all'asse della corrente: la spinta verso il basso sulla

metà superiore è annullata da quella verso l'alto sulla metà inferiore. La risultante è quindi *parallela alla corrente*: è pura resistenza D .

— Fase B — Pressione sulla faccia curva (Bernoulli)

Tra la corrente indisturbata e un punto della faccia curva:

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho(V_{\infty}^2 - V^2) = p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho V_{\infty}^2(1 - 4\sin^2\theta).$$

La forza sull'elemento d'arco $ds = R d\theta$ (per metro di barra) è $p ds$, normale alla superficie; la sua componente nella direzione della corrente è $(p ds) \cos\theta = p R \cos\theta d\theta$. Integrando da $-\pi/2$ a $+\pi/2$:

$$D_F = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho V_{\infty}^2(1 - 4\sin^2\theta) \right] R \cos\theta d\theta.$$

— Fase C — Forza sulla faccia posteriore

La proiezione verticale dell'elemento d'arco è $dy = R \cos\theta d\theta$; la faccia piana, di altezza $2R$, riceve la spinta (verso monte)

$$D_B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_B R \cos\theta d\theta = (p_{\infty} - 0,7\rho V_{\infty}^2) 2R.$$

— Fase D — Risultante: gli integrali notevoli

$D = D_F - D_B$. I termini in p_{∞} si elidono (stessa proiezione frontale!). Restano due integrali elementari:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta = 2, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta \cos\theta d\theta = \left[\frac{\sin^3\theta}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

Quindi

$$D = \frac{1}{2}\rho V_{\infty}^2 R (2) - 2\rho V_{\infty}^2 R \left(\frac{2}{3} \right) + 0,7\rho V_{\infty}^2 (2R) = \left(1 - \frac{4}{3} + 1,4 \right) \rho V_{\infty}^2 R = 1,067 \rho V_{\infty}^2 R.$$

— Fase E — Valore numerico

$$D = 1,067 \times 1,225 \times 30^2 \times 0,15 = 176 \text{ N per metro di barra.}$$

Risultato. $D = 1,067 \rho V_{\infty}^2 R \approx 176 \text{ N/m}$. Verificato anche per integrazione numerica dell'integrale di pressione.

Tre lezioni progettuali dal caso di studio

1. La forza aerodinamica risulta *solo* dall'integrazione della pressione (e, nei flussi reali, del taglio) sulla superficie. In sede di progetto, dare forma a un velivolo significa dare forma alla sua distribuzione di pressione.
2. La forza è proporzionale a ρ , a V_{∞}^2 e alla dimensione del corpo. Ritroveremo esattamente questa struttura — $\frac{1}{2}\rho V^2 S$ — nei coefficienti di portanza e resistenza.
3. La pressione della corrente indisturbata p_{∞} *scompare* dal risultato: nelle formule finali delle forze aerodinamiche compare sempre la densità ρ_{∞} , mai p_{∞} .

Raccordo

Con continuità e Bernoulli sappiamo già risolvere tutta l'aerodinamica a *bassa velocità*. Ma oltre i 100 m/s la densità comincia a variare, e con lei entra in gioco l'energia del gas. Per proseguire ci serve un minimo di termodinamica.

4 Un po' di termodinamica

Bussola

Dove siamo. Bernoulli non basta più: alle alte velocità il flusso è comprimibile e ad alta energia.

Cosa impariamo. Il primo principio della termodinamica, l'entalpia, i processi e i calori specifici c_v e c_p .

Dove andremo. Al concetto di flusso isentropico, il ponte tra termodinamica e aerodinamica comprimibile.

Un flusso ad alta velocità è un flusso ad *alta energia*: l'energia cinetica delle particelle è enorme e, quando il flusso rallenta, ricompare come aumento di temperatura (lo verificheremo sul Concorde e sullo Shuttle). Alta velocità, comprimibilità e grandi scambi di energia viaggiano sempre insieme: per trattarli serve la scienza dell'energia, la termodinamica. Qui ne introduciamo solo le idee strettamente necessarie.

4.1 Il primo principio

Consideriamo una massa unitaria di gas racchiusa da un contorno flessibile: la chiamiamo **sistema**; tutto ciò che sta fuori è l'**ambiente**. Le molecole del sistema si agitano in moto casuale: la somma delle loro energie è l'**energia interna** e (per unità di massa). Ci sono solo due modi per cambiarla:

1. fornire (o sottrarre) *calore* δq attraverso il contorno;
2. compiere *lavoro* δw sul sistema, comprimendone il contorno (o lasciare che sia il sistema a compiere lavoro, espandendosi).

Primo principio della termodinamica

$$\delta q + \delta w = de.$$

La variazione di energia interna è la somma del calore fornito e del lavoro compiuto sul sistema. Il lavoro di compressione si esprime con le variabili termodinamiche: se il contorno viene spinto in dentro riducendo il volume specifico di dv , il lavoro vale $\delta w = -p dv$, e il primo principio diventa

$$\delta q = de + p dv.$$

(d indica un differenziale esatto, δ una quantità che dipende dal percorso: calore e lavoro non sono proprietà del gas, l'energia interna sì.)

4.2 Entalpia e processi

Convien definire una nuova grandezza, l'**entalpia** per unità di massa:

$$h \equiv e + p v = e + R T \quad (\text{gas perfetto}).$$

Differenziando e sostituendo nel primo principio si ottiene la forma alternativa

$$\delta q = dh - v dp,$$

che userà chi lavora "in pressione" (ed è la forma perfetta per i flussi, come vedremo).

Il *modo* in cui le variabili p , T , v cambiano si chiama **processo**. Due esempi importanti: nel processo a *volume costante* (gas in una sfera d'acciaio rigida: $dv = 0$) il calore fornito fa salire p e T ; nel processo a *pressione costante* (gas in un cilindro con pistone libero che mantiene $dp = 0$) il calore fa variare T e v .

4.3 I calori specifici

Quanto calore serve per alzare di un grado la temperatura del gas? Dipende dal processo! Si definiscono perciò due calori specifici:

$$c_v \equiv \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_{v=\text{cost}}, \quad c_p \equiv \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_{p=\text{cost}}.$$

Combinandoli con le due forme del primo principio si ottengono le relazioni fondamentali:

Energia interna, entalpia e temperatura

Per un gas perfetto con calori specifici costanti (ottima approssimazione per l'aria fino a circa 1000 K):

$$de = c_v dT \Rightarrow e = c_v T, \quad db = c_p dT \Rightarrow b = c_p T.$$

Queste relazioni valgono *per qualunque processo*, non solo per quelli a volume o pressione costante con cui le abbiamo ricavate: e e b sono *variabili di stato*, dipendono solo dalla temperatura locale del gas. Per l'aria: $c_v = 720 \text{ J/(kg K)}$, $c_p = 1008 \text{ J/(kg K)}$. Valgono inoltre le identità

$$c_p - c_v = R, \quad \gamma \equiv \frac{c_p}{c_v} = 1,4 \text{ (aria)}, \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}.$$

Esercizio 6 — Energia interna ed entalpia dell'aria a livello del mare

Calcolare e e b per l'aria in condizioni standard al livello del mare.

Dati. $T = 288,15 \text{ K}$; $c_v = 720 \text{ J/(kg K)}$; $c_p = 1008 \text{ J/(kg K)}$.

— Fase A — Applicazione diretta

$$e = c_v T = 720 \times 288,15 = 2,07 \times 10^5 \text{ J/kg},$$

$$b = c_p T = 1008 \times 288,15 = 2,90 \times 10^5 \text{ J/kg}.$$

Risultato. $e \approx 2,07 \times 10^5 \text{ J/kg}$, $b \approx 2,90 \times 10^5 \text{ J/kg}$. Non serve sapere quale processo sta subendo il gas: basta la temperatura, perché e e b sono variabili di stato.

Esercizio 7 — Primo principio in un cilindro con pistone

L'aria in un cilindro ha energia interna $E_1 = 4 \times 10^5 \text{ J}$. Il pistone entra compiendo un lavoro di $2 \times 10^5 \text{ J}$ sul gas; contemporaneamente vengono forniti $6 \times 10^5 \text{ J}$ di calore. Quanto vale l'energia interna finale?

Dati. $E_1 = 4 \times 10^5 \text{ J}$; $\Delta W = 2 \times 10^5 \text{ J}$ (sul sistema); $\Delta Q = 6 \times 10^5 \text{ J}$.

— Fase A — Bilancio energetico

Il primo principio vale anche per quantità finite: $\Delta E = \Delta Q + \Delta W = 6 \times 10^5 + 2 \times 10^5 = 8 \times 10^5 \text{ J}$, quindi

$$E_2 = E_1 + \Delta E = 4 \times 10^5 + 8 \times 10^5 = 1,2 \times 10^6 \text{ J}.$$

Risultato. $E_2 = 1,2 \times 10^6 \text{ J}$. Nota che non abbiamo dovuto specificare il tipo di processo: conoscendo direttamente ΔQ e ΔW , il primo principio basta da solo. (Il cilindro con pistone non è un esem-

pio accademico: è il meccanismo base del motore alternativo che equipaggia gran parte dell'aviazione generale.)

Raccordo

Abbiamo il linguaggio dell'energia: primo principio, entalpia, calori specifici. Ora lo specializziamo al tipo di trasformazione che l'aria subisce davvero quando scorre attorno a un'ala o dentro un ugello: la trasformazione isentropica.

5 Il flusso isentropico

Bussola

Dove siamo. Abbiamo primo principio e calori specifici.

Cosa impariamo. Cos'è un processo isentropico e le potenti relazioni che legano p, ρ e T tra due punti del flusso.

Dove andremo. All'equazione dell'energia, ultima delle tre leggi di conservazione.

Tre definizioni:

- processo **adiabatico**: senza scambio di calore ($\delta q = 0$);
- processo **reversibile**: senza attriti né altri effetti dissipativi;
- processo **isentropico**: adiabatico e reversibile.

(Il nome viene dall'*entropia*, una variabile termodinamica che in un tale processo resta costante; per i nostri scopi non serve approfondirla.)

Perché è così importante in aerodinamica? Segui un elemento fluido lungo una linea di corrente sopra un'ala: nessuno lo scalda o lo raffredda (niente fiamme, niente frigoriferi: il processo è adiabatico) e l'attrito è trascurabile ovunque tranne che in un sottile strato vicino alla superficie (lo strato limite, che studieremo più avanti). Fuori da quello strato, quindi, il flusso è isentropico. Lo stesso vale per il flusso negli ugelli delle gallerie del vento e dei motori a razzo.

Adiabatico non significa isoterma

In un flusso comprimibile adiabatico la temperatura *cambia* da punto a punto: quando l'elemento fluido attraversa regioni a densità diversa, il suo volume varia, quindi viene compiuto lavoro ($-p dv$), quindi l'energia interna — e con lei la temperatura — varia. È solo nel flusso *incomprimibile* che, senza attrito, la temperatura resta costante ovunque: per questo nel regime di Bernoulli la temperatura non è mai protagonista.

5.1 Le relazioni isentropiche

Imponiamo $\delta q = 0$ nelle due forme del primo principio:

$$-p dv = c_v dT, \quad v dp = c_p dT.$$

Dividendo membro a membro spariscono dT e restano solo p e v :

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dv}{v}, \quad \gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}.$$

Integrando tra i punti 1 e 2 e ricordando $v = 1/\rho$:

Relazioni del flusso isentropico

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Per l'aria ($\gamma = 1,4$) gli esponenti valgono $\gamma = 1,4$ e $\gamma/(\gamma - 1) = 3,5$. Se le linee di corrente provengono tutte da una corrente uniforme a monte, le relazioni valgono tra due punti *qualsiasi* del flusso. Attenzione: sono relazioni per il flusso *comprimibile*; sostituiscono di fatto l'equazione di Eulero, che in regime comprimibile non sapremmo integrare senza di esse.

L'entropia dietro l'aggettivo “isentropico”

Diamo un fondamento più solido all'aggettivo che useremo cento volte. L'*entropia* è la variabile di stato definita, per una trasformazione reversibile, da $ds = \delta q_{\text{rev}}/T$: misura, in termini intuitivi, quanta energia di un sistema si è degradata in agitazione molecolare disordinata, non più recuperabile come lavoro. Il secondo principio della termodinamica dice che per un sistema isolato s può solo crescere o restare costante. Un processo *adiabatico* ($\delta q = 0$) e *reversibile* (senza attrito né altre dissipazioni) ha allora $ds = 0$: entropia costante, *isentropico* appunto. È il caso ideale a cui i flussi rapidi ed esterni allo strato limite somigliano moltissimo — ed è il motivo per cui le tre relazioni qui sopra funzionano così bene su ugelli, prese d'aria e campi di moto attorno ai profili. Ma la definizione dice anche quando il modello *deve* rompersi: dentro un'onda d'urto i gradienti sono così violenti che attrito e conduzione interna dissipano energia in modo irreversibile, s fa un salto in avanti e con lei la pressione totale fa un salto *indietro* (p_0 cala mentre T_0 , che dipende dalla sola energia, resta ferma). Quando nella sezione [10](#) la formula di Rayleigh ci darà una $p_{0,2}$ minore della p_0 isentropica, e quando il rapporto fra le due gole di una galleria supersonica ci funzionerà da “entropimetro” (sezione [11](#)), sarà esattamente questo salto di entropia che staremo misurando.

Esercizio 8 — Pressione sul punto freddo dell'ala

Un aeroplano vola in condizioni standard al livello del mare. In un punto dell'ala la temperatura misurata è 250 K. Quanto vale la pressione in quel punto?

Dati. $p_1 = 101\,325$ Pa; $T_1 = 288,15$ K (corrente indisturbata); $T_2 = 250$ K; flusso isentropico, $\gamma = 1,4$.

— **Fase A — Relazione isentropica tra corrente e punto sul dorso**

$$p_2 = p_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} = 101325 \times \left(\frac{250}{288,15}\right)^{3,5} = 6,16 \times 10^4 \text{ Pa.}$$

Risultato. $p_2 \approx 6,2 \times 10^4$ Pa: dove il flusso è accelerato (e quindi raffreddato: T scende da 288 a 250 K) la pressione crolla di quasi il 40 %. Il legame $T \leftrightarrow p$ isentropico è ripidissimo, con quel suo esponente 3,5.

Esercizio 9 — Temperatura allo scarico di un ugello di razzo

In camera di combustione di un motore a razzo il gas bruciato si trova a $p_1 = 20$ atm e $T_1 = 3500$ K. L'espansione nell'ugello è isentropica e la pressione all'uscita è $p_2 = 0,5$ atm. Il gas combusto non è aria: per esso $\gamma = 1,15$. Calcolare la temperatura di uscita.

Dati. $p_1 = 20$ atm; $T_1 = 3500$ K; $p_2 = 0,5$ atm; $\gamma = 1,15$.

— **Fase A — Perché possiamo lasciare le atmosfere**

Nella relazione isentropica le pressioni compaiono solo come *rapporto* p_2/p_1 : purché numeratore e denominatore siano nella stessa unità, il rapporto non cambia. Qui $p_2/p_1 = 0,5/20 = 0,025$, e possiamo

evitare la conversione in pascal. (Se invece la pressione entrasse da sola in una formula — per esempio nell'equazione di stato — la conversione in Pa sarebbe obbligatoria.)

— Fase B — Temperatura di uscita

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 3500 \times (0,025)^{0,15/1,15} = 3500 \times (0,025)^{0,1304} = 2163 \text{ K.}$$

Risultato. $T_2 \approx 2160 \text{ K}$. L'espansione ha convertito una parte enorme dell'energia termica in energia cinetica del getto: è esattamente il mestiere dell'ugello, come quantificheremo nella sezione II.

Esercizio 10 — Compressione nel cilindro di un motore a pistoni

Nel motore alternativo di un velivolo dell'aviazione generale la miscela aria-benzina entra nel cilindro in condizioni standard ($p_2 = 1 \text{ atm}$, $T_2 = 288 \text{ K}$) e viene compressa isentropicamente con rapporto di compressione $V_2/V_3 = 10$. Calcolare pressione e temperatura a fine compressione. (La miscela è quasi tutta aria: $\gamma = 1,4$.)

Dati. $p_2 = 1 \text{ atm}$; $T_2 = 288 \text{ K}$; $V_2/V_3 = 10$; $\gamma = 1,4$.

— Fase A — Dal rapporto dei volumi al rapporto delle densità

La massa nel cilindro è fissa, quindi $\rho_3/\rho_2 = V_2/V_3 = 10$. Dalle relazioni isentropiche:

$$p_3 = p_2 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^\gamma = 1 \times 10^{1,4} = 25,1 \text{ atm} = 2,55 \times 10^6 \text{ Pa.}$$

— Fase B — Temperatura di fine compressione

$$T_3 = T_2 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1} = 288 \times 10^{0,4} = 724 \text{ K.}$$

Risultato. $p_3 \approx 25 \text{ atm}$, $T_3 \approx 724 \text{ K}$. Curioso: con un rapporto di compressione 10, la pressione cresce di un fattore 25 ma la temperatura “solo” di un fattore 2,5. Gli esponenti isentropici non perdonano.

Raccordo

Le relazioni isentropiche legano p , ρ e T tra due punti del flusso comprimibile. Manca all'appello la velocità: gliela aggancia l'ultima legge di conservazione, quella dell'energia.

6 L'equazione dell'energia

Bussola

Dove siamo. Continuità, quantità di moto, relazioni isentropiche: manca l'energia.

Cosa impariamo. L'equazione $c_p T + \frac{1}{2} V^2 = \text{cost}$ e il concetto di temperatura di ristagno.

Dove andremo. Al quadro riassuntivo delle equazioni e poi alle applicazioni.

6.1 Derivazione

Terzo principio fisico: *l'energia non si crea e non si distrugge; può solo cambiare forma*. Quantitativamente è il primo principio della termodinamica, che ora applichiamo a un elemento fluido in moto lungo una linea di

corrente, in flusso *adiabatico* ($\delta q = 0$):

$$\delta q = dh - v dp = 0 \quad \Rightarrow \quad dh = v dp.$$

Dall'equazione di Eulero, $dp = -\rho V dV$; sostituendo e ricordando $v = 1/\rho$:

$$dh + V dV = 0.$$

Integrando tra due punti della linea di corrente:

Equazione dell'energia (flusso adiabatico)

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}, \quad \text{ossia, con } h = c_p T : \quad c_p T_1 + \frac{V_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

La somma di entalpia ed energia cinetica (per unità di massa) è costante lungo il flusso: dove il gas accelera si raffredda, dove rallenta si scalda. Se la corrente a monte è uniforme, la costante è la stessa in tutto il campo di moto.

Temperatura di ristagno

Il punto di un flusso in cui $V = 0$ si chiama **punto di ristagno** (*stagnation point*); la temperatura che il gas vi raggiunge è la **temperatura totale** o *di ristagno* T_0 . Dall'equazione dell'energia, per un flusso che a monte ha T_1 e V_1 :

$$T_0 = T_1 + \frac{V_1^2}{2 c_p}.$$

T_0 è la temperatura “di parcheggio” di tutta l'energia del flusso: è la massima temperatura che il gas può raggiungere rallentando adiabaticamente.

Esercizio II — Galleria supersonica: velocità e aree

In una galleria del vento supersonica l'aria nel serbatoio (dove $V \approx 0$) si trova a $T_0 = 1000$ K e $p_0 = 10$ atm. Le temperature statiche alla gola e all'uscita dell'ugello valgono $T^* = 833$ K e $T_e = 300$ K; la portata è $\dot{m} = 0,5$ kg/s. Calcolare: (a) la velocità alla gola V^* ; (b) la velocità di uscita V_e ; (c) l'area della gola A^* ; (d) l'area di uscita A_e .

Dati. $T_0 = 1000$ K; $p_0 = 10$ atm = $1,013 \times 10^6$ Pa; $T^* = 833$ K; $T_e = 300$ K; $\dot{m} = 0,5$ kg/s; $c_p = 1008$ J/(kg K); flusso isentropico.

— Fase A — Velocità dall'equazione dell'energia

Tra serbatoio (dove $V \approx 0$) e gola:

$$V^* = \sqrt{2 c_p (T_0 - T^*)} = \sqrt{2 \times 1008 \times 167} = 580 \text{ m/s};$$

tra serbatoio e uscita:

$$V_e = \sqrt{2 c_p (T_0 - T_e)} = \sqrt{2 \times 1008 \times 700} = 1188 \text{ m/s}.$$

— Fase B — Densità con stato e isentropica

Nel serbatoio: $\rho_0 = p_0 / (R T_0) = 1,013 \times 10^6 / (287 \times 1000) = 3,53$ kg/m³. Il flusso nell'ugello è isentropico, quindi

$$\rho^* = \rho_0 \left(\frac{T^*}{T_0} \right)^{1/(\gamma-1)} = 3,53 \times (0,833)^{2,5} = 2,24 \text{ kg/m}^3,$$

$$\rho_e = 3,53 \times (0,300)^{2,5} = 0,174 \text{ kg/m}^3.$$

— Fase C — Aree dalla continuità

$$A^* = \frac{\dot{m}}{\rho^* V^*} = \frac{0,5}{2,24 \times 580} = 3,85 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 3,85 \text{ cm}^2,$$

$$A_e = \frac{\dot{m}}{\rho_e V_e} = \frac{0,5}{0,174 \times 1188} = 24,2 \text{ cm}^2.$$

Risultato. $V^* = 580 \text{ m/s}$, $V_e = 1188 \text{ m/s}$, $A^* = 3,85 \text{ cm}^2$, $A_e = 24,2 \text{ cm}^2$. Nota il gioco di squadra: energia per le velocità, stato + isentropica per le densità, continuità per le aree. Torneremo su questa galleria nella sezione 8 per scoprire un fatto notevole sulla gola.

Esercizio 12 — Profilo alare in regime comprimibile

Un profilo investe una corrente con $p_\infty = 101\,325 \text{ Pa}$, $T_\infty = 288,15 \text{ K}$ e $V_\infty = 225 \text{ m/s}$. In un punto A la pressione è $p_A = 0,716 \times 10^5 \text{ Pa}$. Calcolare temperatura e velocità in A , assumendo flusso isentropico. Confrontare poi con il risultato (errato) che darebbe Bernoulli.

Dati. $p_\infty = 101\,325 \text{ Pa}$; $T_\infty = 288,15 \text{ K}$; $V_\infty = 225 \text{ m/s}$; $p_A = 7,16 \times 10^4 \text{ Pa}$; $c_p = 1008 \text{ J/(kg K)}$; $\gamma = 1,4$.

— Fase A — Scelta del modello

$V_\infty = 225 \text{ m/s}$ è ben oltre i 100 m/s : il flusso è comprimibile e Bernoulli è fuori gioco. Usiamo la coppia isentropica + energia.

— Fase B — Temperatura in A (isentropica)

$$T_A = T_\infty \left(\frac{p_A}{p_\infty} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 288,15 \times (0,7066)^{0,2857} = 260,9 \text{ K}.$$

— Fase C — Velocità in A (energia)

$$V_A = \sqrt{2 c_p (T_\infty - T_A) + V_\infty^2} = \sqrt{2 \times 1008 \times 27,2 + 225^2} = 325 \text{ m/s}.$$

— Fase D — Il confronto con Bernoulli (metodo errato)

Se avessimo usato Bernoulli con $\rho_\infty = p_\infty / (R T_\infty) = 1,225 \text{ kg/m}^3$:

$$V_A^{(\text{err})} = \sqrt{\frac{2(p_\infty - p_A)}{\rho_\infty} + V_\infty^2} = 315 \text{ m/s},$$

con un errore di circa il 3 % *in difetto* — errore che cresce rapidamente all'aumentare del Mach, come vedremo nell'esercizio sul DC-10 (sezione 10).

Risultato. $T_A \approx 261 \text{ K}$, $V_A \approx 325 \text{ m/s}$. In regime comprimibile la coppia *isentropica + energia* sostituisce Bernoulli.

Esercizio 13 — Riscaldamento cinetico di un supersonico da crociera

Un velivolo da trasporto supersonico vola a $V_1 = 590 \text{ m/s}$ a una quota in cui $T_1 = 216,65 \text{ K}$ (tropopausa). Calcolare la temperatura di ristagno sul bordo d'attacco.

Dati. $V_1 = 590 \text{ m/s}$; $T_1 = 216,65 \text{ K}$; $c_p = 1008 \text{ J/(kg K)}$.

— **Fase A — Temperatura di ristagno**

$$T_0 = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 216,65 + \frac{590^2}{2 \times 1008} = 216,65 + 172,7 = 389 \text{ K} = 116^\circ \text{C}.$$

Risultato. $T_0 \approx 389 \text{ K}$: sopra il punto di ebollizione dell'acqua! L'aria a -56°C , fermandosi sul muso, si porta a $+116^\circ \text{C}$: questo è il *riscaldamento cinetico*, che sul Concorde imponeva di attendere che la pelle del velivolo si raffreddasse dopo l'atterraggio, e che per lo strutturista significa progettare con le caratteristiche dei materiali *a caldo*.

Esercizio 14 — Il rientro dello Space Shuttle: dove il modello si rompe

Durante il rientro atmosferico, a 60 km di quota, lo Space Shuttle vola a $V_1 = 6,4 \text{ km/s}$. Sul ventre, vicino al muso, esiste un punto di ristagno. Assumendo $c_p = 1008 \text{ J/(kg K)}$ costante, calcolare la temperatura dell'aria nel punto di ristagno — e poi discutere quanto sia credibile il risultato.

Dati. $V_1 = 6400 \text{ m/s}$; a 60 km (tabelle di atmosfera standard, per estrapolazione): $T_1 = 253,7 \text{ K}$; $c_p = 1008 \text{ J/(kg K)}$.

— **Fase A — Applicazione (formale) dell'equazione dell'energia**

Il flusso lungo la linea di corrente di ristagno è adiabatico: nessun meccanismo esterno aggiunge o sottrae calore. Quindi

$$T_0 = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 253,7 + \frac{(6,4 \times 10^3)^2}{2 \times 1008} = 20\,571 \text{ K}.$$

— **Fase B — Critica del risultato**

Ventimila kelvin: più di tre volte la temperatura superficiale del Sole. Il numero è formalmente corretto ma fisicamente insensato: sopra i $\sim 2000 \text{ K}$ l'aria vibra, dissocia e ionizza, e c_p non è più costante — l'ipotesi su cui poggia la formula crolla proprio nel regime in cui la stiamo usando. Un calcolo che tenga conto delle reazioni chimiche dà una temperatura di ristagno reale di circa 6000 K : altissima, ma un terzo del valore "ingenuo".

Risultato. $T_0 = 20\,571 \text{ K}$ con c_p costante; $\sim 6000 \text{ K}$ nella realtà chimicamente reagente. Morale, sempre la stessa: *ogni formula ha un campo di validità, e va dichiarato*. Per gli aeroplani (temperature fino a $\sim 1000 \text{ K}$) l'ipotesi di c_p costante è pienamente giustificata; per i veicoli di rientro no.

Esercizio 15 — Flusso con adduzione di calore: il combustore

Se il flusso non è adiabatico, l'energia si conserva comunque: ripetendo la derivazione con $\delta q \neq 0$ si ottiene

$$c_p T_3 + \frac{V_3^2}{2} + Q_{34} = c_p T_4 + \frac{V_4^2}{2},$$

dove Q_{34} è il calore fornito per unità di massa tra le sezioni 3 e 4. Nel combustore di un turbogetto l'aria entra a $T_3 = 650 \text{ K}$ e $V_3 = 90 \text{ m/s}$, riceve $Q_{34} = 7,0 \times 10^5 \text{ J/kg}$ e esce a $V_4 = 60 \text{ m/s}$. Calcolare T_4 .

Dati. $T_3 = 650 \text{ K}$; $V_3 = 90 \text{ m/s}$; $V_4 = 60 \text{ m/s}$; $Q_{34} = 7,0 \times 10^5 \text{ J/kg}$; $c_p = 1008 \text{ J/(kg K)}$.

— **Fase A — Bilancio di energia con calore**

$$T_4 = T_3 + \frac{Q_{34}}{c_p} + \frac{V_3^2 - V_4^2}{2c_p} = 650 + \frac{7,0 \times 10^5}{1008} + \frac{8100 - 3600}{2016} = 650 + 694,4 + 2,2 = 1347 \text{ K}.$$

Risultato. $T_4 \approx 1347$ K. Il contributo del termine cinetico è di appena 2,2 K: nel combustore comanda il calore. È questa temperatura di uscita (limitata dai materiali della turbina!) uno dei numeri chiave del progetto dei motori a getto.

7 Il quadro delle equazioni

Prima di passare alle applicazioni, fermiamo il quadro. Le equazioni non vanno lette come formule da mandare a memoria, ma come *frasi fisiche*: la continuità dice che la massa si conserva; Bernoulli e l'energia dicono che $F = ma$ e che l'energia si conserva. Ogni equazione “parla”.

Cassetta degli attrezzi n. 1 — flusso incomprimibile

Fluido inviscido a bassa velocità ($M < 0,3$): ρ e T sono costanti; le incognite sono p e V . Servono due sole equazioni:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \quad (\text{continuità})$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \quad (\text{Bernoulli})$$

Cassetta degli attrezzi n. 2 — flusso isentropico comprimibile

Flusso adiabatico e senza attrito ad alta velocità: p, ρ, T, V variano tutte. Servono quattro equazioni:

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 \quad (\text{continuità})$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (\text{isentropica})$$

$$c_p T_1 + \frac{1}{2} V_1^2 = c_p T_2 + \frac{1}{2} V_2^2 \quad (\text{energia})$$

$$p = \rho R T \quad (\text{stato, in ogni punto})$$

Raccordo

Gli attrezzi sono sul banco. Ora usiamoli: velocità del suono, gallerie del vento, misura della velocità di volo, ugelli supersonici. Cominciamo dalla grandezza che governa tutto il regime comprimibile.

8 La velocità del suono e il numero di Mach

Bussola

Il suono è una debole onda di pressione che viaggia nel gas. La sua velocità è il metro con cui l'aria “misura” quanto è veloce un aereo: il rapporto fra velocità di volo e velocità del suono — il numero di Mach — decide quale fisica comanda. In questa sezione ricaviamo la formula $a = \sqrt{\gamma R T}$ e impariamo a classificare i regimi di volo.

8.1 Che cos'è un'onda sonora

Quando battiamo le mani, comprimiamo localmente l'aria: quella piccola sovrappressione si propaga come un fronte d'onda attraverso le collisioni fra molecole. Attraverso il fronte, pressione, densità e temperatura cambiano di quantità *infinitesime*: un'onda sonora è il caso limite di perturbazione debole. Proprio perché le

variazioni sono infinitesime, il processo è reversibile; ed essendo rapidissimo, è anche adiabatico. Conclusione: **la propagazione del suono è un processo isentropico.**

Applichiamo continuità e quantità di moto a un volume di controllo solidale con il fronte d'onda, che avanza a velocità a in aria ferma (nel riferimento dell'onda, l'aria entra a velocità a ed esce a $a + dV$ con proprietà $p + dp, \rho + d\rho$). Continuità:

$$\rho a = (\rho + d\rho)(a + dV) \Rightarrow dV = -\frac{a d\rho}{\rho},$$

avendo trascurato il prodotto dei due infinitesimi. Eulero ($dp = -\rho V dV$ con $V = a$):

$$dV = -\frac{dp}{\rho a}.$$

Eguagliando le due espressioni di dV :

$$\frac{a d\rho}{\rho} = \frac{dp}{\rho a} \Rightarrow \boxed{a^2 = \frac{dp}{d\rho}}$$

La velocità del suono dipende da *come* la pressione varia con la densità. Ma lungo quale trasformazione? Quella isentropica, come appena argomentato: $p/\rho^\gamma = \text{cost}$, da cui $dp/d\rho = \gamma p/\rho = \gamma R T$.

Velocità del suono in un gas perfetto

$$a = \sqrt{\gamma R T}$$

Per l'aria ($\gamma = 1,4$, $R = 287 \text{ J/(kg K)}$):

$$a \simeq 20,05 \sqrt{T} \quad [\text{m/s}, T \text{ in K}].$$

A livello del mare ($T = 288,15 \text{ K}$): $a = 340,3 \text{ m/s}$ ($\approx 1225 \text{ km/h}$). La velocità del suono dipende *solo dalla temperatura*: salendo di quota nella troposfera, T scende e con essa a .

Attenzione

Un errore frequente: pensare che a dipenda dalla pressione o dalla densità prese singolarmente. Non è così: p e ρ compaiono solo nel rapporto $p/\rho = RT$. Due giornate con pressioni diverse ma uguale temperatura hanno la stessa velocità del suono.

C'è un legame profondo con la teoria cinetica: la velocità media di agitazione delle molecole d'aria a livello del mare è circa 459 m/s , dello stesso ordine di a . Non è un caso: il suono si propaga *attraverso* le collisioni molecolari, quindi non può andare più veloce delle molecole che lo trasportano.

8.2 Il numero di Mach e i regimi di volo

Numero di Mach

$$M = \frac{V}{a}$$

È il rapporto fra la velocità del flusso (o del velivolo) e la velocità del suono *locale*. In base a M si classificano i regimi:

$M < 1$ ovunque	subsonico
$M \approx 1$ (zone miste sub/supersoniche)	transonico ($0,8 \lesssim M_\infty \lesssim 1,2$)
$M > 1$ ovunque	supersonico
$M \gtrsim 5$	ipersonico

L'errore di Newton e la correzione di Laplace

La formula $a = \sqrt{\gamma RT}$ ha una storia istruttiva. Il primo a calcolare la velocità del suono fu Newton, nei *Principia*: ma assunse che la compressione nell'onda avvenisse a *temperatura costante*. Con quell'ipotesi la definizione $a^2 = dp/d\rho$ va applicata all'isoterma $p = \rho RT$, e dà $a = \sqrt{RT}$: in condizioni standard

$$a_{\text{isoterma}} = \sqrt{287 \times 288,15} = 288 \text{ m/s}$$

contro i 340 m/s misurati — un errore del 15,5 %, enorme per una teoria così elegante. La correzione arrivò più di un secolo dopo, con Laplace: la compressione sonora è così *rapida* che il calore non fa in tempo a fluire — il processo è adiabatico, non isoterma — e la derivata va presa lungo l'*isentropica* $p/\rho^\gamma = \text{cost}$, da cui il fattore γ sotto radice. È una lezione sul metodo che useremo per tutta la monografia: prima di applicare una formula, chiedersi sempre *quale processo termodinamico* sta descrivendo. Newton sbagliò proprio lì — e sbagliarci lui rende l'errore molto istruttivo.

Il Mach non è un vezzo da piloti: è il parametro che decide *quali equazioni valgono*. Sotto $M \approx 0,3$ l'aria si comporta da incompressibile (lo dimostreremo nella sezione 12); oltre, la densità varia e servono le equazioni comprimibili; oltre $M = 1$ compaiono le onde d'urto.

Esercizio 16 — Numero di Mach di un jet in crociera

Un bireattore vola a $V = 250 \text{ m/s}$ alla quota di 10 000 m. Calcolare il numero di Mach di volo.

Dati. $V = 250 \text{ m/s}$; $h = 10 \text{ km}$; da tabella ISA: $T = 223,15 \text{ K}$.

— Fase A — Velocità del suono in quota

$$a = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{1,4 \times 287 \times 223,15} = 299,4 \text{ m/s}.$$

Si noti: a 10 km il suono è più “lento” che al suolo (299 m/s contro 340 m/s), perché fa più freddo.

— Fase B — Numero di Mach

$$M = \frac{V}{a} = \frac{250}{299,4} = 0,835.$$

Risultato. $M = 0,835$: pieno regime transonico alto-subsonico, il regime tipico di crociera dei liner. La stessa $V = 250 \text{ m/s}$ a livello del mare darebbe $M = 0,73$: *il Mach dipende dalla quota anche a velocità costante*.

Esercizio 17 — Stessa velocità, gas diverso: aria contro idrogeno

Un proiettile viaggia a $V = 1000 \text{ m/s}$ in un ambiente a $T = 300 \text{ K}$. Calcolare M (a) in aria; (b) in idrogeno puro (massa molare $\mathcal{M} = 2,016 \text{ kg/kmol}$).

Dati. $V = 1000 \text{ m/s}$; $T = 300 \text{ K}$; $\gamma = 1,4$ per entrambi i gas (biatomici); $R_{\text{univ}} = 8314 \text{ J/(kmol K)}$.

— Fase A — In aria

$$a = \sqrt{1,4 \times 287 \times 300} = 347,2 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{1000}{347,2} = 2,88.$$

Volo nettamente supersonico.

— Fase B — In idrogeno

La costante specifica dell'idrogeno è

$$R_{H_2} = \frac{R_{\text{univ}}}{\mathcal{M}} = \frac{8314}{2,016} = 4124 \text{ J/(kg K)},$$

quindi

$$a = \sqrt{1,4 \times 4124 \times 300} = 1316 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{1000}{1316} = 0,76.$$

Risultato. Stessa velocità, regimi opposti: $M = 2,88$ in aria (supersonico), $M = 0,76$ in idrogeno (subsonico). Il gas leggero ha molecole velocissime, quindi una velocità del suono quasi quadrupla. Su questo principio si basano le *gallerie a gas leggero* usate per simulare regimi subsonici a velocità assolute molto alte.

Raccordo

Ora che sappiamo misurare la velocità in “unità di suono”, torniamo alle applicazioni: come si genera una corrente d'aria controllata per provare modelli? È il problema della galleria del vento.

9 Le gallerie del vento subsoniche

Bussola

Una galleria subsonica è, in essenza, un grande condotto convergente (un Venturi) in cui il modello sta nella sezione più stretta e veloce. Con continuità e Bernoulli ricaviamo la formula di taratura velocità–pressione e impariamo a leggere il manometro differenziale.

9.1 Il principio: un Venturi con il modello dentro

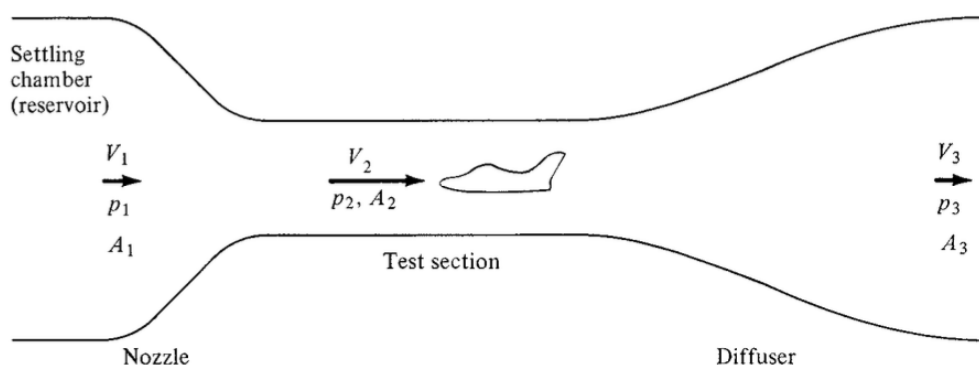


Figura 5. Architettura di una galleria del vento subsonica a circuito aperto.

L'aria parte quasi ferma nella sezione di ingresso (stazione 1, area A_1), accelera nel convergente e raggiunge la velocità massima nella camera di prova (stazione 2, area $A_2 < A_1$), dove è montato il modello. A valle, un diffusore divergente rallenta il flusso per ridurre la potenza richiesta al ventilatore.

Per $V_2 \lesssim 100$ m/s il flusso è incomprimibile e valgono:

$$V_1 = \frac{A_2}{A_1} V_2 \quad (\text{continuità}), \quad p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \quad (\text{Bernoulli}).$$

Eliminando V_1 :

Formula di taratura della galleria subsonica

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho [1 - (A_2/A_1)^2]}}$$

La velocità in camera di prova dipende solo dal *salto di pressione* misurato $p_1 - p_2$, dalla densità e dal rapporto di contrazione A_1/A_2 . In pratica il rapporto $(A_2/A_1)^2$ è spesso trascurabile: con contrazione 15:1 vale $1/225 \approx 0,4\%$.

9.2 Come si misura $p_1 - p_2$: il manometro a U

Il salto di pressione si legge con un manometro differenziale a liquido: un tubo a U con un liquido di densità ρ_l (spesso mercurio, $\rho_l = 1,36 \times 10^4$ kg/m³), un ramo collegato alla stazione 1 e uno alla stazione 2. Dall'idrostatica, il dislivello Δh fra i due menischi misura direttamente

$$p_1 - p_2 = \rho_l g \Delta h.$$

Esercizio 18 — Galleria con manometro a mercurio

In una galleria a bassa velocità il rapporto di contrazione è $A_1/A_2 = 15$. Nel serbatoio: $p_1 = 1,1$ atm, $T_1 = 300$ K. Il manometro a mercurio segna $\Delta h = 10$ cm. Calcolare la velocità in camera di prova.

Dati. $A_2/A_1 = 1/15$; $p_1 = 1,1$ atm = 111 458 Pa; $T_1 = 300$ K; $\Delta h = 0,10$ m; $\rho_l = 1,36 \times 10^4$ kg/m³; $g = 9,81$ m/s².

— Fase A — Salto di pressione dal manometro

$$p_1 - p_2 = \rho_l g \Delta h = 1,36 \times 10^4 \times 9,81 \times 0,10 = 13\,337 \text{ Pa}.$$

— Fase B — Densità dell'aria nel serbatoio

Con l'equazione di stato (il flusso è trattato come incomprimibile, quindi ρ è la stessa ovunque):

$$\rho = \frac{p_1}{R T_1} = \frac{111458}{287 \times 300} = 1,294 \text{ kg/m}^3.$$

— Fase C — Velocità in camera di prova

$$V_2 = \sqrt{\frac{2 \times 13337}{1,294 [1 - (1/15)^2]}} = 143,9 \text{ m/s}.$$

Risultato. $V_2 \approx 144$ m/s. Attenzione però: a $T = 300$ K è $a \approx 347$ m/s, quindi $M_2 \approx 0,41$ — già oltre la soglia di incomprimibilità. Il risultato va inteso come prima stima: per una taratura di precisione servirebbero le formule comprimibili della sezione 10.

Esercizio 19 — Piccolo progetto di una galleria didattica

Si vuole realizzare una galleria a circuito aperto con camera di prova $A_2 = 0,5 \text{ m}^2$ e $V_2 = 40 \text{ m/s}$, con ingresso $A_1 = 2 \text{ m}^2$. La camera di prova scarica in atmosfera ($p_2 = 101\,325 \text{ Pa}$, $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$). Determinare (1) la pressione p_1 richiesta all'ingresso e la portata in massa; (2) che velocità si otterrebbe raddoppiando il salto di pressione; (3) che cosa cambierebbe raddoppiando invece il rapporto di contrazione (da 4 a 8) a parità di salto di pressione.

Dati. $A_1 = 2 \text{ m}^2$; $A_2 = 0,5 \text{ m}^2$; $V_2 = 40 \text{ m/s}$; $p_2 = 101\,325 \text{ Pa}$; $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$.

— Fase A — Condizioni all'ingresso e portata

Continuità: $V_1 = V_2 A_2 / A_1 = 40 \times 0,25 = 10 \text{ m/s}$. Bernoulli:

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) = 101\,325 + 0,5 \times 1,225 \times (1600 - 100) = 102\,244 \text{ Pa},$$

quindi il ventilatore deve garantire $\Delta p = 919 \text{ Pa}$ (appena 9,3 cm di colonna d'acqua!). Portata:

$$\dot{m} = \rho A_2 V_2 = 1,225 \times 0,5 \times 40 = 24,5 \text{ kg/s}.$$

— Fase B — Variante 1: salto di pressione doppio

Dalla formula di taratura $V_2 \propto \sqrt{\Delta p}$:

$$V_2' = 40\sqrt{2} = 56,6 \text{ m/s}.$$

Raddoppiare Δp *non* raddoppia la velocità: la guadagna solo di un fattore $\sqrt{2} = 1,414$. È il costo tipico delle leggi quadratiche.

— Fase C — Variante 2: contrazione doppia a pari salto

Con $A_1/A_2 = 8$ e lo stesso $\Delta p = 919 \text{ Pa}$:

$$V_2'' = \sqrt{\frac{2 \times 918,8}{1,225 [1 - (1/8)^2]}} = 39,0 \text{ m/s}, \quad V_1'' = 4,9 \text{ m/s}.$$

La velocità in camera resta quasi invariata (il termine $(A_2/A_1)^2$ era già piccolo), ma l'aria in ingresso è metà più lenta: la contrazione elevata serve soprattutto a *uniformare e calmare* il flusso prima della camera di prova, non ad aumentare la velocità.

Risultato. $p_1 = 102\,244 \text{ Pa}$, $\dot{m} = 24,5 \text{ kg/s}$; con Δp doppio $V_2 = 56,6 \text{ m/s}$; con contrazione doppia V_2 resta $\approx 39 \text{ m/s}$ ma il flusso in ingresso è più uniforme.

Raccordo

La galleria misura la velocità da una differenza di pressione. Ma anche l'aereo in volo fa esattamente la stessa cosa, con uno strumento vecchio di tre secoli e ancora insostituibile: il tubo di Pitot.

10 La misura della velocità di volo

Bussola

Come fa l'anemometro di bordo a conoscere la velocità? Confrontando due pressioni: quella *statica* dell'aria indisturbata e quella *totale* nel punto di ristagno di un tubo di Pitot. La formula che lega le due pressioni alla velocità cambia però con il regime: qui sviluppiamo i tre casi — incompressibile, subsonico comprimibile, supersonico — ciascuno con i suoi esercizi.

10.1 Pressione statica e pressione totale

La **pressione statica** p è quella che misurerebbe uno strumento che *viaggia con il flusso*, dovuta al solo moto di agitazione casuale delle molecole. La **pressione totale** (o di ristagno) p_0 è la pressione che si raggiunge in un punto dove il flusso viene rallentato fino a velocità nulla *in modo isentropico*: al contributo casuale si aggiunge quello del moto ordinato, “convertito” in pressione.

Un'analogia: viaggiando in autostrada, l'aria che vi colpisce il palmo della mano fuori dal finestrino esercita una pressione maggiore di quella atmosferica — è la pressione di ristagno sulla vostra mano; l'aria che scorre parallela al finestrino esercita invece sulla superficie del vetro la sola pressione statica.

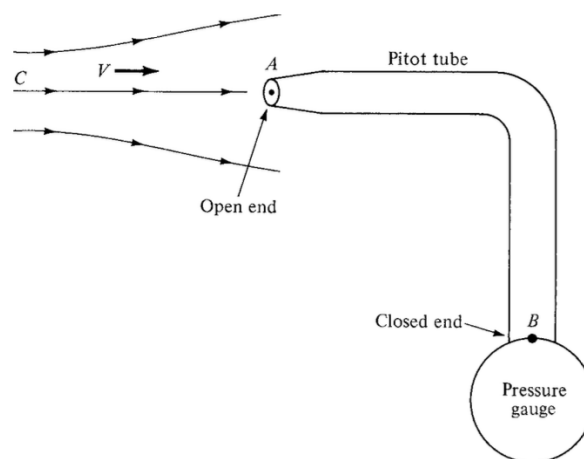


Figura 6. Tubo di Pitot e presa statica: il manometro legge direttamente $p_0 - p$.

Il tubo di Pitot è un tubetto con un foro frontale, rivolto contro il flusso, chiuso in fondo da un sensore: l'aria al suo interno è ferma, e il foro d'ingresso è un punto di ristagno. La presa statica è un forellino a filo di una superficie parallela al flusso. La coppia Pitot–statica, collegata a un manometro differenziale, misura $p_0 - p$: da questa differenza si ricava la velocità, con formule che ora sviluppiamo regime per regime.

Attenzione

Per definizione, p_0 è la pressione di un ristagno *isentropico*. Vicino al foro del Pitot il rallentamento reale è effettivamente quasi privo di attrito, quindi la misura è eccellente — *finché non compaiono onde d'urto*: in supersonico l'urto davanti al tubo distrugge l'isentropicità e serve una formula dedicata (paragrafo 10.4).

10.2 Regime incompressibile ($M < 0,3$)

Bernoulli fra la corrente indisturbata (p, V) e il punto di ristagno ($p_0, V = 0$):

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_0.$$

Pressione dinamica e formula del Pitot incompressibile

Si definisce **pressione dinamica**

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2.$$

In regime incompressibile (e solo in esso!) vale $p_0 = p + q$, da cui

$$V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}.$$

C'è però una sottigliezza tutta aeronautica. Lo strumento di bordo non conosce la densità reale alla quota di volo: gli anemometri sono tarati con la densità standard al livello del mare $\rho_s = 1,225 \text{ kg/m}^3$. Ne nascono due velocità:

Velocità vera e velocità equivalente

$$V_{\text{true}} = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}} \quad V_e = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho_s}}$$

V_{true} usa la densità *reale* in quota; V_e (equivalente) usa ρ_s ed è quella indicata dallo strumento. Le due coincidono solo a livello del mare; in quota $\rho < \rho_s$ e quindi $V_e < V_{\text{true}}$. Nella pratica di volo la catena è: *indicata* (IAS, la lancetta) → corretta per errori di strumento e di posizione delle prese → *calibrata* (CAS) → corretta per la comprimibilità → *equivalente* (EAS) → corretta per la densità di quota → *vera* (TAS). A bassa velocità CAS ed EAS coincidono.

Esercizio 20 — Aliante veloce a 1500 m: velocità vera ed equivalente

Un motoalante vola a 1500 m di quota. Il Pitot misura $p_0 = 86\,100 \text{ Pa}$; la temperatura esterna è $T = 278 \text{ K}$. Assumendo la pressione statica pari al valore ISA di quota, calcolare velocità vera ed equivalente.

Dati. $h = 1500 \text{ m} \Rightarrow p = 84\,553 \text{ Pa (ISA)}$; $T = 278 \text{ K}$; $p_0 = 86\,100 \text{ Pa}$; $\rho_s = 1,225 \text{ kg/m}^3$.

— Fase A — Densità reale in quota

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{84553}{287 \times 278} = 1,060 \text{ kg/m}^3.$$

— Fase B — Velocità vera

$$V_{\text{true}} = \sqrt{\frac{2(86100 - 84553)}{1,060}} = 54,0 \text{ m/s} \approx 195 \text{ km/h}.$$

Con $a \approx 334 \text{ m/s}$, $M \approx 0,16$: l'ipotesi incompressibile è pienamente giustificata.

— Fase C — Velocità equivalente

$$V_e = \sqrt{\frac{2 \times 1547}{1,225}} = 50,3 \text{ m/s}.$$

Lo strumento “legge” 50 m/s mentre l'aereo ne fa davvero 54: la differenza cresce con la quota.

Risultato. $V_{\text{true}} = 54,0 \text{ m/s}$, $V_e = 50,3 \text{ m/s}$. Al pilota però V_e non dispiace affatto: come vedremo nel paragrafo 10.6, è V_e — non V_{true} — a misurare la pressione dinamica, cioè ciò che l'ala “sente”.

Esercizio 21 — Pitot in galleria chiusa

Nella camera di prova di una galleria subsonica la pressione statica è $p = 0,98 \text{ atm}$ e la temperatura $T = 300 \text{ K}$. Un Pitot al centro della camera misura $p_0 = 1,031 \times 10^5 \text{ Pa}$. Calcolare la velocità del flusso.

Dati. $p = 0,98 \times 101325 = 99\,299 \text{ Pa}$; $T = 300 \text{ K}$; $p_0 = 1,031 \times 10^5 \text{ Pa}$.

— Fase A — Densità e velocità

$$\rho = \frac{99299}{287 \times 300} = 1,153 \text{ kg/m}^3, \quad V = \sqrt{\frac{2(103100 - 99299)}{1,153}} = 81,2 \text{ m/s}.$$

Risultato. $V = 81,2 \text{ m/s}$ ($M \approx 0,23$: modello incomprimibile adeguato).

Esercizio 22 — Problema inverso: che cosa legge il Pitot?

Una galleria a circuito aperto lavora con aria a $p = 1 \text{ atm}$, $T = 288 \text{ K}$, e la velocità in camera è $V = 110 \text{ m/s}$. Quale pressione totale legge un Pitot immerso nel flusso?

Dati. $p = 101\,325 \text{ Pa}$; $T = 288 \text{ K}$; $V = 110 \text{ m/s}$.

— Fase A — Dalla velocità alla pressione totale

$$\rho = \frac{101325}{287 \times 288} = 1,226 \text{ kg/m}^3,$$

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho V^2 = 101325 + 0,5 \times 1,226 \times 110^2 = 108\,741 \text{ Pa} = 1,073 \text{ atm}.$$

Risultato. $p_0 = 1,073 \text{ atm}$: a 110 m/s il ristagno vale appena il 7,3 % in più della statica. Le variazioni di pressione in campo subsonico basso sono *piccole* rispetto al livello assoluto.

Esercizio 23 — Pressione dinamica a livello del mare

Calcolare pressione dinamica e pressione totale per un velivolo a $V = 100 \text{ m/s}$ a livello del mare standard.

Dati. $V = 100 \text{ m/s}$; $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$; $p = 101\,325 \text{ Pa}$.

— Fase A — Calcolo diretto

$$q = \frac{1}{2} \times 1,225 \times 100^2 = 6125 \text{ Pa}, \quad p_0 = p + q = 107\,450 \text{ Pa}.$$

Risultato. $q = 6125 \text{ Pa}$, $p_0 = 107\,450 \text{ Pa}$. Un numero da ricordare: a 100 m/s la *pressione dinamica al livello del mare* è circa il 6 % di quella atmosferica. È l'ordine di grandezza dei carichi aerodinamici sulle superfici di un velivolo leggero.

10.3 Regime subsonico comprimibile ($0,3 < M < 1$)

Oltre $M = 0,3$ Bernoulli perde colpi. Il ristagno resta isentropico, quindi usiamo energia + isentropica. Dall'equazione dell'energia fra il punto generico (T, V) e il ristagno ($T_0, V = 0$):

$$c_p T + \frac{1}{2} V^2 = c_p T_0 \Rightarrow \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{V^2}{2c_p T}.$$

Con $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$ e $a^2 = \gamma R T$:

$$\frac{V^2}{2c_p T} = \frac{(\gamma - 1)V^2}{2\gamma R T} = \frac{\gamma - 1}{2} M^2,$$

e applicando poi le relazioni isentropiche:

Rapporti di ristagno in funzione del Mach

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad \frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)}$$

Per l'aria ($\gamma = 1,4$): $T_0/T = 1 + 0,2M^2$, $p_0/p = (1 + 0,2M^2)^{3,5}$, $\rho_0/\rho = (1 + 0,2M^2)^{2,5}$. Valgono per qualunque M purché il ristagno sia isentropico.

Invertendo la seconda si ottiene la formula del *machmetro*: lo strumento che dal rapporto p_0/p ricava direttamente il Mach di volo,

$$M^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right].$$

La velocità vera segue da $V = Ma = M\sqrt{\gamma RT}$: servono *due* misure (p_0/p e T). L'anemometro di bordo, che la temperatura non la conosce, indica invece la *velocità calibrata* V_{cal} , ottenuta inserendo nella formula i valori standard al livello del mare ($a_s = 340,3$ m/s, $p_s = 101\,325$ Pa) e la differenza misurata $p_0 - p$:

$$V_{\text{cal}}^2 = \frac{2a_s^2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_0 - p}{p_s} + 1 \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right].$$

Esercizio 24 — Liner in crociera: Mach, velocità vera e calibrata

Un trireattore vola a 10 000 m ($p = 26\,430$ Pa da tabella ISA). Il Pitot misura $p_0 = 4,24 \times 10^4$ Pa e il termometro esterno $T = 230$ K. Calcolare Mach, velocità vera e velocità calibrata; confrontare infine con il risultato (errato) di Bernoulli.

Dati. $p = 26\,430$ Pa; $p_0 = 42\,400$ Pa; $T = 230$ K; $a_s = 340,3$ m/s; $p_s = 101\,325$ Pa.

— Fase A — Numero di Mach dal rapporto delle pressioni

$$\frac{p_0}{p} = \frac{42400}{26430} = 1,604,$$

$$M^2 = \frac{2}{0,4} [1,604^{0,2857} - 1] = 5(1,1445 - 1) = 0,7226 \Rightarrow M = 0,850.$$

— Fase B — Velocità vera

$$a = \sqrt{1,4 \times 287 \times 230} = 304,0 \text{ m/s}, \quad V = Ma = 0,850 \times 304,0 = 258,5 \text{ m/s}.$$

— Fase C — Velocità calibrata (lo strumento di bordo)

$$V_{\text{cal}} = \sqrt{\frac{2 \times 340,3^2}{0,4} \left[\left(\frac{15970}{101325} + 1 \right)^{0,2857} - 1 \right]} = 157 \text{ m/s}.$$

Lo strumento indica 157 m/s contro i 258 m/s reali: in quota la differenza è enorme, e il pilota la corregge con il computer dati aria (o, ai vecchi tempi, con il regolo).

— Fase D — Il confronto con Bernoulli (metodo errato)

Con $\rho = p/(RT) = 0,4004$ kg/m³:

$$V^{(\text{err})} = \sqrt{\frac{2(42400 - 26430)}{0,4004}} = 282 \text{ m/s},$$

il 9,3% in eccesso. A $M = 0,85$ Bernoulli non è un'approssimazione: è un errore.

Risultato. $M = 0,850$; $V = 258,5$ m/s; $V_{\text{cal}} = 157$ m/s. In regime comprimibile il Pitot, da solo, misura il *Mach*; per la velocità serve anche la temperatura.

Esercizio 25 — Condizioni di ristagno su un liner a Mach 0,78

Un bimotore vola a $M = 0,78$ a livello del mare standard. Calcolare temperatura, pressione e densità di ristagno sul bordo d'attacco.

Dati. $M = 0,78$; $T = 288,15$ K; $p = 101\,325$ Pa; $\rho = 1,225$ kg/m³.

— Fase A — Fattore di ristagno

$$1 + 0,2 M^2 = 1 + 0,2 \times 0,6084 = 1,1217.$$

— Fase B — Le tre grandezze di ristagno

$$T_0 = 288,15 \times 1,1217 = 323,2 \text{ K } (= 50^\circ \text{C}),$$

$$p_0 = 101325 \times 1,1217^{3,5} = 1,514 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad \rho_0 = 1,225 \times 1,1217^{2,5} = 1,632 \text{ kg/m}^3.$$

Verifica di coerenza con l'equazione di stato: $p_0/(R T_0) = 151400/(287 \times 323,2) = 1,632 \text{ kg/m}^3 \checkmark$

Risultato. $T_0 = 323,2$ K, $p_0 = 1,514 \times 10^5$ Pa, $\rho_0 = 1,632$ kg/m³. Sul punto di ristagno l'aria è di 35 °C più calda e del 33 % più densa che nella corrente indisturbata.

Esercizio 26 — Attenzione: in comprimibile q non è più po meno p

In un punto di un flusso d'aria: $V = 300$ m/s, $\rho = 1,2$ kg/m³, $M = 0,9$. Calcolare pressione dinamica, pressione statica e pressione totale, e confrontare q con $p_0 - p$.

Dati. $V = 300$ m/s; $\rho = 1,2$ kg/m³; $M = 0,9$.

— Fase A — Pressione dinamica (vale per definizione)

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 = 0,5 \times 1,2 \times 300^2 = 5,40 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

La definizione $q = \frac{1}{2} \rho V^2$ vale a *qualunque* Mach.

— Fase B — Statica e totale

Da $M = V/a$: $a = 300/0,9 = 333,3$ m/s, quindi $T = a^2/(\gamma R) = 276,5$ K e $p = \rho R T = 9,524 \times 10^4$ Pa. La totale:

$$p_0 = p(1 + 0,2 \times 0,81)^{3,5} = 1,611 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

— Fase C — Il confronto

$$p_0 - p = 6,58 \times 10^4 \text{ Pa} \neq q = 5,40 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

La differenza è il 22 %: l'uguaglianza $p_0 = p + q$ era una *proprietà del solo regime incomprimibile*, non una legge generale.

Risultato. $q = 5,40 \times 10^4$ Pa, $p = 9,52 \times 10^4$ Pa, $p_0 = 1,611 \times 10^5$ Pa. In comprimibile $p_0 - p > q$, e lo scarto cresce con il Mach.

La pressione dinamica in funzione di p e M

Nei flussi ad alta velocità conviene esprimere q con le variabili che si usano davvero, pressione statica e Mach. Da $q = \frac{1}{2}\rho V^2$, con $\rho = p/(RT)$ e $V^2 = M^2\gamma RT$:

$$q = \frac{1}{2} \frac{p}{RT} M^2 \gamma RT \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\gamma}{2} p M^2 = 0,7 p M^2 \quad (\text{aria})$$

Verifica sull'esercizio precedente: $q = 0,7 \times 9,524 \times 10^4 \times 0,81 = 5,40 \times 10^4 \text{ Pa}$ ✓. La formula vale a *qualunque* Mach (è pura algebra sulla definizione) ed è la via più rapida per la pressione dinamica in regime supersonico e ipersonico.

10.4 Regime supersonico: la formula di Rayleigh

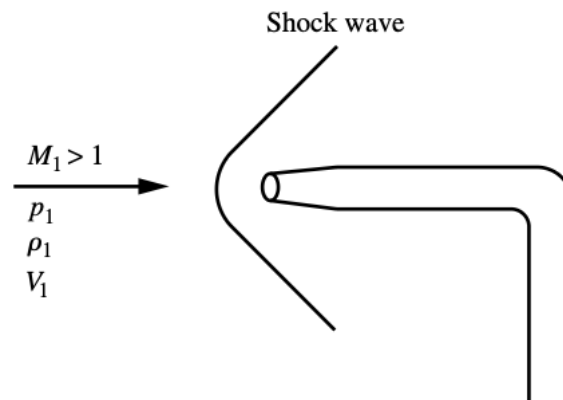


Figura 7. In supersonico, davanti al Pitot si forma un'onda d'urto: il ristagno non è più isentropico dall'infinito.

Quando $M_1 > 1$, davanti al tubo di Pitot si forma un'**onda d'urto**: una superficie sottilissima (spessore dell'ordine di 10^{-7} m) attraverso cui le proprietà del flusso saltano in modo quasi discontinuo. L'attraversamento dell'urto è un processo con fortissimi attriti interni e conduzione termica: *non* è isentropico. Attraverso un urto normale:

- il Mach crolla da $M_1 > 1$ a $M_2 < 1$;
- pressione statica, temperatura e densità *aumentano*;
- la pressione totale *diminuisce* ($p_{0,2} < p_{0,1}$): è il prezzo entropico dell'urto;
- la temperatura totale resta invariata (il processo è comunque adiabatico).

Il Pitot misura dunque la pressione di ristagno *a valle dell'urto*, $p_{0,2}$. Combinando le relazioni dell'urto normale con il ristagno isentropico del tratto subsonico a valle si ottiene:

Formula di Rayleigh per il Pitot supersonico

$$\frac{p_{0,2}}{p_1} = \left[\frac{(\gamma + 1)^2 M_1^2}{4\gamma M_1^2 - 2(\gamma - 1)} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \cdot \frac{1 - \gamma + 2\gamma M_1^2}{\gamma + 1}$$

Lega la lettura del Pitot $p_{0,2}$ alla statica indisturbata p_1 e al Mach di volo M_1 . È la formula di taratura di ogni machmetro supersonico.

Esercizio 27 — Pitot dietro l'urto: calcolo diretto

Un velivolo sperimentale vola dove $T_1 = 250$ K e $p_1 = 1,2 \times 10^4$ Pa, a $V_1 = 900$ m/s. Che pressione legge il Pitot? Quanto sbaglierebbe chi usasse (a torto) la formula isentropica?

Dati. $T_1 = 250$ K; $p_1 = 1,2 \times 10^4$ Pa; $V_1 = 900$ m/s.

— Fase A — Mach di volo

$$a_1 = \sqrt{1,4 \times 287 \times 250} = 316,9 \text{ m/s}, \quad M_1 = \frac{900}{316,9} = 2,84.$$

— Fase B — Formula di Rayleigh

Con $M_1^2 = 8,066$ e $\gamma = 1,4$:

$$\frac{p_{0,2}}{p_1} = \left[\frac{5,76 \times 8,066}{5,6 \times 8,066 - 0,8} \right]^{3,5} \times \frac{-0,4 + 2,8 \times 8,066}{2,4} = 10,86,$$

$$p_{0,2} = 10,86 \times 1,2 \times 10^4 = 1,30 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

— Fase C — L'errore isentropico

Ignorando l'urto: $p_0 = p_1(1 + 0,2M_1^2)^{3,5} = 3,46 \times 10^5$ Pa, 2,7 volte il valore vero. L'urto "brucia" quasi due terzi della pressione totale: dimenticarlo non è un dettaglio.

Risultato. $p_{0,2} = 1,30 \times 10^5$ Pa con $M_1 = 2,84$. La perdita di pressione totale attraverso l'urto è il motivo per cui le prese d'aria dei supersonici sono progettate per decelerare il flusso con urti obliqui deboli anziché con un unico urto normale.

Esercizio 28 — Problema inverso: il Mach dal Pitot (procedura iterativa)

A 8000 m di quota ($p_1 = 3,56 \times 10^4$ Pa da tabella ISA) il Pitot di un caccia legge $p_{0,2} = 9,27 \times 10^4$ Pa. Determinare il Mach di volo.

Dati. $p_1 = 3,56 \times 10^4$ Pa; $p_{0,2} = 9,27 \times 10^4$ Pa $\Rightarrow p_{0,2}/p_1 = 2,604$.

— Fase A — Perché serve iterare

La formula di Rayleigh dà $p_{0,2}/p_1$ noto M_1 , ma non si inverte in forma chiusa. Procediamo per tentativi, come si fa con le tabelle dell'urto normale.

— Fase B — Tabella di tentativi

M_1 (tentativo)	$p_{0,2}/p_1$ (Rayleigh)
1,20	2,408
1,25	2,557
1,26	2,588
1,27	2,619
1,30	2,714

Il valore cercato 2,604 cade fra $M_1 = 1,26$ e $M_1 = 1,27$; interpolando linearmente: $M_1 \approx 1,265$.

Risultato. $M_1 \approx 1,265$: supersonico basso. È esattamente il calcolo che il computer dati aria esegue, in continuo, per pilotare il machmetro.

10.5 Riepilogo: tre regimi, tre formule

Il Pitot nei tre regimi

Regime	Che cosa si ricava	Formula
$M < 0,3$	V direttamente	$V = \sqrt{2(p_0 - p)/\rho}$
$0,3 < M < 1$	prima M , poi $V = Ma$	$p_0/p = (1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)^{\gamma/(\gamma-1)}$
$M > 1$	M (iterando), poi $V = Ma$	formula di Rayleigh

In tutti i casi la temperatura statica è necessaria per passare dal Mach alla velocità vera.

10.6 Due approfondimenti utili

I. p_0 e T_0 sono costanti lungo un flusso isentropico. Le grandezze di ristagno sono *proprietà locali*: in ogni punto del campo si può immaginare di rallentare isentropicamente il flusso e definire p_0 , T_0 , ρ_0 . Se però l'intero campo è isentropico (adiabatico e senza attrito), allora p_0 e T_0 hanno *lo stesso valore ovunque*: sono gli invarianti del flusso, la “carta d'identità” della corrente. Un'onda d'urto distrugge l'invarianza di p_0 (che cala) ma non quella di T_0 (l'urto è adiabatico). Questa proprietà è lo strumento di lavoro principale negli ugelli della sezione II. L'esercizio che segue la mette subito al lavoro, rifacendo un problema già risolto con un metodo più fondamentale.

Esercizio 29 — Il profilo comprimibile, rivisitato: metodo dei rapporti

Riprendere i dati dell'esercizio sul profilo in regime comprimibile (sezione 6): $p_\infty = 101\,325$ Pa, $T_\infty = 288,15$ K, $V_\infty = 225$ m/s, $p_A = 7,16 \times 10^4$ Pa. Calcolare questa volta anche il *numero di Mach* nel punto A, usando esclusivamente i rapporti di ristagno e l'invarianza di p_0 e T_0 — senza mai usare c_p .

Dati. $p_\infty = 101\,325$ Pa; $T_\infty = 288,15$ K; $V_\infty = 225$ m/s; $p_A = 7,16 \times 10^4$ Pa; $\gamma = 1,4$.

— Fase A — Mach della corrente indisturbata

$$a_\infty = \sqrt{1,4 \times 287 \times 288,15} = 340,3 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad M_\infty = \frac{225}{340,3} = 0,661.$$

— Fase B — Gli invarianti del flusso

$$T_0 = T_\infty(1 + 0,2 M_\infty^2) = 288,15 \times 1,0874 = 313,3 \text{ K},$$

$$p_0 = p_\infty(1,0874)^{3,5} = 1,359 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Il flusso sul profilo è isentropico: questi due valori valgono *in ogni punto*, incluso A.

— Fase C — Mach nel punto A

Applichiamo il rapporto di ristagno in A, dove ora p_0 è noto:

$$\frac{p_0}{p_A} = \frac{135900}{71600} = 1,898 \quad \Rightarrow \quad M_A = \sqrt{5 [(1,898)^{0,2857} - 1]} = 1,00.$$

Il punto A è in condizioni *soniche*: il profilo sta volando al Mach critico.

— Fase D — Temperatura e velocità (chiusura e verifica)

$$T_A = \frac{T_0}{1 + 0,2 M_A^2} = \frac{313,3}{1,2008} = 261 \text{ K}, \quad V_A = M_A \sqrt{\gamma R T_A} = 324 \text{ m/s},$$

in pieno accordo con il risultato ottenuto per via energetica (261 K e 325 m/s: lo scarto è da arrotondamenti).

Risultato. $M_\infty = 0,661$, $M_A \approx 1$, $T_A = 261$ K, $V_A \approx 324$ m/s. Da notare che c_p non è mai comparso: per i flussi isentropici bastano γ e M — i *parametri di similitudine* dell'aerodinamica comprimibile. È il metodo più generale, e quello che useremo sistematicamente negli ugelli.

2. La velocità equivalente in generale. In regime comprimibile la definizione operativa di velocità equivalente diventa

$$V_e = V \sqrt{\frac{\rho}{\rho_s}},$$

che coincide con quella incomprimibile del paragrafo 10.2 e ne conserva il significato profondo: *a pari V_e , pari pressione dinamica*. Infatti $\frac{1}{2}\rho_s V_e^2 = \frac{1}{2}\rho V^2 = q$. Esempio: un caccia a $V = 300$ m/s a 7000 m ($\rho = 0,59$ kg/m³) ha

$$V_e = 300 \sqrt{\frac{0,59}{1,225}} = 208 \text{ m/s},$$

e la sua pressione dinamica ($q = 26,6$ kPa) è identica a quella di un volo a 208 m/s al livello del mare. Poiché portanza e carichi strutturali dipendono da q , la velocità equivalente è la lingua franca fra prove in galleria, calcoli strutturali e manuale di volo.

Il Pitot visto dall'officina: allineamento, posizione, ghiaccio

Tre fatti pratici completano la teoria, e li ritroverete sviluppati nella monografia della serie dedicata agli strumenti di bordo.

Primo: il Pitot perdona, la statica no. La presa totale legge la componente della velocità lungo il proprio asse: un disallineamento θ costa un fattore $\cos \theta$, che vicino allo zero è piattissimo ($\cos 10^\circ = 0,985$: errore dell'1,5%). La presa *statica*, invece, viene sporcata dalla componente normale, che va come $\sin \theta$ — ripido vicino allo zero ($\sin 10^\circ = 0,174$: 17%). Per questo la statica richiede zone della fusoliera scelte con ore di galleria e prove in volo, e *due* prese simmetriche sui fianchi di cui si prende la media, mentre il Pitot basta puntarlo ragionevolmente bene.

Secondo: l'anemometro è lo strumento più esigente. A 50 m/s la pressione dinamica vale appena $q = \frac{1}{2} \times 1,225 \times 50^2 \approx 1,5$ kPa: l'1,5% della statica. Un errore di pochi hPa sulla presa statica, irrilevante per l'altimetro, diventa un errore a due cifre percentuali sulla q — e quindi sulla velocità indicata vicino allo stallo.

Terzo: il ghiaccio. Un Pitot ostruito dal ghiaccio smette di misurare la pressione totale; peggio, se l'aria resta intrappolata *dentro*, lo strumento si mette a rispondere alla sola statica e l'anemometro si comporta da altimetro: indicazione che sale in salita e scende in discesa, qualunque sia la velocità vera. È per questo che le sonde sono riscaldate elettricamente, e che il riscaldamento Pitot è in cima alla *checklist* prima di entrare in nube.

Raccordo

Sappiamo misurare il volo subsonico e supersonico. Ma come si *genera* in laboratorio una corrente supersonica? Non basta un convergente: serve una geometria sorprendente, il condotto convergente-divergente.

11 Gallerie supersoniche e motori a razzo

Bussola

Per superare Mach 1 in un condotto serve un'idea controintuitiva: prima stringere e poi *allargare*. In questa sezione ricaviamo la relazione area-velocità, capiamo perché l'ugello convergente-divergente è l'unica strada verso il supersonico, e la applichiamo ai due impieghi principali: la galleria supersonica e il motore a razzo.

11.1 La relazione area-velocità

Per un flusso quasi-unidimensionale, isentropico e stazionario, differenziamo la continuità $\rho AV = \text{cost}$ in forma logaritmica:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0.$$

Dall'equazione di Eulero, $dp = -\rho V dV$, e dalla definizione di velocità del suono in flusso isentropico, $dp = a^2 d\rho$:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{\rho a^2} = -\frac{V dV}{a^2} = -M^2 \frac{dV}{V}.$$

Sostituendo nella continuità differenziata:

Relazione area-velocità

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dV}{V}$$

Tre casi:

- $M < 1$: il fattore $(M^2 - 1)$ è negativo $\Rightarrow$ per accelerare ($dV > 0$) serve $dA < 0$: *il subsonico accelera nei convergenti* (comportamento “da Venturi”, quello dell'intuizione).
- $M > 1$: il fattore è positivo $\Rightarrow$ per accelerare serve $dA > 0$: *il supersonico accelera nei divergenti*. L'intuizione qui tradisce: la densità crolla così in fretta che, per conservare la portata, l'area deve crescere insieme alla velocità.
- $M = 1$: $dA = 0$: la condizione sonica può esistere solo dove l'area è stazionaria, cioè in una *gola* (sezione di area minima).

Attenzione

La gola è condizione *necessaria*, non sufficiente, per $M = 1$: se il salto di pressione imposto è piccolo, nella gola il flusso resta subsonico ($M_{\text{gola}} < 1$) e il condotto si comporta da semplice Venturi. È il rapporto p_0/p_{uscita} a decidere se la gola “sonica” davvero.

11.2 L'ugello convergente-divergente

La conseguenza è obbligata: per portare un gas da fermo (serbatoio, condizioni di ristagno p_0, T_0) a velocità supersonica serve

convergente (accelera il subsonico) $\rightarrow$ gola ($M = 1$) $\rightarrow$ divergente (accelera il supersonico),

il cosiddetto **ugello di de Laval** o convergente-divergente (C-D). Le condizioni nella gola sonica si dicono *critiche* e si indicano con l'asterisco: p^* , T^* , ρ^* , a^* . Ponendo $M = 1$ nei rapporti di ristagno:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1} = 0,833 \quad \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} = 0,528 \quad (\gamma = 1,4).$$

Il Mach di uscita non dipende da quanto “spinge” il serbatoio in assoluto, ma dalla *geometria*: dal rapporto fra area locale e area di gola. Combinando continuità fra gola e sezione generica con le relazioni isentropiche si ottiene:

Relazione area-Mach

$$\left(\frac{A}{A^*} \right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}$$

A ogni rapporto d'area $A/A^* > 1$ corrispondono *due* soluzioni: una subsonica e una supersonica. Quale si realizza dipende dalla pressione imposta all'uscita. Nel funzionamento supersonico di progetto, il Mach cresce monotonamente lungo tutto l'ugello e la pressione statica cala di conseguenza.

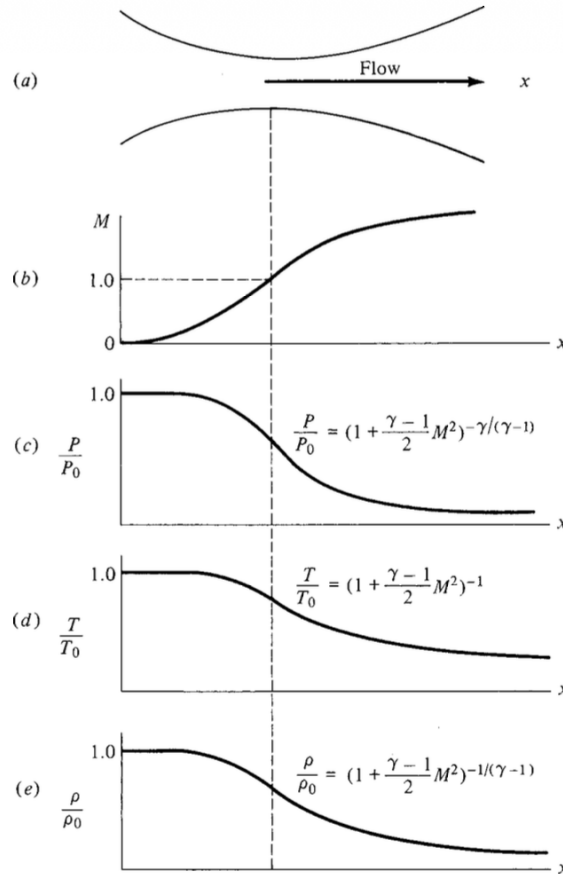


Figura 8. Ugello C-D in funzionamento supersonico: M cresce da ≈ 0 a M_c , la pressione statica crolla.

Le grandezze di ristagno p_0 e T_0 , invarianti del flusso isentropico (paragrafo 10.6), sono le “sorgenti” da cui tutto discende: note p_0 , T_0 e la geometria, l'intero campo è determinato.

Esercizio 30 — Progetto di massima di una galleria supersonica

Si vuole una galleria con camera di prova a $M_e = 2$ in condizioni atmosferiche standard ($p_e = 101\,325$ Pa, $T_e = 288,15$ K). Determinare le condizioni di ristagno richieste nel serbatoio e il rapporto d'area ugello.

Dati. $M_e = 2$; $p_e = 101\,325$ Pa; $T_e = 288,15$ K; $\gamma = 1,4$.

— Fase A — Serbatoio: risalire al ristagno

Il flusso serbatoio $\rightarrow$ camera è isentropico, quindi p_0 e T_0 del serbatoio sono le grandezze di ristagno della camera di prova:

$$T_0 = T_e (1 + 0,2 \times 4) = 288,15 \times 1,8 = 518,7 \text{ K},$$

$$p_0 = p_e (1,8)^{3,5} = 101325 \times 7,824 = 7,93 \times 10^5 \text{ Pa} = 7,82 \text{ atm}.$$

— Fase B — Geometria dell'ugello

Dalla relazione area-Mach con $M = 2$:

$$\frac{A_e}{A^*} = 1,688.$$

La camera di prova deve avere area circa il 69 % più grande della gola.

Risultato. Serbatoio a $p_0 = 7,82$ atm e $T_0 = 519$ K; $A_e/A^* = 1,688$. Il riscaldamento del serbatoio non è un optional: senza, l'espansione porterebbe la camera di prova a $T_e = T_0/1,8 = 160$ K con rischio di condensazione e liquefazione dell'aria.

Esercizio 31 — Modello a muso tozzo in galleria Mach 3

In una galleria supersonica il serbatoio è a $T_0 = 333,3$ K e $p_0 = 10$ atm; il Mach in camera di prova è $M_e = 3$. Nella camera viene inserito un modello a muso arrotondato (tozzo), davanti al quale si forma un'onda d'urto curva. Calcolare pressione, temperatura e densità nel punto di ristagno sul muso del modello.

Dati. $T_0 = 333,3$ K; $p_0 = 10$ atm; $M_e = 3$; $\gamma = 1,4$.

— Fase A — Condizioni in camera di prova (flusso isentropico)

Dal serbatoio alla camera il flusso è isentropico, quindi p_0 e T_0 sono le grandezze di ristagno della corrente in camera. Con $M_e = 3$, $1 + 0,2 M_e^2 = 2,8$:

$$p_e = \frac{p_0}{2,8^{3,5}} = \frac{10}{36,73} = 0,272 \text{ atm} = 2,76 \times 10^4 \text{ Pa}, \quad T_e = \frac{333,3}{2,8} = 119 \text{ K}.$$

La camera è criogenica: -154 °C. È il prezzo dell'espansione a Mach 3 partendo da un serbatoio "tiepido".

— Fase B — Pressione di ristagno sul muso (Rayleigh)

La linea di corrente di ristagno attraversa il tratto *normale* dell'urto curvo e poi comprime isentropicamente fino a fermarsi: è la stessa situazione della bocca di un Pitot supersonico (sezione 10). Dalla formula di Rayleigh con $M_e = 3$:

$$\frac{p_{\text{stag}}}{p_e} = 12,06 \quad \Rightarrow \quad p_{\text{stag}} = 12,06 \times 0,272 = 3,28 \text{ atm} = 3,33 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Si noti la perdita entropica: il ristagno isentropico dal serbatoio varrebbe $p_0 = 10$ atm; l'urto ne ha distrutto i due terzi.

— Fase C — Temperatura e densità di ristagno

L'urto è adiabatico: la *temperatura* totale non cambia,

$$T_{\text{stag}} = T_0 = 333,3 \text{ K},$$

e la densità segue dall'equazione di stato:

$$\rho_{\text{stag}} = \frac{p_{\text{stag}}}{R T_{\text{stag}}} = \frac{3,33 \times 10^5}{287 \times 333,3} = 3,48 \text{ kg/m}^3.$$

Risultato. $p_{\text{stag}} = 3,28 \text{ atm}$, $T_{\text{stag}} = 333,3 \text{ K}$, $\rho_{\text{stag}} = 3,48 \text{ kg/m}^3$. Il contrasto fra i due invarianti è la lezione: attraverso l'urto T_0 si conserva, p_0 no.

Esercizio 32 — Ugello di un motore a razzo: spinta in vista

Nella camera di combustione di un razzo: $T_0 = 3144 \text{ K}$, $p_0 = 20 \text{ atm}$. I gas combusti hanno $R = 378 \text{ J/(kg K)}$ e $\gamma = 1,26$. L'ugello espande fino a $p_e = 1 \text{ atm}$; l'area di gola è $A^* = 0,1 \text{ m}^2$. Calcolare la velocità di efflusso e la portata in massa.

Dati. $T_0 = 3144 \text{ K}$; $p_0 = 20 \text{ atm}$; $p_e = 1 \text{ atm}$; $R = 378 \text{ J/(kg K)}$; $\gamma = 1,26$; $A^* = 0,1 \text{ m}^2$.

— Fase A — Temperatura di uscita (isentropica)

$$T_e = T_0 \left(\frac{p_e}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 3144 \times \left(\frac{1}{20} \right)^{0,2063} = 1694 \text{ K}.$$

— Fase B — Mach e velocità di uscita (energia)

$$M_e = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{T_0}{T_e} - 1 \right)} = \sqrt{\frac{2}{0,26} (1,856 - 1)} = 2,57,$$

$$a_e = \sqrt{1,26 \times 378 \times 1694} = 898 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad V_e = M_e a_e = 2305 \text{ m/s}.$$

— Fase C — Portata: si calcola alla gola

La portata è la stessa in ogni sezione: conviene valutarla alla gola, dove $M = 1$ e tutto è noto dai rapporti critici (con $\gamma = 1,26$: $T^*/T_0 = 2/2,26 = 0,885$; $p^*/p_0 = 0,885^{4,846} = 0,553$):

$$T^* = 2782 \text{ K}, \quad p^* = 1,121 \times 10^6 \text{ Pa}, \quad \rho^* = \frac{p^*}{R T^*} = 1,066 \text{ kg/m}^3,$$

$$a^* = \sqrt{\gamma R T^*} = 1151 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \dot{m} = \rho^* A^* a^* = 1,066 \times 0,1 \times 1151 = 122,7 \text{ kg/s}.$$

Risultato. $V_e = 2305 \text{ m/s}$, $\dot{m} = 122,7 \text{ kg/s}$. La spinta corrispondente, $F \approx \dot{m} V_e \approx 283 \text{ kN}$, è dell'ordine di quella di un motore di primo stadio di un piccolo lanciatore. Tutto da quattro equazioni algebriche.

11.3 Il diffusore supersonico e la seconda gola

Una galleria supersonica non finisce nella camera di prova: il flusso a $M > 1$ va rallentato e riportato a pressione ambiente. Farlo con un unico urto normale a valle della camera sprecherebbe troppa pressione totale; si usa allora un **diffusore** convergente-divergente rovesciato, con una *seconda gola* in cui il flusso ripassa per $M = 1$ attraverso un sistema di urti obliqui deboli.

La seconda gola deve essere *più grande* della prima. La dimostrazione è elegante: alla prima gola e alla seconda vale $M = 1$, quindi la portata si scrive $\dot{m} = \rho^* a^* A_t$ in entrambe. Ma $\rho^* a^*$ dipende solo da p_0 e T_0 ; attraverso gli urti T_0 non cambia mentre p_0 cala, e si dimostra che $\rho^* a^* \propto p_0$ a pari T_0 . Dalla conservazione

della portata:

$$\frac{A_{t,2}}{A_{t,1}} = \frac{p_{0,1}}{p_{0,2}} > 1$$

Più pressione totale si perde negli urti, più la seconda gola deve allargarsi per far passare la stessa portata.

Esercizio 33 — Dimensionamento della seconda gola

In una galleria, il serbatoio è a $p_{0,1} = 5$ atm; a valle del sistema di urti del diffusore, nella sezione dove $M = 1$, la pressione statica misurata è $p_2 = 0,87$ atm. La prima gola ha $A_{t,1} = 100$ cm². Dimensionare la seconda gola.

Dati. $p_{0,1} = 5$ atm; alla seconda gola: $M = 1$, $p_2 = 0,87$ atm; $A_{t,1} = 100$ cm².

— Fase A — Pressione totale residua

Alla seconda gola $M = 1$, quindi

$$p_{0,2} = p_2 (1 + 0,2)^{3,5} = 0,87 \times 1,893 = 1,647 \text{ atm.}$$

Il sistema di urti ha distrutto il 67 % della pressione totale iniziale.

— Fase B — Area della seconda gola

$$A_{t,2} = A_{t,1} \frac{p_{0,1}}{p_{0,2}} = 100 \times \frac{5}{1,647} = 304 \text{ cm}^2.$$

Risultato. $A_{t,2} \approx 304$ cm²: tre volte la prima gola. Il rapporto fra le gole è un “entropimetro” geometrico: misura direttamente le perdite del diffusore.

11.4 Cenno alle gallerie ipersoniche

Le stesse relazioni governano le gallerie *ipersoniche* ($M_e \geq 5$), ma con numeri che diventano estremi. Per un ugello a Mach 10 la relazione area–Mach dà $A_e/A^* \approx 536$: servono ugelli lunghissimi ad altissimo rapporto di espansione. Se si vuole riprodurre in camera di prova l'aria di una quota di 55 km ($p \approx 43$ Pa, $T \approx 261$ K), il serbatoio deve stare a $p_0 = p(1 + 0,2M^2)^{3,5} \approx 18$ atm e soprattutto a $T_0 = 21 T \approx 5500$ K — ben oltre la fusione di ogni acciaio. Per questo le gallerie ipersoniche ricorrono a soluzioni speciali: riscaldamento ad arco o a impulso, funzionamento intermittente di pochi millisecondi, gas di prova alternativi. Un fatto curioso e istruttivo: raddoppiando il Mach di uscita da 10 a 20 (a pari serbatoio) la *velocità* di uscita cresce di appena il 2 %, perché è già vicina al limite $\sqrt{2c_p T_0}$; a crescere è il Mach, via il crollo della temperatura statica ($T_e = T_0/81$ a $M = 20$) e quindi della velocità del suono locale. I problemi proposti in coda alla monografia (sezione 22) mettono i numeri a questo cenno.

Raccordo

Abbiamo spinto il modello isentropico fino ai suoi frutti più spettacolari. Prima di introdurre l'attrito, chiudiamo un conto lasciato aperto all'inizio: *quando* è lecito trattare l'aria come incompressibile?

12 Quando serve davvero la comprimibilità?

Bussola

Nel sezione 2 abbiamo promesso una giustificazione della soglia “ $M = 0,3$ ovvero circa 100 m/s”. Ora abbiamo lo strumento per mantenerla: il rapporto isentropico ρ_0/ρ .

Consideriamo l'escursione massima di densità possibile in un campo di moto: quella fra la corrente (ρ, M) e un punto di ristagno (ρ_0). Dal rapporto isentropico:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma - 1)} = (1 + 0,2 M^2)^{2,5}.$$

Tabuliamo la variazione relativa massima $\Delta\rho/\rho_0 = 1 - \rho/\rho_0$:

M	ρ_0/ρ	variazione massima di densità
0,1	1,005	0,5 %
0,2	1,020	2,0 %
0,3	1,046	4,4 %
0,5	1,130	11,5 %

La soglia dei M pari a 0,3

Fino a $M = 0,3$ la densità varia al più del 4–5 % *nell'intero campo di moto*: assumere $\rho = \text{cost}$ introduce errori dello stesso ordine, accettabili in quasi tutte le applicazioni. A livello del mare $M = 0,3$ corrisponde a $V \approx 102$ m/s (≈ 367 km/h): ecco l'origine della regola pratica dei “100 m/s”. Oltre, la variazione cresce con il quadrato del Mach e il modello incomprimibile va abbandonato.

Raccordo

Il quadro non viscoso è completo. Ma un intero capitolo della fisica del volo è rimasto fuori dalla porta: l'attrito. È ora di farlo entrare — da un sottile strato alla parete che decide resistenza e stallo.

13 Il flusso viscoso: lo strato limite

Bussola

Un modello senza attrito prevede resistenza nulla per un corpo immerso in una corrente: il celebre paradosso di d'Alembert, smentito da qualunque mano fuori dal finestrino. La soluzione del paradosso sta in uno strato sottilissimo di aria “frenata” aderente alla superficie: lo strato limite. Qui ne definiamo le grandezze fondamentali: spessore, sforzo di taglio, numero di Reynolds.

13.1 Il paradosso e la condizione di aderenza



Figura 9. Flusso *ideale* attorno a una sfera: la perfetta simmetria monte–valle implica resistenza nulla (paradosso di d'Alembert).

Nel flusso ideale attorno a una sfera le linee di corrente sono perfettamente simmetriche: la distribuzione di pressione a valle rispecchia quella a monte e la risultante in direzione del moto è *zero*. L'esperienza dice il contrario. Il colpevole è l'attrito interno del fluido — la **viscosità** — che il modello ideale trascura.

Il punto di partenza è sperimentale: *le molecole d'aria a contatto con una parete solida sono ferme rispetto alla parete* (condizione di aderenza o *no slip*). Fra la parete (velocità nulla) e la corrente esterna (velocità V_∞) si sviluppa quindi una zona di transizione in cui la velocità cresce da 0 a $\approx V_\infty$:

Lo strato limite e le sue due proprietà chiave

Lo **strato limite** è la regione sottile adiacente alla parete in cui gli effetti viscosi sono concentrati. Il suo spessore δ è convenzionalmente la distanza dalla parete a cui $u = 0,99 V_\infty$. Due proprietà lo rendono trattabile:

1. *È sottile:* δ è tipicamente millimetri su corde di metri. Il campo esterno può quindi essere calcolato come ideale, “incollando” poi lo strato limite sulla superficie.
2. *La pressione non varia attraverso di esso:* a una data ascissa x , la pressione alla parete è quella del bordo esterno dello strato. È il motivo per cui le prese statiche — forellini immersi in pieno strato limite — misurano correttamente la pressione della corrente esterna.

Alla parete, il gradiente di velocità genera uno **sforzo di taglio**

$$\tau_w = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0},$$

dove μ è la viscosità dinamica (per l'aria a 288,15 K: $\mu = 1,7894 \times 10^{-5}$ kg/(m s); nei gas μ cresce con la temperatura, al contrario dei liquidi). L'integrale di τ_w su tutta la superficie bagnata è la **resistenza d'attrito** D_f : la metà mancante del paradosso di d'Alembert (l'altra metà, la resistenza di pressione da separazione, arriva nella sezione 18).

13.2 Il numero di Reynolds

Tutta la fisica dello strato limite è governata da un gruppo adimensionale:

Numero di Reynolds

$$Re_x = \frac{\rho_\infty V_\infty x}{\mu_\infty}$$

è il rapporto fra forze d'inerzia e forze viscosi, calcolato con la distanza x dal bordo d'attacco (o con la corda c , o con la lunghezza L del corpo: va sempre dichiarata la lunghezza di riferimento). Numeri di

Reynolds tipici in aeronautica: da 10^5 (aeromodelli) a 10^8 (liner in crociera).

Come vedremo, Re decide *tutto*: lo spessore dello strato limite, il coefficiente d'attrito, il punto di transizione e perfino la forma dei profili di velocità.

13.3 Laminare o turbolento

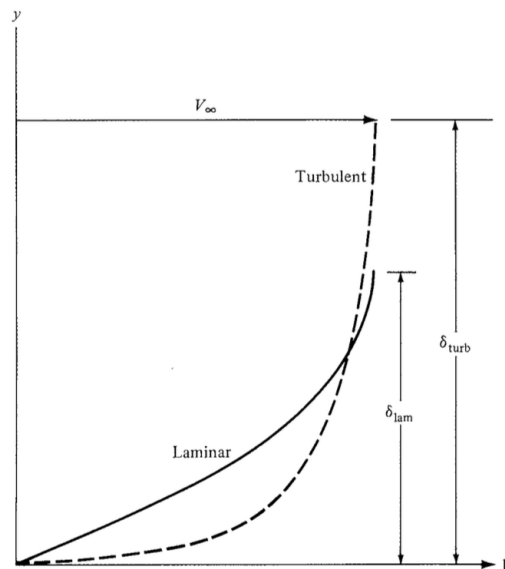


Figura 10. Profili di velocità: il turbolento, più “pieno”, ha gradiente a parete maggiore $\Rightarrow$ più attrito, ma anche più resistenza alla separazione.

Lo strato limite può vivere in due regimi radicalmente diversi:

- **laminare:** le particelle scorrono in lamine ordinate e parallele; il trasporto di quantità di moto fra le lamine è affidato alla sola diffusione molecolare;
- **turbolento:** il moto è agitato da vortici e fluttuazioni casuali che rimescolano il fluido; il trasporto di quantità di moto è enormemente più efficace.

Il rimescolamento turbolento porta aria veloce a ridosso della parete: il profilo di velocità turbolento è più “pieno”, il gradiente a parete maggiore, e quindi — a parità di tutto —

$$\delta_{\text{turb}} > \delta_{\text{lam}}, \quad \tau_{w,\text{turb}} > \tau_{w,\text{lam}}.$$

Un flusso nasce laminare al bordo d'attacco e, a un certo punto, *transisce* al turbolento: ne ripareremo nella sezione 17. Prima, quantifichiamo i due regimi sul caso più semplice e più utile: la piastra piana.

Raccordo

La piastra piana è per lo strato limite ciò che il piano inclinato è per la meccanica: il laboratorio ideale in cui le formule sono esatte e i concetti nudi.

14 Lo strato limite laminare

Bussola

Per la piastra piana in regime laminare la teoria fornisce formule esatte per spessore e attrito. Sono tre righe di algebra, ma dietro c'è la prima grande vittoria della teoria dello strato limite.

Piastra piana laminare (soluzione esatta)

$$\delta = \frac{5,2x}{\sqrt{Re_x}} \quad c_{f,x} = \frac{\tau_w}{q_\infty} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \quad C_f = \frac{D_f}{q_\infty S} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}}$$

dove $q_\infty = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2$, S è l'area di una sola faccia della piastra e Re_L è calcolato sulla lunghezza totale L . Il coefficiente locale $c_{f,x}$ descrive il taglio nel punto x ; il coefficiente integrale C_f dà la resistenza d'attrito complessiva della faccia: $D_f = q_\infty S C_f$.

Tre lettura fisiche: (1) $\delta \propto \sqrt{x}$ — lo strato cresce come una radice, rapidissimo all'inizio e sempre più pigro; (2) $\tau_w \propto x^{-1/2}$ — l'attrito è massimo al bordo d'attacco, dove lo strato è sottile e il gradiente feroce; (3) tutto scala con $1/\sqrt{Re}$ — raddoppiare la velocità non raddoppia il coefficiente d'attrito, lo riduce di $\sqrt{2}$ (ma la resistenza, che contiene $q_\infty \propto V^2$, cresce comunque come $V^{1,5}$).

Esercizio 34 — Piastra piana laminare: spessore e resistenza

Una piastra piana lunga $L = 5$ cm e larga $b = 1$ m è investita a $V_\infty = 120$ m/s in aria standard al livello del mare. Supponendo strato limite interamente laminare, calcolare lo spessore al bordo d'uscita e la resistenza d'attrito totale (due facce).

Dati. $L = 0,05$ m; $b = 1$ m; $V_\infty = 120$ m/s; $\rho = 1,225$ kg/m³; $\mu = 1,7894 \times 10^{-5}$ kg/(m s).

— Fase A — Numero di Reynolds e verifica del regime

$$Re_L = \frac{1,225 \times 120 \times 0,05}{1,7894 \times 10^{-5}} = 4,11 \times 10^5.$$

Siamo sotto il valore critico tipico ($\approx 5 \times 10^5$): l'ipotesi laminare è plausibile.

— Fase B — Spessore al bordo d'uscita

$$\delta = \frac{5,2 \times 0,05}{\sqrt{4,11 \times 10^5}} = 0,41 \text{ mm}.$$

Meno di mezzo millimetro su cinque centimetri: ecco quanto è “sottile” lo strato limite.

— Fase C — Resistenza d'attrito

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{4,11 \times 10^5}} = 2,07 \times 10^{-3}, \quad q_\infty = 0,5 \times 1,225 \times 120^2 = 8820 \text{ Pa},$$

$$D_f^{(1 \text{ faccia})} = q_\infty S C_f = 8820 \times 0,05 \times 2,07 \times 10^{-3} = 0,91 \text{ N}, \quad D_f^{\text{tot}} = 1,83 \text{ N}.$$

Risultato. $\delta = 0,41$ mm, $D_f^{\text{tot}} = 1,83$ N. Da notare la sproporzione: una pressione dinamica di quasi novemila pascal produce appena due newton di attrito — i coefficienti d'attrito sono numeri *piccoli*, dell'ordine del millesimo.

Esercizio 35 — Dove la piastra si consuma: il taglio locale

Per la piastra dell'esercizio precedente, calcolare lo sforzo di taglio alla parete nei punti $x = 1$ cm e $x = 5$ cm.

Dati. Stessi dati; $q_\infty = 8820$ Pa.

— Fase A — A un quinto della corda

$$Re_{x=0,01} = 8,22 \times 10^4 \Rightarrow c_{f,x} = \frac{0,664}{\sqrt{8,22 \times 10^4}} = 2,32 \times 10^{-3} \Rightarrow \tau_w = 20,4 \text{ Pa.}$$

— Fase B — Al bordo d'uscita

$$Re_{x=0,05} = 4,11 \times 10^5 \Rightarrow c_{f,x} = 1,04 \times 10^{-3} \Rightarrow \tau_w = 9,1 \text{ Pa.}$$

Risultato. τ_w scende da 20,4 Pa a 9,1 Pa: fra i due punti il rapporto è esattamente $\sqrt{5} = 2,24$, come impone la legge $\tau_w \propto x^{-1/2}$. L'attrito si concentra vicino al bordo d'attacco.

Lo spessore di spostamento: quanto lo strato limite “ingrassa” il corpo

Lo spessore δ dice dove la velocità torna (quasi) al valore esterno, ma esiste una seconda misura, più fisica, di quanto lo strato limite disturbi il flusso. Poiché dentro lo strato l'aria scorre più lenta, attraverso l'altezza δ passa *meno portata* di quanta ne passerebbe se tutto viaggiasse a V_e ; il deficit, tradotto in un'altezza equivalente, è lo *spessore di spostamento*

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{V}{V_e}\right) dy.$$

Il suo significato è concreto: le linee di corrente esterne vengono *spostate verso l'esterno* di δ^* , come se il corpo fosse più grosso di quella quantità — il flusso inviscido esterno “vede” un profilo ispessito di δ^* su ogni superficie. Per lo strato laminare di Blasius il calcolo dà $\delta^* = 1,72 x / \sqrt{Re_x}$, circa *un terzo* di δ : la maggior parte dello strato limite, in termini di portata, è quasi piena. È questo il concetto con cui i progettisti correggono le geometrie “aerodinamiche”: la gola effettiva di un ugello è quella geometrica ridotta dei δ^* delle pareti, e il condotto di spillamento del problema P.63 ingerisce esattamente il fluido a bassa energia che δ^* contabilizza.

15 Lo strato limite turbolento**Bussola**

Per il turbolento non esiste soluzione esatta: la natura caotica del moto impone formule *empiriche*, tarate sugli esperimenti. Il confronto con il laminare, sugli stessi dati, è la lezione più istruttiva della sezione.

Piastra piana turbolenta (correlazioni empiriche)

$$\delta = \frac{0,37 x}{Re_x^{0,2}} \quad c_{f,x} = \frac{0,0592}{Re_x^{0,2}} \quad C_f = \frac{0,074}{Re_L^{0,2}}$$

Validità indicativa: $10^5 \lesssim Re \lesssim 10^7$, flusso incomprimibile. Rispetto al laminare, gli esponenti passano da 1/2 a 1/5: lo strato turbolento cresce più in fretta ($\delta \propto x^{0,8}$ contro $x^{0,5}$) e il suo attrito cala molto più lentamente con Re .

Esercizio 36 — La stessa piastra, ma turbolenta

Ripetere l'esercizio della piastra ($L = 5$ cm, $b = 1$ m, $V_\infty = 120$ m/s, aria SL) assumendo strato limite interamente turbolento. Confrontare con il caso laminare.

Dati. $Re_L = 4,11 \times 10^5$; $q_\infty = 8820$ Pa; $S = 0,05$ m² per faccia.

— Fase A — Spessore al bordo d'uscita

$$\delta = \frac{0,37 \times 0,05}{(4,11 \times 10^5)^{0,2}} = 1,40 \text{ mm},$$

3,4 volte il valore laminare (0,41 mm).

— Fase B — Resistenza d'attrito

$$C_f = \frac{0,074}{(4,11 \times 10^5)^{0,2}} = 5,58 \times 10^{-3},$$

$$D_f^{(1 \text{ faccia})} = 8820 \times 0,05 \times 5,58 \times 10^{-3} = 2,46 \text{ N}, \quad D_f^{\text{tot}} = 4,92 \text{ N}.$$

Risultato. $\delta = 1,40$ mm ($\times 3,4$), $D_f^{\text{tot}} = 4,92$ N ($\times 2,7$ rispetto al laminare). Il rimescolamento turbolento si paga caro in attrito: da qui l'interesse, mai sopito, per i *profili laminari*.

Esercizio 37 — Taglio locale turbolento

Sempre per la stessa piastra in regime turbolento, calcolare τ_w a $x = 1$ cm e $x = 5$ cm.

Dati. $q_\infty = 8820$ Pa; $Re_{x=0,01} = 8,22 \times 10^4$; $Re_{x=0,05} = 4,11 \times 10^5$.

— Fase A — Calcolo nei due punti

$$x = 1 \text{ cm} : c_{f,x} = \frac{0,0592}{(8,22 \times 10^4)^{0,2}} = 6,16 \times 10^{-3} \Rightarrow \tau_w = 54,3 \text{ Pa},$$

$$x = 5 \text{ cm} : c_{f,x} = 4,46 \times 10^{-3} \Rightarrow \tau_w = 39,4 \text{ Pa}.$$

Risultato. 54,3 Pa e 39,4 Pa, contro i 20,4 Pa e 9,1 Pa laminari: nel turbolento il taglio è 3-4 volte maggiore e molto più uniforme lungo la piastra ($\tau_w \propto x^{-0,2}$ anziché $x^{-0,5}$).

16 Comprimibilità e attrito**Bussola**

Ad alto Mach anche lo strato limite “sente” la comprimibilità: l'attrito viscoso riscalda il gas negli strati vicini a parete, la densità locale cala e con essa l'attrito. Le formule incomprimibili vanno corrette con fattori funzione del Mach.

Per lo strato limite compressibile i coefficienti diventano funzioni anche del numero di Mach esterno:

$$c_{f,x} = c_{f,x}(Re_x, M_\infty)$$

e i risultati si presentano come rapporti $c_f/c_{f,\text{inc}}$ rispetto al valore incomprimibile a pari Re . L'andamento è sistematico: *il rapporto scende al crescere del Mach*, più dolcemente nel laminare, più marcatamente nel turbolento. Per uso ingegneristico speditivo basta un punto di riferimento: **per strato limite turbolento a $M_\infty = 2$ il coefficiente d'attrito vale circa il 74 % di quello incomprimibile.**

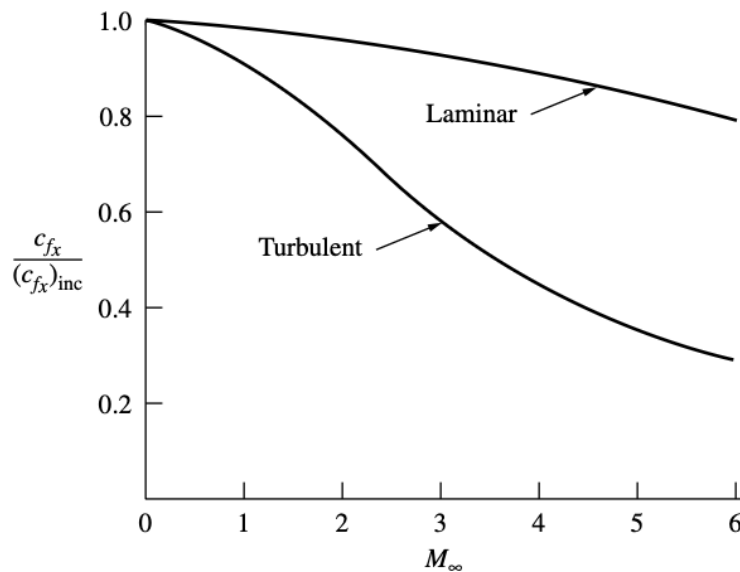


Figura 11. Effetto del Mach sull'attrito: entrambe le curve scendono, la turbolenta più rapidamente.

Esercizio 38 — Attrito su un caccia a Mach 2 in quota

Un intercettore vola a $M_{\infty} = 2$ a 11 000 m ($T = 216,65$ K, $p = 22\,632$ Pa). Calcolare lo sforzo di taglio alla parete in un punto della fusoliera a $x = 0,6$ m dal muso, con strato limite turbolento. (Viscosità alla temperatura di quota: $\mu = 1,422 \times 10^{-5}$ kg/(m s).)

Dati. $M_{\infty} = 2$; $T = 216,65$ K; $p = 22\,632$ Pa; $x = 0,6$ m; $\mu = 1,422 \times 10^{-5}$ kg/(m s); correzione di comprimibilità a $M = 2$: fattore 0,74.

— Fase A — Condizioni di volo

$$\rho = \frac{p}{RT} = 0,364 \text{ kg/m}^3, \quad a = \sqrt{\gamma RT} = 295,0 \text{ m/s}, \quad V = 2a = 590,1 \text{ m/s}.$$

— Fase B — Reynolds e coefficiente incomprimibile

$$Re_x = \frac{0,364 \times 590,1 \times 0,6}{1,422 \times 10^{-5}} = 9,07 \times 10^6,$$

$$c_{f,x}^{\text{inc}} = \frac{0,0592}{(9,07 \times 10^6)^{0,2}} = 2,40 \times 10^{-3}.$$

— Fase C — Correzione di comprimibilità e taglio

$$c_{f,x} = 0,74 \times 2,40 \times 10^{-3} = 1,78 \times 10^{-3},$$

$$q_{\infty} = 0,5 \times 0,364 \times 590,1^2 = 63\,370 \text{ Pa} \Rightarrow \tau_w = q_{\infty} c_{f,x} = 113 \text{ Pa}.$$

Risultato. $\tau_w \approx 113$ Pa. Trascurare la correzione avrebbe sovrastimato l'attrito del 35 %. Ad alto Mach il problema vero, però, non è l'attrito ma il *riscaldamento aerodinamico* che lo accompagna (ricordare l'esercizio sul ristagno a sezione 6).

17 La transizione

Bussola

Ogni strato limite nasce laminare e prima o poi diventa turbolento. Il punto in cui accade — la transizione — è governato dal numero di Reynolds critico. Saperlo stimare cambia i conti di resistenza, come l'esercizio finale sull'ala del primo biplano dei pionieri mostrerà in modo spettacolare.

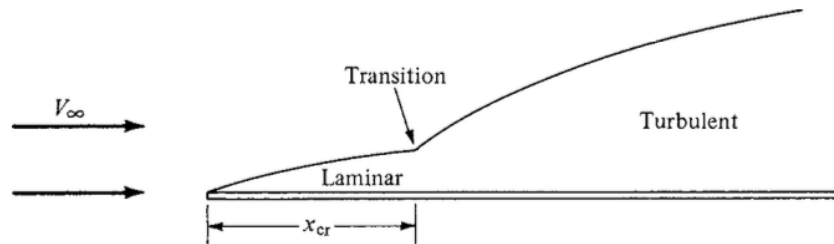


Figura 12. La transizione: lo strato nasce laminare, a x_{cr} si destabilizza e prosegue turbolento, più spesso.

L'esperienza mostra che la transizione avviene quando il Reynolds locale raggiunge un valore **critico**:

$$Re_{x_{cr}} = \frac{\rho_{\infty} V_{\infty} x_{cr}}{\mu_{\infty}} \quad \Rightarrow \quad x_{cr} = \frac{\mu_{\infty} Re_{x_{cr}}}{\rho_{\infty} V_{\infty}}.$$

$Re_{x_{cr}}$ non è una costante universale: dipende da finitura superficiale, turbolenza della corrente, gradiente di pressione, rugosità, perfino da vibrazioni e rumore. Valori orientativi per piastre lisce: $Re_{x_{cr}} \approx 5 \times 10^5$; su superfici molto curate si arriva a 10^6 e oltre. *Il valore critico va sempre dichiarato insieme al risultato.*

Esercizio 39 — Dove transisce lo strato limite?

Aria standard al livello del mare scorre su una lastra liscia con $Re_{x_{cr}} = 5 \times 10^5$. Determinare l'ascissa di transizione per $V_{\infty} = 150$ m/s e per $V_{\infty} = 300$ m/s.

Dati. $\rho = 1,225$ kg/m³; $\mu = 1,7894 \times 10^{-5}$ kg/(m s); $Re_{x_{cr}} = 5 \times 10^5$.

— Fase A — Calcolo diretto

$$V = 150 \text{ m/s} : \quad x_{cr} = \frac{1,7894 \times 10^{-5} \times 5 \times 10^5}{1,225 \times 150} = 4,9 \text{ cm},$$

$$V = 300 \text{ m/s} : \quad x_{cr} = 2,4 \text{ cm}.$$

Risultato. A velocità aeronautiche la zona laminare su una superficie “qualunque” è di pochi centimetri: raddoppiando la velocità, x_{cr} si dimezza. Ecco perché su un liner lo strato limite è turbolento praticamente ovunque — e perché i profili laminari richiedono superfici maniacalmente lisce.

Esercizio 40 — L'ala del primo biplano dei pionieri: attrito misto

L'ala del celebre biplano del 1903 aveva apertura $b = 12,29$ m e superficie $S = 23,69$ m² per piano; velocità di volo $V = 13,41$ m/s al livello del mare. Assumendo la superficie come piastra piana con $Re_{x_{cr}} = 6,5 \times 10^5$, stimare la resistenza d'attrito totale dei due piani alari (quattro superfici bagnate), tenendo conto della transizione.

Dati. $b = 12,29 \text{ m}$; $S = 23,69 \text{ m}^2$ (un piano); $V = 13,41 \text{ m/s}$; $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$; $\mu = 1,7894 \times 10^{-5} \text{ kg/(m s)}$; $Re_{x_{cr}} = 6,5 \times 10^5$.

— Fase A — Geometria e numeri di Reynolds

Corda media: $c = S/b = 23,69/12,29 = 1,928 \text{ m}$. Reynolds sulla corda:

$$Re_c = \frac{1,225 \times 13,41 \times 1,928}{1,7894 \times 10^{-5}} = 1,77 \times 10^6.$$

Ascissa di transizione:

$$x_{cr} = \frac{Re_{x_{cr}} \mu}{\rho V} = \frac{6,5 \times 10^5 \times 1,7894 \times 10^{-5}}{1,225 \times 13,41} = 0,708 \text{ m} :$$

il 37 % anteriore della corda è laminare — a 13 m/s lo strato laminare è generoso. Area laminare per superficie: $A = x_{cr} b = 8,70 \text{ m}^2$. Pressione dinamica: $q_\infty = 110,1 \text{ Pa}$.

— Fase B — Strategia: turbolento ovunque, poi correzione

Il trucco standard per l'attrito misto:

$$D_f = \underbrace{D_f^{\text{turb}}(S)}_{\text{tutta turbolenta}} - \underbrace{D_f^{\text{turb}}(A)}_{\text{tratto laminare contato come turb.}} + \underbrace{D_f^{\text{lam}}(A)}_{\text{tratto laminare corretto}}.$$

Tutta la superficie come turbolenta:

$$C_f(S) = \frac{0,074}{(1,77 \times 10^6)^{0,2}} = 4,17 \times 10^{-3},$$

$$D_f^{\text{turb}}(S) = 110,1 \times 23,69 \times 4,17 \times 10^{-3} = 10,87 \text{ N}.$$

Tratto anteriore come turbolento (a $Re = Re_{x_{cr}}$):

$$C_f = \frac{0,074}{(6,5 \times 10^5)^{0,2}} = 5,09 \times 10^{-3} \Rightarrow D_f^{\text{turb}}(A) = 110,1 \times 8,70 \times 5,09 \times 10^{-3} = 4,88 \text{ N}.$$

— Fase C — Il tratto laminare e il totale per superficie

Tratto anteriore laminare:

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{6,5 \times 10^5}} = 1,65 \times 10^{-3} \Rightarrow D_f^{\text{lam}}(A) = 110,1 \times 8,70 \times 1,65 \times 10^{-3} = 1,58 \text{ N}.$$

Per una superficie:

$$D_f = 10,87 - 4,88 + 1,58 = 7,57 \text{ N}.$$

— Fase D — Il biplano completo

Due piani, due facce ciascuno: quattro superfici bagnate,

$$D_f^{\text{tot}} = 4 \times 7,57 = 30,3 \text{ N}.$$

Risultato. $D_f^{\text{tot}} \approx 30 \text{ N}$: la resistenza d'attrito dell'intera cellula alare del biplano pioniere è il peso di tre chili di zavorra. Se avessimo ignorato la transizione (tutto turbolento): $4 \times 10,87 = 43,5 \text{ N}$, il 43 % in più. A basso Reynolds la laminarità conta.

Da che cosa dipende davvero il Reynolds critico

Il numero $Re_{x,cr}$ merita un momento di onestà intellettuale: non è una proprietà dell'aria, è una proprietà *della situazione*. La transizione è l'amplificazione di piccoli disturbi dentro lo strato laminare, e tutto ciò che semina o amplifica disturbi la anticipa; tutto ciò che li smorza la ritarda. In pratica:

la *rugosità superficiale* è il fattore più brutale — rivetti a testa sporgente, giunzioni, insetti spiaccicati sul bordo d'attacco possono dimezzare o peggio l'ascissa di transizione, ed è il motivo per cui i profili laminari pretendono superfici lucidate;

la *turbolenza della corrente esterna* conta altrettanto: la stessa piastra transisce prima in una galleria “rumorosa” che in volo libero, e infatti i dati di galleria vanno sempre accompagnati dal livello di turbolenza dell'impianto;

il *gradiente di pressione* è l'alleato o il traditore: un gradiente favorevole (pressione che cala, flusso che accelera, come sul davanti di un profilo) stabilizza lo strato laminare e sposta la transizione a valle — è il trucco geometrico dei profili laminari, che arretrano il punto di spessore massimo; un gradiente avverso la precipita;

contano infine il *numero di Mach* (la comprimibilità tende a stabilizzare) e perfino il *riscaldamento* della parete.

Per il tubo, come vedemmo con Reynolds, il valore critico storico è $\rho VD/\mu \approx 2300$; per la piastra liscia in corrente pulita $Re_{x,cr}$ oscilla fra $3,5 \times 10^5$ e 10^6 . La morale è la convenzione che questa monografia applica sistematicamente: il Reynolds critico *non si calcola, si dichiara* — e in un problema ben posto è un dato, in un progetto vero è una scelta da difendere con prove.

Raccordo

Lo strato limite ordinato o agitato cambia l'attrito. Ma il suo effetto più drammatico è un altro: la capacità — o l'incapacità — di restare attaccato alla superficie.

18 La separazione del flusso

Bussola

Quando lo strato limite “molla la presa” e si stacca dalla superficie, la portanza crolla e la resistenza s'impenna: è lo stallo. Qui capiamo il meccanismo — il gradiente di pressione avverso — e perché, paradossalmente, lo strato limite turbolento è un alleato.

18.1 Il meccanismo: gradiente di pressione avverso

Sul dorso di un profilo, a valle del picco di espansione, la pressione *risale* verso il bordo d'uscita: il flusso avanza “in salita” di pressione ($dp/dx > 0$, gradiente **avverso**). La corrente esterna ha energia cinetica in abbondanza per farcela; ma i filetti in fondo allo strato limite, già rallentati dall'attrito, possono non averne abbastanza: rallentano, si fermano, e infine *invertono la marcia*. Il punto in cui il gradiente di velocità a parete si annulla è il **punto di separazione**: da lì in poi il flusso esterno si stacca dalla superficie e lascia sotto di sé una regione di ricircolo disordinato.

Le conseguenze sono due, entrambe cattive:

1. *Crollo di portanza*: la regione separata ha pressione pressoché uniforme e “cancella” il picco di depressione del dorso: è lo **stallo**.
2. *Resistenza di pressione* (o di forma): con il flusso separato la pressione sul retro del corpo non si “ricompatta” più ai valori del davanti; lo squilibrio fronte-retro genera la resistenza D_p , detta *resistenza di pressione dovuta alla separazione*. È il pezzo che mancava per chiudere il paradosso di d'Alembert.

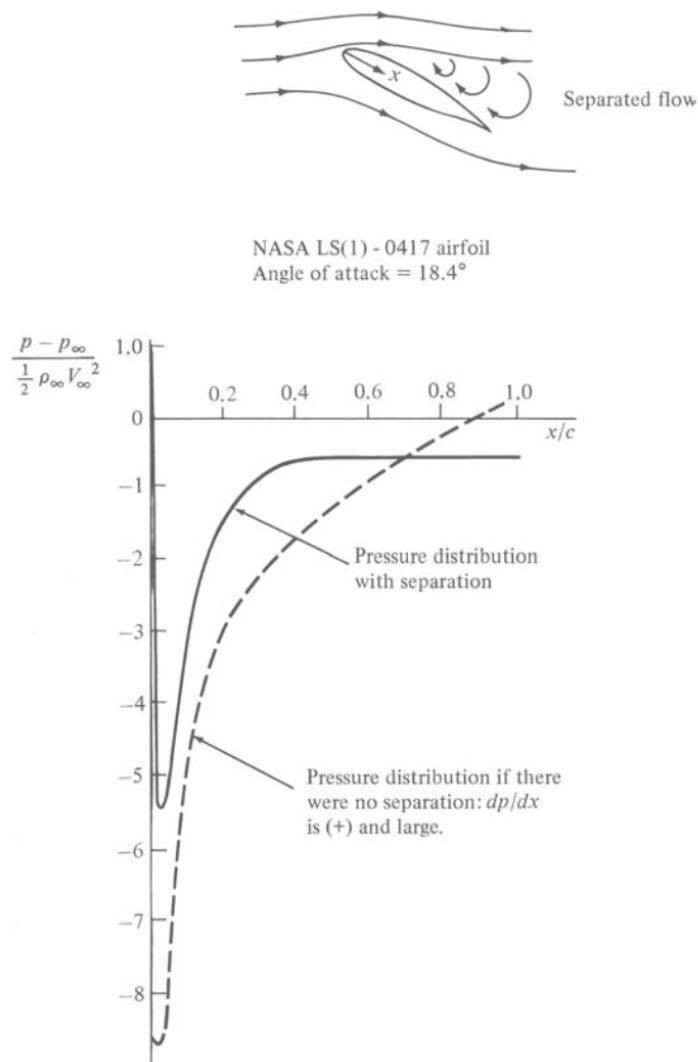


Figura 13. Profilo in stallo: il flusso separato lascia sul dorso una regione di ricircolo a bassa pressione.

18.2 Perché il turbolento resiste meglio

Il profilo di velocità turbolento è più pieno: i filetti vicino a parete hanno più energia cinetica, e il continuo rimescolamento ne rifornisce di nuova pescando dalla corrente esterna. Risultato: *lo strato limite turbolento sopporta gradienti avversi molto più forti prima di separarsi*. È il compromesso centrale dell'aerodinamica viscosa:

laminare = poco attrito, si separa facilmente;
turbolento = molto attrito, resta attaccato.

Per corpi tozzi domina la resistenza di pressione: conviene *forzare* la turbolenza per ritardare la separazione (è il segreto delle fossette della pallina da golf, e dei generatori di vortici sulle ali). Per corpi affusolati domina l'attrito: si insegue la laminarità.

Raccordo

Attrito e separazione, insieme, compongono la resistenza totale di un profilo. Mettiamo i numeri a questa somma.

19 La resistenza di profilo

Bussola

La resistenza aerodinamica di un profilo (senza contare gli effetti tridimensionali dell'ala finita) è la somma di attrito e pressione. Chiudiamo il cerchio con un esercizio di scomposizione.

Resistenza di profilo

$$D = D_f + D_p$$

D_f è l'integrale degli sforzi di taglio (attrito); D_p è la risultante degli squilibri di pressione dovuti alla separazione. La somma si chiama **resistenza di profilo**. A piccola incidenza, su un profilo ben disegnato, domina D_f ; all'aumentare dell'incidenza la separazione avanza e D_p prende il sopravvento, fino allo stallo.

Esercizio 41 — Quanto pesa l'attrito, quanto la forma

Un modello di profilo con corda $L = 0,6$ m e apertura $b = 1$ m è provato in galleria a $V_\infty = 97$ m/s in aria standard. La bilancia misura una resistenza totale $D = 34,7$ N. Stimare la quota d'attrito (strato limite turbolento su entrambe le facce, modello a piastra piana) e ricavare per differenza la resistenza di pressione.

Dati. $L = 0,6$ m; $b = 1$ m; $V_\infty = 97$ m/s; $D = 34,7$ N; $\rho = 1,225$ kg/m³; $\mu = 1,7894 \times 10^{-5}$ kg/(m s).

— Fase A — Attrito stimato

$$Re_L = \frac{1,225 \times 97 \times 0,6}{1,7894 \times 10^{-5}} = 3,98 \times 10^6, \quad C_f = \frac{0,074}{(3,98 \times 10^6)^{0,2}} = 3,54 \times 10^{-3},$$

$$q_\infty = 5763 \text{ Pa} \Rightarrow D_f = 2 q_\infty (L b) C_f = 2 \times 5763 \times 0,6 \times 3,54 \times 10^{-3} = 24,5 \text{ N}.$$

— Fase B — Pressione per differenza

$$D_p = D - D_f = 34,7 - 24,5 = 10,2 \text{ N},$$

pari al 29 % della resistenza totale.

Risultato. $D_f = 24,5$ N (71 %), $D_p = 10,2$ N (29 %). A piccola incidenza il grosso della resistenza di profilo è attrito puro: la prima arma per ridurla è la finitura superficiale, la seconda è la gestione della transizione.

20 Note storiche: le persone dietro le equazioni

Bussola

Le formule di questa monografia hanno nomi e date. Ripercorrerle in breve serve a due cose: dare profondità ai concetti e ricordare che l'aerodinamica è una scienza giovane, costruita da persone concrete con strumenti spesso artigianali.

Bernoulli ed Eulero. L'equazione che porta il nome di Daniel Bernoulli comparve in forma embrionale nella sua *Hydrodynamica* (1738), ma nella veste algebrica che usiamo oggi è opera di Leonhard Eulero, che a metà Settecento formulò le equazioni differenziali del moto dei fluidi ideali e le integrò lungo una linea di corrente. È un caso non raro nella scienza: il nome sull'equazione non è quello di chi l'ha scritta.

Pitot. L'ingegnere francese Henri Pitot inventò il suo tubo nel 1732 per misurare la velocità della Senna — e demolì, dati alla mano, la convinzione allora diffusa che la velocità del fiume crescesse con la profondità. Lo strumento entrò in aeronautica quasi due secoli dopo: i primi impieghi in volo risalgono agli anni immediatamente precedenti la Grande Guerra, quando i laboratori inglesi ne standardizzarono la taratura stabilendo che, per un tubo ben fatto, il coefficiente di taratura è con ottima approssimazione unitario: il Pitot è uno strumento che “si tara da solo”.

Le prime gallerie del vento. L'idea di muovere l'aria attorno a un modello fermo — anziché il contrario — è già negli appunti di Leonardo. La prima galleria documentata fu costruita in Inghilterra da Francis Wenham nel 1871; trent'anni dopo, i fratelli Wright provarono sistematicamente oltre duecento forme alari nella loro minuscola galleria autocostruita: il progetto del velivolo del 1903 uscì da quelle prove, non da formule. Negli anni Venti i laboratori americani introdussero la galleria a densità variabile, pressurizzata per riprodurre i numeri di Reynolds di volo su modelli in scala; negli anni Trenta arrivarono in Europa le prime gallerie supersoniche con ugelli convergenti-divergenti.

Reynolds. Nel 1883 Osborne Reynolds visualizzò con un filo di colorante la transizione dal moto laminare al turbolento in un tubo di vetro, mostrando che il fenomeno dipendeva da un unico gruppo adimensionale — il numero che oggi porta il suo nome — e misurando per il tubo un valore critico attorno a 2300.

Prandtl. Nel 1904, in una comunicazione di appena otto pagine a un congresso di matematica, Ludwig Prandtl introdusse il concetto di strato limite: fuori da uno strato sottile il fluido si comporta da ideale, dentro vi si concentrano gli effetti viscosi. È l'idea che riconcilia la teoria (d'Alembert) con l'esperienza, e che rende calcolabile l'attrito: la soluzione esatta dello strato laminare su piastra piana, che abbiamo usato nella sezione 14, fu ottenuta pochi anni dopo da un suo allievo, Heinrich Blasius.

21 Sintesi finale

Il percorso compiuto si può rileggere in quattro tappe.

Prima tappa: le leggi di conservazione. Massa, quantità di moto ed energia, scritte per un flusso stazionario quasi-unidimensionale, diventano tre equazioni algebriche (continuità, Bernoulli/Eulero, energia) più lo stato del gas. Con esse si risolve tutto il regime non viscoso.

Seconda tappa: il Mach come spartiacque. La velocità del suono $a = \sqrt{\gamma RT}$ fornisce il metro; sotto $M = 0,3$ vige il modello incompressibile (Bernoulli), sopra servono isentropica + energia, sopra $M = 1$ compaiono gli urti e la formula di Rayleigh.

Terza tappa: le applicazioni dirette. Gallerie subsoniche (Venturi + manometro), misura della velocità di volo (Pitot nei tre regimi, velocità vera, equivalente e calibrata), ugelli convergenti-divergenti (gallerie supersoniche e razzi): stessa cassetta degli attrezzi, contesti diversi.

Quarta tappa: la viscosità. Lo strato limite concentra l'attrito in millimetri: laminare ($\propto Re^{-1/2}$) o turbolento ($\propto Re^{-1/5}$), transisce a $Re_{x,cr}$ e, sotto gradiente avverso, si separa generando stallo e resistenza di pressione. La resistenza di profilo è la somma $D_f + D_p$.

Quarantuno esercizi svolti (e sessantacinque problemi proposti) hanno mostrato che con una decina di formule ben capite si stimano gallerie, anemometri, razzi e resistenze: è il livello di padronanza richiesto per affrontare, nelle prossime monografie, la generazione della portanza e l'aerodinamica dell'ala.

22 Esercizi proposti

Bussola

Sessantacinque problemi per consolidare, in ordine tematico che ricalca la monografia. Provateli *da soli*, con carta e calcolatrice: la soluzione completa di ogni problema, svolta passo passo, è nell'appendice A — da consultare *dopo*, per controllare il proprio svolgimento. Costanti: ISA standard, $R = 287 \text{ J/(kg K)}$, $\gamma = 1,4$, $c_p = 1008 \text{ J/(kg K)}$, $\mu_{\text{SL}} = 1,7894 \times 10^{-5} \text{ kg/(m s)}$; per le quote oltre 11 km si usa la stratosfera isoterma a 216,65 K.

Continuità e Bernoulli

- P.1** Acqua ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) scorre in un condotto divergente: in ingresso $V_1 = 1,5 \text{ m/s}$; l'area di uscita è quadrupla di quella d'ingresso. Calcolare la velocità di uscita.
- P.2** Per il condotto del problema precedente, calcolare la differenza di pressione fra uscita e ingresso.
- P.3** Un velivolo vola a 60 m/s alla quota ISA di 3 km ($p = 70\,104 \text{ Pa}$, $\rho = 0,909 \text{ kg/m}^3$). In un punto dell'ala la velocità è 70 m/s. Calcolare la pressione in quel punto (flusso incomprimibile).
- P.4** Il *tubo di Venturi* fu l'anemometro dei velivoli 1919–1930: un condotto convergente–divergente montato sull'ala, con ingresso 1 e gola 2, in cui V_1 coincide con la velocità di volo. Con $A_1/A_2 = 4$ e $p_1 - p_2 = 3830 \text{ Pa}$ a livello del mare standard, calcolare la velocità del velivolo. [Suggerimento: $p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho V_1^2 [(A_1/A_2)^2 - 1]$.]
- P.5** Aria a densità standard scorre in un condotto convergente–divergente con $A_{\text{in}} = 3 \text{ m}^2$, gola $1,5 \text{ m}^2$, uscita 2 m^2 ; $p_{\text{in}} = 1,02 \times 10^5 \text{ Pa}$ e $p_{\text{out}} = 1,00 \times 10^5 \text{ Pa}$. Calcolare la velocità alla gola.
- P.6** Un velivolo vola a 58,1 m/s a 1524 m di quota ($p = 84\,304 \text{ Pa}$, $\rho = 1,056 \text{ kg/m}^3$). In un punto dell'ala $p = 83\,790 \text{ Pa}$. Calcolare la velocità in quel punto.
- P.7** Un aereo lento ha $V_{\text{max}} = 90 \text{ m/s}$ al livello del mare e monta un Venturi anemometrico con rapporto d'aree 1,3. Quale differenza di pressione massima deve sopportare il manometro?

Flusso isentropico ed energia

- P.8** Un ugello supersonico è alimentato da un serbatoio a $p_0 = 10 \text{ atm}$ e $T_0 = 300 \text{ K}$; all'uscita $p_e = 1 \text{ atm}$. Calcolare temperatura e densità di uscita.
- P.9** Ricavare l'espressione della velocità di uscita di un ugello supersonico in funzione di p_0/p_e e T_0 .
- P.10** Un velivolo vola a 270 m/s a 5 km ($p = 54\,014 \text{ Pa}$, $T = 255,65 \text{ K}$; $M_\infty = 0,84$: flusso comprimibile!). In un punto dell'ala $V = 330 \text{ m/s}$. Calcolare la pressione in quel punto (energia + isentropica).
- P.11** In un ugello supersonico passano $\dot{m} = 0,68 \text{ kg/s}$; la velocità di uscita è 457 m/s e il serbatoio è a $T_0 = 556 \text{ K}$, $p_0 = 7 \text{ atm}$. Calcolare l'area di uscita.
- P.12** Un trasporto supersonico vola a 670 m/s a 15,2 km ($T_\infty = 216,65 \text{ K}$). In un punto sull'ala la temperatura è 430 K. Calcolare la velocità in quel punto.
- P.13** Per il velivolo del problema precedente, l'area totale delle prese dei motori è $1,86 \text{ m}^2$ e il rapporto combustibile/aria è 0,05. Assumendo che nelle prese entrino le proprietà della corrente indisturbata ($p = 11\,593 \text{ Pa}$, $\rho = 0,186 \text{ kg/m}^3$), calcolare la portata in massa allo scarico.
- P.14** Calcolare il Mach di uscita dell'ugello del problema P.11.

Velocità del suono e numero di Mach

- P.15** Un B747 vola a 250 m/s a 13 km ($T = 216,65$ K). Calcolare il Mach.
- P.16** Un missile vola a Mach 3 al livello del mare. Qual è la sua velocità?
- P.17** Calcolare il Mach di volo del trasporto supersonico di P.12.

Gallerie subsoniche

- P.18** Una galleria ha rapporto di contrazione 20; in camera di prova $p = 1$ atm, $T = 300$ K, $V = 80$ m/s. Quale dislivello segna il manometro a mercurio?
- P.19** Si vuole $V_2 = 89,4$ m/s in camera di prova (aria standard). Confrontare il salto di pressione complessivo richiesto da (a) una galleria *senza* diffusore ($A_1/A_2 = 5$, la camera scarica in atmosfera) e (b) la stessa galleria *con* diffusore di area di uscita $4,5 A_2$ che scarica in atmosfera.

Misura della velocità

- P.20** In una galleria lenta: $V = 67,1$ m/s, $p = 1$ atm, $T = 294,3$ K. Che pressione misura un Pitot?
- P.21** L'altimetro di un bimotore leggero indica una quota di 2438 m ($p = 75\,258$ Pa); il Pitot misura 79 000 Pa e la temperatura esterna è 278 K. Calcolare velocità vera ed equivalente.
- P.22** L'altimetro indica 2 km ($p = 79\,492$ Pa), l'anemometro (tarato con ρ_s) indica 50 m/s, la temperatura esterna è 280 K. Calcolare la velocità vera.
- P.23** In una galleria veloce: $p = 1$ atm, $T = 270$ K, $V = 250$ m/s. Che pressione misura il Pitot? (Attenzione al regime: $M = 0,76$.)
- P.24** Un B777 vola alla quota-pressione di 12 km ($p = 19\,324$ Pa); il Pitot misura $2,96 \times 10^4$ Pa. Calcolare il Mach.
- P.25** Un velivolo vola a $M = 0,65$ e il Pitot misura 111 998 Pa. Che quota indica l'altimetro (quota-pressione)?
- P.26** Un caccia vola a $M = 0,96$ al livello del mare. Temperatura nel punto di ristagno sul bordo d'attacco?
- P.27** Un velivolo vola a 596 m/s alla quota-pressione di 10 km ($p = 26\,430$ Pa) con $T = 220$ K. Che pressione misura il Pitot? (Attenzione: $M = 2,0$!)

Comprimibilità, ristagno, EAS

- P.28** Ricavare q in funzione di p e M .
- P.29** Durante il rientro, lo Shuttle attraversa (Atmosfera Standard 1976): 60 km ($p = 22,0$ Pa) a $M = 24$; 40 km ($p = 287$ Pa) a $M = 9,5$; 20 km ($p = 5529$ Pa) a $M = 5,5$. Calcolare q_∞ nei tre punti e commentare.
- P.30** Una corrente a Mach 2 in condizioni standard al livello del mare. Calcolare la pressione totale isentropica e confrontarla con (a) la pressione di ristagno sul muso di un corpo tozzo e (b) il risultato (errato) di Bernoulli.
- P.38** Un velivolo vola a $M = 0,7$ a 3 km ($p = 70\,104$ Pa). In un punto dell'ala $M = 1,1$. Calcolare la pressione in quel punto (flusso isentropico; usare i rapporti di ristagno).
- P.39** Un velivolo vola a 243,8 m/s a 7620 m ($\rho = 0,549$ kg/m³). A che velocità dovrebbe volare al livello del mare per sentire la stessa pressione dinamica?

- P.46** In un lungo tubo pieno d'aria ferma in condizioni standard, un petardo detona in $x = 0$ generando due deboli onde di pressione. Calcolare la posizione delle onde dopo 0,2 s.
- P.47** Ripetere con aria in moto verso destra a (a) 30 m/s e (b) 400 m/s.
- P.48** Un elemento d'aria a 1000 m ISA viene sollevato *isentropicamente* fino a 2000 m, dove assume la pressione standard locale. Confrontare la sua densità con quella standard a 2000 m e commentare la stabilità dell'atmosfera.
- P.61** Il 3 ottobre 1967 l'X-15 stabilì il primato di velocità per un aeroplano: $M = 6,7$ a 31 120 m ($T = 227,8$ K). Calcolare (a) la velocità e (b) la temperatura di ristagno sul muso (con il consueto caveat sul c_p costante).

Ugelli, gallerie supersoniche e ipersoniche

- P.31** Ugello con $p_0 = 5$ atm, $T_0 = 500$ K, $M_e = 3$. Calcolare p_e , T_e , ρ_e .
- P.32** Attraverso un ugello supersonico $p_e/p_0 = 0,2$. Calcolare il rapporto d'aree A_e/A^* .
- P.33** Tracciare q/p_0 in funzione di M da 0 a 2 per un'espansione isentropica. [Suggerimento: combinare P.28 con il rapporto p/p_0 .]
- P.40** Progetto di massima di una galleria *ipersonica* a $M = 10$ con camera di prova alle condizioni di 55 km ($p = 42,5$ Pa, $T = 260,8$ K, Atm. Std. 1976). Calcolare A_e/A^* , p_0 e T_0 .
- P.41** Calcolare la velocità di uscita della galleria di P.40.
- P.42** Si raddoppia il Mach della galleria di P.40 (ugello più lungo, stesso serbatoio): $M_e = 20$. Calcolare A_e/A^* e V_e , e spiegare il paradosso.
- P.62** La presa d'aria di un caccia della prima generazione a getto ingerisce flusso a $M_1 = 0,6$ dove l'area è A_1 ; più a valle l'area è $A_2 = \frac{4}{3}A_1$. Calcolare M_2 (ramo subsonico della relazione area–Mach).

Strato limite e resistenza

- P.34** L'ala di un bireattore da appoggio tattico è circa rettangolare: $b = 17,5$ m, $c = 3$ m. Volo a 200 m/s al livello del mare. Modellando l'ala come piastra piana con strato limite interamente *laminare* (ipotesi accademica), calcolare δ al bordo d'uscita e la resistenza d'attrito totale (due facce).
- P.35** Ripetere con strato limite interamente *turbolento*.
- P.36** Con $Re_{x,cr} = 10^6$, calcolare la resistenza d'attrito mista dell'ala di P.34.
- P.37** In un punto di un flusso non viscoso: $\rho = 1,1$ kg/m³ e la velocità varia del 2 % al millimetro. Calcolare dp/dx se (a) $V = 100$ m/s; (b) $V = 1000$ m/s.
- P.43** Piastra quadrata di lato 4 m in aria standard, $Re_{x,cr} = 5 \times 10^5$. Calcolare la resistenza d'attrito (transizione inclusa, due facce) per (a) $V = 20$ m/s e (b) $V = 40$ m/s; (c) ricavare l'esponente n in $D_f \propto V^n$.
- P.44** Dimostrare analiticamente che su piastra piana incompressibile $D_f \propto V^{1,8}$ (turbolento) e $D_f \propto V^{1,5}$ (laminare).
- P.45** Stessa piastra di P.43, strato limite tutto turbolento, flusso *compressibile*: calcolare D_f a (a) $M_\infty = 1$ e (b) $M_\infty = 3$ (rapporti $c_f/c_{f,inc}$ dalla curva turbolenta: 0,91 e 0,59); (c) l'esponente n .
- P.49** Una galleria ha sezione rettangolare di larghezza costante 2 m; le altezze di ingresso e uscita dell'ugello sono 4 m e 0,5 m. In camera di prova $V_2 = 53,6$ m/s. Calcolare la velocità all'ingresso.

- P.50** Con serbatoio a 1 atm e densità standard, calcolare la pressione in camera di prova.
- P.51** Il diffusore diverge con pareti piane a 15° sopra e sotto. Calcolare dA/dx .
- P.52** Le altezze di ingresso e uscita del diffusore sono 0,5 m e 3,5 m. Calcolare le velocità corrispondenti.
- P.53** Calcolare dV/dx all'ingresso e all'uscita del diffusore. [Suggerimento: da $AV = \text{cost}$ segue $dV/dx = -(V/A) dA/dx$.]
- P.54** Calcolare dp/dx all'ingresso e all'uscita del diffusore (Eulero).
- P.55** Calcolare la lunghezza del diffusore.
- P.56** Un criterio approssimato colloca la separazione laminare a $x_s = 183/(dp/dx)_{\text{med}}$ (in metri, con il gradiente in Pa/m mediato fra ingresso e uscita). Dove si separa lo strato limite laminare del diffusore?
- P.57** Con il criterio turbolento $x_s = 506/(dp/dx)_{\text{med}}$, ripetere.
- P.58** Un bimotore storico da trasporto vola a 102,4 m/s a 2286 m. Calcolare Mach e pressione letta dal Pitot.
- P.59** Un trireattore di linea vola a 272,7 m/s a 7620 m. Calcolare Mach e pressione del Pitot.
- P.60** Un intercettore vola a 593,7 m/s a 10 668 m. Calcolare Mach e pressione del Pitot.
- P.63** Un caccia vola a $M = 0,6$ a 6096 m ($p = 46\,563$ Pa, $T = 248,5$ K, $\mu = 1,59 \times 10^{-5}$ kg/(m s) da Sutherland). Il condotto di spillamento dello strato limite di fusoliera è a $x = 2,89$ m dal muso. Assumendo strato limite turbolento da piastra piana, dimensionare l'altezza del condotto (pari a δ).
- P.64** Piastra piana di 3 m a 100 m/s in aria standard, strato limite laminare (ipotesi accademica: $Re_L = 2,05 \times 10^7$). Calcolare δ al bordo d'uscita, C_f e la resistenza per unità di apertura (una faccia).
- P.65** Per la piastra di P.64, assumendo nello strato limite il profilo $y/\delta = (V/V_e)^2$, calcolare la perdita di pressione totale integrata attraverso lo strato al bordo d'uscita (per unità di apertura) e confrontarla con D_f .

Raccordo

Chi arriva in fondo a questa lista padroneggia la materia. I problemi P.29, P.42, P.47 e P.65, in particolare, sono ottimi spunti di discussione orale per l'Esame di Stato.

Formulario essenziale

Flusso non viscoso

Continuità: $\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$; incompressibile: $A_1 V_1 = A_2 V_2$.

Eulero: $dp = -\rho V dV$; **Bernoulli** (ρ cost): $p + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{cost}$.

Isentropica: $p/\rho^\gamma = \text{cost}$; $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$.

Energia: $c_p T + \frac{1}{2}V^2 = \text{cost} = c_p T_0$; $c_p - c_v = R$; $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$.

Suono e Mach: $a = \sqrt{\gamma R T}$; $M = V/a$.

Ristagno ($\gamma = 1,4$): $T_0/T = 1 + 0,2M^2$; $p_0/p = (1 + 0,2M^2)^{3,5}$; $\rho_0/\rho = (1 + 0,2M^2)^{2,5}$.

Pitot: incompressibile $V = \sqrt{2(p_0 - p)/\rho}$, $q = \frac{1}{2}\rho V^2$; comprimibile: machmetro da p_0/p ; supersoni-

co: formula di Rayleigh.

Galleria subsonica: $V_2 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}}$; manometro: $\Delta p = \rho_l g \Delta h$.

Area-velocità: $\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dV}{V}$; gola sonica: $T^*/T_0 = 0,833$, $p^*/p_0 = 0,528$.

Seconda gola: $A_{t,2}/A_{t,1} = p_{0,1}/p_{0,2}$.

Strato limite (piastra piana)

Reynolds: $Re_x = \rho_\infty V_\infty x / \mu_\infty$.

Laminare: $\delta = \frac{5,2x}{\sqrt{Re_x}}$; $c_{f,x} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}$; $C_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}}$.

Turbolento: $\delta = \frac{0,37x}{Re_x^{0,2}}$; $c_{f,x} = \frac{0,0592}{Re_x^{0,2}}$; $C_f = \frac{0,074}{Re_L^{0,2}}$.

Attrito: $D_f = q_\infty S C_f$ (per faccia bagnata); comprimibilità: a $M = 2$ turbolento $c_f \approx 0,74 c_{f,inc}$.

Transizione: $x_{cr} = \mu Re_{x,cr} / (\rho V)$, $Re_{x,cr} \approx 5 \times 10^5$ (da dichiarare).

Resistenza di profilo: $D = D_f + D_p$.

Dati. Costanti utili (aria, SI). $R = 287 \text{ J/(kg K)}$; $\gamma = 1,4$; $c_p = 1008 \text{ J/(kg K)}$; $c_v = 720 \text{ J/(kg K)}$; $\mu_{SL} = 1,7894 \times 10^{-5} \text{ kg/(m s)}$; SL ISA: $p = 101325 \text{ Pa}$, $T = 288,15 \text{ K}$, $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$, $a = 340,3 \text{ m/s}$.
Conversioni: $1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$; $1 \text{ kt} = 0,5144 \text{ m/s}$; $1 \text{ hp} = 745,7 \text{ W}$.

A Soluzioni degli esercizi proposti

Bussola

Tutte le soluzioni dei sessantacinque problemi del sezione 22, svolte in forma *completa e passo passo*, con la stessa struttura degli esercizi della monografia: il riquadro dei **dati**, le **fasi** di svolgimento (prima la scelta del modello, con la verifica delle sue ipotesi; poi la formula; poi la sostituzione numerica) e il riquadro del **risultato** con il commento fisico. Ogni valore è stato verificato con script Python indipendenti. Il consiglio resta lo stesso: leggete la soluzione *dopo* il vostro tentativo, non al posto del vostro tentativo.

Continuità e Bernoulli (P.1–P.7)

P.1 — Continuità nel condotto divergente

Dati. Acqua, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $V_1 = 1,5 \text{ m/s}$; $A_2 = 4A_1$.

— Fase A — Scelta del modello

Il fluido è acqua: un liquido, incompressibile per eccellenza ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$). L'equazione di continuità $\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$ si semplifica quindi nella forma volumetrica $A_1 V_1 = A_2 V_2$.

— Fase B — Calcolo

$$V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2} = \frac{V_1}{4} = \frac{1,5}{4} = 0,375 \text{ m/s}.$$

Risultato. $V_2 = 0,375 \text{ m/s}$. Nel divergente incompressibile la corrente *rallenta*: quadruplicata l'area, la velocità si riduce a un quarto, perché la portata in volume deve restare la stessa.

P.2 — La pressione nel divergente

Dati. Come P.1; inoltre $V_1 = 1,5 \text{ m/s}$, $V_2 = 0,375 \text{ m/s}$ (dal problema precedente).

— Fase A — Scelta del modello

Flusso incompressibile lungo lo stesso tubo di flusso: fra ingresso e uscita vale l'equazione di Bernoulli $p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$.

— Fase B — Calcolo

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= \frac{1}{2}\rho (V_1^2 - V_2^2) = \frac{1}{2} \times 1000 \times (1,5^2 - 0,375^2) \\ &= 500 \times (2,25 - 0,1406) = 500 \times 2,109 = 1055 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

Risultato. $p_2 - p_1 = +1055 \text{ Pa}$: nel divergente la pressione *sale*. Il segno positivo è la firma del *gradiente avverso* di pressione — lo stesso che nel sezione 18 metterà in crisi lo strato limite.

P.3 — Pressione in un punto dell'ala

Dati. $V_\infty = 60 \text{ m/s}$ a 3 km ISA; $p_\infty = 70104 \text{ Pa}$, $T_\infty = 268,65 \text{ K}$; nel punto: $V = 70 \text{ m/s}$.

— Fase A — Scelta del modello

La densità in quota, dall'equazione di stato:

$$\rho = \frac{p_\infty}{R T_\infty} = \frac{70104}{287 \times 268,65} = 0,909 \text{ kg/m}^3.$$

La velocità massima in gioco è 70 m/s , cioè $M \approx 0,21 < 0,3$: il flusso è incompressibile e Bernoulli è legittimo.

— Fase B — Bernoulli fra corrente indisturbata e punto

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho(V_{\infty}^2 - V^2) = 70104 + \frac{1}{2} \times 0,909 \times (3600 - 4900) \\ = 70104 - 0,455 \times 1300 = 70104 - 591 = 69513 \text{ Pa.}$$

Risultato. $p = 69513 \text{ Pa}$. Dove la velocità cresce la pressione cala: è, in miniatura, il meccanismo stesso della portanza.

P.4 — Il tubo di Venturi come anemometro

Dati. $A_1/A_2 = 4$; $p_1 - p_2 = 3830 \text{ Pa}$; livello del mare standard, $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$; V_1 coincide con la velocità di volo.

— Fase A — Il modello: continuità + Bernoulli

Velivolo lento, flusso incomprimibile. Continuità fra ingresso e gola:

$$V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2} = 4 V_1.$$

Bernoulli fra le stesse sezioni:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2}\rho V_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right].$$

— Fase B — Inversione e calcolo

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[(A_1/A_2)^2 - 1]}} = \sqrt{\frac{2 \times 3830}{1,225 \times (16 - 1)}} = \sqrt{\frac{7660}{18,375}} = \sqrt{416,9} = 20,4 \text{ m/s.}$$

Risultato. $V_1 = 20,4 \text{ m/s} \approx 73 \text{ km/h}$: plausibile per un velivolo del 1920. È la logica di ogni anemometro a pressione differenziale: geometria nota + Δp misurato $\Rightarrow$ velocità.

P.5 — Condotto convergente–divergente incomprimibile

Dati. $A_{\text{in}} = 3 \text{ m}^2$, $A_{\text{gola}} = 1,5 \text{ m}^2$, $A_{\text{out}} = 2 \text{ m}^2$; $p_{\text{in}} = 1,02 \times 10^5 \text{ Pa}$, $p_{\text{out}} = 1,00 \times 10^5 \text{ Pa}$; $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$.

— Fase A — Il sistema di equazioni

Flusso incomprimibile: le tre sezioni sono legate dalla continuità,

$$A_{\text{in}} V_{\text{in}} = A_{\text{gola}} V_{\text{gola}} = A_{\text{out}} V_{\text{out}}$$

e ogni coppia di sezioni da Bernoulli. Conosciamo le *pressioni* di ingresso e uscita: conviene quindi lavorare fra quelle due sezioni. Dalla continuità $V_{\text{in}} = V_{\text{out}} A_{\text{out}}/A_{\text{in}} = \frac{2}{3} V_{\text{out}}$.

— Fase B — Bernoulli ingresso–uscita

$$p_{\text{in}} - p_{\text{out}} = \frac{1}{2}\rho(V_{\text{out}}^2 - V_{\text{in}}^2) = \frac{1}{2}\rho V_{\text{out}}^2 \left[1 - \frac{4}{9} \right] = \frac{1}{2}\rho V_{\text{out}}^2 \times \frac{5}{9}, \\ V_{\text{out}} = \sqrt{\frac{2 \times 2000}{1,225 \times 5/9}} = \sqrt{\frac{4000}{0,6806}} = \sqrt{5877} = 76,7 \text{ m/s.}$$

— Fase C — La gola, per continuità

$$V_{\text{gola}} = V_{\text{out}} \frac{A_{\text{out}}}{A_{\text{gola}}} = 76,7 \times \frac{2}{1,5} = 102,2 \text{ m/s.}$$

Risultato. $V_{\text{gola}} = 102,2 \text{ m/s}$. Come dev'essere, la gola — la sezione minima — è il punto più veloce (e quindi a pressione minima) dell'intero condotto: è il principio del venturimetro.

P.6 — Dalla pressione alla velocità locale

Dati. $V_{\infty} = 58,1 \text{ m/s}$ a 1524 m ISA: $p_{\infty} = 84\,304 \text{ Pa}$, $T_{\infty} = 278,24 \text{ K}$; nel punto: $p = 83\,790 \text{ Pa}$.

— Fase A — Modello e densità

$M_{\infty} \approx 0,17$: incomprimibile, Bernoulli. La densità:

$$\rho = \frac{84304}{287 \times 278,24} = 1,056 \text{ kg/m}^3.$$

— Fase B — Bernoulli risolto per la velocità

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{V_{\infty}^2 + \frac{2(p_{\infty} - p)}{\rho}} = \sqrt{58,1^2 + \frac{2 \times (84304 - 83790)}{1,056}} \\ &= \sqrt{3376 + \frac{1028}{1,056}} = \sqrt{3376 + 974} = \sqrt{4350} = 66,0 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Risultato. $V = 66,0 \text{ m/s}$. Il punto è in depressione di appena 514 Pa rispetto alla corrente, eppure la velocità locale è salita del 14 %: sulle ali le pressioni si muovono poco, le velocità molto.

P.7 — Dimensionare il manometro del Venturi

Dati. $V_{\text{max}} = 90 \text{ m/s}$ al livello del mare ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$); rapporto d'aree $A_1/A_2 = 1,3$.

— Fase A — Il modello

È la formula di P.4 letta al contrario: fissata la geometria, la Δp cresce con il quadrato della velocità; il massimo carico sul manometro si ha dunque a V_{max} .

— Fase B — Calcolo

$$\begin{aligned} \Delta p_{\text{max}} &= \frac{1}{2} \rho V_{\text{max}}^2 [(A_1/A_2)^2 - 1] = \frac{1}{2} \times 1,225 \times 90^2 \times (1,69 - 1) \\ &= 0,6125 \times 8100 \times 0,69 = 3423 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

Risultato. $\Delta p_{\text{max}} = 3423 \text{ Pa}$, circa il 3,4 % di un'atmosfera: il fondo scala di un manometro differenziale modesto. Ecco perché il Venturi andò benissimo sui velivoli lenti degli anni Venti — e perché sparì quando le velocità crebbero.

Flusso isentropico ed energia (P.8–P.14)

P.8 — Espansione isentropica in un ugello

Dati. Serbatoio: $p_0 = 10 \text{ atm}$, $T_0 = 300 \text{ K}$; uscita: $p_e = 1 \text{ atm}$. Flusso isentropico.

— Fase A — Scelta del modello

L'espansione in un ugello ben progettato è rapida (adiabatica) e quasi priva d'attrito: isentropica. Pressione e temperatura sono allora legate dalla relazione isentropica $T/T_0 = (p/p_0)^{(\gamma-1)/\gamma}$.

— Fase B — Temperatura di uscita

$$T_e = T_0 \left(\frac{p_e}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 300 \times (0,1)^{0,2857} = 300 \times 0,518 = 155,4 \text{ K}.$$

— Fase C — Densità di uscita (equazione di stato)

$$\rho_e = \frac{p_e}{R T_e} = \frac{101325}{287 \times 155,4} = 2,27 \text{ kg/m}^3.$$

Risultato. $T_e = 155,4 \text{ K}$ (-118°C !), $\rho_e = 2,27 \text{ kg/m}^3$. Espandere di un fattore 10 in pressione costa metà della temperatura assoluta: è l'entalpia che si sta convertendo in energia cinetica. Si noti che ρ_e è *maggiore* di quella ambiente: il gas è freddissimo.

P.9 — La velocità di uscita di un ugello (derivazione)

Dati. Richiesta: V_e in funzione di p_0/p_e e T_0 .

— Fase A — Equazione dell'energia

Fra serbatoio (dove $V \approx 0$) e uscita, per flusso adiabatico:

$$c_p T_0 = c_p T_e + \frac{V_e^2}{2} \quad \Rightarrow \quad V_e = \sqrt{2 c_p (T_0 - T_e)} = \sqrt{2 c_p T_0 \left(1 - \frac{T_e}{T_0}\right)}.$$

— Fase B — Eliminazione di T_e con l'isentropica

Dalla relazione isentropica $T_e/T_0 = (p_e/p_0)^{(\gamma-1)/\gamma}$. Sostituendo:

$$V_e = \sqrt{2 c_p T_0 \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]}$$

Risultato. La formula contiene i suoi due limiti fisici: $V_e \rightarrow 0$ quando $p_e \rightarrow p_0$ (nessuna espansione, nessuna velocità) e $V_e \rightarrow \sqrt{2 c_p T_0}$ quando $p_e/p_0 \rightarrow 0$ (la velocità massima della sezione II: tutta l'entalpia convertita in energia cinetica). È la formula di progetto degli ugelli dei razzi.

P.10 — Punto sull'ala in regime comprimibile

Dati. $V_\infty = 270 \text{ m/s}$ a 5 km ISA: $p_\infty = 54\,014 \text{ Pa}$, $T_\infty = 255,65 \text{ K}$; nel punto: $V = 330 \text{ m/s}$.

— Fase A — Verifica del regime (il passo che decide tutto)

$$a_\infty = \sqrt{\gamma R T_\infty} = \sqrt{1,4 \times 287 \times 255,65} = 320,5 \text{ m/s} \Rightarrow M_\infty = \frac{270}{320,5} = 0,84.$$

Ben oltre la soglia $M = 0,3$: Bernoulli è *fuori gioco*. Serve la coppia energia + isentropica del sezione 6.

— Fase B — Equazione dell'energia: la temperatura nel punto

$$T = T_\infty + \frac{V_\infty^2 - V^2}{2 c_p} = 255,65 + \frac{270^2 - 330^2}{2 \times 1008} = 255,65 - \frac{36000}{2016} = 237,8 \text{ K}.$$

Dove il flusso accelera, si raffredda.

— Fase C — Relazione isentropica: la pressione nel punto

$$\begin{aligned} p &= p_\infty \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} = 54014 \times \left(\frac{237,8}{255,65}\right)^{3,5} = 54014 \times (0,9302)^{3,5} \\ &= 54014 \times 0,7761 = 41\,922 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

Risultato. $T = 237,8 \text{ K}$, $p = 41\,922 \text{ Pa}$. Con Bernoulli si sarebbe ottenuto $p = 54014 - \frac{1}{2} \rho_\infty (330^2 - 270^2) = 40\,795 \text{ Pa}$: quasi il 3 % di errore, che a questi Mach non è più trascurabile.

P.11 — L'area di uscita dall'equazione di continuità

Dati. $\dot{m} = 0,68 \text{ kg/s}$; $V_e = 457 \text{ m/s}$; serbatoio: $T_0 = 556 \text{ K}$, $p_0 = 7 \text{ atm}$.

— Fase A — Il piano di lavoro

La continuità $\dot{m} = \rho_e A_e V_e$ darà l'area, ma prima servono le condizioni di uscita: T_e dall'energia, p_e dall'isotropica, ρ_e dallo stato.

— Fase B — Temperatura di uscita (energia)

$$T_e = T_0 - \frac{V_e^2}{2c_p} = 556 - \frac{457^2}{2016} = 556 - 103,6 = 452,4 \text{ K}.$$

— Fase C — Pressione e densità di uscita

$$p_e = p_0 \left(\frac{T_e}{T_0} \right)^{3,5} = 7 \times (0,8137)^{3,5} = 7 \times 0,486 = 3,40 \text{ atm} = 3,45 \times 10^5 \text{ Pa},$$

$$\rho_e = \frac{p_e}{R T_e} = \frac{3,45 \times 10^5}{287 \times 452,4} = 2,66 \text{ kg/m}^3.$$

— Fase D — Continuità: l'area

$$A_e = \frac{\dot{m}}{\rho_e V_e} = \frac{0,68}{2,66 \times 457} = 5,6 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 5,6 \text{ cm}^2.$$

Risultato. $A_e = 5,6 \text{ cm}^2$: una moneta. Le quattro equazioni del sezione 7 usate in fila — energia, isotropica, stato, continuità — bastano a dimensionare un ugello.

P.12 — Quasi in ristagno

Dati. $V_\infty = 670 \text{ m/s}$ a $15,2 \text{ km}$ (stratosfera: $T_\infty = 216,65 \text{ K}$); nel punto: $T = 430 \text{ K}$.

— Fase A — Il modello

Regime largamente supersonico, ma lungo la linea di corrente il flusso resta adiabatico: l'equazione dell'energia $c_p T_\infty + V_\infty^2/2 = c_p T + V^2/2$ vale comunque (non richiede l'isotropicità).

— Fase B — Calcolo

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{V_\infty^2 + 2c_p(T_\infty - T)} = \sqrt{670^2 + 2016 \times (216,65 - 430)} \\ &= \sqrt{448900 - 430114} = \sqrt{18786} = 137 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

— Fase C — Il controllo che dà senso al numero

La temperatura di ristagno della corrente è

$$T_0 = T_\infty + \frac{V_\infty^2}{2c_p} = 216,65 + \frac{448900}{2016} = 439,4 \text{ K} :$$

il punto a 430 K è a un soffio dal ristagno, e infatti la velocità residua è piccola.

Risultato. $V = 137 \text{ m/s}$. L'energia è un "termometro cinetico": dove l'aria è quasi ferma è quasi alla T_0 , dove corre è fredda.

P.13 — La portata dei motori

Dati. Come P.12; area totale delle prese $A = 1,86 \text{ m}^2$; rapporto combustibile/aria $f = 0,05$; quota 15,2 km: $p_\infty = 11\,593 \text{ Pa}$, $T_\infty = 216,65 \text{ K}$.

— **Fase A — La densità in quota**

$$\rho_\infty = \frac{p_\infty}{R T_\infty} = \frac{11593}{287 \times 216,65} = 0,186 \text{ kg/m}^3$$

— meno di un sesto di quella al suolo: si vola alti proprio per questo.

— **Fase B — Portata d'aria (continuità attraverso le prese)**

$$\dot{m}_{\text{aria}} = \rho_\infty A V_\infty = 0,186 \times 1,86 \times 670 = 232 \text{ kg/s.}$$

— **Fase C — Il bilancio di massa del motore**

Dentro il motore entra aria e combustibile; ciò che esce è la somma:

$$\dot{m}_{\text{out}} = (1 + f) \dot{m}_{\text{aria}} = 1,05 \times 232 = 244 \text{ kg/s.}$$

Risultato. $\dot{m}_{\text{out}} = 244 \text{ kg/s}$. La conservazione della massa non vale solo per i tubi di flusso: vale per qualunque volume di controllo, motore compreso.

P.14 — Il Mach di uscita dell'ugello di P.11

Dati. Dall'esercizio P.11: $V_e = 457 \text{ m/s}$, $T_e = 452,4 \text{ K}$.

— **Fase A — La velocità del suono locale**

Il Mach va calcolato con la velocità del suono *alla temperatura locale*, non a quella del serbatoio:

$$a_e = \sqrt{\gamma R T_e} = \sqrt{1,4 \times 287 \times 452,4} = 426,4 \text{ m/s.}$$

— **Fase B — Il rapporto**

$$M_e = \frac{V_e}{a_e} = \frac{457}{426,4} = 1,07.$$

Risultato. $M_e = 1,07$: appena supersonico. L'ugello ha da poco superato la gola sonica; per accelerare ancora servirebbe più divergente (relazione area–Mach della sezione II).

Velocità del suono e numero di Mach (P.15–P.17)

P.15 — Il Mach del quadrigetto in crociera

Dati. $V = 250 \text{ m/s}$ a 13 km (stratosfera: $T = 216,65 \text{ K}$).

— **Fase A — La velocità del suono in quota**

La velocità del suono dipende *solo* dalla temperatura (sezione 8):

$$a = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{1,4 \times 287 \times 216,65} = 295 \text{ m/s.}$$

— **Fase B — Il Mach**

$$M = \frac{V}{a} = \frac{250}{295} = 0,847.$$

Risultato. $M = 0,847$: il cuore della crociera dei jet di linea, che vive tutta fra $M = 0,78$ e $M = 0,88$. Oltre, la resistenza d'onda esplode; sotto, si butta via tempo.

P.16 — Mach 3 in metri al secondo

Dati. $M = 3$ al livello del mare standard ($T = 288,15$ K).

— Fase A — Velocità del suono e velocità

$$a = \sqrt{1,4 \times 287 \times 288,15} = 340,3 \text{ m/s}, \quad V = M a = 3 \times 340,3 = 1021 \text{ m/s}.$$

Risultato. $V = 1021 \text{ m/s} \approx 3675 \text{ km/h}$: un chilometro al secondo. A quota zero, però, il riscaldamento cinetico e la pressione dinamica sarebbero brutali: i Mach 3 veri volano nella stratosfera.

P.17 — Il Mach del trasporto supersonico

Dati. $V = 670 \text{ m/s}$ alla tropopausa ($T = 216,65$ K, $a = 295 \text{ m/s}$ da P.15).

— Fase A — Calcolo

$$M = \frac{670}{295} = 2,27.$$

Risultato. $M = 2,27$. Stessa temperatura di P.15, stessa a : fra un B747 a $M = 0,85$ e un Concorde a $M = 2,27$ la differenza è tutta nel numeratore.

Gallerie subsoniche (P.18–P.19)

P.18 — Il manometro della galleria

Dati. Rapporto di contrazione $A_1/A_2 = 20$; camera di prova: $V_2 = 80 \text{ m/s}$, $p_2 = 1 \text{ atm}$, $T = 300 \text{ K}$; mercurio: $\rho_{\text{Hg}} = 1,36 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$.

— Fase A — La densità dell'aria in galleria

$$\rho = \frac{p_2}{R T} = \frac{101325}{287 \times 300} = 1,177 \text{ kg/m}^3.$$

$V_2 = 80 \text{ m/s}$ significa $M \approx 0,23$: incomprimibile, vale la formula della galleria della sezione 9.

— Fase B — Il salto di pressione fra camera di calma e camera di prova

Bernoulli + continuità ($V_1 = V_2/20$):

$$\begin{aligned} \Delta p = p_1 - p_2 &= \frac{1}{2} \rho V_2^2 \left[1 - \frac{1}{(A_1/A_2)^2} \right] = \frac{1}{2} \times 1,177 \times 6400 \times \left(1 - \frac{1}{400} \right) \\ &= 3766 \times 0,9975 = 3756 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

— Fase C — La traduzione del manometro

L'equilibrio idrostatico della colonna di mercurio:

$$\Delta h = \frac{\Delta p}{\rho_{\text{Hg}} g} = \frac{3756}{1,36 \times 10^4 \times 9,81} = 0,0282 \text{ m} = 2,8 \text{ cm}.$$

Risultato. $\Delta h = 2,8 \text{ cm}$ di mercurio. Con contrazione 20 il termine $1/400$ è già invisibile: in una buona galleria la velocità in camera di calma non conta più nulla.

P.19 — A che cosa serve il diffusore

Dati. $V_2 = 89,4$ m/s in camera di prova; $A_1/A_2 = 5$; aria standard ($\rho = 1,225$ kg/m³). Caso (a): la camera scarica direttamente in atmosfera. Caso (b): diffusore con $A_3 = 4,5 A_2$ che scarica in atmosfera.

— Fase A — Galleria (a): senza diffusore

L'uscita è la camera di prova stessa: $p_2 = 1$ atm. Con $V_1 = V_2/5 = 17,9$ m/s, il salto da mantenere è

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2} \times 1,225 \times (7992 - 320) = 4700 \text{ Pa.}$$

— Fase B — Galleria (b): con diffusore

Ora è l'uscita del diffusore a stare a 1 atm. Lì la velocità è

$$V_3 = V_2 \frac{A_2}{A_3} = \frac{89,4}{4,5} = 19,9 \text{ m/s,}$$

e il salto complessivo da mantenere diventa

$$p_1 - p_3 = \frac{1}{2}\rho(V_3^2 - V_1^2) = \frac{1}{2} \times 1,225 \times (394,7 - 319,7) = 46 \text{ Pa.}$$

— Fase C — Il confronto

$$\frac{(p_1 - p_2)_{(a)}}{(p_1 - p_3)_{(b)}} = \frac{4700}{46} \approx 100.$$

Risultato. Il diffusore riduce di *cento volte* la differenza di pressione — cioè la potenza — necessaria a far girare la galleria: riconverte la pressione dinamica della camera di prova in pressione statica invece di buttarla via nel getto di scarico. È il motivo per cui ogni galleria seria ha un diffusore, ed è il problema che i fratelli Wright non seppero di avere.

Misura della velocità (P.20–P.27)**P.20 — Pitot in regime incompressibile**

Dati. Galleria lenta: $V = 67,1$ m/s, $p = 1$ atm, $T = 294,3$ K.

— Fase A — Verifica del regime

$a = \sqrt{1,4 \times 287 \times 294,3} = 344$ m/s, quindi $M = 0,20 < 0,3$: regime incompressibile, il Pitot legge semplicemente $p_0 = p + q$.

— Fase B — Calcolo

$$\rho = \frac{101325}{287 \times 294,3} = 1,200 \text{ kg/m}^3,$$

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho V^2 = 101325 + \frac{1}{2} \times 1,200 \times 67,1^2 = 101325 + 2698 = 104\,023 \text{ Pa.}$$

Risultato. $p_0 = 104\,023$ Pa. La pressione dinamica (2,7 kPa) è il 2,7 % della statica: piccola in assoluto, ma è tutto ciò che l'anemometro ha da misurare.

P.21 — Velocità vera ed equivalente

Dati. Quota-pressione 2438 m: $p = 75\,258$ Pa; Pitot: $p_0 = 79\,000$ Pa; temperatura esterna misurata: $T = 278$ K.

— Fase A — La densità reale (non quella ISA!)

L'altimetro dà la *pressione*; la temperatura è misurata:

$$\rho = \frac{p}{R T} = \frac{75258}{287 \times 278} = 0,943 \text{ kg/m}^3.$$

— Fase B — La velocità vera

$\Delta p = p_0 - p = 79000 - 75258 = 3742 \text{ Pa}$ ($M \approx 0,27$: incomprimibile). Quindi

$$V_{\text{true}} = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \times 3742}{0,943}} = 89,1 \text{ m/s}.$$

— Fase C — La velocità equivalente

Stessa Δp , ma densità standard:

$$V_e = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho_s}} = \sqrt{\frac{2 \times 3742}{1,225}} = 78,2 \text{ m/s}.$$

Risultato. $V_{\text{true}} = 89,1 \text{ m/s}$, $V_e = 78,2 \text{ m/s}$. Due numeri dalla stessa misura: il primo serve per navigare, il secondo — che “congela” la pressione dinamica — per i carichi strutturali e per lo stallo.

P.22 — Dall'anemometro alla velocità vera

Dati. Quota-pressione 2 km: $p = 79\,492 \text{ Pa}$; anemometro (tarato con ρ_s): $V_e = 50 \text{ m/s}$; temperatura esterna: $T = 280 \text{ K}$.

— Fase A — Che cosa indica davvero lo strumento

L'anemometro misura Δp e la converte con ρ_s : la sua lettura è per definizione la velocità *equivalente*.

— Fase B — La densità reale e la conversione

$$\rho = \frac{79492}{287 \times 280} = 0,989 \text{ kg/m}^3,$$

$$V_{\text{true}} = V_e \sqrt{\frac{\rho_s}{\rho}} = 50 \times \sqrt{\frac{1,225}{0,989}} = 50 \times 1,113 = 55,6 \text{ m/s}.$$

Risultato. $V_{\text{true}} = 55,6 \text{ m/s}$: in quota l'aeroplano va più forte di quanto dica la lancetta — e la differenza cresce salendo. È la correzione che ogni pilota fa, o fa fare al computer di bordo.

P.23 — Pitot in regime subsonico comprimibile

Dati. Galleria veloce: $p = 1 \text{ atm}$, $T = 270 \text{ K}$, $V = 250 \text{ m/s}$.

— Fase A — Verifica del regime

$$a = \sqrt{1,4 \times 287 \times 270} = 329,4 \text{ m/s} \Rightarrow M = \frac{250}{329,4} = 0,76.$$

Ben oltre 0,3: serve il rapporto di ristagno comprimibile.

— Fase B — Il rapporto di ristagno

$$\begin{aligned} p_0 &= p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} = 101325 \times (1 + 0,2 \times 0,576)^{3,5} \\ &= 101325 \times (1,1152)^{3,5} = 101325 \times 1,465 = 148\,416 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

— Fase C — Che cosa avrebbe detto Bernoulli

$$\rho = p/(RT) = 1,308 \text{ kg/m}^3; p + \frac{1}{2}\rho V^2 = 101325 + 40866 = 142,2 \text{ kPa: il 4 \% in meno.}$$

Risultato. $p_0 = 148,4 \text{ kPa}$. L'errore di Bernoulli a $M = 0,76$ è già del 4 %: su un machmetro sarebbe inaccettabile. La soglia $M = 0,3$ non è pignoleria.

P.24 — Il Mach dal rapporto di pressioni

Dati. Quota-pressione 12 km: $p = 19\,324 \text{ Pa}$; Pitot: $p_0 = 2,96 \times 10^4 \text{ Pa}$.

— Fase A — Il metodo

Il machmetro inverte il rapporto di ristagno: dalla coppia (p_0, p) si ricava M senza bisogno della temperatura.

— Fase B — Inversione e calcolo

$$\frac{p_0}{p} = \frac{29600}{19324} = 1,532,$$

$$M = \sqrt{5 \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/3,5} - 1 \right]} = \sqrt{5 [(1,532)^{0,2857} - 1]} = \sqrt{5 \times 0,1296} = 0,805.$$

Risultato. $M = 0,805$: crociera tipica di un widebody. Da notare che la temperatura non è mai servita: il machmetro è uno strumento puramente *barometrico*.

P.25 — L'altimetro dal Pitot

Dati. $M = 0,65$; Pitot: $p_0 = 111\,998 \text{ Pa}$.

— Fase A — Dalla coppia (M, p_0) alla statica

$$p = \frac{p_0}{(1 + 0,2 M^2)^{3,5}} = \frac{111998}{(1,0845)^{3,5}} = \frac{111998}{1,3285} = 84\,315 \text{ Pa}.$$

— Fase B — Dalla statica alla quota (troposfera ISA)

Nella troposfera p e T sono legate dalla legge ISA; invertendo:

$$T = 288,15 \left(\frac{p}{p_{\text{SL}}} \right)^{1/5,256} = 288,15 \times (0,8321)^{0,1903} = 278,2 \text{ K},$$

$$h = \frac{288,15 - T}{0,0065} = \frac{288,15 - 278,2}{0,0065} \approx 1524 \text{ m}.$$

Risultato. $h \approx 1524 \text{ m}$ (i 5000 ft delle carte). Altimetro, anemometro e machmetro sono tre letture diverse dello stesso trio di pressioni: statica, totale, standard.

P.26 — Il bordo d'attacco che scotta

Dati. $M = 0,96$ al livello del mare ($T_\infty = 288,15 \text{ K}$).

— Fase A — Il modello

Sul punto di ristagno del bordo d'attacco il flusso si arresta adiabaticamente: la temperatura è la T_0 della corrente, che dipende solo da T_∞ e M — nessuna pressione richiesta.

— Fase B — Calcolo

$$T_0 = T_\infty (1 + 0,2 M^2) = 288,15 \times (1 + 0,2 \times 0,9216) = 288,15 \times 1,1843 = 341,3 \text{ K}.$$

Risultato. $T_0 = 341,3 \text{ K} = 68^\circ\text{C}$: $+53 \text{ K}$ rispetto all'aria ambiente, già a Mach subsonico. Il riscaldamento cinetico non aspetta il supersonico per farsi sentire.

P.27 — Pitot supersonico

Dati. $V = 596 \text{ m/s}$ alla quota-p pressione di 10 km ($p = 26\,430 \text{ Pa}$); temperatura esterna $T = 220 \text{ K}$.

— Fase A — Verifica del regime (di nuovo, il passo decisivo)

$$a = \sqrt{1,4 \times 287 \times 220} = 297,3 \text{ m/s} \Rightarrow M = \frac{596}{297,3} = 2,0.$$

Supersonico: davanti alla bocca del Pitot c'è un urto staccato. La formula isentropica non basta più: serve Rayleigh (sezione 10).

— Fase B — La formula di Rayleigh

Per $M = 2,0$ il rapporto di Rayleigh vale

$$\frac{p_{0,2}}{p_1} = \left[\frac{(\gamma + 1)^2 M^2}{4\gamma M^2 - 2(\gamma - 1)} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \frac{1 - \gamma + 2\gamma M^2}{\gamma + 1} = 5,66,$$

$$p_{0,2} = 5,66 \times 26\,430 = 1,50 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

— Fase C — Quanto avrebbe sbagliato l'isentropica

$p_0^{\text{isen}} = 26\,430 \times (1,8)^{3,5} = 2,07 \times 10^5 \text{ Pa}$: il 38 % in più, perché ignora la pressione totale distrutta dall'urto.

Risultato. $p_{0,2} = 1,50 \times 10^5 \text{ Pa}$. In supersonico il Pitot non misura più la p_0 della corrente ma quella *a valle dell'urto normale*: la taratura dello strumento deve saperlo.

Comprimibilità, ristagno, EAS (P.28–P.30, P.38–P.39, P.46–P.48, P.61)

P.28 — La pressione dinamica in funzione di p e M (derivazione)

Dati. Richiesta: $q = q(p, M)$.

— Fase A — Le due sostituzioni

Nella definizione $q = \frac{1}{2}\rho V^2$ esprimiamo entrambi i fattori con p , T e M : dall'equazione di stato $\rho = p/(RT)$; dalla definizione di Mach $V^2 = M^2 a^2 = M^2 \gamma RT$.

— Fase B — La semplificazione

$$q = \frac{1}{2} \frac{p}{RT} M^2 \gamma RT \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = \frac{\gamma}{2} p M^2 = 0,7 p M^2 \text{ (aria)}}$$

Il prodotto RT si semplifica esattamente.

Risultato. $q = 0,7 p M^2$: identità algebrica, valida a *qualsunque* Mach e in qualunque regime, perché discende dalle sole definizioni. È la via più rapida alla pressione dinamica quando si conoscono quota e Mach — cioè quasi sempre, in volo.

P.29 — La pressione dinamica lungo il rientro

Dati. Atmosfera Standard 1976: 60 km ($p = 22,0 \text{ Pa}$) a $M = 24$; 40 km ($p = 287 \text{ Pa}$) a $M = 9,5$; 20 km ($p = 5529 \text{ Pa}$) a $M = 5,5$.

— Fase A — Lo strumento giusto

A questi Mach l'unica via ragionevole è la formula di P.28, $q = 0,7 p M^2$: niente densità, niente velocità.

— Fase B — I tre calcoli

$$h = 60 \text{ km} : q = 0,7 \times 22,0 \times 576 = 8,9 \text{ kPa};$$

$$h = 40 \text{ km} : q = 0,7 \times 287 \times 90,25 = 18,1 \text{ kPa};$$

$$h = 20 \text{ km} : q = 0,7 \times 5529 \times 30,25 = 117 \text{ kPa}.$$

— Fase C — Lettura fisica

Fra 60 e 20 km il Mach si divide per 4,4 (e M^2 per 19), ma la pressione statica si moltiplica per 250: il prodotto cresce di un fattore 13.

Risultato. q passa da 8,9 a 117 kPa *mentre lo Shuttle rallenta*: il picco dei carichi aerodinamici e termici è in bassa stratosfera, non all'ingresso in atmosfera. È lì che si gioca il progetto strutturale e termico di ogni veicolo di rientro.

P.30 — Tre pressioni di ristagno a confronto

Dati. $M = 2$ al livello del mare: $p = 101\,325 \text{ Pa}$.

— Fase A — Pressione totale isentropica

Varrebbe se il flusso si arrestasse *senza urti*:

$$p_0 = p(1 + 0,2 \times 4)^{3,5} = 101325 \times (1,8)^{3,5} = 101325 \times 7,824 = 7,93 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

— Fase B — Ristagno sul corpo tozzo (Rayleigh)

La fisica vera: urto normale davanti al muso, poi compressione isentropica. Per $M = 2$: $p_{\text{stag}}/p = 5,64$:

$$p_{\text{stag}} = 5,64 \times 101325 = 5,72 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

— Fase C — Il risultato (errato) di Bernoulli

$$p + q = p(1 + 0,7M^2) = 101325 \times 3,8 = 3,85 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Risultato. Isentropica $7,93 \times 10^5 \text{ Pa}$; Rayleigh $5,72 \times 10^5 \text{ Pa}$; Bernoulli $3,85 \times 10^5 \text{ Pa}$. L'urto distrugge il 28 % della pressione totale isentropica; Bernoulli — che non sa nulla né di comprimibilità né di urti — sbaglia del 33 % in difetto. A Mach 2 la scelta del modello non è un dettaglio: è metà della risposta.

P.38 — Punto sull'ala con i rapporti di ristagno

Dati. $M_\infty = 0,7$ a 3 km ($p_\infty = 70\,104 \text{ Pa}$); nel punto: $M = 1,1$. Flusso isentropico.

— Fase A — L'invariante

Il flusso è isentropico: la pressione totale p_0 è *la stessa* nei due punti (sezione 10). Scriviamo il rapporto di ristagno in entrambi e dividiamo membro a membro: p_0 scompare.

— Fase B — Calcolo

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{1 + 0,2 M_\infty^2}{1 + 0,2 M^2} \right)^{3,5} = \left(\frac{1,098}{1,242} \right)^{3,5} = (0,8841)^{3,5} = 0,6497,$$

$$p = 0,6497 \times 70104 = 45\,543 \text{ Pa}.$$

Risultato. $p = 45\,543 \text{ Pa}$. Il metodo dei rapporti evita ogni passaggio per velocità e c_p : solo γ e i Mach — i parametri di similitudine del flusso comprimibile. Da notare: sull'ala di un velivolo a $M_\infty = 0,7$ c'è già una zona supersonica ($M = 1,1$): è il regime *transonico*.

P.39 — La velocità equivalente come traduttore di quota

Dati. $V = 243,8 \text{ m/s}$ a 7620 m ($\rho = 0,549 \text{ kg/m}^3$).

— Fase A — Il modello

Si cerca la velocità V_e che *al livello del mare* produce la stessa pressione dinamica: è la definizione generale di velocità equivalente, $\frac{1}{2}\rho_s V_e^2 = \frac{1}{2}\rho V^2$.

— Fase B — Calcolo

$$V_e = V \sqrt{\frac{\rho}{\rho_s}} = 243,8 \times \sqrt{\frac{0,549}{1,225}} = 243,8 \times 0,669 = 163 \text{ m/s.}$$

Risultato. $V_e = 163 \text{ m/s}$. A parità di V_e i carichi aerodinamici sono identici a ogni quota: per questo lo strutturista, il diagramma di manovra e le velocità di stallo parlano tutti in EAS.

P.46 — Il petardo nel tubo: aria ferma

Dati. Aria standard, ferma; detonazione in $x = 0$ a $t = 0$; $t = 0,2 \text{ s}$.

— Fase A — Il modello

Le onde generate sono *deboli* onde di pressione: per definizione viaggiano alla velocità del suono locale, $a = 340,3 \text{ m/s}$, una verso destra e una verso sinistra.

— Fase B — Le posizioni

$$x_{dx} = +a t = +340,3 \times 0,2 = +68,1 \text{ m}, \quad x_{sx} = -a t = -68,1 \text{ m}.$$

Risultato. $x = \pm 68,1 \text{ m}$, simmetriche: nell'aria ferma il suono non ha direzioni privilegiate.

P.47 — Il petardo nel tubo: aria in moto

Dati. Come P.46, ma con l'aria in moto verso destra a (a) $V = 30 \text{ m/s}$ e (b) $V = 400 \text{ m/s}$.

— Fase A — Il modello: composizione delle velocità

Le onde viaggiano a $\pm a$ *rispetto al gas*; il gas è trascinato a V : rispetto al tubo le velocità sono $V + a$ (onda destra) e $V - a$ (onda sinistra).

— Fase B — Caso (a): corrente subsonica

$$x_{dx} = (30 + 340,3) \times 0,2 = +74,1 \text{ m}, \quad x_{sx} = (30 - 340,3) \times 0,2 = -62,1 \text{ m}.$$

L'onda "controcorrente" *risale comunque*: più lentamente, ma il segnale passa.

— Fase C — Caso (b): corrente supersonica

$$x_{dx} = (400 + 340,3) \times 0,2 = +148,1 \text{ m}, \quad x_{sx} = (400 - 340,3) \times 0,2 = +11,9 \text{ m}.$$

Entrambe le onde finiscono a valle.

Risultato. In corrente supersonica nessun segnale di pressione può risalire il flusso: il gas a monte "non sa" che cosa lo aspetta. È l'essenza fisica del cono di Mach, degli urti (l'informazione si accumula invece di propagarsi) e del comportamento alla rovescia degli ugelli supersonici.

P.48 — L'atmosfera è stabile (e non isentropica)

Dati. ISA: a 1000 m : $p_1 = 89\,876 \text{ Pa}$, $\rho_1 = 1,112 \text{ kg/m}^3$; a 2000 m : $p_2 = 79\,495 \text{ Pa}$, $\rho_{\text{ISA}} = 1,007 \text{ kg/m}^3$. L'elemento sale *isentropicamente* da 1000 a 2000 m .

— Fase A — L'elemento sollevato

Durante la salita isentropica l'elemento obbedisce a $p/\rho^\gamma = \text{cost}$; alla fine assume la pressione locale p_2 :

$$\rho_{\text{el}} = \rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\gamma} = 1,112 \times (0,8845)^{0,714} = 1,112 \times 0,916 = 1,019 \text{ kg/m}^3.$$

— Fase B — Il confronto con i vicini

$$\rho_{\text{el}} = 1,019 \text{ kg/m}^3 > \rho_{\text{ISA}} = 1,007 \text{ kg/m}^3.$$

L'elemento sollevato è *più denso* dell'aria che lo circonda: la spinta di Archimede è minore del suo peso e lo riporta giù.

Risultato. L'atmosfera standard è *stabile*: le perturbazioni verticali vengono smorzate. Morale del problema: la stratificazione ISA (equazione idrostatica + gradiente termico misurato) è cosa ben diversa da un processo isentropico — confonderli è un errore concettuale, non di calcolo.

P.61 — Il primato dell'X-15

Dati. $M = 6,7$ a 31 120 m; ISA: $T = 227,8 \text{ K}$.

— Fase A — La velocità

$$a = \sqrt{1,4 \times 287 \times 227,8} = 302,5 \text{ m/s}, \quad V = M a = 6,7 \times 302,5 = 2027 \text{ m/s}$$

($\approx 7300 \text{ km/h}$: il primato assoluto per un aeroplano pilotato con motore proprio, imbattuto dal 1967).

— Fase B — La temperatura sul muso

Ristagno adiabatico:

$$T_0 = T(1 + 0,2 M^2) = 227,8 \times (1 + 0,2 \times 44,9) = 227,8 \times 9,98 = 2273 \text{ K}.$$

— Fase C — Il caveat obbligatorio

A 2273 K l'aria vibra e comincia a dissociare: c_p non è più costante e il valore vero è sensibilmente inferiore (è il discorso dello Shuttle, sezione 6). L'ordine di grandezza però è giusto — ed è quello che serve al progettista dei materiali.

Risultato. $V = 2027 \text{ m/s}$; $T_0 \approx 2273 \text{ K}$ (con c_p costante). Non a caso l'X-15 era costruito in Inconel-X, superlega di nichel: a quelle temperature l'alluminio non esiste più come materiale strutturale.

Ugelli, gallerie supersoniche e ipersoniche (P.31–P.33, P.40–P.42, P.62)

P.31 — Uscita di un ugello a Mach 3

Dati. Serbatoio: $p_0 = 5 \text{ atm}$, $T_0 = 500 \text{ K}$; $M_e = 3$.

— Fase A — I rapporti di ristagno a $M = 3$

Il flusso nell'ugello è isentropico: p_0 e T_0 del serbatoio sono le grandezze totali *ovunque*. Con $1 + 0,2 M_e^2 = 1 + 1,8 = 2,8$:

$$\frac{p_0}{p_e} = 2,8^{3,5} = 36,7, \quad \frac{T_0}{T_e} = 2,8.$$

— Fase B — Pressione e temperatura di uscita

$$p_e = \frac{5}{36,7} = 0,136 \text{ atm} = 13\,792 \text{ Pa}, \quad T_e = \frac{500}{2,8} = 178,6 \text{ K}.$$

— Fase C — Densità di uscita

$$\rho_e = \frac{p_e}{R T_e} = \frac{13792}{287 \times 178,6} = 0,269 \text{ kg/m}^3.$$

Risultato. $p_e = 0,136 \text{ atm}$, $T_e = 178,6 \text{ K}$, $\rho_e = 0,269 \text{ kg/m}^3$. L'espansione a Mach 3 lascia il 2,7 % della pressione e il 36 % della temperatura del serbatoio: il resto è diventato velocità.

P.32 — Dal rapporto di pressioni al rapporto d'aree

Dati. $p_e/p_0 = 0,2$ attraverso un ugello supersonico.

— Fase A — Prima il Mach di uscita

Invertendo il rapporto di ristagno con $p_0/p_e = 5$:

$$M_e = \sqrt{5 [(5)^{0,2857} - 1]} = \sqrt{5 \times 0,584} = 1,71.$$

— Fase B — Poi la relazione area–Mach

$$\left(\frac{A_e}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M_e^2} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}$$

con esponente $(\gamma + 1)/(\gamma - 1) = 6$; sostituendo $M_e = 1,71$:

$$\frac{A_e}{A^*} = 1,35.$$

Risultato. $M_e = 1,71$, $A_e/A^* = 1,35$. La geometria dell'ugello è *scritta* nel rapporto di pressioni che deve realizzare: assegnato uno, l'altro segue.

P.33 — La curva q/p_0 in funzione del Mach

Dati. Espansione isentropica; richiesto q/p_0 per M da 0 a 2.

— Fase A — Costruzione della formula

Da P.28, $q = \frac{\gamma}{2} p M^2$; dividendo per p_0 e usando il rapporto isentropico $p/p_0 = (1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)^{-\gamma/(\gamma-1)}$:

$$\frac{q}{p_0} = \frac{\gamma}{2} M^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\gamma/(\gamma-1)}.$$

— Fase B — Tabulazione

M	0	0,5	1,0	1,5	2,0
q/p_0	0	0,148	0,370	0,429	0,358

— Fase C — Lettura della curva

Il numeratore M^2 cresce, ma il fattore p/p_0 crolla con l'espansione: il prodotto sale, culmina intorno a $M \approx 1,4$ e poi *ridiscende*.

Risultato. La pressione dinamica di un'espansione isentropica ha un *massimo* vicino a $M = 1,4$: a Mach alti il gas è velocissimo ma così rarefatto che q cala. È un grafico che sorprende sempre al primo incontro — e che spiega perché i carichi massimi di un lanciatore (il “max q”) arrivano in transonico, non alla massima velocità.

P.40 — Progetto di massima della galleria Mach 10

Dati. Camera di prova alle condizioni di 55 km (Atm. Std. 1976): $p_e = 42,5$ Pa, $T_e = 260,8$ K; $M_e = 10$.

— Fase A — Il rapporto d'aree

Con $1 + 0,2 M_e^2 = 21$, la relazione area–Mach dà

$$\frac{A_e}{A^*} = 536.$$

— Fase B — Il serbatoio richiesto

I rapporti di ristagno vanno letti *dal basso verso l'alto*: la camera impone il serbatoio.

$$p_0 = p_e \times 21^{3,5} = 42,5 \times 42540 = 1,81 \times 10^6 \text{ Pa} = 17,8 \text{ atm},$$

$$T_0 = 21 \times T_e = 21 \times 260,8 = 5476 \text{ K}.$$

Risultato. $A_e/A^* = 536$; $p_0 = 17,8$ atm; $T_0 = 5476$ K. La pressione è impegnativa ma gestibile; la *temperatura* è oltre il punto di fusione di qualunque acciaio. Ecco perché le gallerie ipersoniche funzionano a impulso — riscaldatori ad arco, millisecondi di prova — o accettano di non riprodurre la temperatura di volo.

P.41 — La velocità di uscita della galleria Mach 10

Dati. Dalla P.40: $T_e = 260,8$ K, $M_e = 10$.

— Fase A — Calcolo

$$a_e = \sqrt{1,4 \times 287 \times 260,8} = 323,7 \text{ m/s}, \quad V_e = M_e a_e = 10 \times 323,7 = 3237 \text{ m/s}.$$

Risultato. $V_e = 3237$ m/s: tre chilometri al secondo in camera di prova. Teniamo questo numero a mente per il problema successivo.

P.42 — Il paradosso del Mach 20

Dati. Stesso serbatoio della P.40 ($T_0 = 5476$ K); $M_e = 20$.

— Fase A — Il nuovo rapporto d'aree

Con $1 + 0,2 M_e^2 = 81$:

$$\frac{A_e}{A^*} = 15377$$

— quasi trenta volte quello del Mach 10: l'ugello diventa un chilometrico cono di espansione.

— Fase B — Temperatura e velocità di uscita

$$T_e = \frac{T_0}{81} = \frac{5476}{81} = 67,6 \text{ K},$$

$$V_e = 20 \times \sqrt{1,4 \times 287 \times 67,6} = 20 \times 164,8 = 3296 \text{ m/s}.$$

— Fase C — Il confronto che spiega tutto

Rispetto al Mach 10: V_e passa da 3237 a 3296 m/s, appena il +1,8 %. Il limite energetico è

$$V_{\max} = \sqrt{2 c_p T_0} = \sqrt{2016 \times 5476} = 3323 \text{ m/s} :$$

già a Mach 10 la corrente ne aveva convertito il 97 %.

Risultato. Il Mach raddoppia (10 $\rightarrow$ 20) ma la velocità quasi non cambia: a crollare è la temperatura statica ($T_e = 67,6$ K), e con lei la velocità del suono locale. Ad alta espansione il numero di Mach misura il *freddo* più della velocità — una lezione profonda su che cosa sia davvero M .

P.62 — La presa d'aria come ugello alla rovescia

Dati. $M_1 = 0,6$ dove l'area è A_1 ; più a valle $A_2 = \frac{4}{3} A_1$. Flusso subsonico e isentropico.

— Fase A — La relazione area–Mach al primo punto

Per $M_1 = 0,6$:

$$\frac{A_1}{A^*} = 1,188.$$

(A^* è l'area sonica *virtuale*: il flusso non ci passa mai, ma è il riferimento della relazione.)

— Fase B — Il secondo punto

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{A_2}{A_1} \frac{A_1}{A^*} = \frac{4}{3} \times 1,188 = 1,584.$$

La relazione area–Mach ha *due* soluzioni per ogni rapporto d'aree: una subsonica e una supersonica. Il flusso entra subsonico e in un divergente subsonico rallenta: va scelto il ramo subsonico,

$$M_2 = 0,40.$$

Risultato. $M_2 = 0,40$. La presa fa esattamente il suo mestiere: rallenta il flusso da $M = 0,6$ a $M = 0,4$ e nel frattempo lo comprime, consegnando al compressore aria più lenta e più densa. Un divergente subsonico è un diffusore: lo stesso oggetto geometrico dell'ugello, percorso dalla fisica al contrario.

Strato limite e resistenza (P.34–P.37, P.43–P.45, P.49–P.60, P.63–P.65)**P.34 — L'ala come piastra piana: caso laminare**

Dati. Ala rettangolare: $b = 17,5$ m, $c = 3$ m; $V = 200$ m/s al livello del mare ($\rho = 1,225$ kg/m³, $\mu = 1,7894 \times 10^{-5}$ kg/(m s)). Strato limite interamente laminare, flusso incomprimibile.

— Fase A — Reynolds e pressione dinamica

$$Re_c = \frac{\rho V c}{\mu} = \frac{1,225 \times 200 \times 3}{1,7894 \times 10^{-5}} = 4,11 \times 10^7,$$

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 = \frac{1}{2} \times 1,225 \times 200^2 = 24\,500 \text{ Pa}; \quad S = b c = 52,5 \text{ m}^2.$$

— Fase B — Spessore al bordo d'uscita (Blasius)

$$\delta = \frac{5,2 c}{\sqrt{Re_c}} = \frac{5,2 \times 3}{\sqrt{4,11 \times 10^7}} = 2,4 \text{ mm}.$$

— Fase C — Coefficiente e resistenza d'attrito

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re_c}} = 2,07 \times 10^{-4},$$

$$D_f = 2 q S C_f = 2 \times 24\,500 \times 52,5 \times 2,07 \times 10^{-4} = 533 \text{ N}$$

(il fattore 2 conta le *due* facce bagnate dell'ala).

Risultato. $\delta = 2,4$ mm, $D_f = 533$ N. A $Re = 4 \times 10^7$ uno strato limite tutto laminare è un'ipotesi accademica: il problema successivo fa i conti con la realtà.

P.35 — L'ala come piastra piana: caso turbolento

Dati. Come P.34, strato limite interamente turbolento ($Re_c^{0,2} = 33,3$).

—— Fase A — Spessore al bordo d'uscita

$$\delta = \frac{0,37 c}{Re_c^{0,2}} = \frac{0,37 \times 3}{33,3} = 33,3 \text{ mm.}$$

—— Fase B — Coefficiente e resistenza

$$C_f = \frac{0,074}{Re_c^{0,2}} = 2,22 \times 10^{-3},$$

$$D_f = 2 \times 24500 \times 52,5 \times 2,22 \times 10^{-3} = 5713 \text{ N.}$$

—— Fase C — Il confronto con P.34

$$\frac{\delta_{\text{turb}}}{\delta_{\text{lam}}} = \frac{33,3}{2,4} = 13,7, \quad \frac{D_{f,\text{turb}}}{D_{f,\text{lam}}} = \frac{5713}{533} = 10,7.$$

Risultato. Strato limite quattordici volte più spesso, attrito undici volte maggiore: è il prezzo del rimescolamento turbolento, che porta quantità di moto fresca a ridosso della parete e vi impenna il gradiente di velocità. È anche la ragione d'essere dei profili laminari.

P.36 — Il caso misto con transizione

Dati. Come P.34–P.35, con $Re_{x,cr} = 10^6$.

—— Fase A — Il punto di transizione

$$x_{cr} = \frac{Re_{x,cr} \mu}{\rho V} = \frac{10^6 \times 1,7894 \times 10^{-5}}{1,225 \times 200} = 7,3 \text{ cm.}$$

Su 3 m di corda, il tratto laminare copre appena il 2,4 %.

—— Fase B — Il metodo della composizione (per faccia)

Superficie laminare $A = x_{cr} b = 1,28 \text{ m}^2$. Turbolento su tutta la corda, *meno* il turbolento sul tratto laminare, *più* il laminare sullo stesso tratto:

$$D_f^{(1)} = q [S C_{f,t}(Re_c) - A C_{f,t}(Re_{cr}) + A C_{f,l}(Re_{cr})]$$

con $C_{f,t}(4,11 \times 10^7) = 2,22 \times 10^{-3}$, $C_{f,t}(10^6) = 4,67 \times 10^{-3}$, $C_{f,l}(10^6) = 1,33 \times 10^{-3}$:

$$D_f^{(1)} = 24500 [52,5 \times 2,22 \times 10^{-3} - 1,28 \times 4,67 \times 10^{-3} + 1,28 \times 1,33 \times 10^{-3}] = 2752 \text{ N.}$$

—— Fase C — Totale

$$D_f = 2 \times 2752 = 5504 \text{ N.}$$

Risultato. $D_f = 5504 \text{ N}$: appena il 4 % meno del tutto-turbolento di P.35. Con la transizione a 7 cm dal bordo d'attacco, il laminare non fa in tempo a risparmiar nulla: per guadagnare davvero bisogna *spostare la transizione*, che è l'intero programma dei profili laminari.

P.37 — Eulero in un punto: velocità e gradiente di pressione

Dati. Flusso non viscoso; $\rho = 1,1 \text{ kg/m}^3$; variazione di velocità del 2 % al millimetro; (a) $V = 100 \text{ m/s}$, (b) $V = 1000 \text{ m/s}$.

—— Fase A — Tradurre il dato

“2 % al millimetro” significa

$$\frac{dV}{dx} = \frac{0,02 V}{0,001 \text{ m}} = 20 V \quad [\text{s}^{-1}].$$

— Fase B — L'equazione di Eulero in forma differenziale

$$\frac{dp}{dx} = -\rho V \frac{dV}{dx} = -20 \rho V^2.$$

— Fase C — I due casi

$$(a) V = 100 \text{ m/s} : \quad \frac{dp}{dx} = -20 \times 1,1 \times 10^4 = -2,2 \times 10^5 \text{ Pa/m} = -220 \text{ Pa/mm};$$

$$(b) V = 1000 \text{ m/s} : \quad \frac{dp}{dx} = -2,2 \times 10^7 \text{ Pa/m} = -22\,000 \text{ Pa/mm}.$$

Risultato. A parità di variazione *relativa* di velocità, il gradiente di pressione scala con V^2 : cento volte più grande nel caso (b). Nei flussi veloci piccole accelerazioni locali muovono pressioni enormi — è il motivo profondo per cui l'aerodinamica delle alte velocità è così “violenta”.

P.43 — L'attrito non segue la legge del quadrato

Dati. Piastra quadrata $4 \times 4 \text{ m}$, aria standard, $Re_{x_{cr}} = 5 \times 10^5$, due facce; (a) $V = 20 \text{ m/s}$, (b) $V = 40 \text{ m/s}$.

— Fase A — Caso (a): $V = 20 \text{ m/s}$

$Re_L = 5,48 \times 10^6$; $q = 245 \text{ Pa}$; $x_{cr} = Re_{cr} \mu / (\rho V) = 0,365 \text{ m}$; $A = x_{cr} \times 4 = 1,46 \text{ m}^2$. Composizione (per faccia):

$$D^{(1)} = q [16 C_{f,t}(Re_L) - A C_{f,t}(Re_{cr}) + A C_{f,l}(Re_{cr})] = 11,8 \text{ N},$$

con $C_{f,t}(5,48 \times 10^6) = 3,32 \times 10^{-3}$, $C_{f,t}(5 \times 10^5) = 5,36 \times 10^{-3}$, $C_{f,l}(5 \times 10^5) = 1,88 \times 10^{-3}$. Totale: $D_f(20) = 23,6 \text{ N}$.

— Fase B — Caso (b): $V = 40 \text{ m/s}$

$Re_L = 1,10 \times 10^7$; $q = 980 \text{ Pa}$; $x_{cr} = 0,183 \text{ m}$; $A = 0,73 \text{ m}^2$. Stessa composizione: $D_f(40) = 85,7 \text{ N}$.

— Fase C — L'esponente

Se $D_f \propto V^n$, raddoppiando V :

$$n = \frac{\ln(D_f(40)/D_f(20))}{\ln 2} = \frac{\ln(85,7/23,6)}{0,693} = 1,86.$$

Risultato. $n = 1,86 < 2$: la resistenza d'attrito *non* segue la legge del quadrato, perché C_f cala al crescere del Reynolds (e in più, raddoppiando V , il tratto laminare si accorcia). La “legge del quadrato” vale solo per la resistenza di pressione.

P.44 — Gli esponenti, per via analitica

Dati. Piastra piana incompressibile; dimostrare $D_f \propto V^{1,8}$ (turbolento) e $D_f \propto V^{1,5}$ (laminare).

— Fase A — La struttura comune

$D_f = q S C_f$ con $q \propto V^2$ e $Re = \rho V L / \mu \propto V$.

— Fase B — I due regimi

$$\text{turbolento: } C_f = \frac{0,074}{Re^{1/5}} \propto V^{-0,2} \Rightarrow D_f \propto V^2 V^{-0,2} = V^{1,8};$$

$$\text{laminare: } C_f = \frac{1,328}{Re^{1/2}} \propto V^{-0,5} \Rightarrow D_f \propto V^2 V^{-0,5} = V^{1,5}.$$

Risultato. $D_f \propto V^{1,8}$ (turbolento), $V^{1,5}$ (laminare). Il valore misto $n = 1,86$ di P.43 cade correttamente fra i due limiti, più vicino al turbolento — com'è giusto, visto che domina quasi tutta la piastra.

P.45 — E con la comprimibilità si scende ancora

Dati. Stessa piastra di P.43, strato limite tutto turbolento, livello del mare; correzione di comprimibilità (sezione 16): $c_f/c_{f,inc} = 0,91$ a $M = 1$ e $0,59$ a $M = 3$.

— Fase A — Caso (a): $M_\infty = 1$

$V = 340,3$ m/s; $Re_L = 9,3 \times 10^7$; $C_{f,inc} = 0,074/Re_L^{0,2} = 1,89 \times 10^{-3}$; $C_f = 0,91 \times 1,89 \times 10^{-3} = 1,72 \times 10^{-3}$; $q = 7,09 \times 10^4$ Pa:

$$D_f = 2 q S C_f = 2 \times 7,09 \times 10^4 \times 16 \times 1,72 \times 10^{-3} = 3893 \text{ N}.$$

— Fase B — Caso (b): $M_\infty = 3$

$V = 1021$ m/s; $Re_L = 2,8 \times 10^8$; $C_{f,inc} = 1,51 \times 10^{-3}$; $C_f = 0,59 \times 1,51 \times 10^{-3} = 8,9 \times 10^{-4}$; $q = 6,38 \times 10^5$ Pa:

$$D_f = 2 \times 6,38 \times 10^5 \times 16 \times 8,9 \times 10^{-4} = 18\,236 \text{ N}.$$

— Fase C — L'esponente

Il rapporto di velocità è 3:

$$n = \frac{\ln(18236/3893)}{\ln 3} = \frac{\ln 4,68}{1,099} = 1,41.$$

Risultato. $n = 1,41$: il Reynolds e la comprimibilità (che abbassa c_f scaldando lo strato limite) allontanano l'attrito ancora di più dalla legge del quadrato. Tre effetti in un solo numero.

P.49 — La galleria a sezione rettangolare: continuità

Dati. Larghezza costante $w = 2$ m; altezze dell'ugello: 4 m (ingresso) e 0,5 m (camera di prova); $V_2 = 53,64$ m/s.

— Fase A — Le aree

$$A_1 = 4 \times 2 = 8 \text{ m}^2, \quad A_2 = 0,5 \times 2 = 1 \text{ m}^2.$$

— Fase B — Continuità incomprimibile

$V_2 = 53,6$ m/s è $M \approx 0,16$: incomprimibile.

$$V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} = \frac{53,64}{8} = 6,7 \text{ m/s}.$$

Risultato. $V_1 = 6,7$ m/s: nella camera di calma l'aria è quasi ferma, com'è nel nome.

P.50 — La pressione in camera di prova

Dati. $p_1 = 1$ atm; $\rho = 1,225$ kg/m³; da P.49: $V_1 = 6,7$ m/s, $V_2 = 53,64$ m/s.

— Fase A — Bernoulli fra serbatoio e camera

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) = 101325 - \frac{1}{2} \times 1,225 \times (2877 - 45)$$

$$= 101325 - 1735 = 99\,590 \text{ Pa.}$$

Risultato. $p_2 = 99\,590 \text{ Pa}$: la camera di prova è in leggera depressione ($-1,7 \text{ kPa}$) rispetto alla calma — è quella depressione che il manometro della galleria misura e converte in velocità.

P.51 — La geometria del diffusore

Dati. Larghezza costante $w = 2 \text{ m}$; pareti superiore e inferiore inclinate di 15° sull'orizzontale.

— Fase A — Solo geometria

Per metro percorso lungo l'asse, *ciascuna* parete si allontana di $\tan 15^\circ$: l'altezza cresce di $2 \tan 15^\circ$ e l'area di

$$\frac{dA}{dx} = w \times 2 \tan 15^\circ = 2 \times 2 \times 0,268 = 1,07 \text{ m}^2/\text{m}.$$

Risultato. $dA/dx = 1,07 \text{ m}^2/\text{m}$, costante lungo tutto il diffusore (pareti piane). Come avverte il testo del problema: geometria, non aerodinamica — ma è il dato che alimenta i quattro problemi successivi.

P.52 — Le velocità del diffusore

Dati. Altezze del diffusore: $0,5 \text{ m}$ (ingresso) e $3,5 \text{ m}$ (uscita); $w = 2 \text{ m}$; $V_2 = 53,64 \text{ m/s}$ in camera di prova.

— Fase A — Le aree e la continuità

$A_{\text{in}} = 1 \text{ m}^2$ (è la camera di prova), $A_{\text{out}} = 3,5 \times 2 = 7 \text{ m}^2$:

$$V_{\text{in}} = V_2 = 53,6 \text{ m/s}, \quad V_{\text{out}} = V_2 \frac{A_2}{A_{\text{out}}} = \frac{53,64}{7} = 7,7 \text{ m/s}.$$

Risultato. Da $53,6$ a $7,7 \text{ m/s}$: il diffusore restituisce l'aria quasi ferma, pronta per il ricircolo o per lo scarico a bassa perdita (P.19 docet).

P.53 — Il gradiente di velocità

Dati. Da P.51: $dA/dx = 1,07 \text{ m}^2/\text{m}$; da P.52: ingresso ($V = 53,64 \text{ m/s}$, $A = 1 \text{ m}^2$) e uscita ($V = 7,66 \text{ m/s}$, $A = 7 \text{ m}^2$).

— Fase A — Differenziare la continuità

Da $AV = \text{cost}$, $d(AV) = 0$, cioè $A dV + V dA = 0$:

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{V}{A} \frac{dA}{dx}.$$

— Fase B — I due estremi

$$\text{ingresso: } -\frac{53,64}{1} \times 1,07 = -57,5 \text{ s}^{-1}; \quad \text{uscita: } -\frac{7,66}{7} \times 1,07 = -1,2 \text{ s}^{-1}.$$

Risultato. La decelerazione è violentissima all'imbocco (dove V è grande e A piccola) e quasi nulla all'uscita: il diffusore “lavora” quasi tutto nel primo tratto.

P.54 — Il gradiente di pressione (avverso!)

Dati. Da P.53: $dV/dx = -57,5 \text{ s}^{-1}$ (ingresso) e $-1,17 \text{ s}^{-1}$ (uscita); $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$.

— Fase A — Eulero

$$\frac{dp}{dx} = -\rho V \frac{dV}{dx}.$$

— Fase B — I due estremi

$$\text{ingresso: } -1,225 \times 53,64 \times (-57,5) = +3778 \text{ Pa/m;}$$

$$\text{uscita: } -1,225 \times 7,66 \times (-1,17) = +11 \text{ Pa/m.}$$

Risultato. Gradiente *avverso* (la pressione sale nel verso del moto), com'è nella natura di ogni diffusore — ma 340 volte più intenso all'imbocco che all'uscita. Questo numero è la miccia dei due problemi che seguono.

P.55 — La lunghezza del diffusore

Dati. Altezza da 0,5 a 3,5 m; pareti a 15° .

— Fase A — Geometria

Ogni parete deve allontanarsi di $(3,5 - 0,5)/2 = 1,5$ m dall'asse:

$$L = \frac{1,5}{\tan 15^\circ} = \frac{1,5}{0,268} = 5,6 \text{ m.}$$

Risultato. $L = 5,6$ m. Da confrontare con i risultati di P.56–P.57: è molto più di quanto lo strato limite sia disposto a sopportare.

P.56 — Dove molla lo strato limite laminare

Dati. Criterio: $x_s = 183/(dp/dx)_{\text{med}}$ (x_s in metri, gradiente in Pa/m); da P.54: 3778 e 11 Pa/m.

— Fase A — Il gradiente medio

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{\text{med}} = \frac{3778 + 11}{2} = 1894 \text{ Pa/m.}$$

— Fase B — Il criterio

$$x_s = \frac{183}{1894} = 0,10 \text{ m.}$$

Risultato. $x_s \approx 10$ cm su 5,6 m di diffusore: lo strato limite laminare si separa praticamente all'imbocco. Un diffusore laminare con 15° per parete è, semplicemente, un diffusore che non funziona.

P.57 — E quello turbolento

Dati. Criterio turbolento: $x_s = 506/(dp/dx)_{\text{med}}$; gradiente medio da P.56.

— Fase A — Calcolo

$$x_s = \frac{506}{1894} = 0,27 \text{ m.}$$

Risultato. $x_s = 0,27$ m: quasi il triplo del laminare — il profilo turbolento, “pieno” di quantità di moto vicino a parete, resiste meglio al gradiente avverso (sezione 18). Ma siamo comunque lontanissimi dai 5,6 m necessari: ecco perché i diffusori reali usano angoli di 3° – 5° per parete, e perché questo blocco di problemi è, in miniatura, la storia di ogni galleria mal progettata.

P.58 — Pitot del bimotore storico

Dati. $V = 102,4$ m/s a 2286 m ISA: $T = 273,3$ K, $p = 76\,711$ Pa.

— Fase A — Il regime

$$a = \sqrt{1,4 \times 287 \times 273,3} = 331,4 \text{ m/s} \Rightarrow M = \frac{102,4}{331,4} = 0,31.$$

Al confine della soglia: per correttezza usiamo il rapporto di ristagno comprimibile.

— Fase B — Il Pitot

$$p_0 = p(1 + 0,2 M^2)^{3,5} = 76711 \times (1,0191)^{3,5} = 76711 \times 1,0684 = 82,0 \text{ kPa}.$$

Risultato. $M = 0,31$; $p_0 = 82,0 \text{ kPa}$. (Bernoulli avrebbe dato $81,8 \text{ kPa}$: a $M = 0,3$ l'errore è ancora sotto il mezzo per cento — è proprio per questo che la soglia sta lì.)

P.59 — Pitot del trireattore in crociera

Dati. $V = 272,7 \text{ m/s}$ a 7620 m ISA : $T = 238,6 \text{ K}$, $p = 37\,601 \text{ Pa}$.

— Fase A — Il regime

$$a = \sqrt{1,4 \times 287 \times 238,6} = 309,6 \text{ m/s} \Rightarrow M = \frac{272,7}{309,6} = 0,88.$$

Pienamente comprimibile, ancora subsonico: rapporto di ristagno.

— Fase B — Il Pitot

$$p_0 = 37601 \times (1 + 0,2 \times 0,776)^{3,5} = 37601 \times 1,657 = 62,3 \text{ kPa}.$$

Risultato. $M = 0,88$; $p_0 = 62,3 \text{ kPa}$. Curiosità istruttiva: il Pitot in quota legge *meno* di un'atmosfera pur volando a quasi 1000 km/h — la statica di quota è bassa, e la sovrappressione dinamica non basta a colmarla.

P.60 — Pitot dell'intercettore Mach 2

Dati. $V = 593,7 \text{ m/s}$ a $10\,668 \text{ m ISA}$: $T = 218,8 \text{ K}$, $p = 23\,842 \text{ Pa}$.

— Fase A — Il regime

$$a = \sqrt{1,4 \times 287 \times 218,8} = 296,5 \text{ m/s} \Rightarrow M = \frac{593,7}{296,5} = 2,0.$$

Supersonico: urto davanti al Pitot, formula di Rayleigh.

— Fase B — Rayleigh

Per $M = 2,0$: $p_{0,2}/p_1 = 5,65$:

$$p_{0,2} = 5,65 \times 23842 = 134,7 \text{ kPa}.$$

Risultato. $M = 2,0$; $p_{0,2} = 134,7 \text{ kPa}$. Tre velivoli (P.58, P.59, P.60), tre regimi, tre formule diverse per lo stesso strumento: è la tabella riassuntiva della sezione 10 messa alla prova sul serio.

P.63 — Dimensionare il condotto di spillamento

Dati. $M = 0,6$ a 6096 m ISA : $p = 46\,563 \text{ Pa}$, $T = 248,5 \text{ K}$; Sutherland: $\mu = 1,59 \times 10^{-5} \text{ kg/(m s)}$; posizione del condotto: $x = 2,89 \text{ m}$ dal muso; strato limite turbolento, incomprimibile, da piastra piana.

— Fase A — Le condizioni locali

$$\rho = \frac{46563}{287 \times 248,5} = 0,653 \text{ kg/m}^3, \quad a = \sqrt{1,4 \times 287 \times 248,5} = 316,1 \text{ m/s},$$

$$V = Ma = 0,6 \times 316,1 = 189,6 \text{ m/s.}$$

— Fase B — Il Reynolds locale

$$Re_x = \frac{\rho V x}{\mu} = \frac{0,653 \times 189,6 \times 2,89}{1,59 \times 10^{-5}} = 2,25 \times 10^7.$$

— Fase C — Lo spessore turbolento = l'altezza del condotto

$$h = \delta = \frac{0,37 x}{Re_x^{0,2}} = \frac{0,37 \times 2,89}{29,5} = 3,6 \text{ cm.}$$

Risultato. $h \approx 3,6 \text{ cm}$. Il condotto deve essere alto almeno quanto lo strato limite che deve ingerire: pochi centimetri che, sottraendo al motore l'aria "stanca" della fusoliera, valgono una frazione preziosa di pressione totale in presa. È un dimensionamento che si fa davvero così.

P.64 — Piastra laminare: i tre numeri

Dati. Piastra di $c = 3 \text{ m}$; $V = 100 \text{ m/s}$, aria standard; strato limite laminare.

— Fase A — Reynolds e pressione dinamica

$$Re_L = \frac{1,225 \times 100 \times 3}{1,7894 \times 10^{-5}} = 2,05 \times 10^7, \quad q = \frac{1}{2} \times 1,225 \times 100^2 = 6125 \text{ Pa.}$$

— Fase B — I tre numeri richiesti

$$\delta = \frac{5,2 \times 3}{\sqrt{Re_L}} = \frac{15,6}{4532} = 3,4 \text{ mm}, \quad C_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}} = 2,93 \times 10^{-4},$$

$$D'_f = q c C_f = 6125 \times 3 \times 2,93 \times 10^{-4} = 5,4 \text{ N/m}$$

(una faccia, per metro di apertura).

Risultato. $\delta = 3,4 \text{ mm}$; $C_f = 2,93 \times 10^{-4}$; $D'_f = 5,4 \text{ N/m}$. Tre metri di piastra a 360 km/h e lo strato limite è spesso quanto due monete: l'attrito vive in una pellicola.

P.65 — L'attrito è distruzione di pressione totale

Dati. Piastra di P.64 ($q = 6125 \text{ Pa}$, $\delta = 3,44 \text{ mm}$, $D'_f = 5,4 \text{ N/m}$); profilo assegnato nello strato limite: $y/\delta = (V/V_e)^2$.

— Fase A — La perdita locale di pressione totale

Attraverso lo strato limite la pressione *statica* è costante; su ogni linea di corrente la perdita di pressione totale rispetto all'esterno è quindi tutta cinetica:

$$\Delta p_0(y) = \frac{1}{2} \rho [V_e^2 - V^2(y)].$$

Dal profilo assegnato, $V^2(y) = V_e^2 (y/\delta)$.

— Fase B — L'integrale attraverso lo strato

$$\int_0^\delta \Delta p_0 dy = \frac{1}{2} \rho V_e^2 \int_0^\delta \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) dy = \frac{1}{2} \rho V_e^2 \left[y - \frac{y^2}{2\delta}\right]_0^\delta = \frac{q \delta}{2}.$$

— Fase C — Il numero e il confronto

$$\int_0^\delta \Delta p_0 dy = \frac{6125 \times 0,00344}{2} = 10,5 \text{ N/m},$$

da confrontare con $D'_f = 5,4 \text{ N/m}$ di P.64: stesso ordine di grandezza.

Risultato. Perdita integrata $\approx 10,5 \text{ N/m}$ contro $D'_f = 5,4 \text{ N/m}$: non è una coincidenza. La resistenza d'attrito è, in ultima analisi, la pressione totale che lo strato limite distrugge per dissipazione viscosa; il bilancio esatto richiederebbe l'integrale di quantità di moto di von Kármán (e un profilo di velocità realistico), ma la fisica è già tutta in questo confronto.

Raccordo

Fine delle soluzioni — e fine della monografia. Chi ha svolto da solo anche solo metà di questi problemi, confrontandosi poi con le soluzioni complete, possiede l'aerodinamica di base a livello operativo: sa scegliere il modello (è sempre la Fase A!), sa usarlo e sa leggere criticamente il numero che ne esce. È esattamente la preparazione che serve per la generazione della portanza e per l'aerodinamica dell'ala, argomenti delle prossime monografie della serie.