

## Costruzioni Aeronautiche

## Dimensionamento del Longherone

Struttura Alare Bilongherone a Sezione Rettangolare Cava

Soluzione guidata — Metodo della forza concentrata

Prof. Ing. B. Raucci  
ITIS E. Majorana, Cassino

A.S. 2025/26

Pag. 1/2

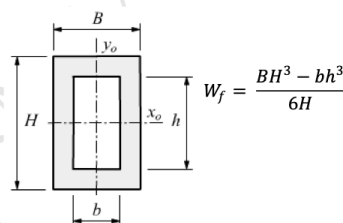
Sessione ordinaria 2025  
Seconda prova scritta*Ministero dell'istruzione e del merito***A061 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE**Indirizzo: ITCT – TRASPORTI E LOGISTICA  
ARTICOLAZIONE COSTRUZIONE DEL MEZZO  
OPZIONE COSTRUZIONI AERONAUTICHE

Disciplina: STRUTTURA, COSTRUZIONE, SISTEMI E IMPIANTI DEL MEZZO AEREO

**Il candidato svolga il tema indicato nella prima parte e risponda a due soli quesiti tra i quattro proposti nella seconda parte.****PRIMA PARTE**

Un motoelica ha una struttura alare bilongherone di sezione rettangolare cava (vedi figura). Queste le altre caratteristiche:

- ala a sezione trapezia
- $W_{TO} = 5000 \text{ N}$
- apertura alare pari a 11 m
- corda alla radice pari a 1,4 m
- corda all'estremità pari a 1,1 m
- profilo NACA 0010
- modulo di elasticità tangenziale  $G = 27000 \text{ N/mm}$
- fattore di carico di calcolo  $n_{im} = 4,4$
- la tensione ammissibile del materiale costituente il longherone è di  $500 \text{ N/mm}^2$
- momento torcente agente sull'ala 2400 Nm ipotizzato applicato all'estremità alare.



Il candidato, facendo le opportune e giustificate ipotesi semplificative, e ipotizzando eventuali dati mancanti, determini le dimensioni del longherone nella sezione di radice, lo spessore del rivestimento e il valore del massimo angolo di torsione all'estremità alare, verificando che sia entro i limiti di accettabilità.

## TRACCIA

Un motoelica ha una struttura alare **bilongherone** di sezione rettangolare cava. Il candidato, facendo le opportune e giustificate ipotesi semplificative, determini:

1. le dimensioni del longherone nella **sezione di radice**;
2. lo **spessore del rivestimento** necessario a resistere alla torsione;
3. il valore del **massimo angolo di torsione** all'estremità alare, verificando che sia entro i limiti di accettabilità.

Il modulo resistente flessionale della sezione rettangolare cava è fornito:

$$W_f = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$$

dove  $B, H$  sono le dimensioni esterne e  $b, h$  quelle interne della sezione.

## FASE A Dati e ipotesi

- $W_{TO} = 5000 \text{ N}$
- Apertura alare  $b = 11 \text{ m}$
- Corda alla radice  $c_r = 1,4 \text{ m}$
- Corda al tip  $c_t = 1,1 \text{ m}$
- Profilo **NACA 0010** ( $t/c = 10\%$ )
- $G = 27\,000 \text{ N mm}^{-2}$
- $n_{lim} = 4,4$
- $\sigma_{amm} = 500 \text{ N mm}^{-2}$
- $M_t^{tip} = 2400 \text{ N m}$  (concentrato al tip)

## Ipotesi semplificative

- **Fattore di sicurezza**  $FS = 1,5$  (norma FAR 23/CS-23 per categoria normale). La  $\sigma_{amm}$  fornita è già la tensione ammissibile (include FS).
  - **Tensione ammissibile a taglio:**  $\tau_{amm} = \sigma_{amm}/\sqrt{3}$  (criterio di Von Mises).
  - **Struttura bilongherone simmetrica:** ciascun longherone sopporta il  $50\%$  del momento flettente totale e del taglio totale.
  - **Longherone anteriore** al  $25\%$  della corda (posizione standard del centro aerodinamico).
  - **Sezione rettangolare cava con pareti di spessore uniforme**  $s$ . Altezza esterna  $H \approx 0,86 t_{prof}$ ; larghezza esterna  $B = H/2$  (longherone più alto che largo, tipico per ali).
  - Per la **torsione:** la sezione chiusa è delimitata dal bordo d'attacco e dal longherone anteriore (cella anteriore); l'anima del longherone chiude la cella con spessore  $s$ .
  - **Ripartizione delle sollecitazioni aerodinamiche:** portanza distribuita proporzionalmente alla superficie.
    - Il momento torcente  $M_t$  concentrato al tip si trasmette *costante* lungo tutto il semispan.
- Stima peso ala: formula di Gabrielli.  $\tau_{amm} = 500/\sqrt{3} \approx 288,7 \text{ N mm}^{-2}$ .

## FASE B Geometria dell'ala

### B.1 — Parametri globali

La superficie alare si ottiene come area del trapezio di basi  $c_r$  e  $c_t$ :

$$S = \frac{c_r + c_t}{2} b = \frac{1,4 + 1,1}{2} \times 11 = 13,75 \text{ m}^2$$

L'allungamento alare e il rapporto di rastremazione valgono:

$$AR = \frac{b^2}{S} = \frac{11^2}{13,75} = 8,80 \quad \lambda = \frac{c_t}{c_r} = \frac{1,1}{1,4} \approx 0,786$$

### B.2 — Semiala: superfici e baricentro

La semiala è un trapezio di basi  $c_r$  (alla radice) e  $c_t$  (al tip), con altezza  $b/2 = 5,5$  m.

#### Baricentro del trapezio (richiamo)

Per un trapezio di basi  $a$  e  $b$  e altezza  $h$  (con  $a \geq b$ ), il baricentro è alla distanza dalla base  $a$ :

$$\bar{y} = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}$$

dove  $h$  si misura dalla sezione di analisi verso il tip. Nella nostra convenzione  $a = c_r$ ,  $b = c_t$ ,  $h = b/2$ .

$$y_G = \frac{b/2}{3} \cdot \frac{c_r + 2c_t}{c_r + c_t} = \frac{5,5}{3} \cdot \frac{1,4 + 2 \times 1,1}{1,4 + 1,1} = 1,833 \times \frac{3,6}{2,5} = 2,64 \text{ m}$$

$$S_{\text{semi}} = S/2 = 6,875 \text{ m}^2$$

## FASE C Forze sulla semiala

### C.1 — Portanza sull'intera semiala

In condizione di manovra al fattore di carico  $n_{\text{lim}}$ :

$$L = n_{\text{lim}} \cdot W = 4,4 \times 5000 \text{ N} = 22\,000 \text{ N} \quad L_{\text{semi}} = L/2 = 11\,000 \text{ N}$$

Poiché la sezione di analisi è la *radice*, la porzione esterna coincide con l'intera semiala:  $L_a = L_{\text{semi}} = 11\,000 \text{ N}$ .

### C.2 — Peso strutturale dell'ala (formula di Gabrielli)

La formula di Gabrielli consente di stimare il peso dell'ala in funzione dell'allungamento alare, del fattore di carico di progetto e della superficie:

$$Q_{\text{ala}} [\text{kgf}] = \frac{1,94 \cdot AR \cdot n_{\text{prog}} \cdot Q [\text{kgf}] \cdot b [\text{m}]}{15000} + 6 \cdot S [\text{m}^2]$$

In Gabrielli si usa il fattore di carico *di progetto strutturale*  $n_{\text{prog}} = n_{\text{lim}} \times FS$ , non il fattore di manovra  $n_{\text{lim}}$ . Con  $FS = 1,5$ :  $n_{\text{prog}} = 4,4 \times 1,5 = 6,6$ .

$$Q = W/g = 5000/9,81 \approx 509,7 \text{ kgf}$$

$$Q_{\text{ala}} = \frac{1,94 \times 8,80 \times 6,6 \times 509,7 \times 11}{15000} + 6 \times 13,75 = 42,1 + 82,5 \approx 124,6 \text{ kgf}$$

$$W_{\text{ala}} = 124,6 \times 9,81 \approx 1222,5 \text{ N}$$

Peso della semiala esterna (= intera semiala, poiché la sezione è alla radice):

$$W_a = W_{\text{ala}}/2 \approx 611,2 \text{ N}$$

### C.3 — Forza netta sulla semiala

#### Calcolo a robustezza

In manovra, il peso strutturale è un carico inerziale amplificato da  $n$ . La forza netta sulla porzione esterna è la differenza tra portanza e peso inerziale:

$$F_a = L_a - n \cdot W_a$$

$$F_a = 11000 - 4,4 \times 611,2 = 11000 - 2689,3 \approx \boxed{8310,6 \text{ N}}$$

#### FASE D Sollecitazioni alla sezione di radice

L'ala si comporta come una *trave incastrata alla radice*; la sezione di incastro è quella di interesse (radice dell'ala).

$$T = F_a = 8310,6 \text{ N}$$

$$M_f = T \cdot y_G = 8310,6 \times 2,64 = 21\,939,9 \text{ N m} = 2,194 \times 10^7 \text{ N mm}$$

#### BILONGHERONE

Ipotizzando i due longheroni geometricamente e strutturalmente identici e simmetricamente posizionati rispetto al baricentro aerodinamico della sezione, il momento flettente e il taglio si ripartiscono equamente:

$$T_\ell = \frac{T}{2} = 4155,3 \text{ N} \quad M_{f,\ell} = \frac{M_f}{2} = 10\,969,9 \text{ N m} = 1,097 \times 10^7 \text{ N mm}$$

Si dimensionerà un solo longherone; l'altro sarà identico.

## FASE E Dimensionamento del longherone

### E.1 — Geometria della sezione

Per il profilo **NACA 0010**, lo spessore massimo è al 30% della corda; alla sezione del longherone anteriore (25% della corda) è praticamente uguale al massimo. Alla radice:

$$t_{\text{prof}} = (t/c) \cdot c_r = 0,10 \times 1400 \text{ mm} = 140 \text{ mm}$$

Per lasciare spazio alla lamiera di rivestimento e alle rivettature, si sceglie l'altezza esterna del longherone leggermente inferiore allo spessore del profilo. La larghezza è fissata a metà dell'altezza (sezione allungata, tipica per longheroni alari):

$$H = 120 \text{ mm} \quad (\approx 0,86 t_{\text{prof}}) \quad B = H/2 = 60 \text{ mm}$$

Spessore di parete uniforme  $s$  da determinare.

### E.2 — Dimensionamento a flessione

Il modulo resistente richiesto si ottiene dalla condizione  $\sigma = M_{f,\ell}/W_f \leq \sigma_{\text{amm}}$ :

$$W_{f,\text{req}} = \frac{M_{f,\ell}}{\sigma_{\text{amm}}} = \frac{1,097 \times 10^7}{500} = 21\,940 \text{ mm}^3$$

Con  $b_{\text{in}} = B - 2s$  e  $h_{\text{in}} = H - 2s$ , la condizione diventa:

$$W_f(s) = \frac{B H^3 - (B - 2s)(H - 2s)^3}{6H} \geq W_{f,\text{req}}$$

$s$ [mm]	$b_{\text{in}}$ [mm]	$h_{\text{in}}$ [mm]	$W_f$ [mm <sup>3</sup> ]	$W_{f,\text{req}}$ [mm <sup>3</sup> ]	Verifica
1,0	58	118	11 645		×
1,5	57	117	17 206		×
<b>2,0</b>	<b>56</b>	<b>116</b>	<b>22 597</b>	21 940	✓
2,5	55	115	27 822		✓
3,0	54	114	32 884		✓

Lo spessore commerciale minimo che soddisfa il vincolo è  $s = 2 \text{ mm}$ .

### E.3 — Verifica della tensione massima

Con  $s = 2 \text{ mm}$ ,  $B = 60 \text{ mm}$ ,  $H = 120 \text{ mm}$ ,  $b_{\text{in}} = 56 \text{ mm}$ ,  $h_{\text{in}} = 116 \text{ mm}$ :

$$W_f = \frac{60 \times 120^3 - 56 \times 116^3}{6 \times 120} = \frac{103\,680\,000 - 87\,410\,176}{720} = 22\,597 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{\text{eff}} = \frac{M_{f,\ell}}{W_f} = \frac{1,097 \times 10^7}{22\,597} = 485,5 \text{ N mm}^{-2} < \sigma_{\text{amm}} = 500 \text{ N mm}^{-2} \quad \checkmark$$

## E.4 — Verifica a taglio

## Jourawski classico vs. Jourawski per parete sottile

**Forma generale di Jourawski.** Per una trave soggetta a forza di taglio  $T$ , la tensione tangenziale in un punto della sezione a quota  $y$  è:

$$\tau(y) = \frac{T \cdot S^*(y)}{I \cdot b(y)}$$

dove  $S^*(y)$  è il *momento statico* della porzione di sezione al di sopra della quota  $y$  rispetto all'asse neutro,  $I$  è il momento di inerzia dell'intera sezione e  $b(y)$  è la larghezza locale. Per una sezione rettangolare *piena* questa formula fornisce il noto risultato  $\tau_{\max} = \frac{3}{2} T/A$  all'asse neutro.

**Perché per la scatolare si semplifica.** La sezione rettangolare cava ha pareti di spessore  $s \ll H, B$ : siamo nel regime di *parete sottile*. Due considerazioni fisiche permettono di ridurre la formula:

1. **Le flange orizzontali non trasportano taglio verticale.** In una parete sottile il flusso di taglio scorre *nel piano della parete*, cioè lungo la sua direzione longitudinale. Nelle flange superiore e inferiore il flusso scorre quindi *orizzontalmente*: la sua componente nella direzione di  $T$  (verticale) è nulla. Solo le **anime verticali** — nelle quali il flusso scorre verticalmente, ossia nella stessa direzione di  $T$  — contribuiscono alla resistenza al taglio verticale.
2. **Simmetria: le due anime si dividono equamente il taglio.** Per simmetria geometrica, ciascuna delle due anime verticali sopporta esattamente  $T_\ell/2$ .

La tensione tangenziale nell'anima è quindi *uniforme* su tutta la superficie  $h_{\text{in}} \times s$  (ipotesi di parete sottile):

$$\tau = \frac{T_\ell/2}{h_{\text{in}} \cdot s} = \frac{T_\ell}{2 h_{\text{in}} \cdot s}$$

**Controllo con Jourawski completo.** Per la nostra sezione con  $B = 60$ ,  $H = 120$ ,  $b_{\text{in}} = 56$ ,  $h_{\text{in}} = 116$ ,  $s = 2$  mm:

$$I = \frac{BH^3 - b_{\text{in}}h_{\text{in}}^3}{12} = \frac{60 \cdot 120^3 - 56 \cdot 116^3}{12} \approx 1,359 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Il momento statico all'asse neutro (dominato dalle anime):

$$S_{\text{asse}}^* \approx 2 \cdot s \cdot \frac{h_{\text{in}}^2}{8} + B \cdot s \cdot \left( \frac{H}{2} - \frac{s}{2} \right) \approx 11\,300 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{\text{Jourawski}} = \frac{T_\ell \cdot S^*}{I \cdot (2s)} = \frac{4155,3 \times 11\,300}{1,359 \times 10^6 \times 4} \approx 8,6 \text{ N mm}^{-2}$$

La discrepanza con la formula semplificata ( $8,96 \text{ N/mm}^2$ ) è inferiore al 5%: la formula  $\tau = T/(2 h_{\text{in}} \cdot s)$  è pienamente giustificata per sezioni scatolari a parete sottile.

Applicando la formula semplificata:

$$\tau = \frac{T_\ell}{2 h_{\text{in}} \cdot s} = \frac{4155,3}{2 \times 116 \times 2} = 8,96 \text{ N mm}^{-2} \ll \tau_{\text{amm}} = 288,7 \text{ N mm}^{-2} \quad \checkmark$$

Il taglio non è il caso critico per questo longherone, come atteso in strutture alari dove la flessione governa il dimensionamento.

## Risultati — Longherone alla radice

$$B \times H = 60 \times 120 \text{ mm} \quad b_{\text{in}} \times h_{\text{in}} = 56 \times 116 \text{ mm} \quad s = 2 \text{ mm}$$

$$\sigma_{\text{eff}} = 485,5 \text{ N mm}^{-2} \text{ (3\% sotto il limite di } 500 \text{ N mm}^{-2}\text{)}$$

## FASE F Torsione e rivestimento

### F.1 — Area racchiusa dalla cella anteriore

Il momento torcente è resistito dalla *cella chiusa* delimitata dal bordo d'attacco, dalla lamiera di rivestimento superiore e inferiore, e dall'anima del longherone anteriore (posta al 25% della corda).

#### Area chiusa — approssimazione trapezoidale (da traccia)

L'area della cella anteriore si approssima come media tra il triangolo inscritto e il rettangolo circoscritto alla forma del profilo:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} x_{\ell} h_{\text{prof}} \quad A_{\square} = x_{\ell} h_{\text{prof}} \quad A = \frac{A_{\Delta} + A_{\square}}{2} = \frac{3}{4} x_{\ell} h_{\text{prof}}$$

dove  $x_{\ell}$  è la posizione del longherone misurata dal bordo d'attacco e  $h_{\text{prof}}$  è lo spessore del profilo alla sezione.

$$\begin{aligned} x_{\ell} &= 0,25 \times c_r = 0,25 \times 1400 \text{ mm} = 350 \text{ mm} & h_{\text{prof}} &= 140 \text{ mm} \\ A_{\Delta} &= \frac{1}{2} \times 350 \times 140 = 24\,500 \text{ mm}^2 & A_{\square} &= 350 \times 140 = 49\,000 \text{ mm}^2 \\ A &= \frac{24\,500 + 49\,000}{2} = 36\,750 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

### F.2 — Flusso di taglio torsionale e spessore del rivestimento

Dalla **formula di Bredt** per sezioni chiuse a parete sottile:

$$M_t = 2 q A \quad \Longrightarrow \quad q = \frac{M_t}{2A} = \frac{2\,400\,000}{2 \times 36\,750} = 32,65 \text{ N mm}^{-1}$$

Lo spessore minimo del rivestimento si ricava dalla condizione  $\tau = q/s \leq \tau_{\text{amm}}$ :

$$s_{\text{riv,min}} = \frac{q}{\tau_{\text{amm}}} = \frac{32,65}{288,7} \approx 0,113 \text{ mm}$$

Il valore è inferiore a 1 mm, che è il *minimo commerciale* per lamiera metallica in alluminio aeronautico:

$$s_{\text{riv}} = 1 \text{ mm} \quad (\text{minimo commerciale})$$

### F.3 — Angolo di torsione all'estremità alare

Per una sezione chiusa a parete sottile, l'angolo di torsione per unità di lunghezza (formula di Bredt) è:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_t}{4A^2G} \oint \frac{ds}{s_t}$$

Il percorso  $\oint$  include:

- pelle superiore (lunghezza  $\approx x_{\ell} = 350$  mm, spessore  $s_{\text{riv}} = 1$  mm);
- pelle inferiore (uguale per simmetria);
- anima del longherone anteriore (altezza  $H = 120$  mm, spessore  $s = 2$  mm).

$$\oint \frac{ds}{s_t} \approx \frac{2 \times 350}{1} + \frac{120}{2} = 700 + 60 = 760 \text{ mm}$$

Poiché  $M_t$  è *concentrato al tip*, il momento torcente è costante =  $M_t$  su tutto il semispan; l'angolo al tip è semplicemente:

$$\varphi_{\text{tip}} = \frac{d\varphi}{dz} \times \frac{b}{2} = \frac{M_t}{4A^2G} \int \frac{ds}{s_t} \times \frac{b}{2}$$
$$\varphi_{\text{tip}} = \frac{2\,400\,000}{4 \times 36\,750^2 \times 27\,000} \times 760 \times 5500$$
$$= \frac{2\,400\,000}{1,459 \times 10^{14}} \times 760 \times 5500 = 1,251 \times 10^{-5} \text{ rad/mm} \times 5500 \text{ mm}$$
$$\varphi_{\text{tip}} = 0,0688 \text{ rad} = \mathbf{3,94^\circ}$$

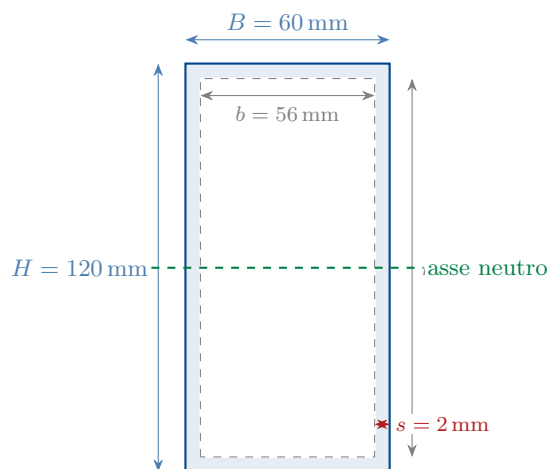
#### Verifica angolo di torsione

$$\varphi_{\text{tip}} = 3,94^\circ \leq \varphi_{\text{lim}} = 5^\circ \quad \checkmark \quad \mathbf{ACCETTABILE}$$

Il limite di  $5^\circ$  deriva dai manuali aeronautici strutturali italiani ed è legato al rischio di variazione del profilo torsionale aeroelastico che potrebbe compromettere la risposta in rollio e la stabilità direzionale. La struttura soddisfa il requisito con un margine di circa  $1^\circ$ .

## Riepilogo e schema riassuntivo

Fase	Grandezza	Valore	Unità
B	Superficie alare $S$	13,75	m <sup>2</sup>
B	Allungamento $AR$	8,80	—
B	Baricentro semiala $y_G$	2,64	m
C	Portanza semiala $L_{semi}$	11 000	N
C	Peso ala (Gabrielli) $W_{ala}$	1 222,5	N
C	Forza netta $F_a$	8 310,6	N
D	Taglio radice $T$	8 310,6	N
D	Momento flessionale $M_f$	21 940	N·m
D	$M_{f,\ell}$ (per longherone)	10 970	N·m
E	Altezza esterna $H$	120	mm
E	Larghezza esterna $B$	60	mm
E	Spessore parete $s$	<b>2</b>	mm
E	$W_f$ effettivo	22 597	mm <sup>3</sup>
E	$\sigma_{eff}$	485,5	N/mm <sup>2</sup>
F	Area cella $A$	36 750	mm <sup>2</sup>
F	Flusso di taglio $q$	32,65	N/mm
F	Spessore rivestimento $s_{riv}$	<b>1</b>	mm
F	Angolo torsione $\varphi_{tip}$	<b>3,94</b>	gradi



Sezione del longherone — radice

- La tensione di flessione ( $485,5 \text{ N/mm}^2$ ) satura quasi completamente l'ammissibile ( $500 \text{ N/mm}^2$ ): il margine è solo del **3%**, il che riflette la scelta minima dello spessore commerciale  $s = 2 \text{ mm}$ . In un progetto reale si valuterebbe  $s = 2,5 \text{ mm}$  per disporre di maggiore margine di sicurezza rispetto alle tolleranze di lavorazione.
- Il taglio è trascurabile rispetto alla flessione (rapporto  $\approx 1 : 30$ ): questo conferma che per longheroni di alta resistenza la flessione è la *sollecitazione di progetto*.
- Lo spessore di rivestimento  $s_{\text{riv}} = 1 \text{ mm}$  è dettato dal minimo commerciale, non dalla torsione: il margine è elevatissimo ( $\tau = 32,65 \text{ N/mm}$  contro  $\tau_{\text{amm}} = 288,7 \text{ N/mm}^2$ ).
- L'angolo di torsione ( $3,94^\circ$ ) è ben al di sotto del limite di  $5^\circ$ , lasciando margine per la torsione aeroelastica distribuita, che in questo esercizio non è stata inclusa.

---

Documento redatto a scopo didattico – Prof. Ing. B. Raucci — ITIS E. Majorana, Cassino — A.S. 2025/26.