Polare Aerodinamica

Prof. Ing. Raucci Biagio

Esercizio 1

Calcolare la portanza, la resistenza e il momento aerodinamico per un'ala isolata a pianta rettangolare avente le caratteristiche sottoindicate nell'ipotesi che sia investita da un'aria avente densità $\rho = 1.127\, kg/m^3$ alla velocità $V = 120\, km/h$ con incidenza $\alpha = 6^o$.
Dati caratteristici dell'ala:

- corda alare: $c = 1.85\, m$;
- apertura alare: $b = 15.3\, m$;
- coefficiente angolare della retta di portanza: $C_{L_\alpha} = 0.0865\, \text{grad}^{-1}$;
- coefficiente di resistenza minimo: $C_{D_0} = 0.011$;
- coefficiente di momento per incidenza nulla: $C_{m,0} = 0.03$;
- coefficiente di momento aerodinamico per incidenza di 8^o: $C_m(8^o) = 0.07$

Soluzione

Passo 1 — Grandezze geometriche dell'ala. Per un'ala a pianta rettangolare la superficie alare e l'allungamento alare valgono:

$$S = b \cdot c = 15{,}3 \times 1{,}85 = \mathbf{28{,}31\, m^2} \tag{1}$$

$$AR = \frac{b^2}{S} = \frac{b}{c} = \frac{15{,}3}{1{,}85} = \mathbf{8{,}27} \tag{2}$$

Passo 2 — Pressione dinamica. La velocità di volo va convertita in m/s:

$$V = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{120}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 33{,}33\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La pressione dinamica è quindi:

$$q_\infty = \frac{1}{2}\rho V^2 = \frac{1}{2} \times 1{,}127 \times 33{,}33^2 = \mathbf{626{,}1\,\frac{N}{m^2}}$$

Passo 3 — Coefficiente di portanza. Il legame tra C_L e l'incidenza è fornito dalla *retta di portanza*:

$$C_L = C_{L_\alpha} \cdot \alpha = 0{,}0865 \times 6 = \mathbf{0{,}519}$$

dove si è assunto, come di consueto per un profilo asimmetrico di impiego generale, che l'incidenza di portanza nulla sia $\alpha_0 \approx 0$.

Passo 4 — Coefficiente di resistenza. La resistenza totale si scompone nella resistenza di profilo C_{D_0} (parassita) e nella resistenza indotta C_{D_i}, secondo la **polare parabolica**:

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_i} = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi\, e\, \AE\!R}$$

Per un'ala rettangolare non rastremata si assume in prima approssimazione il fattore di Oswald $e = 1$, per cui:

$$C_{D_i} = \frac{0{,}519^2}{\pi \times 1 \times 8{,}27} = \frac{0{,}2694}{25{,}98} = 0{,}01037$$

$$C_D = 0{,}011 + 0{,}01037 = \mathbf{0{,}02137}$$

Passo 5 — Coefficiente di momento aerodinamico. Sono noti due valori del coefficiente di momento in corrispondenza di due incidenze distinte:

$$C_{m,0} = C_m(0°) = 0{,}03, \qquad C_m(8°) = 0{,}07$$

Poiché C_m varia *linearmente* con l'incidenza, il coefficiente angolare della retta dei momenti è:

$$C_{m_\alpha} = \frac{C_m(8°) - C_m(0°)}{8° - 0°} = \frac{0{,}07 - 0{,}03}{8} = 0{,}005\,\mathrm{grad}^{-1}$$

Per interpolazione lineare a $\alpha = 6°$:

$$C_m(6°) = C_{m,0} + C_{m_\alpha} \cdot \alpha = 0{,}03 + 0{,}005 \times 6 = \mathbf{0{,}06}$$

Passo 6 — Portanza, resistenza e momento aerodinamico. Le tre forze e il momento si ricavano dalle definizioni dei rispettivi coefficienti adimensionali. Si calcola preliminarmente il prodotto $q_\infty S$, comune a tutte le espressioni:

$$q_\infty S = 626{,}1 \times 28{,}31 = 17\,722\,\mathrm{N}$$

$$L = C_L \cdot q_\infty \cdot S = 0{,}519 \times 17\,722 = \mathbf{9\,198\,N} \approx \mathbf{9{,}20\,kN} \tag{3}$$

$$D = C_D \cdot q_\infty \cdot S = 0{,}02137 \times 17\,722 = \mathbf{379\,N} \tag{4}$$

$$M_a = C_m \cdot q_\infty \cdot S \cdot c = 0{,}06 \times 17\,722 \times 1{,}85 = \mathbf{1\,967\,N{\cdot}m} \tag{5}$$

Riepilogo dei risultati

Grandezza	**Simbolo**	**Valore**	**Unità**
Portanza	L	9 198	N
Resistenza	D	379	N
Momento aerod.	M_a	1 967	N·m

Esercizio 2

Calcolare la portanza, l'efficienza, la resistenza per un'ala a pianta trapezia avente le caratteriestiche sottoindicate nell'ipotesi che voli a $1\,000\,m$ di quota a una velocità $V = 330\,km/h$ con un'incidenza di 4^o.
Caratteristiche dell'ala:

- Apertura alare: $b = 18\,m$;
- corda alla radice: $c_r = 2.8\,m$;
- corda all'estremità: $c_t = 1.6\,m$;
- coefficiente angolare per il profilo alare: $C_{\ell_\alpha} = 4.9\,\text{rad}^{-1}$;
- Coefficiente di resistenza minimo: $C_{D_0} = 0.010$.

Soluzione

Passo 1 — Densità dell'aria a 1 000 m di quota. Si ricorre all'atmosfera standard ISA. Nella troposfera la temperatura decade con gradiente adiabatico $L = 0{,}0065\,\text{K/m}$:

$$T(h) = T_0 - L\,h = 288{,}15 - 0{,}0065 \times 1\,000 = 281{,}65\,\text{K}$$

La densità si calcola con la legge politropica:

$$\rho(h) = \rho_0 \left(\frac{T(h)}{T_0}\right)^{\frac{g}{LR}-1} = 1{,}225 \times \left(\frac{281{,}65}{288{,}15}\right)^{4{,}256} = \mathbf{1{,}112\,\frac{kg}{m^3}}$$

dove $g = 9{,}807\,\text{m/s}^2$, $R = 287{,}05\,\text{J/(kg K)}$.

Passo 2 — Pressione dinamica.

$$V = \frac{330}{3{,}6} = 91{,}67\,\frac{\text{m}}{\text{s}}, \qquad q_\infty = \frac{1}{2}\rho V^2 = \frac{1}{2} \times 1{,}112 \times 91{,}67^2 = \mathbf{4\,670\,\frac{N}{m^2}}$$

Passo 3 — Grandezze geometriche dell'ala trapezia. Per un'ala a pianta trapezia il *rapporto di rastremazione* è $\lambda = c_t/c_r$; la *corda media aerodinamica* coincide, per un trapezio lineare, con la media aritmetica delle corde estrema e di radice:

$$\lambda = \frac{c_t}{c_r} = \frac{1{,}6}{2{,}8} = 0{,}571 \tag{6}$$

$$\bar{c} = \frac{c_r + c_t}{2} = \frac{2{,}8 + 1{,}6}{2} = 2{,}20\,\text{m} \tag{7}$$

$$S = b \cdot \bar{c} = 18 \times 2{,}20 = \mathbf{39{,}6\,m^2} \tag{8}$$

$$AR = \frac{b^2}{S} = \frac{18^2}{39{,}6} = \mathbf{8{,}18} \tag{9}$$

Passo 4 — Pendenza 3D della retta di portanza. Il dato $C_{\ell_\alpha} = 4{,}9\,\mathrm{rad}^{-1}$ è la pendenza *bidimensionale* (profilo isolato). Per un'ala di apertura finita, la teoria della linea portante di Prandtl fornisce la correzione:

$$C_{L_\alpha} = \frac{C_{\ell_\alpha}}{1 + \dfrac{C_{\ell_\alpha}}{\pi\, e\, A\!\!\!/R}}$$

Assumendo fattore di Oswald $e = 1$ (distribuzione di portanza ellittica, approssimazione conservativa per $\lambda \approx 0{,}57$):

$$C_{L_\alpha} = \frac{4{,}9}{1 + \dfrac{4{,}9}{\pi \times 1 \times 8{,}18}} = \frac{4{,}9}{1 + 0{,}191} = \frac{4{,}9}{1{,}191} = \mathbf{4{,}12}\,\mathrm{rad}^{\mathbf{-1}}$$

Il denominatore maggiore di 1 esprime fisicamente il fatto che i *vortici liberi* di estremità riducono l'incidenza effettiva del profilo (*downwash*), abbattendo la pendenza rispetto al caso 2D.

Passo 5 — Coefficiente di portanza. Convertita l'incidenza in radianti:

$$\alpha = 4^\circ = 4 \times \frac{\pi}{180} = 0{,}06981\,\mathrm{rad}$$

$$C_L = C_{L_\alpha} \cdot \alpha = 4{,}12 \times 0{,}06981 = \mathbf{0{,}287}$$

Passo 6 — Coefficiente di resistenza. Dalla **polare parabolica**:

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi\, e\, A\!\!\!/R} = \frac{0{,}287^2}{\pi \times 1 \times 8{,}18} = \frac{0{,}08237}{25{,}70} = 0{,}003\,21$$

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_i} = 0{,}010 + 0{,}003\,21 = \mathbf{0{,}01321}$$

Passo 7 — Efficienza aerodinamica.

$$E = \frac{C_L}{C_D} = \frac{0{,}287}{0{,}01321} = \mathbf{21{,}7}$$

L'efficienza esprime quante unità di portanza si ottengono per ogni unità di resistenza: un valore di $E \approx 22$ è tipico di ali non ipersostentate in configurazione pulita a bassa incidenza.

Passo 8 — Portanza e resistenza.

$$q_\infty \cdot S = 4\,670 \times 39{,}6 = 184\,932\,\mathrm{N}$$

$$L = C_L \cdot q_\infty \cdot S = 0{,}287 \times 184\,932 = \mathbf{53\,095\,N} \approx \mathbf{53{,}1\,kN} \tag{10}$$

$$D = C_D \cdot q_\infty \cdot S = 0{,}01321 \times 184\,932 = \mathbf{2\,443\,N} \approx \mathbf{2{,}44\,kN} \tag{11}$$

Come verifica interna si ha $L/D = 53\,095/2\,443 = 21{,}7$, coerente con l'efficienza calcolata al passo precedente.

Riepilogo dei risultati

Grandezza	**Simbolo**	**Valore**	**Unità**
Densità a 1 000 m	ρ	1,112	kg/m^3
Superficie alare	S	39,6	m^2
Allungamento alare	Æ	8,18	—
Pendenza 3D	C_{L_α}	4,12	rad^{-1}
Coeff. di portanza	C_L	0,287	—
Coeff. di resistenza	C_D	0,01321	—
Efficienza aerodinamica	E	21,7	—
Portanza	L	53 100	N
Resistenza	D	2 443	N

Esercizio 3

Calcolare e tracciare la polare e il diagramma dell'efficienza in funzione del coefficiente di portanza per un bimotore avente le caratteristiche sottoindicate:

- Superficie alare: $S = 124\,m^2$;
- Sezione maestra di fusoliera: $S_f = 9.5\,m^2$;
- Sezione maestra di una gondola motrice: $S_g = 1.25\,m^2$;
- Superficie impennaggio orizzontale: $S_{i,o} = 23\,m^2$;
- Superficie impennaggio verticale: $S_{i,v} = 21\,m^2$;
- Coefficiente di resistenza del profilo dell'ala: $c_{D,0} = 0.009$;
- Coefficiente di resistenza della fusoliera: $C_{D,f} = 0.080$;
- Coefficiente di resistenza delle gondole: $C_{D,g} = 0.055$;
- Coefficiente di resistenza degli impennaggi: $C_{D,i} = 0.0092$;
- Coefficiente di resistenza dovuto alle interferenze: $C_D^* = 0.002$;
- Allungamento alare: $\mathit{AR} = 8.7$;
- Coefficiente di Oswald: $e = 0.9$

Soluzione

Passo 1 — Resistenza di profilo totale $\boldsymbol{C_{D_0}}$. Ciascun coefficiente di resistenza è definito rispetto alla propria *area di riferimento*; per sommarli occorre ricondurli tutti alla superficie alare S. La resistenza totale a portanza nulla vale:

$$C_{D_0} = \underbrace{c_{D,0}}_{\text{ala}} + C_{D,f}\,\frac{S_f}{S} + 2\,C_{D,g}\,\frac{S_g}{S} + C_{D,i}\,\frac{S_{i,o} + S_{i,v}}{S} + C_D^*$$

Il fattore 2 a moltiplicare il contributo delle gondole tiene conto della presenza di *due* motori.

Componente	**Formula**	C_D locale	Area	Contributo a C_{D_0}
Ala (profilo)	$c_{D,0}$	0,009	S	0,009 000
Fusoliera	$C_{D,f} \cdot S_f/S$	0,080	$9{,}5\,m^2$	0,006 129
Gondole (×2)	$2\,C_{D,g} \cdot S_g/S$	0,055	$1{,}25\,m^2$	0,001 109
Impennaggi	$C_{D,i} \cdot (S_{i,o} + S_{i,v})/S$	0,0092	$44\,m^2$	0,003 265
Interferenze	C_D^*	—	—	0,002 000
Totale				**0,021 503**

Passo 2 — Equazione della polare parabolica. La resistenza indotta dipende quadraticamente da C_L:

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi\, e\, \mathit{AR}} = \frac{C_L^2}{\pi \times 0{,}9 \times 8{,}7} = \frac{C_L^2}{24{,}60}$$

La **polare parabolica** del velivolo è pertanto:

$$\boxed{C_D = 0{,}02150 + \frac{C_L^2}{24{,}60}} \tag{12}$$

Passo 3 — Efficienza massima e C_L ottimale. Il rapporto $E = C_L/C_D$ è massimo quando la retta uscente dall'origine del piano $(C_D,\, C_L)$ risulta tangente alla polare. Derivando e ponendo $\mathrm{d}E/\mathrm{d}C_L = 0$ si ottiene:

$$C_{L,\text{opt}} = \sqrt{C_{D_0} \cdot \pi\, e\, \mathit{AR}} = \sqrt{0{,}02150 \times 24{,}60} = \sqrt{0{,}5289} = \mathbf{0{,}727}$$

$$C_{D,\text{opt}} = 2\, C_{D_0} = 2 \times 0{,}02150 = \mathbf{0{,}04301}$$

$$E_{\max} = \frac{C_{L,\text{opt}}}{C_{D,\text{opt}}} = \frac{0{,}727}{0{,}04301} = \mathbf{16{,}9}$$

Il risultato mostra che all'efficienza massima la resistenza indotta *uguaglia esattamente* la resistenza di profilo: $C_{D_i} = C_{D_0} = 0{,}02150$.

Passo 4 — Tabella della polare.

C_L	C_{D_i}	C_D	$E = C_L/C_D$
0,00	0,000000	0,021502	0,000
0,10	0,000407	0,021909	4,564
0,20	0,001626	0,023129	8,647
0,30	0,003659	0,025161	11,923
0,40	0,006504	0,028007	14,282
0,50	0,010163	0,031666	15,790
0,60	0,014635	0,036137	16,603
0,73	0,021503	0,043005	16,912
0,80	0,026018	0,047520	16,835
0,90	0,032929	0,054431	16,535
1,00	0,040653	0,062155	16,089
1,10	0,049190	0,070692	15,560
1,20	0,058540	0,080042	14,992
1,30	0,068703	0,090205	14,412
1,40	0,079679	0,101182	13,837
1,50	0,091468	0,112971	13,278

La riga in grassetto corrisponde al punto di efficienza massima.

Passo 5 — Grafici.

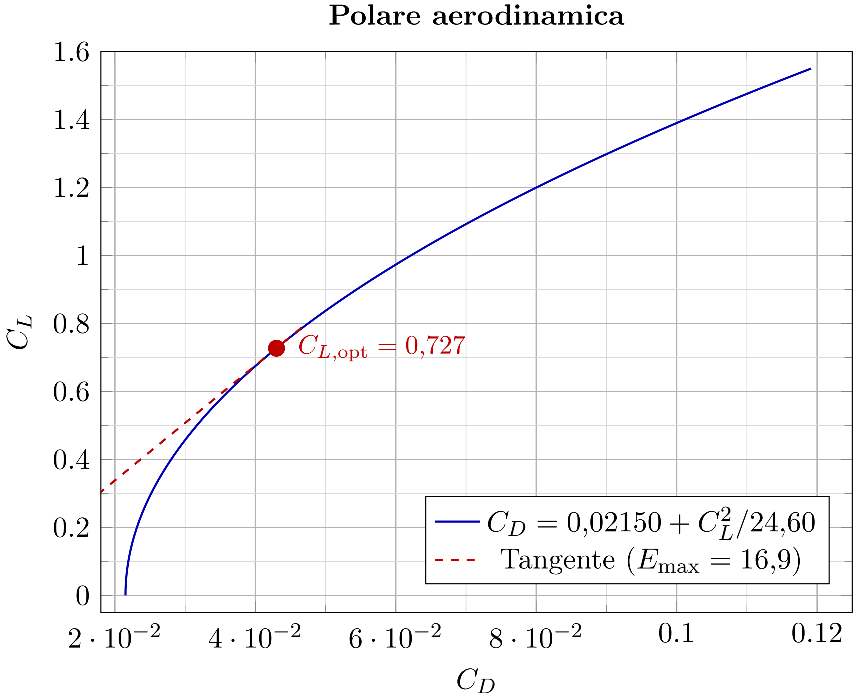

Figura 1: Polare parabolica del bimotore. Il punto rosso indica la condizione di massima efficienza aerodinamica.

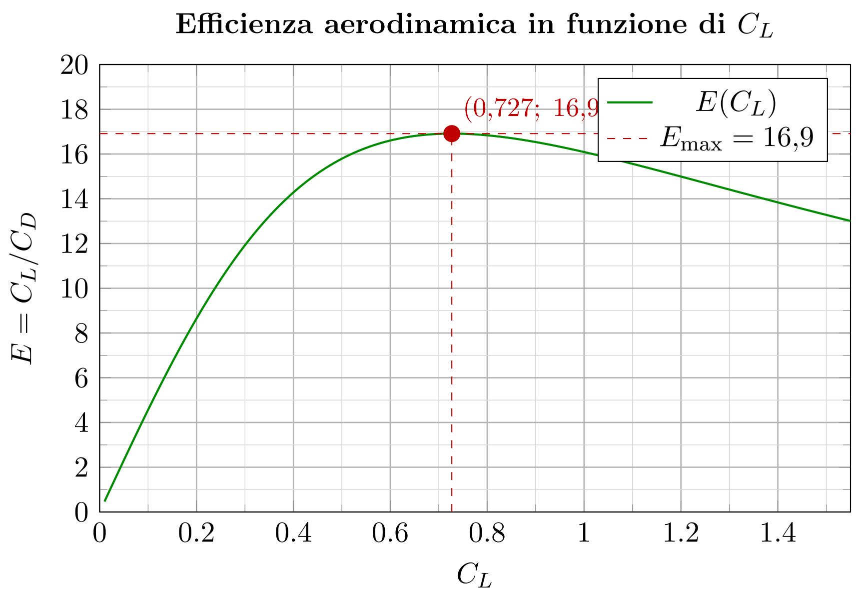

Figura 2: Andamento dell'efficienza aerodinamica al variare di C_L. Il massimo $E_{\max} = 16{,}9$ si raggiunge a $C_L = 0{,}727$.

Esercizio 4

Calcolare e tracciare la polare secondo la formula di Prandtl per un'ala avente allungamento $\text{Æ} = 5.7$ e coefficiente di resistenza minimo $C_{D,0} = 0.018$. calcolare e tracciare la curva dell'efficienza in funzione del coefficiente di portanza.

Soluzione

Passo 1 — Formula di Prandtl e coefficiente angolare della polare. La **formula di Prandtl** per la polare di un'ala a distribuzione ellittica di portanza ($e = 1$) è:

$$C_D = C_{D,0} + \frac{C_L^2}{\pi\, \text{Æ}}$$

Il denominatore $\pi\, \text{Æ}$ rappresenta la resistenza indotta unitaria; fisicamente, a parità di C_L, un allungamento maggiore genera vortici di estremità più deboli e quindi *meno resistenza indotta.*

Sostituendo i dati:

$$\pi\, \text{Æ} = \pi \times 5{,}7 = 17{,}91$$

$$\boxed{C_D = 0{,}018 + \frac{C_L^2}{17{,}91}}$$

Passo 2 — Punto di efficienza massima. L'efficienza aerodinamica è $E = C_L/C_D$. Il massimo si trova imponendo $\mathrm{d}E/\mathrm{d}C_L = 0$, che equivale geometricamente a trovare la tangente alla polare uscente dall'origine del piano (C_D, C_L). Il calcolo fornisce:

$$C_{L,\text{opt}} = \sqrt{C_{D,0} \cdot \pi\, \text{Æ}} = \sqrt{0{,}018 \times 17{,}91} = \sqrt{0{,}3224} = \mathbf{0{,}568}$$

$$C_{D,\text{opt}} = 2\, C_{D,0} = 2 \times 0{,}018 = \mathbf{0{,}036}$$

$$E_{\max} = \frac{C_{L,\text{opt}}}{C_{D,\text{opt}}} = \frac{0{,}568}{0{,}036} = \mathbf{15{,}77}$$

Si noti che al punto di efficienza massima la resistenza indotta eguaglia esattamente la resistenza di profilo: $C_{D_i} = C_{D,0} = 0{,}018$.

Passo 3 — Tabella della polare.

C_L	$C_{D_i} = C_L^2/17{,}91$	C_D	$E = C_L/C_D$
0,00	0,000000	0,018000	0,000
0,10	0,000558	0,018558	5,388
0,20	0,002234	0,020234	9,884
0,30	0,005026	0,023026	13,029
0,40	0,008935	0,026935	14,851
0,50	0,013961	0,031961	15,644
0,57	0,018000	0,036000	15,771
0,60	0,020104	0,038104	15,746
0,70	0,027363	0,045363	15,431
0,80	0,035740	0,053740	14,886
0,90	0,045234	0,063234	14,233
1,00	0,055844	0,073844	13,542
1,10	0,067571	0,085571	12,855
1,20	0,080415	0,098415	12,193
1,30	0,094376	0,112376	11,568
1,40	0,109454	0,127454	10,984
1,50	0,125649	0,143649	10,442

La riga in grassetto corrisponde al punto di efficienza massima.

Passo 4 — Grafici.

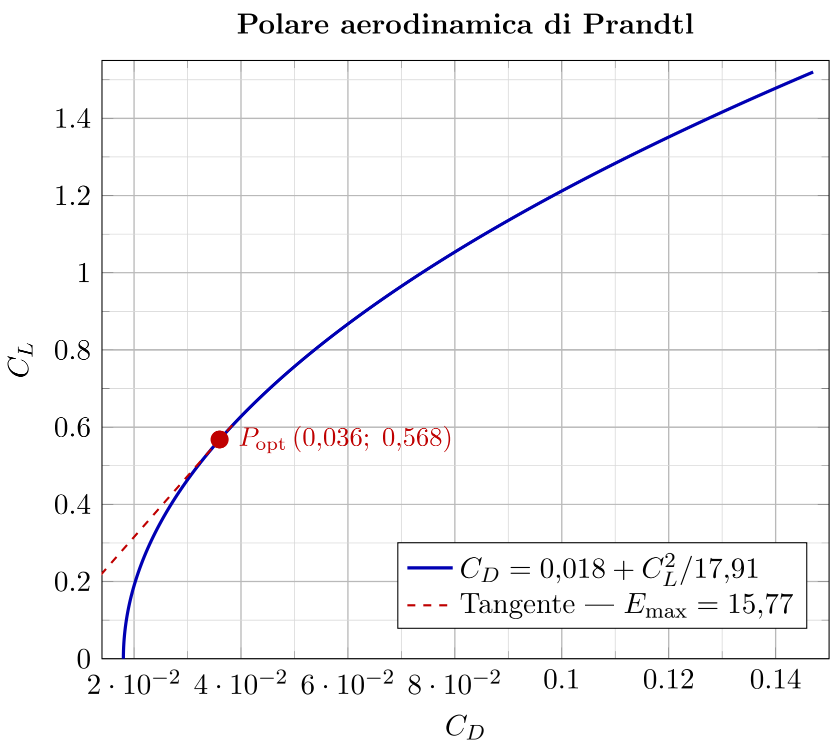

Figura 3: Polare parabolica di Prandtl ($e = 1$, AR $= 5.7$). Il punto rosso indica la condizione di massima efficienza.

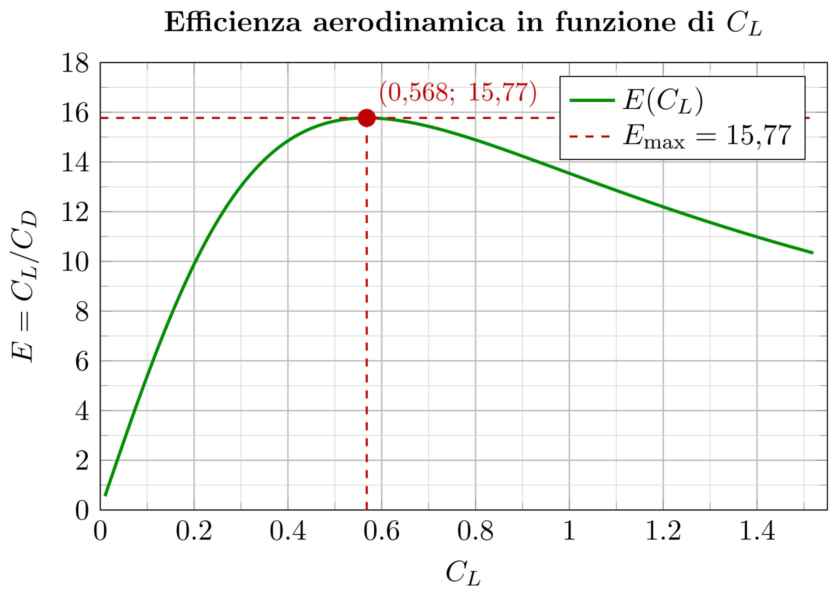

Figura 4: Efficienza aerodinamica in funzione di C_L. Il massimo $E_{\max} = 15{,}77$ si raggiunge a $C_{L,\text{opt}} = 0{,}568$.

Esercizio 5

Tracciare la polare e la curva dell'efficienza in funzione del coefficiente di portanza per un'ala avente $S = 23.5\,m^2$; $b = 12.8\,m$; $C_{D_0} = 0.011$; $C_{L_{\max}} = 1.4$; $e = 0.9$.

Soluzione

Passo 1 — Allungamento alare. Dai dati geometrici si ricava:

$$AR = \frac{b^2}{S} = \frac{12{,}8^2}{23{,}5} = \frac{163{,}84}{23{,}5} = \mathbf{6{,}97}$$

Passo 2 — Polare parabolica. La polare di Oswald (con $e = 0{,}9$) è:

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi\, e\, AR} = 0{,}011 + \frac{C_L^2}{\pi \times 0{,}9 \times 6{,}97}$$

$$\pi\, e\, AR = \pi \times 0{,}9 \times 6{,}97 = 19{,}71$$

$$\boxed{C_D = 0{,}011 + \frac{C_L^2}{19{,}71}} \qquad \text{valida per } 0 \le C_L \le C_{L,\max} = 1{,}4$$

Passo 3 — Punto di efficienza massima.

$$C_{L,\text{opt}} = \sqrt{C_{D_0} \cdot \pi\, e\, AR} = \sqrt{0{,}011 \times 19{,}71} = \sqrt{0{,}2168} = \mathbf{0{,}466}$$

$$C_{D,\text{opt}} = 2\,C_{D_0} = 2 \times 0{,}011 = \mathbf{0{,}022}$$

$$E_{\max} = \frac{C_{L,\text{opt}}}{C_{D,\text{opt}}} = \frac{0{,}466}{0{,}022} = \mathbf{21{,}2}$$

Passo 4 — Tabella dei valori.

C_L	C_{D_i}	C_D	$E = C_L/C_D$
0,00	0,000000	0,011000	0,000
0,10	0,000507	0,011507	8,690
0,20	0,002029	0,013029	15,350
0,30	0,004566	0,015566	19,273
0,40	0,008117	0,019117	20,924
0,466	0,011002	0,022002	21,166
0,50	0,012682	0,023682	21,113
0,60	0,018262	0,029262	20,504
0,70	0,024857	0,035857	19,522
0,80	0,032467	0,043467	18,405
0,90	0,041090	0,052090	17,278
1,00	0,050729	0,061729	16,200
1,10	0,061382	0,072382	15,197
1,20	0,073050	0,084050	14,277
1,30	0,085732	0,096732	13,439
1,40	0,099429	0,110429	12,678

La riga in grassetto è il punto di efficienza massima; la tabella è troncata a $C_L = C_{L,\max} = 1{,}4$.

Passo 5 — Grafici.

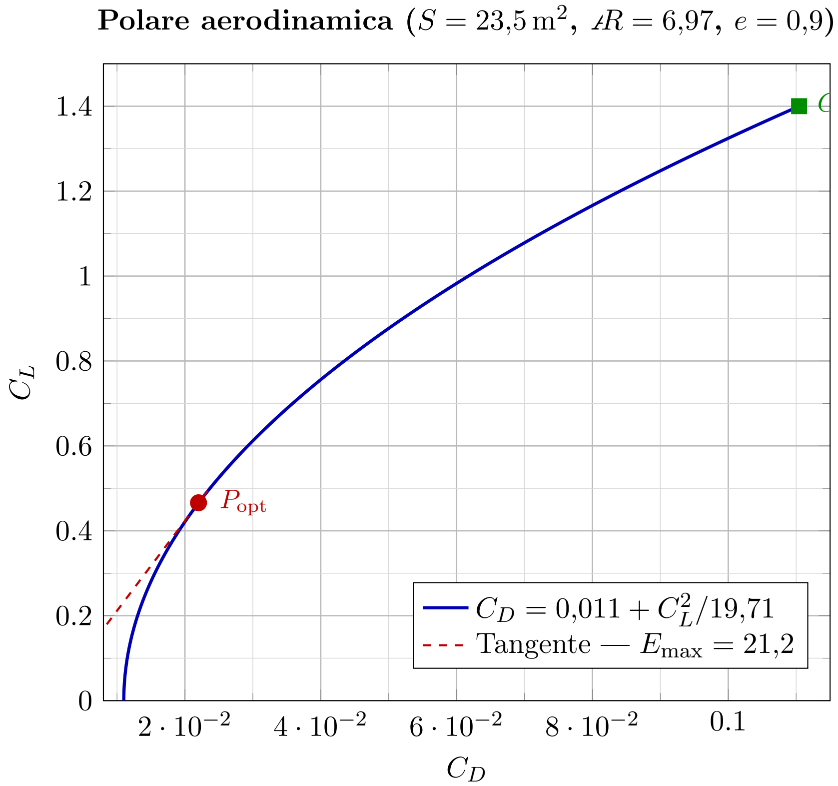

Figura 5: Polare parabolica. La curva termina a $C_{L,\max} = 1{,}4$ (limite di portanza massima). Il punto rosso indica la condizione di massima efficienza.

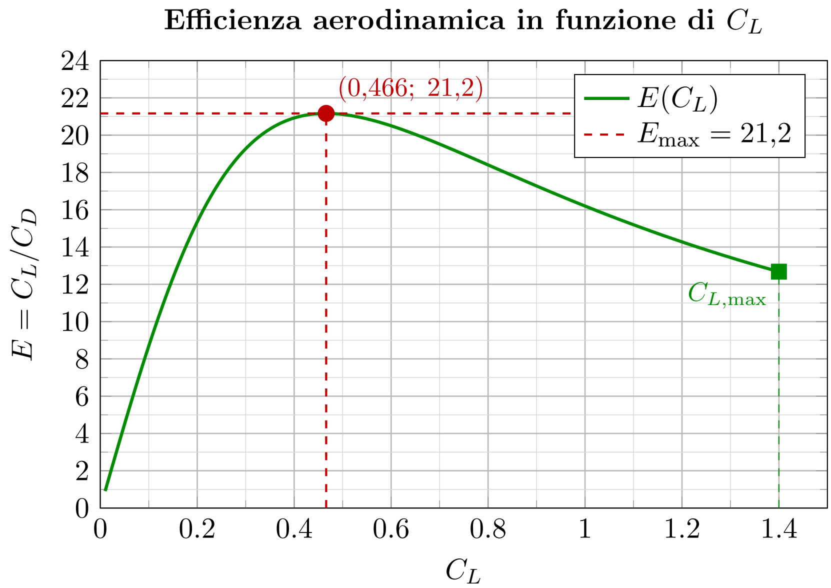

Figura 6: Efficienza aerodinamica. La curva è troncata a $C_{L,\max} = 1{,}4$; il massimo $E_{\max} = 21{,}2$ si raggiunge a $C_{L,\mathrm{opt}} = 0{,}466$.

Esercizio 6

Calcolare e tracciare la polare e la curva dell'efficienza in funzione del coefficienza di portanza per un'ala a pianta rettangolare avente le seguenti caratteristiche: $b = 23.2\,m$; $c = 2.5\,m$; $e = 0.9$; $C_{D_0} = 0.010$ e $C_{L_{\max}} = 1.4$.

Soluzione

Passo 1 — Grandezze geometriche. Per un'ala a pianta *rettangolare* la superficie alare e l'allungamento si ricavano direttamente da corda e apertura:

$$S = b \cdot c = 23{,}2 \times 2{,}5 = \mathbf{58{,}0\,m^2}$$

$$AR = \frac{b}{c} = \frac{23{,}2}{2{,}5} = \mathbf{9{,}28}$$

Passo 2 — Polare parabolica di Oswald. Con $e = 0{,}9$:

$$\pi\, e\, AR = \pi \times 0{,}9 \times 9{,}28 = 26{,}24$$

$$\boxed{C_D = 0{,}010 + \frac{C_L^2}{26{,}24}} \qquad 0 \le C_L \le 1{,}4$$

Passo 3 — Efficienza massima.

$$C_{L,\text{opt}} = \sqrt{C_{D_0} \cdot \pi\, e\, AR} = \sqrt{0{,}010 \times 26{,}24} = \sqrt{0{,}2624} = \mathbf{0{,}512}$$

$$C_{D,\text{opt}} = 2\,C_{D_0} = \mathbf{0{,}020}$$

$$E_{\max} = \frac{C_{L,\text{opt}}}{C_{D,\text{opt}}} = \frac{0{,}512}{0{,}020} = \mathbf{25{,}6}$$

Il valore elevato di $E_{\max}$ rispetto agli esercizi precedenti è conseguenza diretta dell'allungamento maggiore ($AR = 9{,}28$): la resistenza indotta risulta più bassa, spostando il punto ottimale verso C_L più bassi e C_D più contenuti.

Passo 4 — Tabella dei valori.

C_L	$C_{D_i} = C_L^2/26{,}24$	C_D	$E = C_L/C_D$
0,00	0,000000	0,010000	0,000
0,10	0,000381	0,010381	9,633
0,20	0,001524	0,011524	17,354
0,30	0,003430	0,013430	22,338
0,40	0,006098	0,016098	24,848
0,50	0,009528	0,019528	25,604
0,512	0,010000	0,020000	25,612
0,60	0,013720	0,023720	25,295
0,70	0,018675	0,028675	24,412
0,80	0,024392	0,034392	23,262
0,90	0,030871	0,040871	22,021
1,00	0,038112	0,048112	20,785
1,10	0,046115	0,056115	19,603
1,20	0,054881	0,064881	18,495
1,30	0,064409	0,074409	17,471
1,40	0,074699	0,084699	16,529

Passo 5 — Grafici.

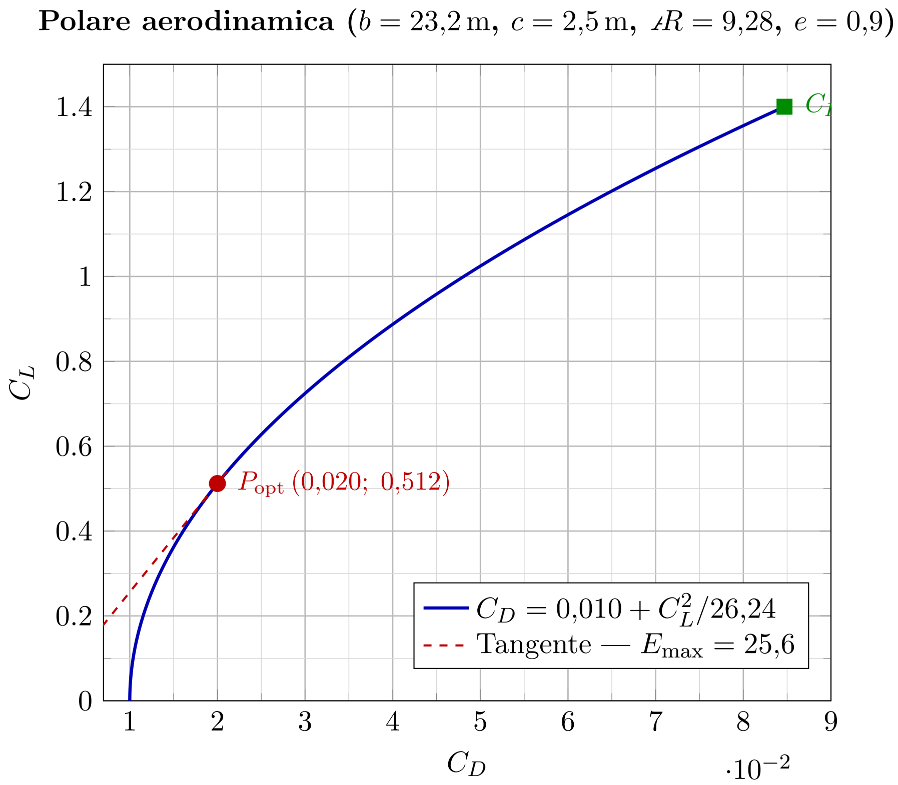

Figura 7: Polare parabolica dell'ala rettangolare. Il punto rosso è il punto di efficienza massima; il quadrato verde indica il limite di stallo.

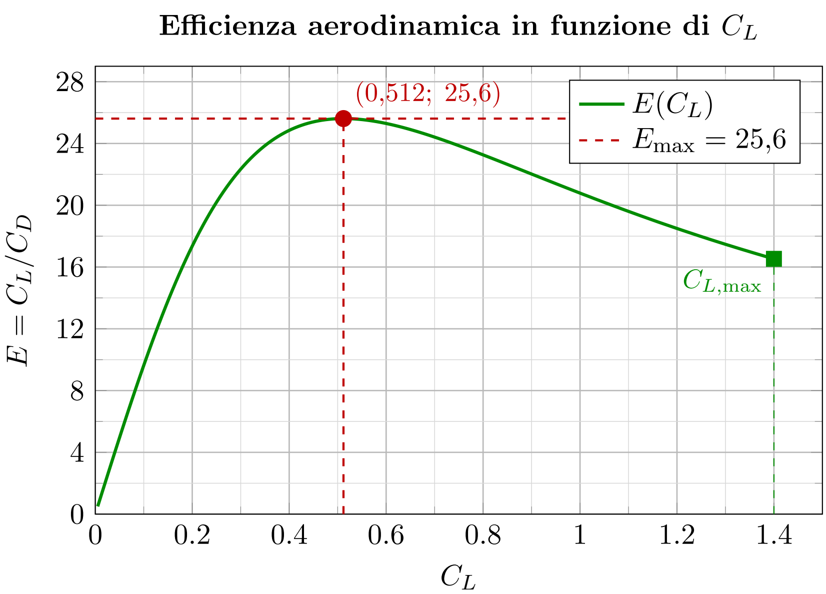

Figura 8: Efficienza aerodinamica. Il massimo $E_{\max} = 25{,}6$ si raggiunge a $C_{L,\text{opt}} = 0{,}512$; la curva è troncata al limite di stallo $C_{L,\max} = 1{,}4$.

Esercizio 7

Calcolare e tracciare la polare e la curva dell'efficienza in funzione del coefficiente di portanza per un'ala a pianta trapezia avente le seguenti caratteristiche: rapporto di rastremazione $r = c_t/c_r = 0.6$; corda alla radice $c_r = 2.3\,m$; $b = 14.5\,m$; $e = 0.92$; $C_{D_0} = 0.009$; $C_{L_{\max}} = 1.3$.

Soluzione

Passo 1 — Geometria dell'ala trapezia. Dal rapporto di rastremazione si ricava la corda all'estremità:

$$c_t = r \cdot c_r = 0{,}6 \times 2{,}3 = \mathbf{1{,}38\,m}$$

Per un'ala a pianta trapezia la corda media aerodinamica coincide con la media aritmetica delle corde estrema e di radice:

$$\bar{c} = \frac{c_r + c_t}{2} = \frac{2{,}3 + 1{,}38}{2} = \mathbf{1{,}84\,m}$$

Superficie alare e allungamento:

$$S = b \cdot \bar{c} = 14{,}5 \times 1{,}84 = \mathbf{26{,}68\,m^2} \tag{13}$$

$$\text{Æ} = \frac{b^2}{S} = \frac{14{,}5^2}{26{,}68} = \frac{210{,}25}{26{,}68} = \mathbf{7{,}88} \tag{14}$$

Passo 2 — Polare parabolica di Oswald.

$$\pi\, e\, \text{Æ} = \pi \times 0{,}92 \times 7{,}88 = 22{,}78$$

$$\boxed{C_D = 0{,}009 + \frac{C_L^2}{22{,}78}} \qquad 0 \le C_L \le C_{L,\max} = 1{,}3$$

Passo 3 — Efficienza massima.

$$C_{L,\text{opt}} = \sqrt{C_{D_0} \cdot \pi\, e\, \text{Æ}} = \sqrt{0{,}009 \times 22{,}78} = \sqrt{0{,}2050} = \mathbf{0{,}453}$$

$$C_{D,\text{opt}} = 2\,C_{D_0} = 2 \times 0{,}009 = \mathbf{0{,}018}$$

$$E_{\max} = \frac{C_{L,\text{opt}}}{C_{D,\text{opt}}} = \frac{0{,}453}{0{,}018} = \mathbf{25{,}2}$$

Passo 4 — Tabella dei valori.

C_L	$C_{D_i} = C_L^2/22{,}78$	C_D	$E = C_L/C_D$
0,00	0,000000	0,009000	0,000
0,10	0,000439	0,009439	10,594
0,20	0,001756	0,010756	18,594
0,30	0,003951	0,012951	23,164
0,40	0,007025	0,016025	24,961
0,453	0,009010	0,018010	25,153
0,50	0,010976	0,019976	25,030
0,60	0,015806	0,024806	24,188
0,70	0,021513	0,030513	22,941
0,80	0,028099	0,037099	21,564
0,90	0,035563	0,044563	20,196
1,00	0,043905	0,052905	18,902
1,10	0,053125	0,062125	17,706
1,20	0,063223	0,072223	16,615
1,30	0,074199	0,083199	15,625

La riga in grassetto è il punto di efficienza massima; la tabella è troncata a $C_{L,\max} = 1{,}3$.

Passo 5 — Grafici.

Polare aerodinamica ($r = 0{,}6$, $b = 14{,}5\,\mathrm{m}$, $\mathcal{A}\!R = 7{,}88$, $e = 0{,}92$)

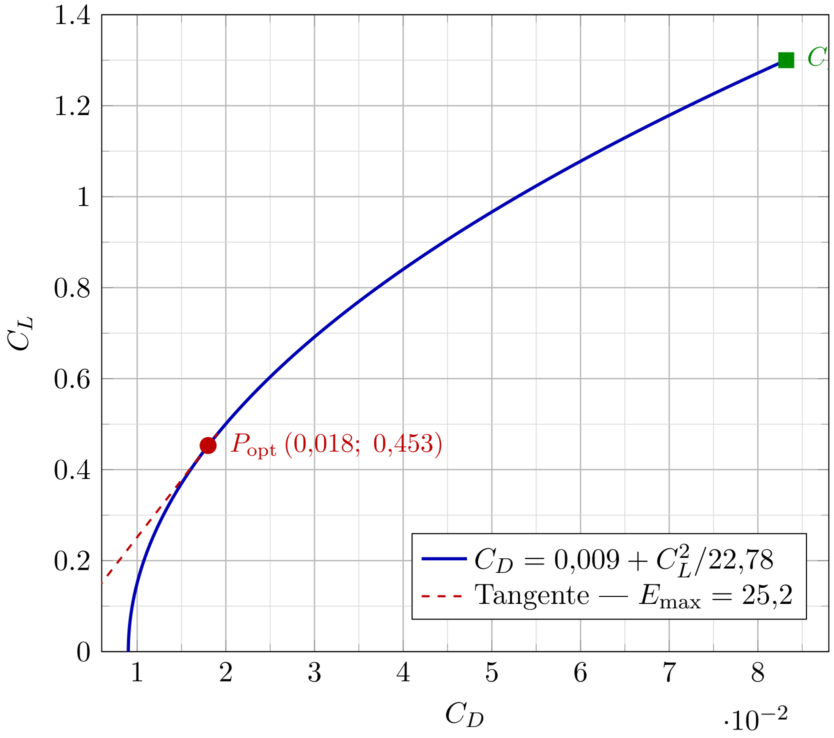

Figura 9: Polare parabolica dell'ala trapezia ($r = 0{,}6$). Il punto rosso indica la condizione di efficienza massima; il quadrato verde il limite di stallo.

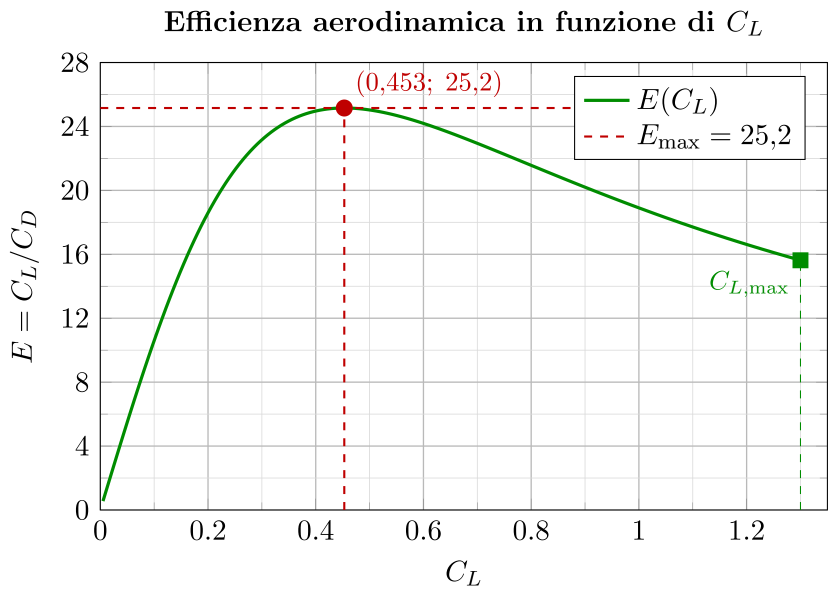

Figura 10: Efficienza aerodinamica. Il massimo $E_{max} = 25{,}2$ si raggiunge a $C_{L,opt} = 0{,}453$; la curva è troncata al limite di stallo $C_{L,max} = 1{,}3$.

Esercizio 8

Nell'ipotesi di validità della polare di Prandtl, calcolare l'efficienza massima, il massimo indice di quota e i valori dei coefficienti di portanza e di resistenza corrispondenti per un aereo avente le caratteristiche seguenti: $C_{D,0} = 0.020$; $b = 22.05\,m$, $\bar{c} = 2.1\,m$.

Soluzione

Passo 1 — Grandezze geometriche.

$$S = b \cdot \bar{c} = 22{,}05 \times 2{,}1 = \mathbf{46{,}31\,m^2}$$

$$Æ = \frac{b^2}{S} = \frac{22{,}05^2}{46{,}31} = \frac{486{,}20}{46{,}31} = \mathbf{10{,}50}$$

Passo 2 — Polare di Prandtl. Con $e = 1$ (ipotesi di validità della polare di Prandtl):

$$\pi\, Æ = \pi \times 10{,}50 = 32{,}99$$

$$\boxed{C_D = 0{,}020 + \frac{C_L^2}{32{,}99}}$$

Passo 3 — Massima efficienza. La condizione di massima efficienza $E = C_L/C_D$ si ottiene imponendo $\mathrm{d}E/\mathrm{d}C_L = 0$, da cui si ricava che al punto ottimale la resistenza indotta eguaglia esattamente la resistenza di profilo: $C_{D_i} = C_{D_0}$. Ne consegue:

$$C_{L,E} = \sqrt{C_{D_0} \cdot \pi\, Æ} = \sqrt{0{,}020 \times 32{,}99} = \sqrt{0{,}6598} = \mathbf{0{,}812}$$

$$C_{D,E} = 2\, C_{D_0} = \mathbf{0{,}040}$$

$$\boxed{E_{\max} = \frac{C_{L,E}}{C_{D,E}} = \frac{0{,}812}{0{,}040} = \mathbf{20{,}31}}$$

Passo 4 — Massimo indice di quota. L'**indice di quota** è definito come:

$$I_q = \frac{C_L^{3/2}}{C_D}$$

Esso compare naturalmente nell'espressione della *potenza necessaria* per un aereo ad elica:

$$\Pi_{\text{nec}} = D \cdot V = \frac{C_D}{C_L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\,W^3}{\rho\, S}}$$

Minimizzare la potenza necessaria equivale a massimizzare I_q: questo è il regime di volo a cui corrisponde la massima velocità ascensionale (la risalita più rapida a quota assegnata per un motore a potenza costante).

Per trovare il massimo si deriva I_q rispetto a C_L e si annulla:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C_L}\left(\frac{C_L^{3/2}}{C_{D_0} + k\, C_L^2}\right) = 0 \implies \frac{3}{2}\left(C_{D_0} + k\, C_L^2\right) = 2\, k\, C_L^2$$

$$\frac{3}{2}\,C_{D_0} = \frac{1}{2}\,k\,C_L^2 \implies C_{D_i} = 3\,C_{D_0}$$

Al punto di massimo indice di quota la resistenza indotta è *tre volte* la resistenza di profilo (confrontare con il fattore 1 del punto di efficienza massima): si vola più lentamente, a C_L più elevato.

$$C_{L,q} = \sqrt{3\,C_{D_0}\cdot\pi\,\mathit{AR}} = \sqrt{3\times 0{,}020\times 32{,}99} = \sqrt{1{,}9794} = \mathbf{1{,}407}$$

$$C_{D,q} = C_{D_0} + 3\,C_{D_0} = 4\,C_{D_0} = 4\times 0{,}020 = \mathbf{0{,}080}$$

$$\boxed{I_{q,\max} = \frac{C_{L,q}^{3/2}}{C_{D,q}} = \frac{1{,}407^{3/2}}{0{,}080} = \frac{1{,}669}{0{,}080} = \mathbf{20{,}86}}$$

Passo 5 — Riepilogo dei punti caratteristici.

Condizione	**Indice**	C_{D_i}/C_{D_0}	C_L	C_D	**Valore**
Efficienza massima	$E_{\max} = C_L/C_D$	$= 1$	0,812	0,040	20,31
Mas. indice di quota	$I_{q,\max} = C_L^{3/2}/C_D$	$= 3$	1,407	0,080	20,86

Passo 6 — Grafici.

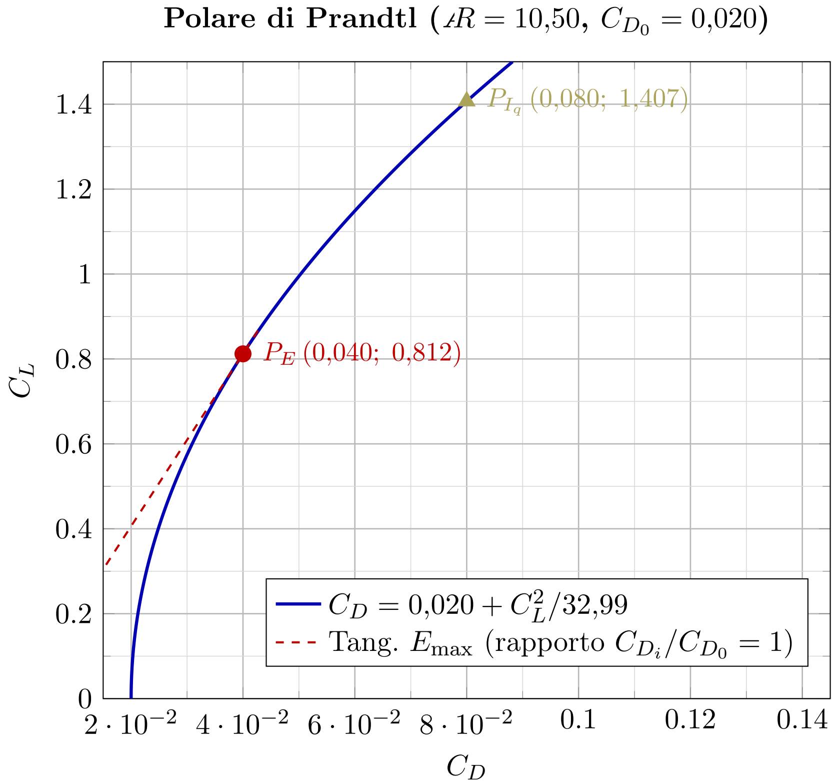

Figura 11: Polare di Prandtl. Il punto rosso è la condizione di massima efficienza; il triangolo giallo è la condizione di massimo indice di quota.

Efficienza e indice di quota in funzione di C_L

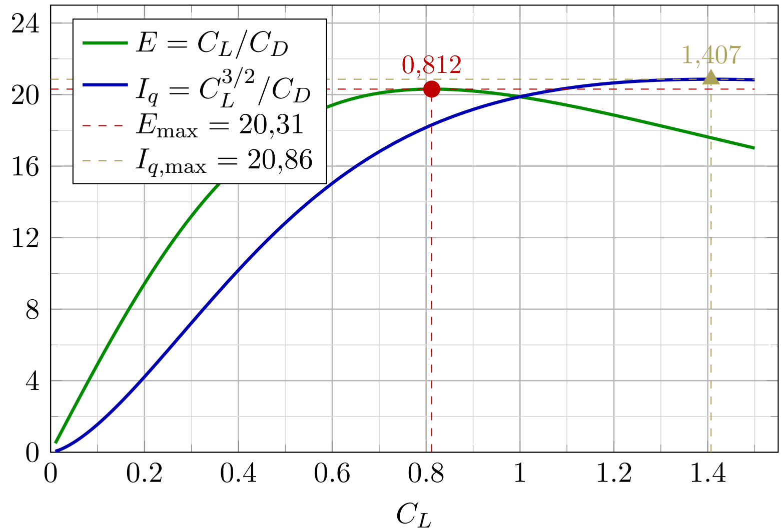

Figura 12: Le due curve raggiungono il massimo a C_L diversi. L'efficienza massima ($E_{\max} = 20{,}31$ a $C_L = 0{,}812$) si ha a velocità maggiore rispetto all'indice di quota massimo ($I_{q,\max} = 20{,}86$ a $C_L = 1{,}407$).

Esercizio 9

Calcolare i coefficienti di portanza e di resistenza per un aereo avente le caratteristiche sottoindicate, sapendo che all'assetto di volo corrisponde un'efficienza $E = 9.2$. Caratteristiche dell'aereo: $C_{D_0} = 0.021$; $S = 29.7\,m^2$; $b = 19\,m$.

Soluzione

Passo 1 — Grandezze geometriche.

$$\text{Æ}R = \frac{b^2}{S} = \frac{19^2}{29{,}7} = \frac{361}{29{,}7} = \mathbf{12{,}15}$$

$$\pi\,\text{Æ}R = \pi \times 12{,}15 = 38{,}19$$

Passo 2 — Impostazione del sistema. Sono note la polare di Prandtl e la definizione di efficienza:

$$\begin{cases} C_D = C_{D_0} + \dfrac{C_L^2}{\pi\,\text{Æ}R} \\ E = \dfrac{C_L}{C_D} = 9{,}2 \end{cases}$$

Dalla seconda relazione si ricava $C_D = C_L/E$; sostituendo nella prima:

$$\frac{C_L}{E} = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi\,\text{Æ}R}$$

Moltiplicando per $\pi\,\text{Æ}R$ e riordinando si ottiene l'equazione di secondo grado in C_L:

$$\frac{C_L^2}{\pi\,\text{Æ}R} - \frac{C_L}{E} + C_{D_0} = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{\pi\,\text{Æ}R}}_{k} C_L^2 - \frac{1}{E}C_L + C_{D_0} = 0$$

$$0{,}02619\,C_L^2 - 0{,}10870\,C_L + 0{,}021 = 0$$

Passo 3 — Soluzione dell'equazione e verifica del discriminante. Prima di risolvere conviene verificare che il discriminante sia positivo, il che equivale a controllare che l'efficienza richiesta $E = 9{,}2$ sia *inferiore* all'efficienza massima del velivolo. Il punto di efficienza massima vale:

$$E_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi\,\text{Æ}R}{C_{D_0}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{38{,}19}{0{,}021}} = \frac{1}{2}\sqrt{1818{,}6} = \frac{42{,}64}{2} = 21{,}32$$

Poiché $E = 9{,}2 < E_{\max} = 21{,}32$, il discriminante è positivo e l'equazione ammette **due soluzioni reali**:

$$\Delta = \frac{1}{E^2} - \frac{4\,C_{D_0}}{\pi\,\text{Æ}R} = \frac{1}{9{,}2^2} - \frac{4 \times 0{,}021}{38{,}19} = 0{,}011806 - 0{,}002200 = 0{,}009606$$

$$\sqrt{\Delta} = 0{,}09802$$

$$C_L = \frac{\dfrac{1}{E} \pm \sqrt{\Delta}}{\dfrac{2}{\pi\, \mathit{AR}}} = \frac{0{,}10870 \pm 0{,}09802}{0{,}05237}$$

$$C_{L,1} = \frac{0{,}10870 + 0{,}09802}{0{,}05237} = \frac{0{,}20672}{0{,}05237} = \mathbf{3{,}947} \tag{15}$$

$$C_{L,2} = \frac{0{,}10870 - 0{,}09802}{0{,}05237} = \frac{0{,}01068}{0{,}05237} = \mathbf{0{,}204} \tag{16}$$

Passo 4 — Interpretazione fisica e scelta della soluzione. La soluzione $C_{L,1} = 3{,}947$ è **fisicamente inaccettabile**: un coefficiente di portanza prossimo a 4 supera di gran lunga il valore di stallo di qualsiasi profilo alare convenzionale ($C_{L,\max}$ raramente eccede 1,8 anche con ipersostentatori deflessi); l'ala sarebbe stallata e la polare parabolica non sarebbe più valida.

La soluzione fisicamente significativa è pertanto:

$$\boxed{C_L = C_{L,2} = 0{,}204}$$

$$C_D = \frac{C_L}{E} = \frac{0{,}204}{9{,}2} = \boxed{0{,}02216}$$

Passo 5 — Verifica.

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi\, \mathit{AR}} = \frac{0{,}204^2}{38{,}19} = \frac{0{,}04162}{38{,}19} = 0{,}001090$$

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_i} = 0{,}021 + 0{,}001090 = 0{,}022090 \quad \checkmark$$

$$E = \frac{C_L}{C_D} = \frac{0{,}204}{0{,}022090} = 9{,}235 \approx 9{,}2 \quad \checkmark$$

Lo scostamento di 0,035 è dovuto all'arrotondamento di C_L alla terza cifra decimale.

Riepilogo

Grandezza	**Simbolo**	**Valore**
Allungamento alare	AR	12,15
Efficienza massima	$E_{\max}$	21,32
Coefficiente di portanza	C_L	0,204
Resistenza indotta	C_{D_i}	0,00109
Coefficiente di resistenza	C_D	0,02209
Efficienza (verifica)	E	9,2

Esercizo 10

In una esperienza alla galleria aerodinamica si sono letti, in funzione delle incidenze geometriche, i seguenti valori di portanza e di resistenza per un modello d'ala rettangolare avente apertura alare $b = 21\,\text{cm}$ e corda $c = 6.5\,\text{cm}$:

$\alpha°$	-5	-3	0	3	6	9	12	14	16	18
$L\,(\text{N})$	0.284	0.755	1.50	2.29	3.05	3.76	4.43	4.92	4.98	4.92
$D\,(\text{N})$	0.071	0.064	0.092	0.143	0.216	0.314	0.441	0.598	0.706	0.823

Calcolare e tracciare la polare sapendo che durante l'esperienza la pressione era $p = 720\,\text{mmHg}$, la temperatura $T = 18\,°\text{C}$ e che la velocità dell'aria nella galleria era $V = 80\,\text{km/h}$.

Soluzione

Passo 1 — Condizioni termodinamiche della corrente. La pressione in pascale si ottiene dalla conversione $1\,\text{mmHg} = 133{,}322\,\text{Pa}$:

$$p = 720 \times 133{,}322 = 95\,992\,\text{Pa}$$

Applicando la legge dei gas perfetti $\rho = p/(RT)$ con $R = 287{,}05\,\text{J/(kg K)}$ e $T = 18 + 273{,}15 = 291{,}15\,\text{K}$:

$$\rho = \frac{95\,992}{287{,}05 \times 291{,}15} = \mathbf{1{,}149\,\frac{kg}{m^3}}$$

La velocità di prova vale $V = 80/3{,}6 = 22{,}22\,\text{m/s}$, da cui la pressione dinamica:

$$q_\infty = \frac{1}{2}\,\rho V^2 = \frac{1}{2} \times 1{,}149 \times 22{,}22^2 = \mathbf{283{,}6\,\frac{N}{m^2}}$$

Passo 2 — Geometria del modello.

$$S = b \cdot c = 0{,}21 \times 0{,}065 = 136{,}5\,\text{cm}^2 = 0{,}01365\,\text{m}^2$$

$$\mathcal{R} = \frac{b}{c} = \frac{0{,}21}{0{,}065} = 3{,}23$$

$$q_\infty \cdot S = 283{,}6 \times 0{,}01365 = 3{,}871\,\text{N}$$

Passo 3 — Calcolo dei coefficienti adimensionali. I coefficienti si ricavano dalla definizione:

$$C_L = \frac{L}{q_\infty S} = \frac{L}{3{,}871\,\text{N}}, \qquad C_D = \frac{D}{q_\infty S} = \frac{D}{3{,}871\,\text{N}}$$

$\alpha\,(°)$	$L\,(\text{N})$	$D\,(\text{N})$	C_L	C_D	$E = C_L/C_D$
−5	0.284	0.071	0.073	0.018	4.000
−3	0.755	0.064	0.195	0.017	11.797
0	1.500	0.092	0.387	0.024	16.304
3	2.290	0.143	0.592	0.037	16.014
6	3.050	0.216	0.788	0.056	14.120
9	3.760	0.314	0.971	0.081	11.975
12	4.430	0.441	1.144	0.114	10.045
14	4.920	0.598	1.271	0.154	8.227
16	4.980	0.706	1.286	0.182	7.054
18	4.920	0.823	1.271	0.213	5.978

Passo 4 — Retta di portanza e stallo. Nella zona lineare ($\alpha \in [-5°, 12°]$) la pendenza della retta di portanza si ricava per regressione lineare sui dati sperimentali:

$$C_{L_\alpha} = \mathbf{0{,}0638}\,\mathrm{grad}^{-\mathbf{1}}, \qquad C_L(\alpha = 0) = 0{,}393, \qquad \alpha_0 = -6{,}2°$$

Il coefficiente di portanza massimo $C_{L,\max} = 1{,}286$ si raggiunge intorno a $\alpha = 16°$; a $\alpha = 18°$ C_L inizia a decrescere, confermando che lo **stallo** si trova nell'intervallo $\alpha_{\text{stallo}} \in [16°, 18°]$.

Passo 5 — Grafici.

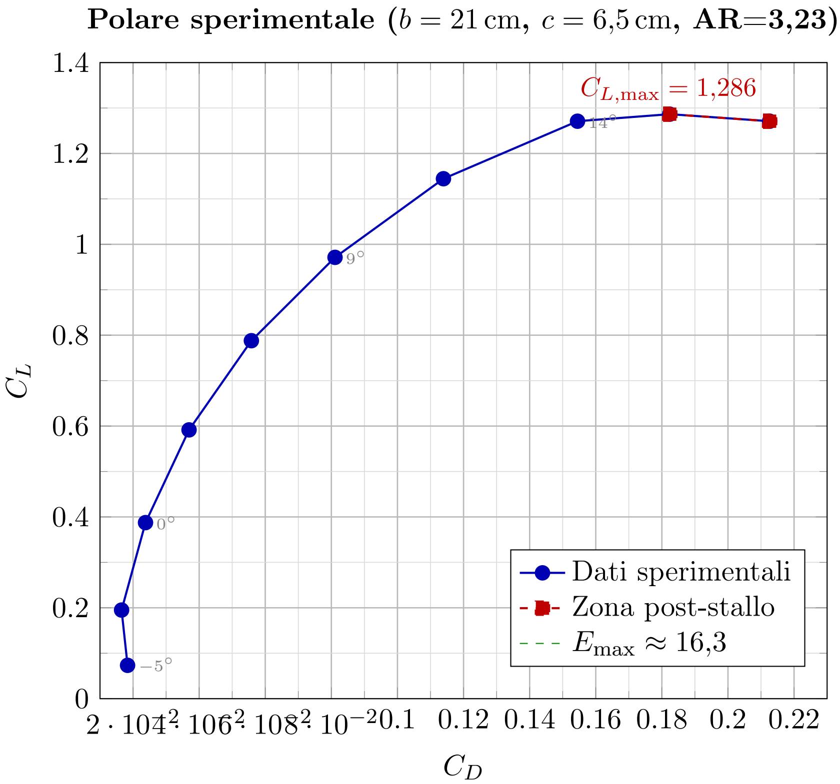

Figura 13: Polare sperimentale ricavata dai dati di galleria. La curva percorre il ramo ascendente fino a $C_{L,\max}$ (cerchio blu pieno), poi gira nel ramo di stallo (quadrati rossi). La retta tratteggiata verde rappresenta la tangente dall'origine, corrispondente a $E_{\max} \approx 16{,}3$.

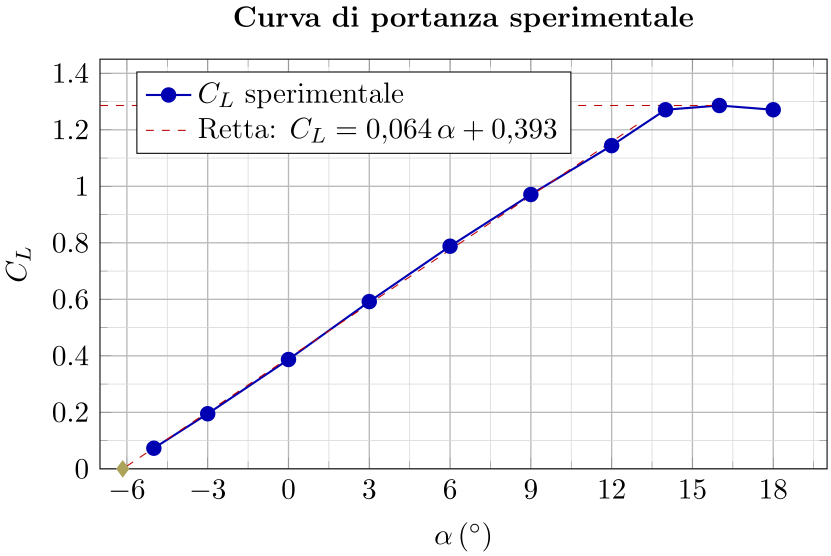

Figura 14: Curva di portanza: nella zona lineare ($\alpha \leq 12°$) il comportamento è ben descritto dalla retta di regressione ($C_{L_\alpha} = 0{,}064\,\mathrm{grad}^{-1}$, $\alpha_0 = -6{,}2°$); lo stallo si verifica attorno a $\alpha \approx 16°$ con $C_{L,\max} = 1{,}286$.

Esercizio 11

Un'ala rettangolare avente le caratteristiche sottoindicate è investita dall'aria alla velocità $V = 380\,\text{km/h}$ in condizioni corrispondenti alla quota di $2'800\,\text{m}$ in aria tipo, all'incidenza $\alpha = 3°28'$. Calcolare la portanza, la resistenza ed il momento aerodinamico.
Caratteristiche dell'ala: $c = 1.12\,\text{m}$; $b = 10.54\,\text{m}$; $C_{\ell_\alpha} = 0.0983$ $(1/deg)$; $C_{D_0} = 0.0091$; $C_{M0} = 0.027$; $C_M(10) = 0.068$ (coefficiente di momento aerodinamico per un'incidenza $\alpha = 10°$).

Soluzione

Passo 1 — Conversione dell'incidenza. L'incidenza è espressa in gradi e primi; si converte in gradi decimali:

$$\alpha = 3°\,28' = 3 + \frac{28}{60} = \mathbf{3{,}467}°$$

Passo 2 — Densità dell'aria a 2 800 m in atmosfera tipo. Nella troposfera ISA il gradiente termico è $L = 0{,}0065\,\text{K/m}$:

$$T(h) = T_0 - L\,h = 288{,}15 - 0{,}0065 \times 2\,800 = 269{,}95\,\text{K}$$

La densità segue la legge politropica con esponente $g/(LR) - 1 = 4{,}256$:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{4{,}256} = 1{,}225 \times \left(\frac{269{,}95}{288{,}15}\right)^{4{,}256} = \mathbf{0{,}9280}\,\frac{\mathbf{kg}}{\mathbf{m^3}}$$

Passo 3 — Pressione dinamica.

$$V = \frac{380}{3{,}6} = 105{,}56\,\frac{m}{s}$$

$$q_\infty = \frac{1}{2}\,\rho\,V^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}9280 \times 105{,}56^2 = \mathbf{5\,170}\,\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{m^2}}$$

Passo 4 — Grandezze geometriche.

$$S = b \cdot c = 10{,}54 \times 1{,}12 = \mathbf{11{,}80\,m^2}$$

$$\text{Æ} = \frac{b}{c} = \frac{10{,}54}{1{,}12} = \mathbf{9{,}41}$$

Passo 5 — Pendenza 3D della retta di portanza. Il dato $C_{\ell_\alpha} = 0{,}0983\,\text{deg}^{-1}$ è la pendenza *bidimensionale* del profilo. In radianti:

$$C_{\ell_\alpha} = 0{,}0983 \times \frac{180}{\pi} = 5{,}632\,\text{rad}^{-1}$$

La correzione di Prandtl per ala finita (con $e = 1$) fornisce:

$$C_{L_\alpha} = \frac{C_{\ell_\alpha}}{1 + \dfrac{C_{\ell_\alpha}}{\pi\,\text{Æ}}} = \frac{5{,}632}{1 + \dfrac{5{,}632}{\pi \times 9{,}41}} = \frac{5{,}632}{1 + 0{,}191} = \frac{5{,}632}{1{,}191} = 4{,}731\,\text{rad}^{-1} = \mathbf{0{,}08257}\,\text{deg}^{\mathbf{-1}}$$

Passo 6 — Coefficiente di portanza.

$$C_L = C_{L_\alpha} \cdot \alpha = 0{,}08257 \times 3{,}467 = \mathbf{0{,}2862}$$

Passo 7 — Coefficiente di resistenza. Dalla polare parabolica:

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi\, \text{Æ}} = \frac{0{,}2862^2}{\pi \times 9{,}41} = \frac{0{,}08191}{29{,}56} = 0{,}002771$$

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_i} = 0{,}0091 + 0{,}002771 = \mathbf{0{,}01187}$$

Passo 8 — Coefficiente di momento aerodinamico. Sono noti $C_{M,0} = C_M(0°) = 0{,}027$ e $C_M(10°) = 0{,}068$. Il coefficiente angolare della retta dei momenti vale:

$$C_{M_\alpha} = \frac{C_M(10°) - C_{M,0}}{10° - 0°} = \frac{0{,}068 - 0{,}027}{10} = 0{,}00410\,\text{deg}^{-1}$$

Per interpolazione lineare a $\alpha = 3{,}467°$:

$$C_M = C_{M,0} + C_{M_\alpha} \cdot \alpha = 0{,}027 + 0{,}00410 \times 3{,}467 = \mathbf{0{,}04121}$$

Passo 9 — Portanza, resistenza e momento aerodinamico. Il prodotto $q_\infty \cdot S$ è comune a tutte e tre le espressioni:

$$q_\infty \cdot S = 5\,170 \times 11{,}80 = 61\,046\,\text{N}$$

$$L = C_L \cdot q_\infty \cdot S = 0{,}2862 \times 61\,046 = \mathbf{17\,471\,N} \approx \mathbf{17{,}5\,kN} \tag{17}$$

$$D = C_D \cdot q_\infty \cdot S = 0{,}01187 \times 61\,046 = \mathbf{725\,N} \tag{18}$$

$$M = C_M \cdot q_\infty \cdot S \cdot c = 0{,}04121 \times 61\,046 \times 1{,}12 = \mathbf{2\,817\,N{\cdot}m} \tag{19}$$

Riepilogo dei risultati

Grandezza	**Simbolo**	**Valore**	**Unità**
Densità a 2 800 m	ρ	0,9280	kg/m^3
Pressione dinamica	q_∞	5 170	N/m^2
Superficie alare	S	11,80	m^2
Allungamento alare	Æ	9,41	—
Pendenza 3D portanza	C_{L_α}	0,08257	deg^{-1}
Coeff. di portanza	C_L	0,2862	—
Coeff. di resistenza	C_D	0,01187	—
Coeff. di momento	C_M	0,04121	—
Portanza	L	17 471	N
Resistenza	D	725	N
Momento aerodinamico	M	2 817	N·m

Esercizio 12

Un'ala trapezia avente le caratteristiche sottoindicate è investita dall'aria con una velocità $V = 590\,\text{km/h}$ a un'incidenza aerodinamica $\alpha_a = 4°12'$, mentre la pressione è $p = 715\,\text{mmHg}$ e la temperatura $T = 10\,°\text{C}$. Calcolare la portanza, l'efficienza e la resistenza corrispondente a tale condizione di volo.
Caratteristiche dell'ala: $b = 22\,\text{m}$; $c_r = 2.5\,\text{m}$; $c_t = 1.3\,\text{m}$; $C_{\ell_\alpha} = 5.1$ (1/rad); $C_{D_0} = 0.010$.

Soluzione

Passo 1 — Conversione dell'incidenza aerodinamica. L'angolo è espresso in gradi e primi; si converte in gradi decimali e poi in radianti, poiché C_{ℓ_α} è fornito in rad^{-1}:

$$\alpha_a = 4°\,12' = 4 + \frac{12}{60} = 4{,}20° = 4{,}20 \times \frac{\pi}{180} = \mathbf{0{,}07330}\,\text{rad}$$

Si noti che il dato fornito è l'*incidenza aerodinamica* α_a, misurata a partire dalla direzione di portanza nulla: il termine $C_L = C_{L_\alpha} \cdot \alpha_a$ è pertanto diretto, senza dover sottrarre l'incidenza di portanza nulla α_0.

Passo 2 — Condizioni termodinamiche della corrente. La pressione e la temperatura sono assegnate direttamente; la densità si ricava dalla legge dei gas perfetti:

$$p = 715 \times 133{,}322 = 95\,325\,\text{Pa}$$

$$\rho = \frac{p}{R\,T} = \frac{95\,325}{287{,}05 \times 283{,}15} = \mathbf{1{,}173\,\frac{kg}{m^3}}$$

La pressione dinamica vale:

$$V = \frac{590}{3{,}6} = 163{,}89\,\frac{m}{s}$$

$$q_\infty = \frac{1}{2}\,\rho\,V^2 = \frac{1}{2} \times 1{,}173 \times 163{,}89^2 = \mathbf{15\,751\,\frac{N}{m^2}}$$

Passo 3 — Geometria dell'ala trapezia.

$$\lambda = \frac{c_t}{c_r} = \frac{1{,}3}{2{,}5} = 0{,}52 \qquad \bar{c} = \frac{c_r + c_t}{2} = \frac{2{,}5 + 1{,}3}{2} = 1{,}90\,\text{m}$$

$$S = b\,\bar{c} = 22 \times 1{,}90 = \mathbf{41{,}80\,m^2} \qquad AR = \frac{b^2}{S} = \frac{22^2}{41{,}80} = \frac{484}{41{,}80} = \mathbf{11{,}58}$$

Passo 4 — Correzione di Prandtl: da pendenza 2D a 3D. Il dato $C_{\ell_\alpha} = 5{,}1\,\text{rad}^{-1}$ è la pendenza *bidimensionale* del profilo (lettera minuscola ℓ). Per un'ala di apertura finita la teoria della linea portante fornisce:

$$\pi\,AR = \pi \times 11{,}58 = 36{,}38$$

$$C_{L_\alpha} = \frac{C_{\ell_\alpha}}{1 + \dfrac{C_{\ell_\alpha}}{\pi\,AR}} = \frac{5{,}1}{1 + \dfrac{5{,}1}{36{,}38}} = \frac{5{,}1}{1 + 0{,}1402} = \frac{5{,}1}{1{,}1402} = \mathbf{4{,}473}\,\text{rad}^{\mathbf{-1}}$$

Il fattore di riduzione $4{,}473/5{,}1 = 0{,}877$ indica che la pendenza 3D è l'87,7% di quella del profilo isolato: l'effetto del *downwash* indotto dai vortici di estremità è meno marcato che nell'esercizio precedente grazie all'allungamento maggiore ($AR = 11{,}58$ vs $9{,}41$).

Passo 5 — Coefficiente di portanza.

$$C_L = C_{L_\alpha} \cdot \alpha_a = 4{,}473 \times 0{,}07330 = \mathbf{0{,}3279}$$

Passo 6 — Coefficiente di resistenza.

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi\,\text{Æ}R} = \frac{0{,}3279^2}{36{,}38} = \frac{0{,}10752}{36{,}38} = 0{,}002956$$

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_i} = 0{,}010 + 0{,}002956 = \mathbf{0{,}01296}$$

Passo 7 — Efficienza aerodinamica.

$$E = \frac{C_L}{C_D} = \frac{0{,}3279}{0{,}01296} = \mathbf{25{,}3}$$

Per confronto, l'efficienza massima teorica di quest'ala vale:

$$E_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi\,\text{Æ}R}{C_{D_0}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{36{,}38}{0{,}010}} = \frac{1}{2} \times 60{,}31 = 30{,}2$$

La condizione di volo corrisponde quindi al 83,8% dell'efficienza massima: l'ala sta lavorando a un $C_L = 0{,}328$ inferiore al valore ottimale $C_{L,\text{opt}} = 0{,}603$.

Passo 8 — Portanza e resistenza.

$$q_\infty \cdot S = 15\,751 \times 41{,}80 = 658\,391\,\text{N}$$

$$L = C_L \cdot q_\infty \cdot S = 0{,}3279 \times 658\,391 = \mathbf{215\,867\,N} \approx \mathbf{215{,}9\,kN} \tag{20}$$

$$D = C_D \cdot q_\infty \cdot S = 0{,}01296 \times 658\,391 = \mathbf{8\,533\,N} \approx \mathbf{8{,}53\,kN} \tag{21}$$

Verifica: $L/D = 215\,867\,/\,8\,533 = 25{,}3$ ✓

Riepilogo dei risultati

Grandezza	Simbolo	Valore	Unità
Densità	ρ	1,173	kg/m^3
Pressione dinamica	q_∞	15 751	N/m^2
Superficie alare	S	41,80	m^2
Allungamento	ÆR	11,58	—
Pendenza 3D	C_{L_α}	4,473	rad^{-1}
Coeff. di portanza	C_L	0,3279	—
Coeff. di resistenza indotta	C_{D_i}	0,00296	—
Coeff. di resistenza totale	C_D	0,01296	—
Portanza	L	215 867	N
Resistenza	D	8 533	N
Efficienza	E	25,3	—

Esercizio 13

Calcolare e tracciare la polare parabolica ed il diagramma $E = f(c_L)$ e determinare l'efficienza massima per un quadrimotore avente le seguenti caratteristiche:

- superficie alare $S = 153\,\mathrm{m}^2$;
- sezione maestra di fusoliera $S_f = 9.8\,\mathrm{m}^2$;
- sezione maestra di una gondola motrice $S_g = 1.28\,\mathrm{m}^2$;
- superficie impennaggio orizzontale $S_{i,o} = 26\,\mathrm{m}^2$;
- superficie impennaggio verticale $S_{i,v} = 22\,\mathrm{m}^2$;
- $c_{D0} = 0.009$; $c_{Df} = 0.080$; $c_{Dg} = 0.055$; $c_{D,i} = 0.0092$; $\lambda = 9.2$; $i = 1.05$;
- coefficiente di resistenza per le interferenze $c_D^* = 0.003$.

Soluzione

Passo 1 — Resistenza di profilo totale C_{D_0}. Essendo un **quadrimotore**, il contributo delle gondole va moltiplicato per 4. Tutti i coefficienti vengono ricondotti alla superficie alare di riferimento $S = 153\,\mathrm{m}^2$:

$$C_{D_0} = \underbrace{c_{D_0}}_{\text{ala}} + c_{Df}\,\frac{S_f}{S} + 4\,c_{Dg}\,\frac{S_g}{S} + c_{D,i}\,\frac{S_{i,o} + S_{i,v}}{S} + c_D^*$$

Componente	Formula	c_D locale	Area	Contributo
Ala (profilo)	c_{D_0}	0,009	S	0,009 000
Fusoliera	$c_{Df} \cdot S_f/S$	0,080	9,8 m^2	0,005 124
Gondole (×4)	$4\,c_{Dg} \cdot S_g/S$	0,055	1,28 m^2	0,001 841
Impennaggi	$c_{D,i} \cdot (S_{i,o} + S_{i,v})/S$	0,0092	48 m^2	0,002 886
Interferenze	c_D^*	—	—	0,003 000
Totale				**0,021 851**

Passo 2 — Nota sul coefficiente $i = 1{,}05$. Il parametro $i = 1{,}05$ è il *fattore di Oswald* indicato con la lettera i (notazione adottata in alcuni manuali italiani al posto di e). Il valore $i > 1$ è ammissibile per ali con distribuzione di portanza ottimizzata oltre quella ellittica (ad esempio ali con freccia, con washout geometrico calibrato o con winglet): in tal caso la resistenza indotta risulta *inferiore* a quella di un'ala ellittica ideale. La polare parabolica diventa:

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi\,i\,\lambda}$$

dove $\lambda = \mathcal{R} = 9{,}2$ è l'allungamento alare.

Passo 3 — Polare parabolica.

$$\pi\,i\,\lambda = \pi \times 1{,}05 \times 9{,}2 = 30{,}35$$

$$\boxed{C_D = 0{,}021\,85 + \frac{C_L^2}{30{,}35}}$$

Passo 4 — Efficienza massima.

$$C_{L,\text{opt}} = \sqrt{C_{D_0} \cdot \pi\, i\, \lambda} = \sqrt{0{,}021\,85 \times 30{,}35} = \sqrt{0{,}6631} = \mathbf{0{,}814}$$

$$C_{D,\text{opt}} = 2\,C_{D_0} = 2 \times 0{,}021\,85 = \mathbf{0{,}04370}$$

$$\boxed{E_{\max} = \frac{C_{L,\text{opt}}}{C_{D,\text{opt}}} = \frac{0{,}814}{0{,}04370} = \mathbf{18{,}63}}$$

Passo 5 — Tabella dei valori.

C_L	$C_{D_i} = C_L^2/30{,}35$	C_D	$E = C_L/C_D$
0,000	0,000000	0,021851	0,000
0,100	0,000330	0,022180	4,509
0,200	0,001318	0,023169	8,632
0,300	0,002966	0,024817	12,089
0,400	0,005272	0,027123	14,748
0,500	0,008238	0,030089	16,618
0,600	0,011862	0,033713	17,797
0,700	0,016146	0,037997	18,422
0,800	0,021089	0,042940	18,631
0,814	**0,021851**	**0,043702**	**18,634**
0,900	0,026691	0,048542	18,541
1,000	0,032951	0,054802	18,247
1,100	0,039871	0,061722	17,822
1,200	0,047450	0,069301	17,316
1,300	0,055688	0,077539	16,766
1,400	0,064585	0,086436	16,197
1,500	0,074141	0,095992	15,626

La riga in grassetto corrisponde al punto di efficienza massima.

Passo 6 — Grafici.

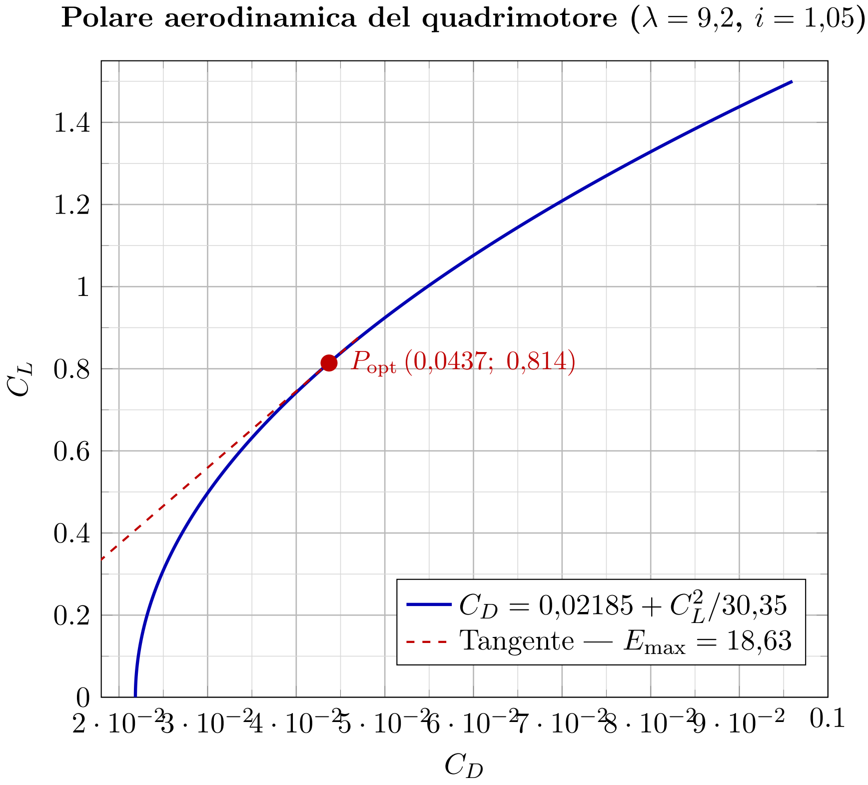

Figura 15: Polare parabolica del quadrimotore. Il punto rosso indica il punto di efficienza massima $E_{\max} = 18{,}63$ a $C_{L,\text{opt}} = 0{,}814$.

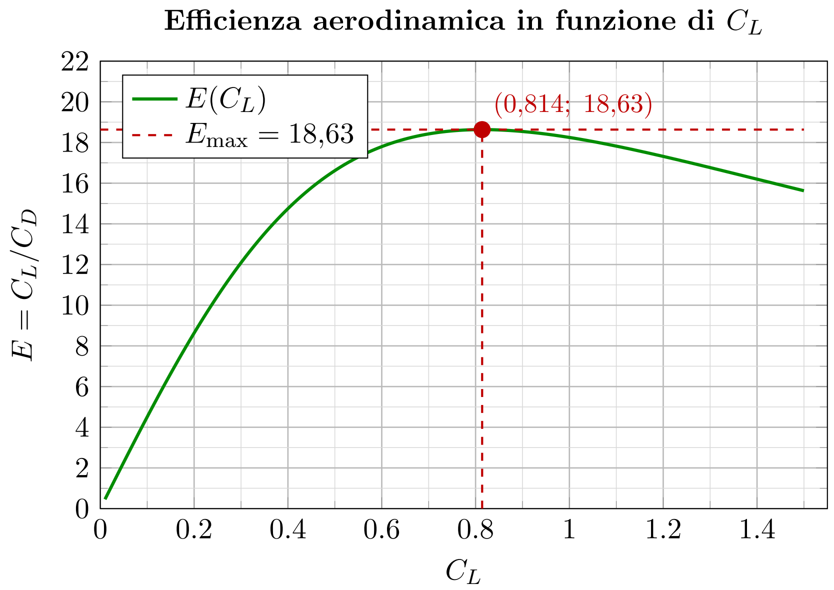

Figura 16: Curva di efficienza. Il massimo $E_{\max} = 18{,}63$ si raggiunge a $C_{L,\text{opt}} = 0{,}814$.