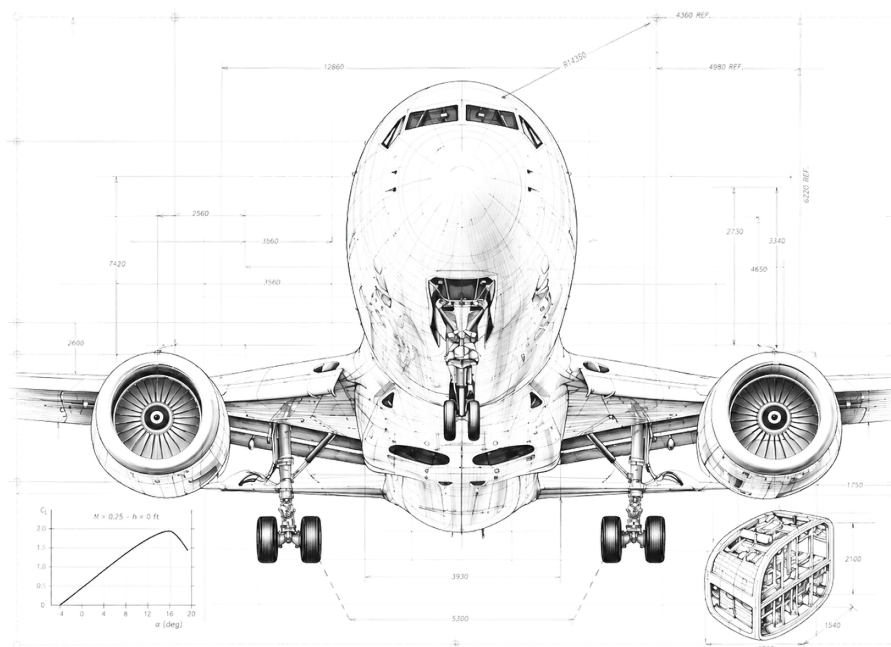

MONOGRAFIE DI FLUIDODINAMICA
Istituto Tecnico Industriale — Costruzioni Aeronautiche

Flusso monodimensionale

Onde d'urto normali, adduzione di calore, attrito



Prof. Ing. Biagio Raucci

ITIS «E. Majorana»

*Materiale didattico autoconsistente per lo studio individuale.
Quarto e quinto anno — articolazione Costruzione del Mezzo Aeronautico.*

Indice

1	Introduzione: perché studiare il flusso monodimensionale	I
1.1	Il muro del suono e le onde d'urto	I
1.2	Che cosa significa «monodimensionale»	2
1.3	La mappa del percorso	2
2	Le equazioni del flusso monodimensionale	3
2.1	Il volume di controllo	3
2.2	Continuità	3
2.3	Quantità di moto	4
2.4	Energia	4
3	La velocità del suono e il numero di Mach	6
3.1	Un petardo e le molecole	6
3.2	A cavallo dell'onda	6
3.3	Il caso del gas caloricamente perfetto	7
3.4	Il numero di Mach e il suo significato energetico	8
4	Grandezze totali e grandezze critiche	8
4.1	Le condizioni critiche: T^* e a^*	8
4.2	Le condizioni totali: T_0, p_0, ρ_0	9
5	Forme alternative dell'equazione dell'energia	10
5.1	La catena delle forme equivalenti	10
5.2	L'energia e le condizioni critiche	10
5.3	L'energia e le condizioni totali	10
5.4	Relazioni fra grandezze critiche e totali	11
5.5	Esercizi svolti	13
6	Le onde d'urto normali	15
6.1	Perché la natura crea gli urti	15
6.2	Il sistema di equazioni dell'urto	15
6.3	La relazione di Prandtl	16
6.4	Le proprietà a valle in funzione di M_1	16
6.5	Il verdetto del secondo principio	17
6.6	Le condizioni totali attraverso l'urto	18
6.7	Esercizi svolti	19
7	L'equazione di Hugoniot	21
7.1	Eliminare le velocità	21
7.2	La curva di Hugoniot	22
7.3	Esercizio svolto	23
8	Flusso monodimensionale con adduzione di calore	24
8.1	Il calore cambia la temperatura totale	24
8.2	I rapporti fra le due stazioni	24
8.3	Le condizioni soniche di riferimento	25
8.4	Le tendenze fisiche e la curva di Rayleigh	25
8.5	Il choking termico	26
8.6	Esercizi svolti	27
9	Flusso monodimensionale con attrito	28
9.1	Il modello e l'equazione della quantità di moto modificata	28

	9.2	L'integrazione in funzione del Mach	29
	9.3	Tendenze e curva di Fanno	30
	9.4	Il choking per attrito	31
	9.5	Esercizi svolti	31
10		Nota storica: onde sonore e onde d'urto	33
	10.1	Newton, Laplace e la velocità del suono	33
	10.2	Rankine, Hugoniot e la teoria dell'urto	33
	10.3	Rayleigh, Taylor e il verdetto del secondo principio	33
11		Riepilogo e formulario	34
	11.1	Le equazioni di bilancio	34
	11.2	Suono, Mach, grandezze totali e critiche	34
	11.3	Urto normale (gas caloricamente perfetto)	35
	11.4	Rayleigh (calore) e Fanno (attrito): riferimento sonico	35
12		I problemi di fine capitolo, svolti uno per uno	36
13		Appendice: tavole gasdinamiche essenziali ($\gamma = 1,4$)	46
	13.1	Tavola 1 — Flusso isentropico	46
	13.2	Tavola 2 — Urto normale	47
	13.3	Tavola 3 — Flusso con adduzione di calore (Rayleigh)	48
	13.4	Tavola 4 — Flusso con attrito (Fanno)	48

I Introduzione: perché studiare il flusso monodimensionale

Nota — Dove stiamo andando

In questa monografia entriamo per la prima volta nel cuore della gasdinamica supersonica. Studieremo una classe di correnti apparentemente semplicissima — quella in cui tutte le proprietà del fluido variano lungo *una sola* coordinata spaziale — e scopriremo che dentro questa semplicità si nascondono tre fenomeni di enorme rilevanza aeronautica: le **onde d'urto normali**, il **flusso con adduzione di calore** (il modello di prima approssimazione del combustore di un turbogetto) e il **flusso con attrito** (il modello delle condotte lunghe, dai gasdotti alle linee pneumatiche di bordo). Tutta la matematica necessaria è *algebra*: nessuna equazione differenziale da integrare, solo relazioni fra lo stato “1” a monte e lo stato “2” a valle.

1.1 Il muro del suono e le onde d'urto

Il 14 ottobre 1947 Chuck Yeager portò il Bell XS-1, un piccolo aeroplano sperimentale a razzo dalla fusoliera a forma di proiettile, poco oltre $M = 1$. A $M_\infty = 1,06$ davanti al muso dell'aeroplano si formò un'onda d'urto *ad arco staccata*, quasi perpendicolare alla corrente indisturbata. Pochi mesi dopo, il 26 marzo 1948, lo stesso velivolo raggiunse in picchiata $M = 1,45$: a questo numero di Mach più elevato l'onda d'urto si *attaccò* al muso appuntito, disponendosi obliquamente rispetto alla corrente.

La differenza fra i due casi è istruttiva. Per un corpo a muso arrotondato in corrente supersonica l'urto ad arco è *sempre* staccato dal corpo e, in prossimità del muso, è quasi perpendicolare alla corrente; allontanandosi dal muso l'urto si incurva e diventa progressivamente obliquo. Le porzioni d'urto perpendicolari alla corrente indisturbata si chiamano **urti normali**, e sono l'oggetto centrale di questa monografia: gli urti obliqui, fenomeni intrinsecamente bidimensionali, saranno trattati in una monografia successiva.

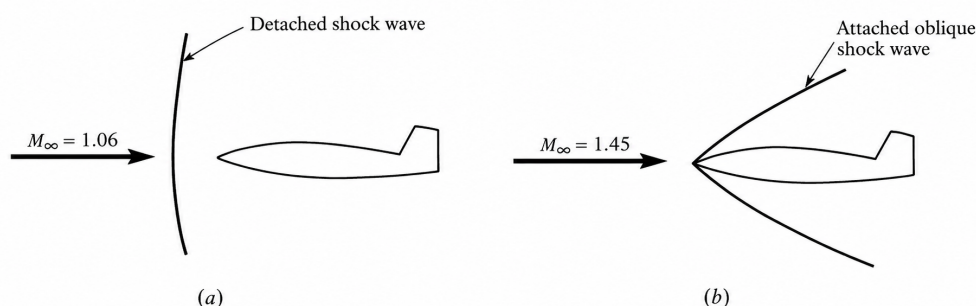


Figura 1. Onda d'urto staccata e attaccata su un veicolo supersonico. Nel caso (a) la porzione centrale dell'urto è quasi normale alla corrente; nel caso (b) l'urto è obliquo.

Gli urti normali non sono affatto un caso accademico. Le proprietà del gas sul muso di un corpo tozzo in volo supersonico — ad esempio la capsula di rientro Apollo, provata in galleria a $M = 8$ presso il NASA Langley — sono dettate proprio dall'attraversamento della porzione normale dell'urto ad arco. Le prese d'aria di alcuni velivoli a getto supersonici sono progettate con un urto normale in corrispondenza della sezione di ingresso (prese a *urto normale*). E il tubo di Pitot montato su qualunque velivolo supersonico misura la pressione totale *a valle* dell'urto normale che si forma davanti alla sua imboccatura: senza la teoria di questa monografia l'anemometro di un caccia non si potrebbe nemmeno tarare.

1.2 Che cosa significa «monodimensionale»

Definizione

Un flusso si dice **monodimensionale** quando tutte le proprietà del campo di moto ($p, \rho, T, u, \dots$) variano con una sola coordinata spaziale, ad esempio x : $p = p(x), \rho = \rho(x), T = T(x), u = u(x)$. Come conseguenza (che dimostreremo con l'equazione di continuità), il tubo di flusso ha *area costante*.

Poiché in questa monografia il moto è monodimensionale, useremo il simbolo u per la velocità del gas; nelle monografie sui flussi multidimensionali u tornerà a indicare la sola componente della velocità lungo x .

Molti problemi pratici presentano invece un tubo di flusso ad area *variabile* $A = A(x)$: si pensi a un ugello propulsivo o al diffusore di una presa d'aria. A rigore, in tal caso la natura impone un campo di moto tridimensionale, con proprietà funzioni di x, y e z . Tuttavia, se la variazione di area è *graduale*, è spesso lecito — e sufficientemente accurato — trascurare le variazioni trasversali e *assumere* che le proprietà siano uniformi su ogni sezione, cioè funzioni della sola x . Un flusso siffatto, con $A = A(x)$ ma p, ρ, T e u funzioni della sola x , si dice **quasi-monodimensionale** e sarà l'oggetto della monografia sugli ugelli e i diffusori.

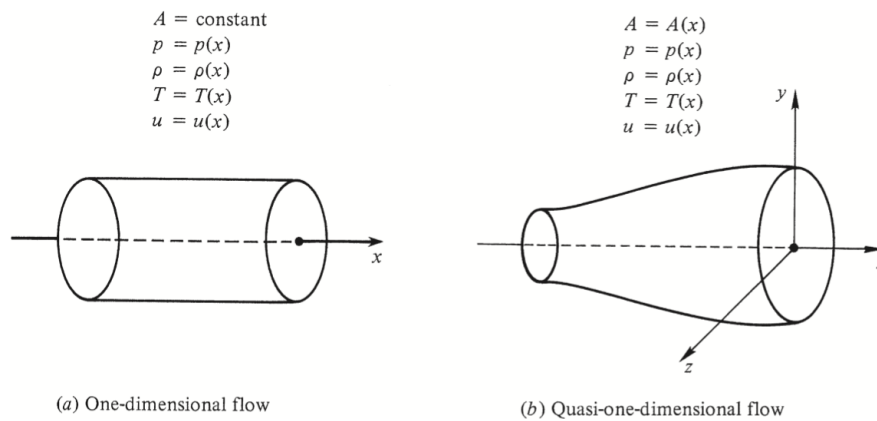


Figura 2. Confronto fra flusso monodimensionale (area costante) e quasi-monodimensionale (area lentamente variabile, proprietà assunte uniformi su ogni sezione).

1.3 La mappa del percorso

Se il tubo di flusso ha area costante, che cosa può mai far cambiare le proprietà del gas fra una sezione e l'altra? Tre meccanismi fisici, ed è esattamente attorno a essi che è costruita la monografia:

1. un'onda d'urto normale, regione sottilissima (più sottile del foglio su cui state leggendo) attraverso la quale pressione, temperatura e densità aumentano bruscamente (§6);
2. l'adduzione di calore, modello del combustore di un turbogetto o di un autoreattore (§8);
3. l'attrito alla parete, modello del moto di un gas in una condotta lunga (§9).

Prima di affrontarli, ricaveremo le tre equazioni algebriche di bilancio del flusso monodimensionale (§2) e faremo una deviazione strategica — valida per correnti di *qualunque* dimensionalità — per definire la velocità del suono, il numero di Mach, le grandezze totali e critiche e le forme alternative dell'equazione dell'energia (§3–5). Chiudono il lavoro una nota storica (§10), un formulario di riepilogo (§11), lo svolgimento integrale, passo per passo, di una raccolta di sedici problemi che ripercorrono tutti i temi trattati (§12) e le tavole gasdinamiche essenziali che rendono la monografia autosufficiente (§13).

Osservazione — Il senso di tutto questo

Il messaggio da portare a casa fin d'ora è duplice. Primo: l'ipotesi di monodimensionalità trasforma le imponenti equazioni integrali di bilancio in tre *equazioni algebriche*, senza però perdere nulla della loro autorità fisica: dicono ancora che la massa si conserva, che la forza uguaglia la variazione della quantità di moto e che l'energia si conserva. Secondo: nonostante l'apparente austerità del modello (un tubo ad area costante!), dentro di esso vivono i fenomeni che governano prese d'aria supersoniche, combustori, tubi di Pitot e condotte: pochi modelli in aeronautica rendono così tanto con così poco.

2 Le equazioni del flusso monodimensionale**Nota — Dove stiamo andando**

Applichiamo le equazioni integrali di bilancio — continuità, quantità di moto, energia — a un volume di controllo rettangolare che racchiude una regione monodimensionale. Il risultato sono tre relazioni algebriche fra lo stato 1 (a monte) e lo stato 2 (a valle), che costituiranno la cassetta degli attrezzi di *tutta* la monografia: le riutilizzeremo tali e quali per l'urto normale, con un termine in più per il calore, con un termine in più per l'attrito.

2.1 Il volume di controllo

Consideriamo il flusso attraverso una regione monodimensionale (figura 3): questa regione può essere un'onda d'urto normale oppure una zona di adduzione di calore; in entrambi i casi le proprietà del gas cambiano in funzione di x mentre il gas la attraversa. A sinistra della regione la velocità, la pressione, la temperatura, la densità e l'energia interna specifica valgono $u_1, p_1, T_1, \rho_1, e_1$; a destra le proprietà, ormai mutate, valgono $u_2, p_2, T_2, \rho_2, e_2$. Applichiamo le equazioni integrali di bilancio al volume di controllo rettangolare tratteggiato in figura, le cui facce di ingresso e di uscita, perpendicolari alla corrente, hanno la stessa area A .

Le *ipotesi di lavoro*, da tenere sempre a mente, sono:

- flusso **stazionario**: tutte le derivate temporali sono nulle;
- flusso **monodimensionale**: le proprietà sono uniformi su ciascuna faccia verticale del volume di controllo;
- **forze di volume assenti** (il peso del gas è trascurabile rispetto alle forze di pressione in gioco);
- per ora, **assenza di sforzi viscosi** sulle superfici del volume di controllo (l'attrito sarà reintrodotta, con il suo termine dedicato, nella §9).

2.2 Continuità

L'equazione integrale di conservazione della massa, per flusso stazionario, si riduce a

$$\oint_S \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.1)$$

Valutiamo l'integrale di superficie. Sulla faccia di sinistra $\mathbf{V}$ e $d\mathbf{S}$ sono paralleli ma di verso *opposto* (la normale è uscente, la velocità entrante): il contributo vale $-\rho_1 u_1 A$. Sulla faccia di destra sono paralleli e concordi: il contributo vale $+\rho_2 u_2 A$. Sulle facce orizzontali $\mathbf{V} \perp d\mathbf{S}$ e il prodotto scalare è nullo. Dunque $-\rho_1 u_1 A + \rho_2 u_2 A = 0$, ossia

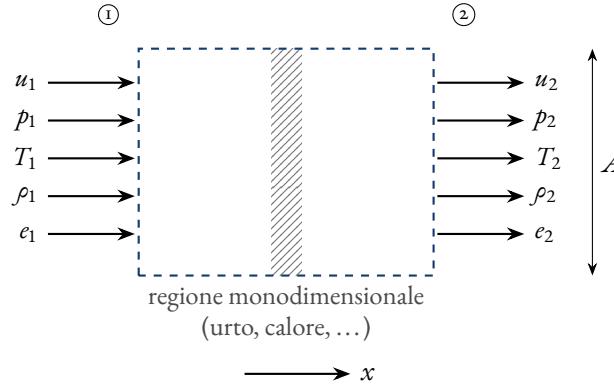


Figura 3. Volume di controllo rettangolare per il flusso monodimensionale. Le proprietà sono uniformi sulla faccia di ingresso (stazione 1) e su quella di uscita (stazione 2), entrambe di area A .

Formula chiave — Continuità (flusso 1D stazionario)

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (2.2)$$

La quantità $G = \rho u$ (portata massica per unità di area, $\text{kg}/(\text{m}^2 \text{s})$) è la stessa in ogni sezione. Notiamo subito una conseguenza importante: se il flusso è davvero monodimensionale — proprietà funzioni della sola x — la (2.2) impone che l'area del tubo di flusso sia costante, come anticipato nella §1.

2.3 Quantità di moto

L'equazione integrale della quantità di moto, per flusso stazionario e senza forze di volume né sforzi viscosi, diventa

$$\oint_S (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}) \mathbf{V} = - \oint_S p d\mathbf{S}. \quad (2.3)$$

È un'equazione vettoriale, ma nel nostro problema conta solo la componente lungo x :

$$\oint_S (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}) u = - \oint_S (p dS)_x. \quad (2.4)$$

Il primo membro raccoglie il flusso di quantità di moto: $\rho_1(-u_1 A)u_1 + \rho_2(u_2 A)u_2$. Il secondo membro raccoglie le forze di pressione lungo x : sulla faccia sinistra $(dS)_x = -A$ e la forza vale $+p_1 A$; sulla destra vale $-p_2 A$; le facce orizzontali non contribuiscono lungo x . Quindi $-\rho_1 u_1^2 A + \rho_2 u_2^2 A = p_1 A - p_2 A$, ossia, dividendo per A ,

Formula chiave — Quantità di moto (flusso 1D stazionario)

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (2.5)$$

La grandezza $p + \rho u^2$, detta talvolta *impulso specifico d'area*, si conserva: se la corrente rallenta (ρu^2 diminuisce a parità di portata) la pressione deve aumentare, e viceversa. È il germe, in versione comprimibile, del comportamento che in campo incomprimibile attribuiamo al teorema di Bernoulli.

2.4 Energia

L'equazione integrale dell'energia, per flusso stazionario, senza forze di volume, senza lavoro d'elica e senza conduzione termica attraverso le superfici laterali, con un'adduzione di calore complessiva $\dot{Q}$ (W) all'interno

del volume di controllo, si scrive

$$\dot{Q} - \oint_S p \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.6)$$

Valutando gli integrali sulle due facce utili:

$$\dot{Q} + p_1 u_1 A + \rho_1 \left(e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) u_1 A = p_2 u_2 A + \rho_2 \left(e_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) u_2 A. \quad (2.7)$$

Dividiamo membro a membro per la portata $\rho_1 u_1 A = \rho_2 u_2 A$ (equazione 2.2): il rapporto $\dot{Q}/(\rho_1 u_1 A)$ è il calore addotto *per unità di massa*, che chiamiamo q (J/kg). Ricordando la definizione di entalpia specifica $h = e + p/\rho$, otteniamo

Formula chiave — Energia (flusso 1D stazionario)

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} + q = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (2.8)$$

Per flusso *adiabatico* ($q = 0$) la somma $h + u^2/2$ — detta **entalpia totale** h_0 — si conserva.

Attenzione

Le equazioni (2.2), (2.5) e (2.8) sono *generalì*: valgono per qualunque gas, anche chimicamente reagente. Ricordiamo però il perimetro delle ipotesi: la (2.5) trascura le forze di volume e gli sforzi viscosi; la (2.8) non include lavoro d'albero, lavoro degli sforzi viscosi, conduzione termica e variazioni di energia potenziale. Quando nella §9 introdurremo l'attrito, dovremo tornare sulla (2.5) e aggiungerle il termine mancante.

Per un **gas caloricamente perfetto** — il modello che adotteremo in tutti gli sviluppi in forma chiusa — alle tre equazioni di bilancio si affiancano l'equazione di stato e la relazione calorica:

$$p = \rho R T, \quad h = c_p T, \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, \quad c_v = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}. \quad (2.9)$$

Per l'aria in condizioni ordinarie: $\gamma = 1,4$, $R = 287 \text{ J}/(\text{kg K})$, da cui $c_p = 1004,5 \text{ J}/(\text{kg K})$.

Osservazione — Il senso di tutto questo

Tre equazioni algebriche, cinque incognite a valle ($\rho_2, u_2, p_2, h_2, T_2$), due relazioni termodinamiche di chiusura: il sistema è determinato. L'ipotesi di monodimensionalità ci ha regalato una semplificazione enorme rispetto alle equazioni integrali da cui siamo partiti, ma — ed è il punto concettuale — *senza alcuna perdita di autorità fisica*: la (2.2) dice ancora che la massa si conserva, la (2.5) che la forza uguaglia la variazione del flusso di quantità di moto, la (2.8) che l'energia si conserva. Su queste tre righe di algebra costruiremo urti, combustori e condotte.

3 La velocità del suono e il numero di Mach

Nota — Dove stiamo andando

Prima di affrontare gli urti facciamo una deviazione strategica, valida non solo per il flusso monodimensionale ma per correnti di qualunque dimensionalità. Calcoleremo la velocità con cui una debole perturbazione di pressione — un suono — si propaga in un gas, e scopriremo che questa velocità è la misura diretta della *comprimibilità* del gas. Il numero di Mach, rapporto fra la velocità del moto e la velocità del suono, diventerà il parametro sovrano di tutta la gasdinamica.

3.1 Un petardo e le molecole

L'aria intorno a noi è un insieme di molecole in moto caotico, con velocità e energie istantanee diverse; su tempi sufficientemente lunghi sono però ben definite una velocità molecolare media e un'energia media che, per un gas perfetto, dipendono dalla sola temperatura. Supponiamo ora che un petardo esploda nelle vicinanze. L'energia liberata è assorbita dalle molecole circostanti, che accelerano; queste urtano le vicine cedendo parte dell'energia acquistata, le vicine urtano altre molecole ancora, e così via: l'energia del petardo si *propaga* nello spazio come un'onda. Poiché il meccanismo di trasporto sono le collisioni molecolari, la velocità di propagazione deve essere dello stesso ordine della velocità molecolare media. Al passaggio dell'onda, pressione, densità e temperatura variano *leggermente*; la piccola variazione di pressione, raccolta dal timpano, è ciò che il cervello interpreta come suono. Un'onda siffatta — debole per definizione — si chiama **onda sonora**, e vogliamo calcolare quanto velocemente viaggia.

3.2 A cavallo dell'onda

Sia a la velocità di propagazione dell'onda nel gas in quiete. Il trucco risolutivo è un cambio di sistema di riferimento: saltiamo *sopra* l'onda e viaggiamo con essa. In questo riferimento l'onda è ferma; il gas davanti a noi le corre incontro con velocità a , pressione p , densità ρ e temperatura T ; il gas alle nostre spalle si allontana con velocità $a + da$ e proprietà $p + dp$, $\rho + d\rho$, $T + dT$ (figura 4). Le variazioni sono infinitesime proprio perché l'onda sonora è, per definizione, debole: se le variazioni fossero finite avremmo un'onda d'urto, che — lo verificheremo — si propaga più velocemente di a .

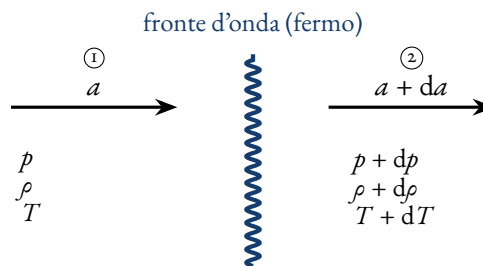


Figura 4. Schema dell'onda sonora nel riferimento solidale con l'onda: il fronte appare fermo e il gas lo attraversa da sinistra a destra.

Il flusso attraverso l'onda è monodimensionale: valgono quindi le equazioni della §2. La continuità (2.2) fra le regioni 1 e 2 dà

$$\rho a = (\rho + d\rho)(a + da) = \rho a + a d\rho + \rho da + d\rho da. \quad (3.1)$$

Il prodotto $d\rho da$ è un infinitesimo del secondo ordine e si trascura; resta

$$a = -\rho \frac{da}{d\rho}. \quad (3.2)$$

La quantità di moto (2.5) dà

$$p + \rho a^2 = (p + dp) + (\rho + d\rho)(a + da)^2, \quad (3.3)$$

che, trascurando di nuovo i prodotti di differenziali, diventa $dp = -2a\rho da - a^2 d\rho$, ossia

$$da = \frac{dp + a^2 d\rho}{-2a\rho}. \quad (3.4)$$

Sostituendo la (3.4) nella (3.2) e risolvendo rispetto ad a^2 si ottiene il risultato notevolissimo

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}. \quad (3.5)$$

Quale trasformazione lega dp a $d\rho$ dentro l'onda? Le variazioni sono minime, quindi i gradienti di velocità e temperatura sono piccoli e gli effetti dissipativi di attrito e conduzione termica sono trascurabili; inoltre nessuno sta scaldando il gas dentro l'onda. La trasformazione è dunque reversibile e adiabatica: *isentropica*. La derivata nella (3.5) va allora intesa a entropia costante:

Formula chiave — Velocità del suono (relazione generale)

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\frac{v}{\tau_s}} \quad (3.6)$$

dove $\tau_s = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s$ è la comprimibilità isentropica e $v = 1/\rho$ il volume specifico. Questa relazione vale per *qualunque* gas.

La (3.6) rende quantitativa un'idea che abbiamo già incontrato studiando i fluidi: la velocità del suono misura la comprimibilità del mezzo. Un mezzo poco comprimibile (τ_s piccolo) trasmette il suono velocissimamente; al limite ideale del fluido *incomprimibile* ($\tau_s = 0$) la velocità del suono è infinita — ogni perturbazione si farebbe sentire istantaneamente ovunque. È per questo che nel modello incomprimibile non esistono onde d'urto.

3.3 Il caso del gas caloricamente perfetto

Per un gas caloricamente perfetto la trasformazione isentropica obbedisce a $p v^\gamma = \text{cost}$, cioè $p = c \rho^\gamma$. Derivando,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = c \gamma \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma p}{\rho}, \quad (3.7)$$

e quindi, usando anche l'equazione di stato $p/\rho = RT$,

Formula chiave — Velocità del suono (gas perfetto)

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma R T} \quad (3.8)$$

Per un gas perfetto la velocità del suono dipende dalla *sola temperatura*, con andamento $a \propto \sqrt{T}$: è coerente con il quadro molecolare, perché la teoria cinetica dà una velocità molecolare media $\sqrt{8RT/\pi}$, anch'essa proporzionale a $\sqrt{T}$. Il suono viaggia a circa i tre quarti della velocità molecolare media: le collisioni sono un postino efficiente, ma non gratuito.

In atmosfera standard alla quota zero ($T = 288,15$ K, $R = 287,05$ J/(kg K)):

$$a = \sqrt{1,4 \times 287,05 \times 288,15} = 340,3 \text{ m/s} \simeq 1225 \text{ km/h}, \quad (3.9)$$

valore da mandare a memoria. In crociera a 11 000 m, dove $T \simeq 216,65$ K, la velocità del suono scende a circa 295 m/s: ecco perché il numero di Mach di un liner in crociera non si può stimare dividendo la velocità per i 340 m/s di quota zero.

3.4 Il numero di Mach e il suo significato energetico

Definizione

Il **numero di Mach** in un punto della corrente è il rapporto fra la velocità locale del flusso e la velocità del suono locale:

$$M = \frac{V}{a}. \quad (3.10)$$

Si distinguono i regimi: $M < 1$ *subsonico*, $M = 1$ *sonico*, $M > 1$ *supersonico*.

Il numero di Mach non è solo un rapporto cinematico: ha un preciso significato energetico. Per un gas caloricamente perfetto ($e = c_v T$, $c_v = R/(\gamma - 1)$, $a^2 = \gamma R T$) il rapporto fra energia cinetica ed energia interna di una particella fluida vale

$$\frac{V^2/2}{e} = \frac{V^2/2}{c_v T} = \frac{V^2/2}{RT/(\gamma - 1)} = \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2} \frac{V^2}{a^2} = \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2} M^2. \quad (3.11)$$

Osservazione

Il quadrato del numero di Mach è proporzionale al rapporto fra il moto *ordinato* del gas e il moto termico *caotico* delle sue molecole. A $M = 0,3$ l'energia cinetica ordinata è appena il 2,5 % di quella interna: il gas “non si accorge” di muoversi e si comporta da incompressibile. A $M = 2$ l'energia ordinata supera quella caotica: la comprimibilità domina la scena, e trascurarla non è più un'approssimazione ma un errore.

Esempio — Ordini di grandezza da ricordare

Un ATR 72 in crociera a 510 km/h a quota 5000 m ($a \simeq 320$ m/s) vola a $M \simeq 0,44$: regime subsonico, comprimibilità già percettibile ma modesta. Un liner a $M = 0,85$ ha sul dorso dell'ala sacche localmente supersoniche chiuse da deboli urti (regime *transonico*). Un addestratore supersonico a $M = 1,4$ vive interamente nel mondo che questa monografia descrive.

4 Grandezze totali e grandezze critiche

Nota — Dove stiamo andando

Costruiamo ora un inventario di grandezze di riferimento — temperatura e pressione totali, condizioni critiche, numero di Mach caratteristico — che useremo in continuazione. L'idea di fondo è sempre la stessa: associare a ogni punto *reale* della corrente uno stato *immaginario*, raggiunto con una trasformazione ideale ben precisa. Sono definizioni, non fenomeni: ma definizioni così ben scelte da semplificare enormemente i conti.

4.1 Le condizioni critiche: T^* e a^*

Consideriamo un punto A qualsiasi di un campo di moto: lì una particella fluida viaggia a Mach M e velocità V , con pressione statica p e temperatura statica T . Immaginiamo di prendere questa particella e di rallentarla (se $M > 1$) o di accelerarla (se $M < 1$) *adiabaticamente* finché il suo Mach diventa 1. Durante questa manipolazione mentale la temperatura cambia; il valore che essa assume quando la particella arriva a $M = 1$ si definisce

temperatura critica T^* , e la corrispondente velocità del suono

$$a^* = \sqrt{\gamma R T^*} \quad (4.1)$$

si chiama **velocità del suono critica**. A ogni punto della corrente, con i suoi M e T reali, restano così associati i valori T^* e a^* di quel punto.

4.2 Le condizioni totali: T_0, p_0, ρ_0

Con lo stesso spirito, immaginiamo di arrestare *isentropicamente* la particella, portandola a velocità nulla. La pressione e la temperatura che essa raggiunge quando $V = 0$ si definiscono **pressione totale** p_0 e **temperatura totale** T_0 (i termini *di ristagno* e *totali* sono sinonimi). I valori effettivi p e T del punto reale si chiamano, per contrasto, pressione e temperatura **statiche**: sono la manifestazione macroscopica del solo moto molecolare caotico.

Completano l'inventario:

- il **numero di Mach caratteristico** $M^* = V/a^*$ (attenzione: al numeratore c'è la velocità vera, al denominatore la velocità del suono *critica*);
- la **velocità del suono di ristagno** $a_0 = \sqrt{\gamma R T_0}$;
- la **densità totale** $\rho_0 = p_0/(R T_0)$.

Attenzione

T_0, p_0, T^*, a^* sono grandezze *definite*, non misurate nel punto: la particella nel punto A possiede realmente p e T , mentre p_0 e T_0 sono i valori che *avrebbe* se la arrestassimo isentropicamente. Il flusso reale non deve affatto essere isentropico, e nemmeno adiabatico, perché queste definizioni abbiano senso: la trasformazione ideale avviene solo nella nostra testa, punto per punto. Di conseguenza, in un flusso qualsiasi T_0 e p_0 possono benissimo variare da un punto all'altro; vedremo però che in un flusso adiabatico T_0 è costante, e in un flusso isentropico lo sono anche p_0 e ρ_0 : è questa proprietà a renderle preziose.

Osservazione

C'è una sottigliezza che vale la pena di anticipare (la dimostreremo nella §5): per definire T_0 basta in realtà un arresto *adiabatico*; la reversibilità serve soltanto per p_0 e ρ_0 . La temperatura totale è quindi una grandezza più "robusta" della pressione totale: un urto, che è adiabatico ma irreversibile, conserva T_0 ma distrugge parte di p_0 . Questa asimmetria è la chiave di lettura di mezza monografia.

Esempio — Dove le incontrerete in officina e in volo

La sonda di temperatura totale (sonda TAT) montata sui liner misura proprio T_0 : l'aria che vi ristagna dentro si riscalda di $T_0 - T = V^2/(2c_p)$, il cosiddetto *riscaldamento cinetico*. A $M = 0,85$ e $T = 220$ K l'aumento è di circa 32 K: non correggerlo significherebbe sbagliare la velocità vera calcolata dall'ADC. Il tubo di Pitot, dal canto suo, misura la pressione totale — ma in supersonico, come vedremo nella §6, misura la pressione totale *a valle dell'urto* che esso stesso genera.

5 Forme alternative dell'equazione dell'energia

Nota — Dove stiamo andando

Prendiamo l'equazione dell'energia per flusso adiabatico e la riscriviamo in tutte le vesti che ci serviranno: in funzione della temperatura, della velocità del suono, del rapporto p/ρ , delle condizioni critiche e delle condizioni totali. Ne usciranno le tre relazioni isentropiche T_0/T , p_0/p , ρ_0/ρ in funzione di M — le formule più usate di tutta la gasdinamica — e il legame fra M e M^* .

5.1 La catena delle forme equivalenti

Partiamo dall'equazione dell'energia (2.8) con $q = 0$ (flusso adiabatico):

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}. \quad (5.1)$$

Per gas caloricamente perfetto $h = c_p T$, quindi

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}. \quad (5.2)$$

Con $c_p = \gamma R/(\gamma - 1)$ e $a^2 = \gamma R T$ la (5.2) si riveste di volta in volta come

$$\frac{\gamma R T_1}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma R T_2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2}, \quad \frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2}, \quad (5.3)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2}. \quad (5.4)$$

Sono tutte la stessa equazione: la scelta della veste dipende solo da quali grandezze conosciamo nel problema.

5.2 L'energia e le condizioni critiche

Applichiamo la (5.3) fra il punto reale (velocità u , velocità del suono a) e lo stato immaginario a $M = 1$ dello stesso punto, dove la velocità del flusso coincide con la velocità del suono critica: $u_2 = a^*$, $a_2 = a^*$. Si ottiene

Formula chiave — Energia in forma critica

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a^{*2} \quad (5.5)$$

La (5.5) permette di *calcolare* a^* dai valori reali a e u di un punto qualunque. Se il campo di moto è adiabatico ovunque, a^* (e quindi T^*) è *la stessa costante in ogni punto*: poiché moltissime correnti aerodinamiche sono con ottima approssimazione adiabatiche, questa costanza è un fatto da ricordare. Se invece fra due punti il flusso non è adiabatico (ad esempio perché in mezzo c'è un combustore), i valori di a^* associati ai due punti sono diversi.

5.3 L'energia e le condizioni totali

Applichiamo ora la (5.2) fra il punto reale (T , u) e lo stato di ristagno ($T_2 = T_0$, $u_2 = 0$):

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_0. \quad (5.6)$$

Notiamo un fatto concettualmente prezioso: per arrivare alla (5.6) abbiamo usato solo l'energia per flusso *adiabatico*, mai la reversibilità. La temperatura totale può quindi essere ridefinita, in modo meno restrittivo, come la temperatura raggiunta arrestando la particella *adiabaticamente*; l'isentropicità resta invece necessaria per definire p_0 e ρ_0 , perché la pressione, a differenza dell'entalpia, risente delle irreversibilità.

Dalla (5.6), dividendo per $c_p T$ e usando $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$, $a^2 = \gamma R T$, $M = u/a$:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{u^2}{2c_p T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u^2}{a^2}, \quad (5.7)$$

e per trasformazione isentropica $p_0/p = (\rho_0/\rho)^\gamma = (T_0/T)^{\gamma/(\gamma-1)}$. Riassumendo:

Formula chiave — Relazioni isentropiche totali/statiche

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2, \quad (5.8)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad (5.9)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (5.10)$$

Valgono *punto per punto*, qualunque sia il flusso reale, perché la trasformazione ideale è solo definitoria. Se poi l'intero campo è isentropico, T_0 , p_0 e ρ_0 sono costanti ovunque.

5.4 Relazioni fra grandezze critiche e totali

Dalla (5.3) scritta fra punto reale e ristagno segue anche

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1}, \quad (5.11)$$

e confrontando con la (5.5):

$$\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a^{*2} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1} \implies \left(\frac{a^*}{a_0}\right)^2 = \frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1}. \quad (5.12)$$

Poiché le condizioni critiche corrispondono a $M = 1$, le (5.9)–(5.10) con $M = 1$ danno inoltre

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (5.13)$$

Per aria ($\gamma = 1,4$) i tre numeri da tenere in tasca sono

$$\frac{T^*}{T_0} = 0,833, \quad \frac{p^*}{p_0} = 0,528, \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = 0,634. \quad (5.14)$$

Il secondo, in particolare, è il celebre *rapporto critico di pressione*: quando un serbatoio scarica attraverso un ugello convergente e la pressione ambiente scende sotto il 52,8 % della pressione totale, la gola raggiunge $M = 1$ e l'ugello *sceglie* la portata (condizione di efflusso critico).

Infine, dividendo la (5.5) per u^2 e riordinando si ottiene il legame diretto fra Mach e Mach caratteristico:

$$M^2 = \frac{2}{\frac{\gamma + 1}{M^{*2}} - (\gamma - 1)} \iff M^{*2} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2}. \quad (5.15)$$

Dalla (5.15) si legge che M^* si comporta qualitativamente come M :

$$M^* = 1 \iff M = 1, \quad M^* \leq 1 \iff M \leq 1, \quad M^* \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = 2,449 \text{ per } M \rightarrow \infty. \quad (5.16)$$

Osservazione

Perché scomodare M^* se già abbiamo M ? Perché quando $M \rightarrow \infty$ il numero di Mach caratteristico tende a un valore *finito*: nelle formule sugli urti questo eviterà forme indeterminate ∞/∞ e renderà i passaggi algebrici puliti. È un parametro di servizio, ma di ottimo servizio.

Approfondimento — Generalità delle formule

Abbiamo ricavato tutto partendo dalla (5.1), scritta con la velocità u del flusso monodimensionale. Ma quella equazione afferma soltanto che l'entalpia totale $h_0 = h + V^2/2$ si conserva in un flusso stazionario adiabatico: un enunciato valido in una, due o tre dimensioni. Tutte le relazioni di questa sezione — dalla (5.5) alla (5.15) — restano quindi valide sostituendo u con il modulo V della velocità in un campo tridimensionale qualsiasi. È per questo che potremo usarle, senza rimorsi, anche per l'ugello di un razzo, che monodimensionale in senso stretto non è.

5.5 Esercizi svolti

Esercizio svolto 1 — Il punto sul dorso dell'ala di un caccia

In un punto della corrente attorno a un caccia in volo supersonico si misurano $M = 1,5$, pressione statica $p = 0,9$ atm e temperatura statica $T = 250$ K. Calcolare T_0 , p_0 , T^* , p^* e la velocità del flusso in quel punto.

Impostazione. Le condizioni totali e critiche di un punto si calcolano con le (5.8)–(5.9) e (5.12)–(5.13), tutte funzioni del solo M locale.

Svolgimento. Con $M = 1,5$ e $\gamma = 1,4$:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + 0,2 \times 1,5^2 = 1,45, \quad \frac{p_0}{p} = 1,45^{3,5} = 3,671.$$

Quindi

$$T_0 = 1,45 \times 250 \text{ K} = 362,5 \text{ K}, \quad p_0 = 3,671 \times 0,9 \text{ atm} = 3,304 \text{ atm}.$$

Le condizioni critiche seguono dalle (5.14). Attenzione al ragionamento, che è il vero contenuto dell'esercizio: nell'arresto adiabatico che definisce T^* la temperatura totale resta costante, e nell'arresto isentropico che definisce p^* resta costante la pressione totale. Perciò

$$T^* = \frac{T^*}{T_0} T_0 = 0,8333 \times 362,5 = 302,1 \text{ K},$$

$$p^* = \frac{p^*}{p_0} p_0 = 0,5283 \times 3,304 = 1,745 \text{ atm}.$$

Infine la velocità:

$$a = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{1,4 \times 287 \times 250} = 316,9 \text{ m/s}, \quad V = M a = 1,5 \times 316,9 = 475,4 \text{ m/s}.$$

Commento. Nel punto reale esistono soltanto $p = 0,9$ atm e $T = 250$ K; i valori $p_0 = 3,304$ atm, $T_0 = 362,5$ K, $p^* = 1,745$ atm, $T^* = 302,1$ K sono *associati* al punto ma non fisicamente presenti in esso: sono lo stato che la particella raggiungerebbe nelle due trasformazioni ideali.

Esercizio svolto 2 — L'ugello di un motore a razzo

Nella camera di combustione di un piccolo motore a razzo il gas propulsivo ($\gamma = 1,2$, $R = 600$ J/(kg K)) ristagna a $p_0 = 20$ atm e $T_0 = 2600$ K. L'espansione nell'ugello è isentropica e la pressione nella sezione di uscita vale $p_e = 0,5$ atm. Calcolare Mach e velocità di uscita.

Impostazione. In camera la velocità è trascurabile: pressione e temperatura di camera coincidono con i valori totali. Il flusso nell'ugello è isentropico, quindi p_0 e T_0 sono costanti lungo tutta l'espansione; nella sezione d'uscita valgono le (5.9) e (5.8) con i valori locali.

Svolgimento. Invertiamo la (5.9) rispetto a M :

$$M_e = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_0}{p_e} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]} = \sqrt{\frac{2}{0,2} [40^{1/6} - 1]} = \sqrt{10 \times (1,8493 - 1)} = 2,914.$$

La temperatura di uscita, dalla (5.8):

$$T_e = \frac{T_0}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2} = \frac{2600}{1,8493} = 1405,9 \text{ K}.$$

Da qui velocità del suono e velocità di uscita:

$$a_e = \sqrt{1,2 \times 600 \times 1405,9} = 1006,1 \text{ m/s}, \quad V_e = M_e a_e = 2932 \text{ m/s}.$$

Verifica incrociata. Un buon ingegnere controlla sempre il risultato per una via indipendente. L'energia (5.6) dà direttamente, con $c_p = \gamma R/(\gamma - 1) = 3600 \text{ J/(kg K)}$,

$$V_e = \sqrt{2c_p(T_0 - T_e)} = \sqrt{2 \times 3600 \times (2600 - 1405,9)} = 2932 \text{ m/s} :$$

i due percorsi coincidono.

Fase 4 — Estensione: portata e area di uscita. Supponiamo ora che, alla quota considerata, l'ugello sia *adattato* (pressione d'uscita pari all'ambiente) e che la spinta valga $S = 3 \times 10^5 \text{ N}$. Per un razzo adattato la spinta si riduce al solo termine di quantità di moto, $S = \dot{m} V_e$, da cui la portata:

$$\dot{m} = \frac{S}{V_e} = \frac{3 \times 10^5}{2932} = 102,3 \text{ kg/s}.$$

La densità di uscita segue dallo stato, $\rho_e = p_e/(RT_e) = 0,5 \times 101325/(600 \times 1405,9) = 0,0601 \text{ kg/m}^3$, e la continuità $\dot{m} = \rho_e A_e V_e$ consegna l'area della sezione di uscita:

$$A_e = \frac{\dot{m}}{\rho_e V_e} = \frac{102,3}{0,0601 \times 2932} = 0,581 \text{ m}^2,$$

cioè un diametro di circa 86 cm: numeri da vero motore di stadio superiore. Si noti come tre righe — spinta, stato, continuità — abbiano trasformato un calcolo gasdinamico in un dato di progetto.

Commento sulla validità. L'ugello non è un flusso ad area costante, quindi non è monodimensionale in senso stretto: è *quasi*-monodimensionale. Ma, come discusso nell'approfondimento sulla generalità, le forme dell'equazione dell'energia usate qui valgono per qualunque flusso stazionario adiabatico, di qualunque dimensionalità: il calcolo è pienamente legittimo. Ciò che dell'ugello *non* sappiamo ancora fare — il legame fra l'area della sezione e il Mach locale — sarà l'oggetto della prossima monografia.

Esercizio svolto 3 — Quanto è “incomprimibile” un volo lento?

Un monomotore da turismo vola alla quota zero standard ($T_\infty = 288,15 \text{ K}$) a $V_\infty = 60 \text{ m/s}$. In un punto sul dorso dell'ala la corrente accelera fino a $V = 85 \text{ m/s}$. Trattando il flusso come isentropico, valutare la variazione percentuale di densità fra la corrente indisturbata e quel punto.

Svolgimento. Dall'energia (5.2), con $c_p = 1004,5 \text{ J/(kg K)}$,

$$T = T_\infty + \frac{V_\infty^2 - V^2}{2c_p} = 288,15 + \frac{60^2 - 85^2}{2 \times 1004,5} = 288,15 - 1,80 = 286,35 \text{ K}.$$

Per trasformazione isentropica $\rho/\rho_\infty = (T/T_\infty)^{1/(\gamma-1)}$:

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left(\frac{286,35}{288,15} \right)^{2,5} = 0,9844.$$

La densità varia dunque dell'1,6 % e la temperatura di appena 1,8 K (lo 0,6 %).

Commento. Ecco la giustificazione quantitativa di un'abitudine che nelle monografie di aerodinamica a bassa velocità abbiamo dato per scontata: sotto $M \simeq 0,3$ il flusso è di fatto incomprimibile e isoterma, e l'equazione dell'energia non serve mai — bastano continuità e quantità di moto. La gasdinamica comincia quando questi due numeri smettono di essere trascurabili.

6 Le onde d'urto normali

Nota — Dove stiamo andando

Torniamo sul ramo principale del percorso e affrontiamo il primo dei tre meccanismi capaci di far cambiare le proprietà di un flusso ad area costante: l'onda d'urto normale. Prima capiremo *perché* la natura crea gli urti; poi, con le tre equazioni della §2 e l'arsenale della §5, ricaveremo tutte le relazioni che legano lo stato a valle allo stato a monte. Scopriremo che un solo numero comanda tutto: il Mach a monte M_1 .

6.1 Perché la natura crea gli urti

Un'onda d'urto normale è, per definizione, perpendicolare alla corrente. È una regione sottilissima: lo spessore è dell'ordine di pochi cammini liberi medi molecolari, tipicamente 10^{-5} cm per aria in condizioni standard. A monte dell'urto il flusso è supersonico, a valle subsonico; pressione, temperatura e densità statiche aumentano attraversandolo, la velocità diminuisce. Tutto questo lo *dimostriamo*; prima però conviene capire il meccanismo fisico di formazione.

Consideriamo un cilindro a faccia piatta investito da una corrente (figura 5). La corrente è fatta di molecole, e alcune di esse impattano sulla faccia del cilindro: nell'urto la loro energia e la loro quantità di moto cambiano. Come nell'esperimento del petardo della §3, il moto caotico molecolare comunica questo cambiamento alle regioni circostanti: la presenza del corpo cerca di propagarsi *ovunque*, anche direttamente a monte, per mezzo di onde sonore.

Se la corrente è subsonica, $V_\infty < a_\infty$, le onde sonore riescono a risalire la corrente e ad *avvisare* il flusso in arrivo della presenza dell'ostacolo: le linee di corrente cominciano a deviare ben prima del corpo (in teoria, infinitamente a monte) e le proprietà si adattano con dolcezza. Se invece la corrente è supersonica, $V_\infty > a_\infty$, le onde sonore non possono più risalire: vengono trascinate a valle dalla corrente stessa. Esse tendono allora a *coalescere* a breve distanza dal corpo, e la loro coalescenza forma una superficie sottile di brusca transizione: l'onda d'urto. A monte dell'urto il flusso “non sa nulla” del corpo; subito a valle il flusso è subsonico, e le linee di corrente hanno lo spazio per aggirare l'ostacolo.

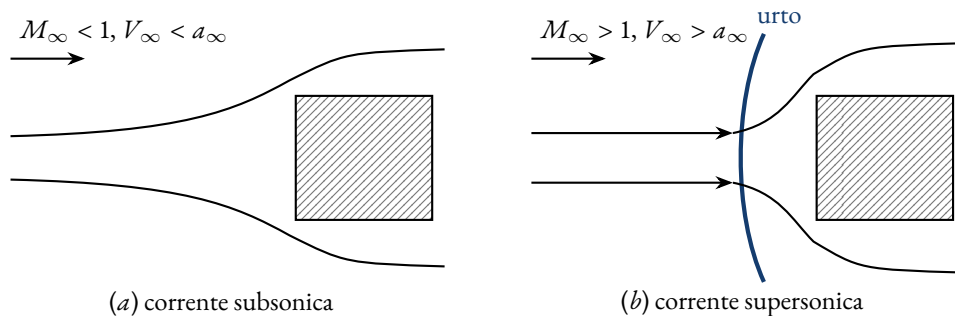


Figura 5. Linee di corrente su un cilindro a faccia piatta. In subsonico le onde sonore risalgono la corrente e la preparano all'ostacolo; in supersonico non possono farlo, coalescono e formano un urto staccato.

6.2 Il sistema di equazioni dell'urto

Modelliamo l'urto come una discontinuità: tutte le condizioni a monte (regione 1) sono note, tutte quelle a valle (regione 2) sono incognite. Attraversando l'urto il gas non riceve né cede calore (non stiamo irraggiando l'urto con un laser né mettendolo in frigorifero): il flusso è *adiabatico*, $q = 0$. Le equazioni di bilancio della §2

diventano dunque

$$\begin{aligned}\rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2 & (\text{continuità}) & (6.1) \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 &= p_2 + \rho_2 u_2^2 & (\text{quantità di moto}) & (6.2) \\ h_1 + \frac{u_1^2}{2} &= h_2 + \frac{u_2^2}{2} & (\text{energia}) & (6.3)\end{aligned}$$

Queste tre relazioni sono *generalì*: valgono per qualunque gas. Per il gas caloricamente perfetto aggiungiamo $p = \rho R T$ e $h = c_p T$: cinque equazioni, cinque incognite ($\rho_2, u_2, p_2, h_2, T_2$). Il sistema si risolve per via puramente algebrica.

6.3 La relazione di Prandtl

Dividiamo la (6.2) per la (6.1), membro a membro:

$$\frac{p_1}{\rho_1 u_1} - \frac{p_2}{\rho_2 u_2} = u_2 - u_1. \quad (6.4)$$

Ricordando che $a^2 = \gamma p / \rho$, cioè $p / \rho = a^2 / \gamma$:

$$\frac{a_1^2}{\gamma u_1} - \frac{a_2^2}{\gamma u_2} = u_2 - u_1. \quad (6.5)$$

Ora entra in gioco l'energia nella forma critica (5.5), scritta in ciascuna delle due regioni:

$$a_1^2 = \frac{\gamma+1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma-1}{2} u_1^2, \quad a_2^2 = \frac{\gamma+1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma-1}{2} u_2^2. \quad (6.6)$$

Il punto cruciale — rileggetelo due volte — è che a^* è *lo stesso* nelle due espressioni: il flusso attraverso l'urto è adiabatico, e in un flusso adiabatico la velocità del suono critica è costante (§5). Sostituendo le (6.6) nella (6.5) e raccogliendo:

$$\frac{\gamma+1}{2\gamma u_1 u_2} (u_2 - u_1) a^{*2} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} (u_2 - u_1) = u_2 - u_1. \quad (6.7)$$

Se l'urto esiste davvero, $u_2 \neq u_1$: possiamo dividere per $(u_2 - u_1)$, e risolvendo rispetto ad a^* si trova

Formula chiave — Relazione di Prandtl

$$\boxed{a^{*2} = u_1 u_2} \quad \Longleftrightarrow \quad M_2^* = \frac{1}{M_1^*}. \quad (6.8)$$

La forma con i Mach caratteristici si ottiene dividendo per a^{*2} : $1 = (u_1/a^*)(u_2/a^*) = M_1^* M_2^*$. La relazione di Prandtl è di un'eleganza rara: la velocità critica è la *media geometrica* delle velocità a monte e a valle. E la sua conseguenza è immediata: poiché il flusso a monte è supersonico ($M_1 > 1$, quindi $M_1^* > 1$), la (6.8) impone $M_2^* < 1$ e dunque $M_2 < 1$: **il flusso a valle di un urto normale è sempre subsonico**. Questo risultato non dipende dall'ipotesi di gas caloricamente perfetto.

6.4 Le proprietà a valle in funzione di M_1

Sostituendo nella (6.8) la relazione (5.15) fra M^* e M , scritta per le regioni 1 e 2, e risolvendo rispetto a M_2^2 si ottiene

Formula chiave — Mach a valle dell'urto

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}} \quad (6.9)$$

Il rapporto di densità (e di velocità) segue da continuità e Prandtl:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^2}{u_1 u_2} = \frac{u_1^2}{a^{*2}} = M_1^{*2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2}. \quad (6.10)$$

Per la pressione torniamo alla quantità di moto: $p_2 - p_1 = \rho_1 u_1 (u_1 - u_2) = \rho_1 u_1^2 (1 - u_2/u_1)$, quindi, dividendo per p_1 e usando $a_1^2 = \gamma p_1/\rho_1$ e la (6.10),

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1). \quad (6.11)$$

Dall'equazione di stato, infine,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2}. \quad (6.12)$$

Osservazione

Guardate le (6.9)–(6.12): per un gas con γ assegnato, *tutto* lo stato a valle dipende dal solo M_1 . È la prima grande dimostrazione del ruolo sovrano del numero di Mach nella gasdinamica. Il risultato mantiene un'accuratezza ragionevole fino a $M_1 \simeq 5$ in aria standard: oltre, la temperatura a valle è così alta che γ smette di essere costante (gas termicamente perfetti e reagenti richiedono trattazioni numeriche dedicate). Ma il regime $M_1 < 5$ contiene la quasi totalità dei problemi aeronautici correnti.

I *casi limite* meritano un momento di contemplazione. Per $M_1 = 1$ le (6.9)–(6.12) danno $M_2 = \rho_2/\rho_1 = p_2/p_1 = T_2/T_1 = 1$: l'urto degenera in un'onda di Mach, cioè nell'onda sonora della §3, senza variazioni finite. Per $M_1 \rightarrow \infty$ (con $\gamma = 1,4$):

$$M_2 \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = 0,378, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = 6, \quad \frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty, \quad \frac{T_2}{T_1} \rightarrow \infty. \quad (6.13)$$

Pressione e temperatura crescono senza limite, ma densità e Mach a valle tendono a valori *finiti*: un'asimmetria per nulla ovvia, figlia diretta dell'algebra delle equazioni di bilancio.

6.5 Il verdetto del secondo principio

Un dettaglio dovrebbe avervi insospettito: le (6.9)–(6.12) funzionano matematicamente anche con $M_1 < 1$, e in tal caso descriverebbero un “urto di espansione” con pressione che *diminuisce*. Chi decide quale verso è fisico? Il secondo principio della termodinamica. La variazione di entropia di un gas perfetto fra due stati vale

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}, \quad (6.14)$$

e sostituendovi le (6.11) e (6.12) si ottiene $s_2 - s_1$ come funzione del solo M_1 . Il calcolo mostra che

$$M_1 = 1 \Rightarrow s_2 - s_1 = 0, \quad M_1 > 1 \Rightarrow s_2 - s_1 > 0, \quad M_1 < 1 \Rightarrow s_2 - s_1 < 0. \quad (6.15)$$

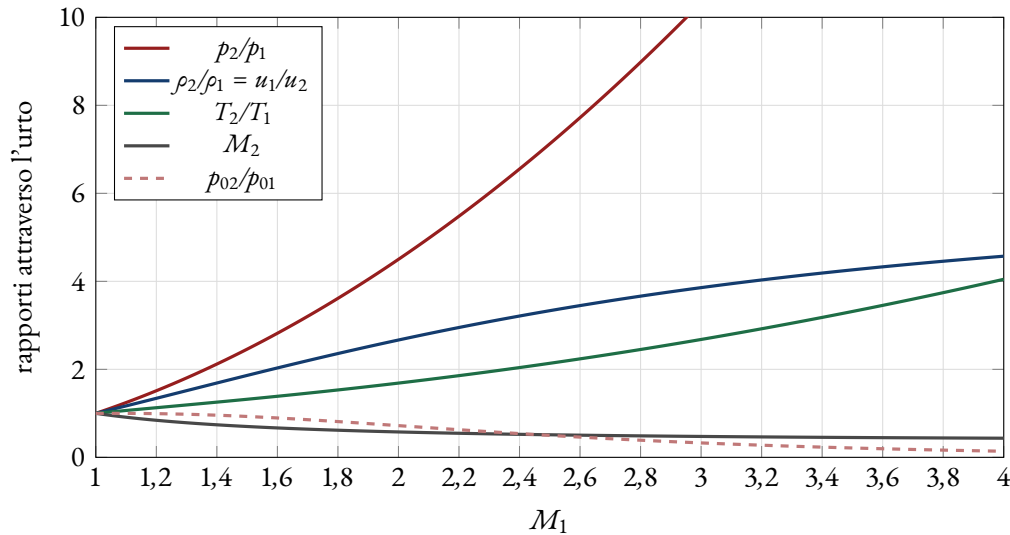


Figura 6. Proprietà a valle di un urto normale in funzione del Mach a monte ($\gamma = 1,4$). Si noti la crescita rapida di p_2/p_1 e T_2/T_1 , la saturazione di ρ_2/ρ_1 verso 6 e di M_2 verso 0,378, e il crollo della pressione totale.

Poiché in un processo adiabatico deve essere $s_2 - s_1 \geq 0$, il caso $M_1 < 1$ è *vietato*: solo urti di compressione, mai di espansione. Restano dunque stabilite, ora con pieno rigore, le proprietà annunciate all'inizio:

$$M_1 \geq 1 \implies M_2 \leq 1, \quad \frac{p_2}{p_1} \geq 1, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} \geq 1, \quad \frac{T_2}{T_1} \geq 1, \quad u_2 \leq u_1. \quad (6.16)$$

Ma da dove nasce, fisicamente, l'entropia prodotta? Dall'interno dell'urto. Le variazioni avvengono su 10^{-5} cm: i gradienti di velocità e temperatura dentro la struttura dell'urto sono *enormi*, e dove i gradienti sono grandi la viscosità e la conduzione termica — fenomeni dissipativi e irreversibili — diventano protagonisti. L'aumento di entropia previsto dall'algebra è puntualmente fornito dalla natura sotto forma di attrito e conduzione dentro lo spessore dell'urto.

6.6 Le condizioni totali attraverso l'urto

Resta un'ultima domanda, di enorme portata applicativa: come variano T_0 e p_0 attraverso l'urto? Per la temperatura totale la risposta è immediata: l'urto è adiabatico e per gas caloricamente perfetto $c_p T_0 = c_p T + u^2/2$ si conserva, quindi

$$T_{01} = T_{02} \quad (6.17)$$

(il risultato generale, valido per qualunque gas, è la costanza dell'*entalpia totale*; per un gas chimicamente reagente T_0 non sarebbe invece costante, e nemmeno lo sarebbe per un urto in moto, dove tutto diventa questione di sistemi di riferimento).

Per la pressione totale scriviamo la (6.14) fra i due stati di ristagno immaginari $1a$ e $2a$ associati alle regioni 1 e 2: le entropie di tali stati coincidono con s_1 e s_2 (l'arresto è isentropico), le temperature coincidono ($T_{01} = T_{02}$), le pressioni sono p_{01} e p_{02} . Dunque

Formula chiave — Entropia e pressione totale

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{02}}{p_{01}} \iff \frac{p_{02}}{p_{01}} = e^{-(s_2 - s_1)/R} \quad (6.18)$$

Poiché $s_2 > s_1$, si ha sempre $p_{02} < p_{01}$: **la pressione totale diminuisce attraverso un urto**. La perdita di p_0 è la fotografia esatta dell'entropia prodotta.

Attenzione

La coppia (6.17)–(6.18) è il cuore ingegneristico della sezione. La pressione totale è la “moneta” con cui una presa d'aria paga il compressore, con cui un ugello genera spinta, con cui una galleria del vento genera velocità: ogni urto ne brucia una parte, in modo tanto più severo quanto più alto è M_1 . Il progetto delle prese d'aria supersoniche è, in larghissima misura, l'arte di comprimere la corrente minimizzando questa perdita.

6.7 Esercizi svolti**Esercizio svolto 4 — Urto normale nella camera di prova**

In una galleria supersonica un urto normale staziona nella camera di prova. A monte: $M_1 = 2,8$, $p_1 = 0,4$ atm, $T_1 = 220$ K. Calcolare M_2 , p_2 , T_2 , u_2 e le pressioni totali p_{01} , p_{02} .

Fase 1 — Rapporti attraverso l'urto. Con $M_1 = 2,8$ nelle (6.9), (6.10), (6.11), (6.12):

$$M_2^2 = \frac{1 + 0,2 \times 7,84}{1,4 \times 7,84 - 0,2} = \frac{2,568}{10,776} = 0,2383 \quad \Rightarrow \quad M_2 = 0,488,$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2,8}{2,4}(7,84 - 1) = 8,980, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2,4 \times 7,84}{2 + 0,4 \times 7,84} = 3,664,$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{8,980}{3,664} = 2,451.$$

Fase 2 — Stato a valle.

$$p_2 = 8,980 \times 0,4 = 3,592 \text{ atm}, \quad T_2 = 2,451 \times 220 = 539,3 \text{ K}.$$

Le velocità:

$$a_1 = \sqrt{1,4 \times 287 \times 220} = 297,3 \text{ m/s}, \quad u_1 = 2,8 a_1 = 832,5 \text{ m/s},$$

$$a_2 = \sqrt{1,4 \times 287 \times 539,3} = 465,5 \text{ m/s}, \quad u_2 = 0,488 a_2 = 227,2 \text{ m/s}.$$

Fase 3 — Pressioni totali ed entropia. Dalla (5.9) con $M_1 = 2,8$: $p_{01}/p_1 = 27,14$, quindi $p_{01} = 10,86$ atm. Il rapporto di pressioni totali attraverso l'urto vale $p_{02}/p_{01} = 0,3895$, da cui $p_{02} = 4,23$ atm: l'urto ha distrutto il 61 % della pressione totale disponibile. L'entropia prodotta, dalla (6.18):

$$s_2 - s_1 = -R \ln 0,3895 = 287 \times 0,9430 = 270,6 \text{ J/(kg K)}.$$

Verifica. Continuità: $\rho_1 u_1 = 0,642 \times 832,5 = 534 \text{ kg/(m}^2 \text{ s)}$ e $\rho_2 u_2 = 2,352 \times 227,2 = 534 \text{ kg/(m}^2 \text{ s)}$: identiche, come deve essere.

Esercizio svolto 5 — Il tubo di Pitot in corrente supersonica

In un punto di una corrente supersonica la pressione statica vale $p_1 = 0,45$ atm. Un tubo di Pitot inserito nella corrente segna 3,2 atm. Qual è il Mach della corrente?

Impostazione. Il Pitot misura la pressione totale. Ma in supersonico, davanti alla sua imboccatura, si forma un urto staccato la cui porzione centrale è normale: la sonda sente dunque la pressione totale a

valle dell'urto, p_{02} . Il rapporto misurato è

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{3,2}{0,45} = 7,111.$$

Il legame fra p_{02}/p_1 e M_1 si costruisce in due passi:

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \underbrace{\frac{p_{02}}{p_{01}}}_{\text{urto}} \underbrace{\frac{p_{01}}{p_1}}_{\text{isentropica}},$$

entrambi funzioni del solo M_1 : è la cosiddetta *formula di Rayleigh per il Pitot supersonico*.

Svolgimento. La funzione $p_{02}/p_1(M_1)$ è monotona crescente: la si inverte numericamente (o per interpolazione sulle tavole gasdinamiche). Il valore $p_{02}/p_1 = 7,111$ corrisponde a

$$M_1 = 2,27.$$

Commento. Notate la trappola concettuale evitata: se avessimo usato ingenuamente la relazione isentropica (5.9) con $p_0/p = 7,111$ avremmo ottenuto $M = 1,93$ — un errore del 15 % sulla velocità indicata. Il machmetro di un velivolo supersonico incorpora la correzione d'urto nella propria taratura: è teoria di questa monografia trasformata in avionica.

Esercizio svolto 6 — Il muso di un missile a $M = 2,2$

Un missile a muso arrotondato vola a $M = 2,2$ alla quota zero standard ($p_1 = 1 \text{ atm}$, $T_1 = 288,15 \text{ K}$). Calcolare temperatura e pressione nel punto di ristagno sul muso.

Impostazione. Il punto di ristagno è alimentato dalla linea di corrente che ha attraversato la porzione *normale* dell'urto ad arco: le condizioni sul muso sono dunque le condizioni totali *a valle* dell'urto normale.

Svolgimento. La temperatura totale si conserva attraverso l'urto (6.17):

$$T_{\text{muso}} = T_{02} = T_{01} = T_1 \left(1 + 0,2 \times 2,2^2\right) = 288,15 \times 1,968 = 567,1 \text{ K} \simeq 294^\circ \text{C}.$$

La pressione totale invece decade: con $M_1 = 2,2$, $p_{01}/p_1 = 10,69$ e $p_{02}/p_{01} = 0,628$, quindi

$$p_{\text{muso}} = p_{02} = 0,628 \times 10,69 \times 1 \text{ atm} = 6,72 \text{ atm}.$$

Commento. I 294°C del punto di ristagno spiegano perché il riscaldamento cinetico dimensiona i materiali del muso e dei bordi d'attacco già in regime supersonico moderato: la scelta fra lega leggera, acciaio o titanio su un intercettore passa da questo semplice conto. E si osservi la potenza della (6.17): la temperatura di ristagno non risente affatto dell'urto, la pressione sì.

Approfondimento — Quanto è “quasi isentropico” il transonico?

Sui profili dei liner in crociera ($M_\infty \simeq 0,85$) la sacca supersonica è chiusa da un urto debole, con Mach locale a monte appena sopra 1. Ha senso, per questi flussi, l'approssimazione isentropica che ignora l'urto? Facciamo parlare i numeri ($\Delta s = -R \ln(p_{02}/p_{01})$):

M_1	1,05	1,10	1,20
p_{02}/p_{01}	0,9999	0,9989	0,9928
Δs [J/(kg K)]	0,04	0,31	2,07

A $M_1 = 1,05$ l'urto è praticamente invisibile all'entropia; a $M_1 = 1,20$ la produzione entropica è cinquanta volte maggiore. Morale: l'ipotesi isentropica è confortevole per urti locali fino a $M_1 \simeq 1,1$, sospetta oltre $M_1 \simeq 1,2$. La forza dell'urto cresce con violenza appena sopra l'unità.

Approfondimento — Aria ed elio: chi fa l'urto più forte?

Definiamo *forza* dell'urto il rapporto p_2/p_1 . A parità di $M_1 = 5$, la (6.11) dà $p_2/p_1 = 29,0$ per l'aria ($\gamma = 1,4$) e $p_2/p_1 = 31,0$ per l'elio, gas monoatomico con $\gamma = 1,67$: urto leggermente più forte nell'elio. Ma a parità di *velocità* il quadro si ribalta: a $u_1 = 1700$ m/s e $T_1 = 288$ K, l'elio ($R = 2078,6$ J/(kg K), massa molare 4 g/mol) ha $a_1 = 1000$ m/s e quindi $M_1 = 1,7$ appena, contro $M_1 = 5,0$ dell'aria: la forza dell'urto crolla a $p_2/p_1 = 3,4$. La lezione è netta: **la forza di un urto è dettata dal numero di Mach, non dalla velocità**. È anche il motivo per cui le gallerie ipersoniche ad elio raggiungono Mach elevati con temperature di ristagno gestibili.

Osservazione — Il senso di tutto questo

Tre equazioni algebriche, una costante adiabatica (a^*), un parametro sovrano (M_1): con questo minimo apparato abbiamo previsto tutto lo stato a valle di un urto, dimostrato con il secondo principio che esistono solo urti di compressione, e scoperto la coppia di fatti che ogni progettista porta con sé: T_0 si conserva, p_0 si paga. Quando nella prossima monografia gli urti diventeranno obliqui, nulla di questo andrà buttato: un urto obliquo è un urto normale visto da un riferimento in moto tangenziale.

7 L'equazione di Hugoniot

Nota — Dove stiamo andando

Finora abbiamo raccontato l'urto con il linguaggio della fluidodinamica: velocità e numeri di Mach. Ma poiché la pressione statica aumenta sempre, l'urto può essere letto anche come una *macchina termodinamica* che comprime il gas. In questa sezione eliminiamo le velocità dalle equazioni di bilancio e otteniamo una relazione fra sole grandezze termodinamiche: l'equazione di Hugoniot. Il confronto con la compressione isentropica sul piano $p-v$ sarà istruttivo.

7.1 Eliminare le velocità

Dalla continuità (6.1), $u_2 = u_1(\rho_1/\rho_2)$; sostituendo nella quantità di moto (6.2) e risolvendo rispetto a u_1^2 :

$$u_1^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (7.1)$$

Scambiando i ruoli delle due stazioni ($u_1 = u_2 \rho_2 / \rho_1$) si trova simmetricamente

$$u_2^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}. \quad (7.2)$$

Portiamo ora le (7.1)–(7.2) nell'equazione dell'energia (6.3), scritta con $h = e + p/\rho$:

$$e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} = e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}. \quad (7.3)$$

Le velocità sono sparite. Dopo qualche passaggio algebrico (che vi invito a eseguire per esteso: è un ottimo esercizio di pazienza) l'espressione si condensa in

Formula chiave — Equazione di Hugoniot

$$e_2 - e_1 = \frac{p_1 + p_2}{2} (v_1 - v_2) \quad \text{con } v = 1/\rho. \quad (7.4)$$

La (7.4) ha la forma $\Delta e = -p_{\text{media}} \Delta v$: la variazione di energia interna uguaglia la pressione media attraverso l'urto per la variazione di volume specifico. È il primo principio della termodinamica con $\delta q = 0$, riconoscibile a colpo d'occhio — e infatti l'urto è un processo adiabatico. Si noti la generalità: nella derivazione non abbiamo mai invocato il tipo di gas, quindi la (7.4) vale per gas perfetti, reagenti, reali.

7.2 La curva di Hugoniot

In termodinamica di equilibrio ogni variabile di stato è funzione di altre due: $e = e(p, v)$. Sostituendo questa relazione nella (7.4) si ottiene un legame del tipo $p_2 = f(p_1, v_1, v_2)$: assegnato lo stato a monte (p_1, v_1) , la (7.4) descrive p_2 in funzione di v_2 . Il grafico di questa relazione sul piano p - v si chiama **curva di Hugoniot**: è il luogo di *tutti* i possibili stati a valle di urti normali di varia intensità che partono da quello stato a monte. Ogni punto della curva è un urto diverso, cioè una diversa velocità u_1 .

Come si individua, sulla curva, il punto 2 corrispondente a una specifica u_1 ? Riscriviamo la (7.1) con $v = 1/\rho$:

$$\frac{p_2 - p_1}{v_2 - v_1} = - \left(\frac{u_1}{v_1} \right)^2. \quad (7.5)$$

Il primo membro è la pendenza della retta che congiunge i punti 1 e 2 sul piano p - v ; il secondo è un numero noto, fissato dalle condizioni a monte. Basta quindi tracciare da 1 la retta di pendenza $-(u_1/v_1)^2$ (la *retta di Rayleigh*): la sua intersezione con la curva di Hugoniot è lo stato a valle cercato. Un problema algebrico risolto con riga e matita.

Per il gas caloricamente perfetto ($e = c_v T$, $T = pv/R$) la (7.4) si esplicita in

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{v_1}{v_2} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{v_1}{v_2}}, \quad (7.6)$$

da cui si rilegge il limite già noto: per $p_2/p_1 \rightarrow \infty$ il rapporto di compressione volumetrico satura a $v_1/v_2 \rightarrow (\gamma+1)/(\gamma-1) = 6$ per l'aria.

Osservazione

La figura 7 racconta una storia precisa. A parità di riduzione di volume specifico, l'urto produce un salto di pressione *maggiore* della compressione isentropica: la compressione d'urto è straordinariamente *efficace*. Ma non è *efficiente*: quel di più di pressione statica si paga con la produzione di entropia e la perdita di pressione totale della §6. Efficacia ed efficienza sono due concetti diversi, e l'urto è l'esempio da manuale: nelle prese d'aria supersoniche si preferisce infatti sostituire un unico urto forte con una cascata di urti obliqui deboli, che si avvicinano di più alla compressione isentropica ideale.

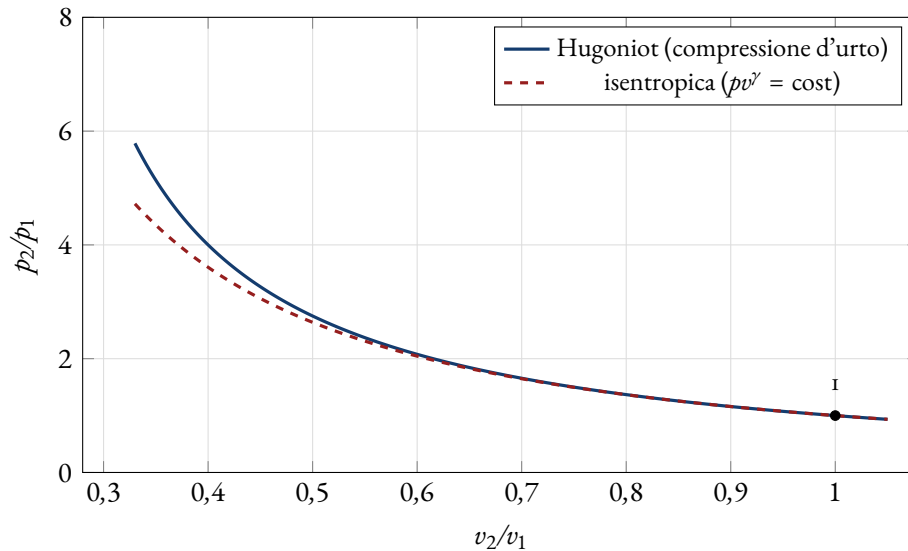


Figura 7. Curva di Hugoniot e isentropica spiccate dallo stesso stato iniziale 1 ($\gamma = 1,4$). Nel punto 1 le due curve hanno la stessa pendenza (l'urto infinitamente debole è un'onda di Mach, cioè isentropica); comprimendo, la Hugoniot sale sopra l'isentropica.

7.3 Esercizio svolto

Esercizio svolto 7 — La verifica di Hugoniot

Verificare che lo stato calcolato nell'esercizio svolto 4 ($M_1 = 2,8$; $p_1 = 0,4$ atm, $T_1 = 220$ K, $p_2 = 3,592$ atm, $T_2 = 539,3$ K) soddisfi l'equazione di Hugoniot per gas caloricamente perfetto.

Fase 1 — Rapporto dei volumi specifici. Dall'equazione di stato:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{0,4 \times 101\,325}{287 \times 220} = 0,642 \text{ kg/m}^3,$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = \frac{3,592 \times 101\,325}{287 \times 539,3} = 2,352 \text{ kg/m}^3,$$

quindi

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 3,664.$$

Fase 2 — Hugoniot. Con $(\gamma + 1)/(\gamma - 1) = 6$ nella (7.6):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{6 \times 3,664 - 1}{6 - 3,664} = \frac{20,98}{2,336} = 8,98.$$

Fase 3 — Confronto. Il valore ottenuto per via puramente termodinamica coincide con il rapporto $p_2/p_1 = 8,980$ ricavato nell'esercizio 4 dalle relazioni d'urto in funzione di M_1 : le due strade — fluidodinamica e termodinamica — descrivono lo stesso fenomeno e devono chiudersi l'una sull'altra. Piccole discrepanze all'ultima cifra, quando compaiono, sono solo arrotondamenti accumulati nei passaggi intermedi.

Osservazione — Il senso di tutto questo

L'equazione di Hugoniot ci ha insegnato a guardare l'urto con occhi termodinamici: un compressore istantaneo, efficace ma dissipativo, la cui intera famiglia di stati d'arrivo vive su una curva del piano $p-v$ selezionata, urto per urto, dalla retta di Rayleigh. Questa doppia lettura — Mach da un lato, $p-v$ dall'altro — è il modo maturo di possedere l'argomento; e la ritroverete, identica nella struttura, nello studio delle detonazioni e delle onde d'urto nei solidi.

8 Flusso monodimensionale con adduzione di calore**Nota — Dove stiamo andando**

Secondo meccanismo capace di trasformare un flusso ad area costante: scaldarlo (o raffreddarlo). È il modello di prima approssimazione del combustore di un turbogetto, di un autoreattore, delle cavità dei laser gasdinamici. Ricaveremo i rapporti fra le stazioni 1 e 2 in funzione dei due Mach, introdurremo le condizioni di riferimento soniche (le “grandezze stellate” del flusso con calore) e incontreremo un fenomeno nuovo e sorprendente: il *choking termico*.

8.1 Il calore cambia la temperatura totale

Le equazioni di governo sono le (2.2), (2.5) e (2.8), questa volta con $q \neq 0$. Per gas caloricamente perfetto, risolviamo l'energia rispetto a q :

$$q = \left(c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) - \left(c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} \right), \quad (8.1)$$

e riconoscendo in ciascuna parentesi la definizione (5.6) di temperatura totale:

Formula chiave — Calore e temperatura totale

$$q = c_p (T_{02} - T_{01}) \quad (8.2)$$

L'effetto del calore addotto è, direttamente e semplicemente, quello di aumentare la temperatura totale del flusso; il raffreddamento la diminuisce. La (8.2) è anche lo strumento di misura: nota q , è nota T_{02} .

8.2 I rapporti fra le due stazioni

Cerchiamo ora i rapporti delle proprietà in funzione di M_1 e M_2 . Il passaggio chiave è notare che

$$\rho u^2 = \rho a^2 M^2 = \rho \frac{\gamma p}{\rho} M^2 = \gamma p M^2, \quad (8.3)$$

per cui la quantità di moto (2.5) diventa $p_1(1 + \gamma M_1^2) = p_2(1 + \gamma M_2^2)$, cioè

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}. \quad (8.4)$$

Per la temperatura usiamo l'equazione di stato e la continuità,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{u_2}{u_1}, \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}};$$

risolvendo rispetto a T_2/T_1 :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2. \quad (8.5)$$

I rapporti delle grandezze totali seguono componendo le (5.8)–(5.9) con le (8.4)–(8.5):

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad (8.6)$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}. \quad (8.7)$$

Lo schema risolutivo diretto sarebbe: da q e dalla (8.2) si ottiene T_{02} ; dalla (8.7) si ricava M_2 (per tentativi, perché l'equazione non si inverte in forma chiusa); dalle (8.4)–(8.5) tutto il resto.

8.3 Le condizioni soniche di riferimento

C'è un modo più elegante di organizzare i conti, lo stesso che ritroveremo per l'attrito: usare come riferimento lo stato *sonico*. Poniamo $M_1 = 1$ e chiamiamo p^* , T^* , ρ^* , p_0^* , T_0^* le corrispondenti proprietà; per ogni altro Mach M , dalle formule precedenti con $M_2 = M$:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2}, \quad (8.8)$$

$$\frac{T}{T^*} = M^2 \left(\frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right)^2, \quad \frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M^2} \frac{1 + \gamma M^2}{1 + \gamma}, \quad (8.9)$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad (8.10)$$

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{(1 + \gamma M^2)^2} [2 + (\gamma - 1)M^2]. \quad (8.11)$$

Queste funzioni del solo M sono tabulate in tutte le raccolte di tavole gasdinamiche (per $\gamma = 1,4$) e rendono i calcoli una catena di moltiplicazioni: per andare dalla stazione 1 alla 2 si passa per lo stato stellato, ad esempio $p_2 = (p_2/p^*)(p^*/p_1)p_1$.

Attenzione

Le grandezze stellate di questa sezione *non* sono le condizioni critiche della §4. Là, T^* era la temperatura raggiunta portando la particella a $M = 1$ *adiabaticamente*; qui, T^* è la temperatura che il flusso avrebbe nel condotto se gli si addesse *esattamente il calore necessario* a portarlo a $M = 1$ — un processo tutt'altro che adiabatico. Il simbolo è lo stesso per tradizione, il significato no. Un punto di conforto però c'è: per un dato flusso in ingresso, le condizioni stellate sono *le stesse costanti di riferimento* da qualunque stazione le si calcoli — che si parta dalla stazione 1 con il suo q_1^* o dalla stazione 2 con il suo $q_2^* = q_1^* - q_1$, lo stato sonico d'arrivo è identico. È proprio questa proprietà a renderle un riferimento legittimo.

8.4 Le tendenze fisiche e la curva di Rayleigh

I numeri prodotti dalle formule raccontano tendenze precise, da mandare a memoria. *Corrente supersonica riscaldata* ($M_1 > 1$): il Mach diminuisce, p e T statiche aumentano, la velocità diminuisce, T_0 aumenta, p_0 diminuisce. *Corrente subsonica riscaldata* ($M_1 < 1$): il Mach aumenta, p diminuisce, la velocità aumenta, T_0 aumenta, p_0 diminuisce; la temperatura statica aumenta finché $M_1 < \gamma^{-1/2}$ ($\simeq 0,845$ per aria) e — curiosità

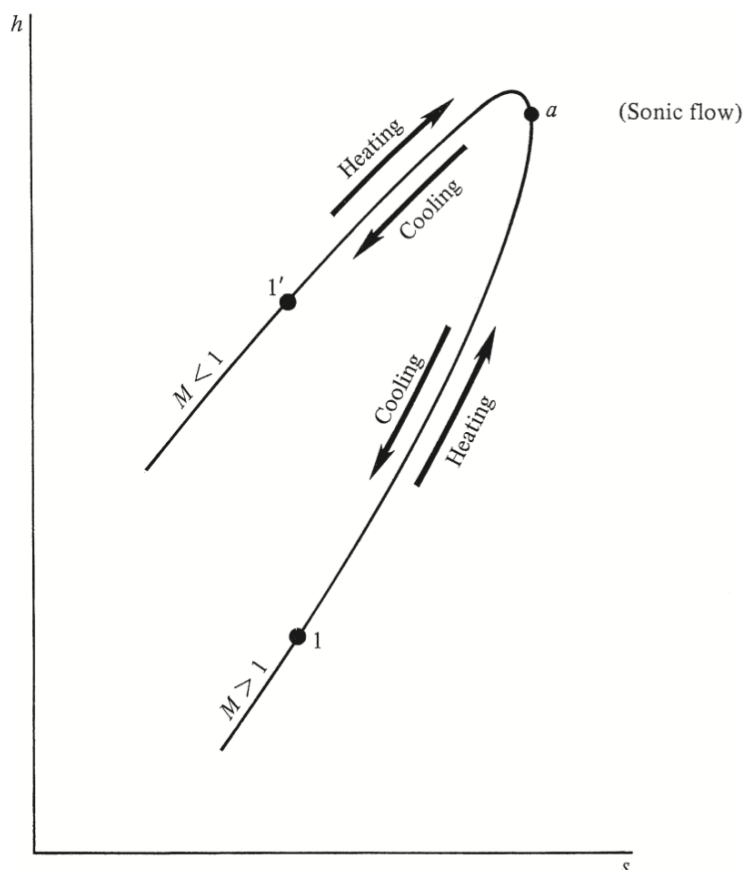


Figura 8. La curva di Rayleigh sul piano di Mollier ($\gamma = 1,4$). Il riscaldamento sposta lo stato verso il punto sonico a da entrambi i rami; il raffreddamento lo allontana.

autentica — *diminuisce* per $\gamma^{-1/2} < M_1 < 1$, dove il gas accelera così tanto che l'energia fornita non basta a scaldarlo. Per il raffreddamento, tutte le tendenze si invertono.

La sintesi grafica è la **curva di Rayleigh** (figura 8): il luogo, sul diagramma di Mollier $h-s$, di tutti gli stati raggiungibili dal flusso assegnato mediante adduzione o sottrazione di calore. Il punto a di massima entropia è lo stato sonico; il ramo inferiore è supersonico, quello superiore subsonico. Riscaldare significa muoversi verso destra (l'entropia del gas cresce quando riceve calore), raffreddare verso sinistra: **il calore addotto spinge sempre il Mach verso 1**, da qualunque lato si parta.

8.5 Il choking termico

Che cosa succede se continuiamo a scaldare? Lo stato in uscita si avvicina al punto a ; per un ben preciso valore di q il flusso esce esattamente a $M_2 = 1$. Il flusso si dice allora **termicamente strozzato** (*choked*): *qualunque ulteriore aumento di q è impossibile senza una revisione drastica delle condizioni a monte*. Se il flusso d'ingresso era subsonico, onde di pressione risalgono la corrente e la natura riduce il Mach d'ingresso a un valore più basso, tale da accogliere il nuovo calore restando strozzata in uscita. Se il flusso d'ingresso era supersonico — prodotto, poniamo, da un ugello — un urto normale si forma dentro l'ugello e l'ingresso del condotto diventa improvvisamente subsonico. In entrambi i casi il condotto “comanda” a ritroso: un comportamento tipicamente gasdinamico, impensabile in regime incomprimibile.

Si noti infine, sulla curva di Rayleigh, una possibilità teorica curiosa: scaldare un flusso supersonico fino al punto a e poi **raffreddarlo** proseguendo sul ramo subsonico — una decelerazione da supersonico a subsonico senza urto. E, specularmente, portare un subsonico a Mach supersonici scaldando fino ad a e raffreddando oltre.

Come per l'urto, anche qui il calore — addotto a flusso subsonico o supersonico — **riduce sempre la pressione totale** ($p_{02} < p_{01}$): è un fatto di prima grandezza nel progetto dei combustori, dove la perdita di p_0 in camera si somma a quelle aerodinamiche e penalizza direttamente la spinta.

8.6 Esercizi svolti

Esercizio svolto 8 — Il combustore di un turbogetto

All'ingresso del combustore (modellato come condotto ad area costante, senza attrito) l'aria arriva a $M_1 = 0,25$, $p_1 = 12$ atm, $T_1 = 600$ K. La combustione fornisce $q = 8 \times 10^5$ J/kg. Calcolare M_2 , p_2 , T_2 , ρ_2 e la perdita di pressione totale.

Fase 1 — Temperature totali. $T_{01} = T_1(1 + 0,2 \times 0,0625) = 600 \times 1,0125 = 607,5$ K. Dalla (8.2):

$$T_{02} = T_{01} + \frac{q}{c_p} = 607,5 + \frac{8 \times 10^5}{1004,5} = 607,5 + 796,4 = 1403,9 \text{ K.}$$

Fase 2 — Riferimento sonico e M_2 . Dalla (8.11) con $M_1 = 0,25$: $T_{01}/T_0^* = 0,2568$, quindi $T_0^* = 607,5/0,2568 = 2365$ K (questa è la temperatura totale che si otterrebbe scaldando fino allo strozzamento). Allora

$$\frac{T_{02}}{T_0^*} = \frac{1403,9}{2365} = 0,5935 \implies M_2 = 0,44$$

(inversione numerica della (8.11) sul ramo subsonico).

Fase 3 — Stato in uscita. Con le (8.8)–(8.9), componendo attraverso lo stato stellato:

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 \frac{p_2/p^*}{p_1/p^*} = 12 \times \frac{1,876}{2,187} = 10,29 \text{ atm,} \\ T_2 &= T_1 \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = 600 \times \frac{0,6799}{0,3017} = 1352 \text{ K,} \\ \rho_2 &= \frac{p_2}{RT_2} = \frac{10,29 \times 101\,325}{287 \times 1352} = 2,69 \text{ kg/m}^3. \end{aligned}$$

Fase 4 — Pressione totale. $p_{01} = 12 \times 1,044 = 12,53$ atm e, con la (8.10), $p_{02} = 11,74$ atm: la combustione è costata il 6,3 % della pressione totale.

Commento. Riscaldando un subsonico il Mach sale ($0,25 \rightarrow 0,44$), la pressione statica scende, la temperatura statica più che raddoppia, e la pressione totale paga il suo pedaggio: sono tutte le tendenze del quadro teorico, viste all'opera con i numeri di un combustore realistico. Notate anche il margine di sicurezza: il calore di strozzamento vale $q^* = c_p(T_0^* - T_{01}) \simeq 1,77 \times 10^6$ J/kg, più del doppio di quello addotto — questo combustore lavora lontano dal choking.

Esercizio svolto 9 — Statoreattore: quanto calore prima dello strozzamento?

Nel condotto di combustione (area costante, attrito trascurato) di uno statoreattore sperimentale entra aria a $M_1 = 3$, $p_1 = 1$ atm, $T_1 = 300$ K. (a) Con $q = 3 \times 10^5$ J/kg, determinare lo stato in uscita. (b) Quanto calore per unità di massa strozza il flusso? (c) Che cosa accade se si addice $q = 6 \times 10^5$ J/kg?

(a) Stato in uscita con $q = 3 \times 10^5$ J/kg. $T_{01} = 300 \times 2,8 = 840$ K; $T_{02} = 840 + 3 \times 10^5/1004,5 = 1138,7$ K. Con $M_1 = 3$: $T_{01}/T_0^* = 0,6540$, quindi $T_0^* = 1284$ K e $T_{02}/T_0^* = 0,8865$, che sul ramo *supersonico* dà

$$M_2 = 1,59.$$

Componendo con le formule stellate: $p_2 = 2,99 \text{ atm}$, $T_2 = 756 \text{ K}$; le pressioni totali valgono $p_{01} = 36,7 \text{ atm}$ e $p_{02} = 12,6 \text{ atm}$ ($p_{02}/p_{01} = 0,34$: il riscaldamento a M alto è costosissimo in pressione totale).

(b) Calore di strozzamento. Il flusso è strozzato quando $T_{02} = T_0^*$:

$$q^* = c_p (T_0^* - T_{01}) = 1004,5 \times (1284 - 840) = 4,46 \times 10^5 \text{ J/kg.}$$

(c) Oltre lo strozzamento. Con $q = 6 \times 10^5 \text{ J/kg} > q^*$ il flusso supersonico a $M_1 = 3$ non può accogliere il calore: il meccanismo che generava l'ingresso supersonico viene sconvolto da onde di pressione che risalgono la corrente, e l'ingresso si ristrutturava come *subsonico*. Per calcolare il nuovo Mach d'ingresso assumiamo che la transizione (ad esempio un urto normale risalito nell'ugello) non alteri la temperatura totale: $T_{01} = 840 \text{ K}$. Il nuovo stato stellato deve assorbire tutto il calore:

$$T_0^{*,\text{nuovo}} = T_{01} + \frac{q}{c_p} = 840 + \frac{6 \times 10^5}{1004,5} = 1437 \text{ K} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_{01}}{T_0^{*,\text{nuovo}}} = 0,5844,$$

che sul ramo subsonico della (8.11) corrisponde a

$$M_1^{\text{nuovo}} = 0,43.$$

Il condotto esce comunque strozzato a $M_2 = 1$, ma con un ingresso completamente diverso da quello progettato.

Commento. Ecco il choking termico in azione: il combustore non è un ricevitore passivo di calore, è un componente che *retroagisce* sull'intero condotto a monte. Nei motori reali questo fenomeno (l'*inlet unstart* degli statoreattori, il pompaggio indotto dal combustore) è tra i vincoli dimensionanti del progetto.

Osservazione — Il senso di tutto questo

Il flusso di Rayleigh ci ha consegnato tre idee robuste: il calore agisce sulla temperatura totale ($q = c_p \Delta T_0$), spinge sempre il Mach verso 1, e si paga sempre in pressione totale. Con esse in mano, il combustore smette di essere una scatola nera termochimica e diventa un componente gasdinamico prevedibile — con i suoi limiti operativi scritti nell'algebra, primo fra tutti lo strozzamento termico.

9 Flusso monodimensionale con attrito

Nota — Dove stiamo andando

Ultimo meccanismo: l'attrito alla parete. Un gas che scorre in una condotta lunga ad area costante, senza scambi di calore, cambia stato per il solo effetto dello sforzo tangenziale alle pareti. Ricaveremo l'equazione differenziale del fenomeno, la integreremo fino alla funzione $4fL^*/D$ che governa tutti i calcoli pratici, e ritroveremo — per una via completamente diversa — il choking già incontrato con il calore. Il parallelo con la §8 sarà la vostra bussola.

9.1 Il modello e l'equazione della quantità di moto modificata

Consideriamo il moto stazionario di un gas in un condotto cilindrico di diametro D (figura 9). Se il flusso fosse davvero non viscoso, adiabatico e senza urti, le equazioni della §2 darebbero l'unica soluzione banale: proprietà costanti ovunque. Ma i fluidi reali sono viscosi, e l'attrito fra gas e parete fa evolvere le proprietà lungo il condotto. Modelliamo l'effetto come uno sforzo tangenziale τ_w agente alla parete su un flusso con

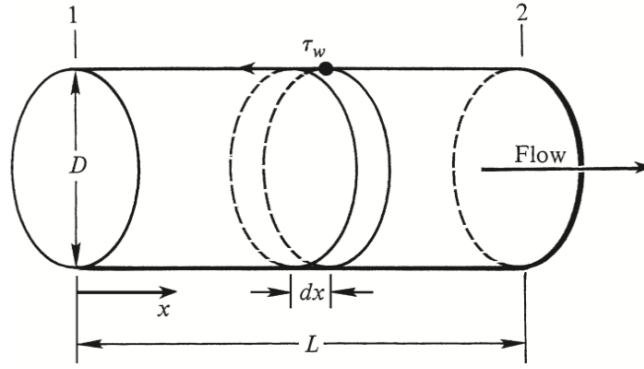


Figura 9. Modello del flusso monodimensionale con attrito: lo sforzo tangenziale τ_w , diretto contro il moto, agisce sulla superficie laterale del condotto.

proprietà uniformi su ogni sezione: con questa sola modifica, le equazioni monodimensionali descrivono le proprietà *medie* del moto in condotta.

La modifica riguarda la sola quantità di moto: sulla superficie laterale del volume di controllo cilindrico agisce ora, oltre alla pressione, la forza d'attrito. La componente x dell'equazione integrale diventa

$$\oint_S (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}) u = - \oint_S (p dS)_x - \oint_S \tau_w dS, \quad (9.1)$$

che, applicata al cilindro di lunghezza L e area $A = \pi D^2/4$, dà

$$(p_2 - p_1) + (\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2) = - \frac{4}{D} \int_0^L \tau_w dx. \quad (9.2)$$

Poiché τ_w varia con x , conviene passare alla forma differenziale facendo tendere L a dx ; usando la continuità $\rho u = \text{cost}$ (che dà $d(\rho u^2) = \rho u du$) si ottiene

$$dp + \rho u du = - \frac{4}{D} \tau_w dx. \quad (9.3)$$

Esprimiamo infine lo sforzo con il **coefficiente d'attrito** f , definito da $\tau_w = \frac{1}{2} \rho u^2 f$:

$$dp + \rho u du = - \frac{1}{2} \rho u^2 \frac{4f dx}{D}. \quad (9.4)$$

L'energia resta quella del flusso *adiabatico*: la condotta non scambia calore, quindi $h + u^2/2 = \text{cost}$ e — fatto da sottolineare — **la temperatura totale è costante** lungo tutto il condotto.

9.2 L'integrazione in funzione del Mach

Per il gas caloricamente perfetto la (9.4) si riscrive tutta in funzione del Mach. Il lavoro algebrico usa gli ingredienti ormai familiari — $a^2 = \gamma p/\rho$, $M^2 = u^2/a^2$, $p = \rho R T$, $\rho u = \text{cost}$, $c_p T + u^2/2 = \text{cost}$, tutti in forma differenziale — e conduce a

$$\frac{4f dx}{D} = \frac{2(1 - M^2)}{\gamma M^2 \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]} \frac{dM}{M}. \quad (9.5)$$

(La derivazione completa, passaggio per passaggio, è svolta nel problema 3.15 della §12: consiglio di provarla da soli, partendo dalla (9.4), prima di leggerla.) Prima di integrare, *leggiamo* la (9.5): il primo membro è sempre positivo ($f > 0$, $dx > 0$). Dunque se $M < 1$ il fattore $(1 - M^2)$ è positivo e deve essere $dM > 0$: l'attrito

accelera il subsonico. Se $M > 1$, $dM < 0$: l'attrito *decelera* il supersonico. Ancora una volta, tutto converge verso $M = 1$.

Integrando la (9.5) fra la stazione generica (Mach M) e la stazione, distante L^* , in cui il flusso raggiunge $M = 1$, e introducendo il coefficiente d'attrito medio $\bar{f} = \frac{1}{L^*} \int_0^{L^*} f \, dx$:

Formula chiave — Lunghezza di strozzamento

$$\frac{4\bar{f}L^*}{D} = \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right] \quad (9.6)$$

L^* è la lunghezza di condotto che porta il flusso da M a $M = 1$ per solo attrito. Fra due stazioni qualsiasi:

$$\frac{4\bar{f}L}{D} = \left(\frac{4\bar{f}L^*}{D} \right)_1 - \left(\frac{4\bar{f}L^*}{D} \right)_2.$$

I rapporti fra le proprietà seguono dall'adiabaticità ($T_0 = \text{cost}$, quindi T_2/T_1 dalla (5.8)), dalla continuità e dallo stato; riferiti come d'abitudine allo stato sonico:

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2}, \quad (9.7)$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right]^{1/2}, \quad \frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{1/2}, \quad (9.8)$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]}. \quad (9.9)$$

Anche queste funzioni del solo M sono tabulate per $\gamma = 1,4$ in tutte le raccolte gasdinamiche. Quanto a f : dipende dal regime (laminare o turbolento), dal numero di Reynolds e dalla rugosità, e va determinato empiricamente; per i nostri calcoli — condotte industriali turbolente con $Re > 10^5$ e rugosità relativa $\sim 0,001D$ — è ragionevole il valore costante $f = 0,005$.

9.3 Tendenze e curva di Fanno

Ingresso supersonico: l'attrito fa diminuire il Mach e la velocità, aumentare p e T statiche, diminuire p_0 . *Ingresso subsonico*: il Mach e la velocità aumentano, p e T diminuiscono, e p_0 diminuisce comunque. La pressione totale, insomma, **cala sempre**: l'attrito è irreversibile e produce entropia, in subsonico come in supersonico, e la (6.18) — che è del tutto generale per i flussi adiabatici — traduce quell'entropia in perdita di p_0 .

Osservazione

Che l'attrito *acceleri* un flusso subsonico sembra un paradosso: l'intuizione dice che l'attrito frena. La chiave è il gradiente di pressione: per far scorrere il gas in condotta occorre una pressione più alta all'ingresso che all'uscita, e questo gradiente favorevole prevale sull'azione frenante della parete. L'attrito non spinge il gas: costringe il sistema a costruirsi il gradiente di pressione che lo spinge.

La sintesi sul piano di Mollier è la **curva di Fanno** (figura 10): luogo degli stati raggiungibili, dallo stato d'ingresso assegnato, per effetto del solo attrito. Il punto a di massima entropia è ancora lo stato sonico; ramo superiore subsonico, inferiore supersonico. Poiché l'attrito può solo *produrre* entropia, il moto lungo la curva avviene sempre verso destra, da entrambi i rami, verso a . A differenza della curva di Rayleigh, qui non esiste il “biglietto di ritorno”: non c'è un equivalente del raffreddamento. In particolare, entro il quadro monodimensionale, non è possibile portare per attrito un flusso supersonico fino a $M = 1$ e poi continuare a decelerarlo in subsonico: il tratto subsonico richiederebbe entropia *decrescente*, in violazione del secondo principio.

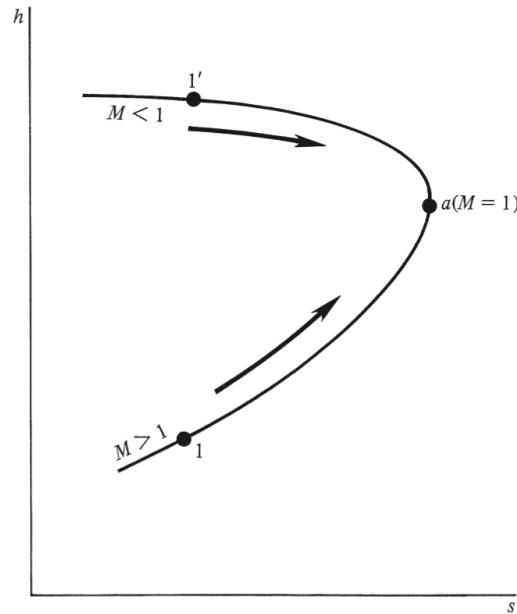


Figura 10. La curva di Fanno sul piano di Mollier ($\gamma = 1,4$). L'attrito produce entropia e spinge entrambi i rami verso il punto sonico a ; il percorso inverso è vietato dal secondo principio.

9.4 Il choking per attrito

Il parallelo con il calore si completa: allungando il condotto, lo stato d'uscita si avvicina ad a , e per una precisa lunghezza — proprio la L^* della (9.6) — il flusso esce a $M_2 = 1$: **strozzamento per attrito**. Ogni ulteriore allungamento è impossibile senza revisione delle condizioni d'ingresso: per ingresso subsonico la natura riduce il Mach d'ingresso (la portata cala); per ingresso supersonico generato da un ugello, un urto normale si insedia nell'ugello e l'ingresso in condotta diventa subsonico. La condotta lunga, come il combustore, comanda a ritroso.

9.5 Esercizi svolti

Esercizio svolto 10 — Una linea d'aria compressa di officina

In una tubazione di diametro interno $D = 0,1$ m e lunghezza $L = 25$ m scorre aria con condizioni d'ingresso $M_1 = 0,25$, $p_1 = 6$ atm, $T_1 = 290$ K. Assumendo flusso adiabatico con $\tilde{f} = 0,005$, calcolare lo stato in uscita e la lunghezza di strozzamento.

Fase 1 — Il bilancio delle lunghezze. Dalla (9.6) con $M_1 = 0,25$: $\left(\frac{4\tilde{f}L^*}{D}\right)_1 = 8,483$. Il condotto reale “consuma”

$$\frac{4\tilde{f}L}{D} = \frac{4 \times 0,005 \times 25}{0,1} = 5,000,$$

quindi alla stazione d'uscita resta

$$\left(\frac{4\tilde{f}L^*}{D}\right)_2 = 8,483 - 5,000 = 3,483 \quad \Rightarrow \quad M_2 = 0,35$$

(inversione numerica sul ramo subsonico).

Fase 2 — Stato in uscita. Componendo con le (9.7)–(9.8):

$$p_2 = p_1 \frac{p_2/p^*}{p_1/p^*} = 6 \times \frac{3,109}{4,365} = 4,27 \text{ atm}, \quad T_2 = T_1 \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = 290 \times \frac{1,171}{1,185} = 286,6 \text{ K}.$$

Le pressioni totali: $p_{01} = 6,27 \text{ atm}$, $p_{02} = 4,65 \text{ atm}$ (perdita del 26 %).

Fase 3 — Lunghezza di strozzamento.

$$L^* = 8,483 \frac{D}{4\tilde{f}} = 8,483 \times \frac{0,1}{0,02} = 42,4 \text{ m.}$$

Commento. Il quadro subsonico al completo: il Mach sale ($0,25 \rightarrow 0,35$), pressione e temperatura statiche scendono (di poco la seconda: siamo a Mach bassi), la pressione totale paga un pedaggio tutt'altro che simbolico. E il margine è quantificato: con altri 17 m di tubo la linea si strozzerebbe, e per allungarla oltre bisognerebbe accettare una portata minore. Chi dimensiona le linee pneumatiche di bordo o d'officina fa esattamente questo conto.

Esercizio svolto 11 — Il condotto supersonico di una galleria

A valle dell'ugello di una piccola galleria supersonica, l'aria entra in un condotto cilindrico di diametro $D = 0,08 \text{ m}$ e lunghezza $L = 1,5 \text{ m}$ con $M_1 = 2,5$, $p_1 = 0,5 \text{ atm}$, $T_1 = 280 \text{ K}$. Con $\tilde{f} = 0,005$, calcolare lo stato in uscita e stabilire quanto il condotto disti dallo strozzamento.

Fase 1 — Bilancio delle lunghezze. Con $M_1 = 2,5$: $\left(\frac{4\tilde{f}L^*}{D}\right)_1 = 0,4320$, cioè $L^* = 0,4320 \times 0,08/0,02 = 1,73 \text{ m}$. Il condotto consuma $4\tilde{f}L/D = 4 \times 0,005 \times 1,5/0,08 = 0,375$; resta

$$\left(\frac{4\tilde{f}L^*}{D}\right)_2 = 0,4320 - 0,375 = 0,0570 \quad \Rightarrow \quad M_2 = 1,28$$

(ramo supersonico).

Fase 2 — Stato in uscita. Componendo i rapporti stellati (9.7)–(9.9) fra le due stazioni:

$$p_2 = 1,28 \text{ atm}, \quad T_2 = 475 \text{ K}, \quad p_{01} = 8,54 \text{ atm}, \quad p_{02} = 3,42 \text{ atm}.$$

Fase 3 — Margine dallo strozzamento. La lunghezza massima ammissibile con questo ingresso è $L^* = 1,73 \text{ m}$: il condotto reale, lungo 1,5 m, lascia appena 23 cm di margine. Basterrebbe questo di più perché il condotto si strozzi, un urto normale risalga nell'ugello e la camera di prova, di colpo, diventi subsonica: la galleria “perde l'avviamento” (*unstart*).

Commento. Confrontate i due esercizi: in subsonico L^* si misura in decine di metri, in supersonico in decine di *centimetri* per diametri simili. L'attrito morde il supersonico con ferocia — una delle ragioni per cui i condotti supersonici lunghi, nelle gallerie come nei motori, sono un incubo progettuale, e la perdita di pressione totale ($8,54 \rightarrow 3,42 \text{ atm}$, il 60 %!) lo conferma.

Osservazione — Il senso di tutto questo

Il flusso di Fanno chiude il trittico con una simmetria splendida: calore e attrito, agenti fisici diversissimi, spingono entrambi il Mach verso 1, bruciano entrambi pressione totale, strozzano entrambi il condotto oltre un limite calcolabile in forma chiusa. La differenza profonda sta nel secondo principio: il calore si può togliere e la curva di Rayleigh si percorre nei due sensi; l'entropia d'attrito non si restituisce, e la curva di Fanno è una strada a senso unico. Chi ha capito questo ha capito il cuore termodinamico della gasdinamica dei condotti.

10 Nota storica: onde sonore e onde d'urto

Nota — Dove stiamo andando

Quando fu calcolata per la prima volta, correttamente, la velocità del suono? Chi costruì la teoria dell'urto normale? Le equazioni di questa monografia hanno una storia lunga due secoli e mezzo, fatta di un errore celebre di Newton, di un'intuizione di Laplace, del lavoro di un ingegnere scozzese e di un balistico francese, e di un verdetto finale pronunciato dal secondo principio. Vale la pena raccontarla: aiuta a ricordare che le formule non nascono nei formulari.

10.1 Newton, Laplace e la velocità del suono

Già nel Seicento era chiaro che il suono si propaga con velocità finita: quando Isaac Newton pubblicò la prima edizione dei *Principia* (1687), prove d'artiglieria avevano indicato un valore attorno ai 1140 ft/s (circa 348 m/s), misurato cronometrando il ritardo fra il lampo alla bocca del cannone e l'arrivo del boato a distanza nota. Nei *Principia* Newton teorizzò, correttamente, che la velocità del suono fosse legata all'"elasticità" dell'aria — il reciproco della comprimibilità — ma commise un errore d'ipotesi: assunse che l'onda sonora fosse un processo *isotermo*, proponendo in sostanza $a = \sqrt{1/(\rho\tau_T)}$ con la comprimibilità isoterma al posto di quella isentropica. Ne ricavò circa 979 ft/s, il 15 % in meno dei dati sperimentali; e, con una mossa che ogni teorico riconoscerà con un sorriso, attribuì la differenza al pulviscolo solido e al vapore acqueo sospesi in atmosfera.

L'errore fu corretto oltre un secolo dopo dal matematico francese Pierre-Simon de Laplace, che in un lavoro del 1816 sugli *Annales de Chimie et de Physique* assunse — correttamente — che l'onda sonora fosse *adiabatica*, ricavando l'espressione $a = \sqrt{1/(\rho\tau_s)}$: esattamente la nostra (3.6). All'epoca della caduta di Napoleone, dunque, la fisica della propagazione del suono era compresa per intero.

10.2 Rankine, Hugoniot e la teoria dell'urto

Anche l'esistenza delle onde d'urto era ormai riconosciuta, e nel 1858 il matematico tedesco G. F. Bernhard Riemann tentò per primo di calcolarne le proprietà seguendo la scia di Laplace: ipotesi isentropica. Tentativo destinato al fallimento — oggi sappiamo perché: l'urto *produce* entropia. La prima svolta arrivò dodici anni dopo dall'ingegnere scozzese William John Macquorn Rankine (1820–1872), uno dei fondatori della termodinamica, titolare a venticinque anni della cattedra di ingegneria civile e meccanica dell'Università di Glasgow, ingegnere nel senso più pieno: fatica dei metalli negli assili ferroviari, meccanica delle terre, macchine a vapore e il ciclo termodinamico che porta il suo nome.

Il contributo di Rankine agli urti giunse tardi, due anni prima della morte: in una memoria del 1870 sulle *Philosophical Transactions of the Royal Society* presentò le corrette equazioni di continuità, quantità di moto ed energia attraverso l'urto — in sostanza le nostre (6.1)–(6.3) — e comprese che l'interno dell'urto non è isentropico ma sede di dissipazione (pensava alla conduzione termica; la viscosità sarebbe entrata più tardi). Alla stessa memoria dobbiamo anche il simbolo γ per il rapporto dei calori specifici, con la notazione che usiamo ancora oggi, e la stima "circa 1,41 per aria, ossigeno, azoto e idrogeno".

Le stesse equazioni furono riscoperte, in modo indipendente, dal balistico francese Pierre-Henri Hugoniot, che in una memoria del 1887 sul *Journal de l'École Polytechnique* ricavò le relazioni puramente termodinamiche attraverso l'urto: quelle della nostra §7. Da allora l'intero corpo di equazioni sugli urti porta il nome generico di **relazioni di Rankine–Hugoniot**.

10.3 Rayleigh, Taylor e il verdetto del secondo principio

Un punto, però, i lavori di Rankine e di Hugoniot lo lasciavano aperto: la *direzione* del salto. Le equazioni ammettevano matematicamente sia urti di compressione sia urti di rarefazione — la stessa ambiguità che abbiamo incontrato nella §6. La questione fu chiusa solo nel 1910, in due lavori quasi simultanei e indipendenti sui *Proceedings of the Royal Society*: prima Lord Rayleigh, poi un giovane G. I. Taylor (destinato a diventare uno dei

massimi fluidodinamici del Novecento) invocarono il secondo principio della termodinamica per dimostrare che solo gli urti di compressione sono fisicamente possibili. Rayleigh mostrò inoltre che, nella struttura interna dell'urto, la viscosità gioca un ruolo altrettanto essenziale della conduzione. Nel corso di una quarantina d'anni la teoria delle onde d'urto, così come l'abbiamo presentata, era compiuta.

Osservazione — Il senso di tutto questo

All'epoca, gli studi di Rankine, Hugoniot, Rayleigh e Taylor apparivano ricerca di base su un problema piuttosto accademico. L'esplosione delle applicazioni arrivò trent'anni dopo, con l'interesse per il volo supersonico durante la Seconda guerra mondiale: i progressi rapidissimi degli anni Quaranta furono possibili proprio perché la teoria degli urti era lì, completa e pronta all'uso. È un esempio da manuale del valore della ricerca fondamentale, anche quando sembra oscura nel momento in cui viene fatta — una lezione che vale in aeronautica come altrove.

II Riepilogo e formulario

Questa monografia ha trattato il **flusso monodimensionale**: tutte le proprietà funzioni di una sola coordinata x , dunque area costante. Tre meccanismi fanno evolvere le proprietà nonostante l'area costante: l'*urto normale*, l'*adduzione di calore*, l'*attrito*. Ripercorriamo la mappa e raccogliamo le formule.

II.1 Le equazioni di bilancio

	Urto normale	Calore	Attrito
Continuità	$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$	$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$	$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$
Quantità di moto	$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$	$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$	+ termine $-\frac{4}{D} \int_0^L \tau_w dx$
Energia	$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$	$h_1 + \frac{u_1^2}{2} + q = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$	$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$
T_0	costante	$q = c_p(T_{02} - T_{01})$	costante
p_0	diminuisce	diminuisce	diminuisce
s	aumenta	segue il calore	aumenta

II.2 Suono, Mach, grandezze totali e critiche

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \stackrel{\text{gas perf.}}{=} \sqrt{\gamma R T}, \quad M = \frac{V}{a}, \quad \frac{V^2/2}{e} = \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} M^2,$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2, \quad \frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/(\gamma-1)},$$

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1} = 0,833, \quad \frac{p^*}{p_0} = 0,528, \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = 0,634 \quad (\gamma = 1,4),$$

$$M^{*2} = \frac{(\gamma+1)M^2}{2 + (\gamma-1)M^2}, \quad \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a^{*2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}.$$

II.3 Urto normale (gas caloricamente perfetto)

$$a^{*2} = u_1 u_2 \quad (\text{Prandtl}), \quad M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}},$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1), \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

$$T_{01} = T_{02}, \quad s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{02}}{p_{01}} > 0, \quad e_2 - e_1 = \frac{p_1 + p_2}{2} (v_1 - v_2) \quad (\text{Hugoniot}).$$

Tutto dipende dal solo M_1 (validità pratica: $M_1 \lesssim 5$ in aria). Limiti per $M_1 \rightarrow \infty$: $M_2 \rightarrow 0,378$, $\rho_2/\rho_1 \rightarrow 6$, $p_2/p_1 \rightarrow \infty$, $T_2/T_1 \rightarrow \infty$.

II.4 Rayleigh (calore) e Fanno (attrito): riferimento sonico

	Rayleigh	Fanno
$\frac{p}{p^*}$	$\frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2}$	$\frac{1}{M} \left[\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2} \right]^{1/2}$
$\frac{T}{T^*}$	$M^2 \left(\frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2} \right)^2$	$\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2}$
$\frac{p_0}{p_0^*}$	$\frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2} \left[\frac{2+(\gamma-1)M^2}{\gamma+1} \right]^{\gamma/(\gamma-1)}$	$\frac{1}{M} \left[\frac{2+(\gamma-1)M^2}{\gamma+1} \right]^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]}$
variabile motrice	$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(\gamma+1)M^2 [2+(\gamma-1)M^2]}{(1+\gamma M^2)^2}$	$\frac{4\tilde{f}L^*}{D} = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2}$

In entrambi i casi il Mach è spinto *sempre verso 1*: raggiunto $M = 1$ in uscita il flusso è **strozzato** e ogni ulteriore adduzione di calore (o allungamento del condotto) costringe la natura a rivedere le condizioni d'ingresso — riduzione del Mach subsonico d'ingresso, oppure urto normale risalito nell'ugello per ingressi supersonici. Differenza profonda: la curva di Rayleigh si percorre in entrambi i sensi (riscaldare/raffreddare), la curva di Fanno in uno solo (l'entropia d'attrito non si restituisce).

Attenzione

Promemoria sui limiti di validità del modello, da dichiarare sempre nei vostri elaborati: gas caloricamente perfetto (γ costante: in aria, affidabile fino a temperature a valle dell'ordine di 1000 K–1500 K e $M_1 \lesssim 5$ per gli urti); flusso stazionario; proprietà uniformi sulla sezione; forze di volume trascurate; nel flusso di Rayleigh l'attrito è trascurato, nel flusso di Fanno è trascurato il calore — nei condotti reali i due effetti convivono e i modelli vanno intesi come casi limite.

Osservazione — Il senso di tutto questo

Se di questa monografia dovete conservare tre sole idee, siano queste. *Primo*: il numero di Mach a monte governa tutto — urti, tendenze, strozzamenti. *Secondo*: la temperatura totale è la contabilità dell'energia (si conserva nell'adiabatico, misura il calore addotto), la pressione totale è la contabilità della qualità (ogni irreversibilità la consuma, e non si riacquista). *Terzo*: un condotto ad area costante non subisce passivamente ciò che gli accade: oltre i limiti di strozzamento, comanda a ritroso e ristruttura la corrente che lo alimenta. Con questi tre principi siete pronti per il passo successivo della serie: gli urti obliqui e le espansioni, dove il flusso guadagna la seconda dimensione.

12 I problemi di fine capitolo, svolti uno per uno

Nota — Dove stiamo andando

Chiudiamo la parte operativa della monografia con una raccolta di sedici problemi che ripercorrono, uno per uno, tutti i temi trattati: relazioni isentropiche e critiche, urti normali e anemometria di Pitot, flusso con adduzione di calore, flusso con attrito. Tutti i dati sono espressi nel Sistema Internazionale; le soluzioni sono sviluppate per fasi, con il metodo e le tavole di questa monografia (§13), e ogni valore numerico è stato verificato con script di calcolo indipendenti. Il consiglio operativo è di provare ciascun problema da soli *prima* di leggere lo svolgimento: qui sotto trovate la rete di sicurezza, non la scorciatoia.

Problema 1 — Condizioni totali e critiche su un'ala veloce

In un punto della corrente ad alta velocità attorno all'ala di un aeroplano si hanno $M = 0,7$, $p = 0,9$ atm, $T = 250$ K. Calcolare p_0 , T_0 , p^* , T^* e a^* in quel punto.

Fase A — Condizioni totali. Dalle (5.8)–(5.9) con $M = 0,7$:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + 0,2 \times 0,49 = 1,098, \quad \frac{p_0}{p} = 1,098^{3,5} = 1,387,$$

quindi $T_0 = 1,098 \times 250 = 274,5$ K e $p_0 = 1,387 \times 0,9 = 1,248$ atm.

Fase B — Condizioni critiche. Come nell'esercizio svolto 1: nell'arresto adiabatico T_0 è costante, nell'arresto isentropico p_0 è costante. Con i valori notevoli (5.14):

$$T^* = 0,8333 T_0 = 228,7 \text{ K}, \quad p^* = 0,5283 p_0 = 0,660 \text{ atm},$$

$$a^* = \sqrt{\gamma R T^*} = \sqrt{1,4 \times 287 \times 228,7} = 303,2 \text{ m/s}.$$

Commento. Notare che $p^* < p$ e $T^* < T$: il punto è subsonico, e per portarlo a $M = 1$ occorre *accelerarlo*, espandendolo e raffreddandolo. Per un punto supersonico accadrebbe il contrario.

Problema 2 — Mach da pressione statica e totale in galleria

In un punto di una galleria supersonica si misurano $p = 5 \times 10^4$ N/m² e $T = 200$ K; la pressione totale nello stesso punto vale $p_0 = 1,5 \times 10^6$ N/m². Calcolare Mach locale e temperatura totale.

Fase A — Il Mach dal rapporto di pressioni. $p_0/p = 1,5 \times 10^6 / 5 \times 10^4 = 30$. Invertiamo la (5.9):

$$M = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]} = \sqrt{5 (30^{2/7} - 1)} = \sqrt{5 \times (2,643 - 1)} = 2,87.$$

Fase B — Temperatura totale.

$$T_0 = T (1 + 0,2 M^2) = 200 \times 2,643 = 528,5 \text{ K}.$$

Commento. Il fattore $(p_0/p)^{(\gamma-1)/\gamma}$ è, per costruzione, proprio T_0/T : pressione e temperatura totali sono due facce della stessa relazione isentropica. Attenzione all'ipotesi implicita: il rapporto misurato è convertibile in Mach con la sola (5.9) perché qui *non c'è alcun urto* fra il punto e lo stato di ristagno che definisce p_0 ; con una sonda Pitot in corrente supersonica non sarebbe così (problema 5).

Problema 3 — Mach e Mach caratteristico su un missile

In un punto della corrente attorno a un missile ad alta velocità si hanno velocità $V = 914,4$ m/s e temperatura $T = 277,8$ K. Calcolare M e M^* .

Fase A — Il Mach.

$$a = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{1,4 \times 287 \times 277,8} = 334,1 \text{ m/s}, \quad M = \frac{914,4}{334,1} = 2,74.$$

Fase B — Il Mach caratteristico. Dalla (5.15):

$$M^* = \sqrt{\frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2}} = \sqrt{\frac{2,4 \times 7,49}{2 + 0,4 \times 7,49}} = \sqrt{3,599} = 1,90.$$

Commento. $M = 2,74$ ma $M^* = 1,90$: il Mach caratteristico “comprime” la scala supersonica, e per $M \rightarrow \infty$ saturerebbe a $\sqrt{6} = 2,449$. È esattamente il comportamento che lo rende comodo nelle formule d’urto. Si noti che M e M^* , essendo grandezze adimensionali, non dipendono dal sistema di unità con cui sono espressi V e T : la fisica del punto è la stessa, in m/s o in qualunque altra unità.

Problema 4 — Urto normale: stato a valle completo

Un urto normale in aria ha condizioni a monte $M_1 = 3$, $p_1 = 1$ atm, $\rho_1 = 1,23$ kg/m³. Calcolare a valle p_2 , T_2 , ρ_2 , M_2 , u_2 , p_{02} e T_{02} .

Fase A — Completare lo stato a monte. La temperatura a monte non è data ma segue dallo stato:

$$T_1 = \frac{p_1}{\rho_1 R} = \frac{101325}{1,23 \times 287} = 287,0 \text{ K},$$

$$a_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = 339,6 \text{ m/s}, \quad u_1 = M_1 a_1 = 1019 \text{ m/s}.$$

Fase B — Rapporti d’urto (formule (6.9)–(6.12), o Tavola 2 alla riga $M_1 = 3$):

$$M_2 = 0,4752, \quad \frac{p_2}{p_1} = 10,33, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = 3,857, \quad \frac{T_2}{T_1} = 2,679, \quad \frac{p_{02}}{p_{01}} = 0,3283.$$

Fase C — Stato a valle.

$$p_2 = 10,33 \text{ atm}, \quad T_2 = 2,679 \times 287 = 769 \text{ K}, \quad \rho_2 = 3,857 \times 1,23 = 4,74 \text{ kg/m}^3,$$

$$a_2 = \sqrt{\gamma R T_2} = 555,9 \text{ m/s}, \quad u_2 = M_2 a_2 = 264 \text{ m/s}.$$

Fase D — Grandezze totali. Dalla Tavola 1 a $M_1 = 3$: $p_{01}/p_1 = 36,73$, quindi $p_{01} = 36,73$ atm e $p_{02} = 0,3283 \times 36,73 = 12,06$ atm. La temperatura totale si conserva:

$$T_{02} = T_{01} = T_1 (1 + 0,2 \times 9) = 287 \times 2,8 = 803,7 \text{ K}.$$

Commento. Un urto a $M_1 = 3$ è già un evento violento: la pressione statica decuplica, la velocità crolla da 1019 a 264 m/s, e due terzi della pressione totale evaporano in entropia. Confrontate con l’esercizio svolto 4 ($M_1 = 2,8$): la sensibilità di p_{02}/p_{01} al Mach è evidente.

Problema 5 — Anemometria Pitot-statica in tre regimi

Una sonda Pitot-statica sul muso di un velivolo sperimentale misura la pressione totale all'imboccatura (pressione di Pitot) e, simultaneamente, la pressione statica della corrente. Determinare il Mach di volo nei tre casi: (a) Pitot 122 kPa, statica 101 kPa; (b) Pitot 345,8 kPa, statica 101,3 kPa; (c) Pitot 627,6 kPa, statica 48,8 kPa.

Fase A — Il discrimine sub/supersonico. Prima di scegliere la formula bisogna capire il regime. In subsonico la sonda misura la vera p_0 della corrente e vale la relazione isentropica (5.9); in supersonico c'è l'urto davanti alla sonda e la lettura è p_{02} (formula di Rayleigh, Tavola 2, ultima colonna). Il valore soglia è il rapporto isentropico a $M = 1$: $p_0/p = 1,893$. Se la lettura supera 1,893 volte la statica, il volo è supersonico.

Caso (a). Rapporto $122/101 = 1,208 < 1,893$: subsonico. Dalla (5.9) invertita:

$$M = \sqrt{5(1,208^{2/7} - 1)} = \sqrt{5 \times 0,0555} = 0,53.$$

Caso (b). Rapporto $345,8/101,3 = 3,413 > 1,893$: supersonico. Sulla Tavola 2, colonna p_{02}/p_1 , il valore 3,413 cade esattamente alla riga

$$M = 1,50.$$

Caso (c). Rapporto $627,6/48,8 = 12,85$: decisamente supersonico. Interpolando sulla stessa colonna fra $M_1 = 3$ ($p_{02}/p_1 = 12,06$) e $M_1 = 3,2$ ($p_{02}/p_1 = 13,66$):

$$M \simeq 3 + 0,2 \times \frac{12,85 - 12,06}{13,66 - 12,06} = 3,10.$$

Commento. La statica del caso (b), 101,3 kPa, è quella di quota zero; quella del caso (c), 48,8 kPa, corrisponde a circa 6300 m: i tre casi disegnano il tipico involuppo di prova di un velivolo sperimentale. Il punto tecnico è la Fase A: prima di ogni conto, il regime.

Problema 6 — Compressione d'urto contro compressione isentropica

A partire dalle stesse condizioni iniziali p_1, v_1 , confrontare sul piano $p-v$ la compressione mediante urto e quella isentropica. Che cosa si conclude sull'efficacia delle due compressioni?

Fase A — Le due curve. Le curve sono la Hugoniot (7.6) e l'isentropica $p_2/p_1 = (v_1/v_2)^\gamma$, entrambe spiccate dal punto (p_1, v_1) : sono esattamente quelle già tracciate nella figura 7, che costituisce la risposta grafica al problema.

Fase B — Confronto quantitativo. Costruiamo la tabella per alcuni rapporti di compressione volumetrica:

v_1/v_2	p_2/p_1 urto (Hugoniot)	p_2/p_1 isentropica
2	2,75	2,64
3	5,67	4,66
4	11,50	6,96
5	29,0	9,52

Nel punto iniziale le due curve hanno la stessa pendenza (l'urto infinitamente debole è isentropico); al crescere della compressione la Hugoniot si stacca verso l'alto, fino a divergere per $v_1/v_2 \rightarrow 0$.

Fase C — Conclusione. A parità di riduzione di volume, l'urto produce un salto di pressione maggiore: la compressione d'urto è più *efficace*. Ma non è più *efficiente*: il sovrappiù di pressione statica si paga

con produzione di entropia e perdita di pressione totale, assenti nella compressione isentropica. È la distinzione discussa nella §7, che qui il calcolo rende tangibile.

Problema 7 — Il rientro dell'Apollo e i limiti del modello

Durante il rientro atmosferico della capsula Apollo, in un punto della traiettoria si avevano $M = 38$ e temperatura atmosferica $T = 270$ K. Calcolare la temperatura nel punto di ristagno del veicolo con il modello di gas caloricamente perfetto ($\gamma = 1,4$). Il risultato è attendibile? Se no, perché, e in quale verso sbaglia?

Fase A — Il calcolo formale. La temperatura di ristagno si conserva attraverso l'urto ad arco; dalla (5.8):

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) = 270 \times (1 + 0,2 \times 1444) = 270 \times 289,8 \simeq 78\,200 \text{ K.}$$

Fase B — Il giudizio critico. Il numero è fisicamente insensato: 78 200 K è oltre dieci volte la temperatura superficiale del Sole. Il modello è stato usato ben oltre i suoi limiti di validità (che nella §6 avevamo fissato attorno a $M_1 \simeq 5$): a temperature simili l'aria vibra, si dissocia (O_2 e N_2 si rompono in atomi) e si ionizza. Tutti questi processi *assorbono energia*: l'energia cinetica della capsula, invece di finire tutta in agitazione termica traslazionale, viene in gran parte investita nei gradi di libertà interni e nella chimica. Equivalentemente: c_p cresce e γ scende ben sotto 1,4.

Fase C — Il verso dell'errore. Il calcolo con $\gamma = 1,4$ *sovrastima* la temperatura di ristagno: il valore reale per l'Apollo era dell'ordine di 11 000 K — enorme, ma sette volte più basso. È il motivo per cui l'aerotermodinamica del rientro si studia con modelli di gas reale in equilibrio o non-equilibrio chimico, e il motivo per cui la monografia dichiara sempre i limiti dei propri modelli.

Problema 8 — Quanto calore per strozzare un condotto?

In un condotto riscaldato (attrito trascurabile) entra aria a $p_1 = 1$ atm, $T_1 = 288$ K. Calcolare il calore per unità di massa necessario a strozzare il flusso all'uscita, insieme a pressione e temperatura di uscita, nei due casi: (a) $M_1 = 2,0$; (b) $M_1 = 0,2$.

Caso (a), Fase A — Temperature totali. $T_{01} = 288 \times 1,8 = 518,4$ K. Dalla Tavola 3 a $M = 2$: $T_{01}/T_0^* = 0,7934$, quindi $T_0^* = 518,4/0,7934 = 653,4$ K.

Caso (a), Fase B — Calore di strozzamento. Allo strozzamento $T_{02} = T_0^*$; dalla (8.2):

$$q^* = c_p (T_0^* - T_{01}) = 1004,5 \times (653,4 - 518,4) = 1,36 \times 10^5 \text{ J/kg.}$$

Caso (a), Fase C — Stato d'uscita. L'uscita è lo stato stellato: dalla Tavola 3 a $M = 2$, $p_1/p^* = 0,3636$ e $T_1/T^* = 0,5289$, quindi

$$p_2 = p^* = \frac{1}{0,3636} = 2,75 \text{ atm,} \quad T_2 = T^* = \frac{288}{0,5289} = 544,5 \text{ K.}$$

Caso (b), Fase A–C. Con $M_1 = 0,2$: $T_{01} = 288 \times 1,008 = 290,3$ K; $T_{01}/T_0^* = 0,1736$ e $T_0^* = 1672,7$ K;

$$q^* = 1004,5 \times (1672,7 - 290,3) = 1,39 \times 10^6 \text{ J/kg;}$$

dalla Tavola 3 a $M = 0,2$: $p_1/p^* = 2,273$, $T_1/T^* = 0,2066$, quindi

$$p_2 = p^* = \frac{1}{2,273} = 0,44 \text{ atm,} \quad T_2 = T^* = \frac{288}{0,2066} = 1394 \text{ K.}$$

Commento. Il confronto è la parte istruttiva: il flusso subsonico lento assorbe *dieci volte* più calore prima di strozzarsi ($1,39 \times 10^6$ contro $1,36 \times 10^5$ J/kg) — è il motivo per cui i combustori si progettano a Mach d'ingresso basso. E si notino i versi opposti della pressione d'uscita: il supersonico, riscaldandosi, *comprime* ($1 \rightarrow 2,75$ atm); il subsonico *espande* ($1 \rightarrow 0,44$ atm).

Problema 9 — Combustore di turbogetto con rapporto di miscela

Nel combustore di un motore a getto l'aria entra a $p_1 = 10$ atm, $T_1 = 555,6$ K, $M_1 = 0,2$. Si inietta e brucia combustibile con rapporto di miscela (in massa) combustibile/aria $f = 0,06$; il potere calorifico è $H = 4,18 \times 10^7$ J/kg di combustibile. Assumendo flusso monodimensionale senza attrito con $\gamma = 1,4$ per la miscela, calcolare M_2, p_2, T_2 all'uscita.

Fase A — Il calore per unità di massa di miscela. Attenzione al dettaglio che decide l'esercizio: il combustibile iniettato *si aggiunge* alla portata. Per ogni chilogrammo d'aria escono $1+f = 1,06$ chilogrammi di miscela, e il calore rilasciato da f chilogrammi di combustibile va riferito alla massa di miscela:

$$q = \frac{f}{1+f} H = \frac{0,06}{1,06} \times 4,18 \times 10^7 \text{ J/kg} = 2,366 \times 10^6 \text{ J/kg}.$$

Fase B — Temperature totali. Con $c_p = 1004,5$ J/(kg K): $T_{01} = 555,6 \times 1,008 = 560,0$ K e

$$T_{02} = T_{01} + \frac{q}{c_p} = 560 + \frac{2,366 \times 10^6}{1004,5} = 560 + 2356 = 2916 \text{ K}.$$

Fase C — Il Mach d'uscita. Con $M_1 = 0,2$: $T_{01}/T_0^* = 0,1736$, dunque $T_0^* = 560/0,1736 = 3227$ K e

$$\frac{T_{02}}{T_0^*} = \frac{2916}{3227} = 0,904 \quad \Rightarrow \quad M_2 = 0,69$$

(ramo subsonico della Tavola 3).

Fase D — Stato d'uscita. Componendo con lo stato stellato (Tavola 3 a $M = 0,2$ e $M = 0,69$):

$$p_2 = p_1 \frac{p_2/p^*}{p_1/p^*} = 10 \times \frac{1,434}{2,273} = 6,31 \text{ atm}, \quad T_2 = T_1 \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = 555,6 \times \frac{0,989}{0,2066} = 2660 \text{ K}.$$

Commento. Il combustore lavora vicino al limite: $T_{02}/T_0^* = 0,90$ lascia poco margine, come conferma il problema successivo. E si osservi la caduta di pressione statica ($10 \rightarrow 6,3$ atm): nei combustori reali questa “perdita fondamentale” da adduzione di calore si somma a quelle per attrito. La temperatura d'uscita di 2660 K è, peraltro, al limite dell'ipotesi di γ costante: un calcolo di progetto userebbe proprietà termodinamiche variabili con la temperatura.

Problema 10 — Il rapporto di miscela massimo

Con le condizioni d'ingresso del problema 9, calcolare il rapporto di miscela oltre il quale il flusso si strozza all'uscita.

Fase A — Il calore massimo assorbibile. Lo strozzamento avviene per $T_{02} = T_0^* = 3227$ K (già calcolato). Il calore massimo per unità di massa di miscela:

$$q^* = c_p (T_0^* - T_{01}) = 1004,5 \times (3227 - 560) = 2,679 \times 10^6 \text{ J/kg}.$$

Fase B — Dal calore al rapporto di miscela. Uguagliamo al calore rilasciato per unità di massa di miscela, $q = \frac{f}{1+f} H$:

$$\frac{f}{1+f} = \frac{2,679 \times 10^6}{4,18 \times 10^7} = 0,0641 \quad \Rightarrow \quad f_{\max} = \frac{0,0641}{1 - 0,0641} = 0,0685.$$

Commento. Il combustore del problema 9, che lavora a $f = 0,06$, ha dunque un margine sottile: basta un arricchimento della miscela del 14 % per strozzarlo, con la conseguente ristrutturazione del flusso a monte (riduzione del Mach d'ingresso, cioè della portata elaborata). È un vincolo operativo reale dei motori a getto, qui letto con la sola algebra di Rayleigh.

Problema 11 — SCRAMjet: il Mach d'ingresso che evita lo strozzamento

All'ingresso del combustore di uno statoreattore a combustione supersonica (SCRAMjet) il Mach è supersonico. Con rapporto di miscela $f = 0,03$, temperatura totale d'uscita del combustore di 2667 K e potere calorifico $H = 4,18 \times 10^7$ J/kg di combustibile, calcolare il Mach d'ingresso al di sopra del quale il flusso non è strozzato ($\gamma = 1,4$, flusso senza attrito).

Fase A — Il calore e il salto di temperatura totale. Come nel problema 9, per unità di massa di miscela:

$$q = \frac{0,03}{1,03} \times 4,18 \times 10^7 \text{ J/kg} = 1,218 \times 10^6 \text{ J/kg} \quad \Rightarrow \quad \Delta T_0 = \frac{q}{c_p} = \frac{1,218 \times 10^6}{1004,5} = 1212 \text{ K}.$$

Quindi la temperatura totale d'ingresso è $T_{01} = T_{02} - \Delta T_0 = 2667 - 1212 = 1455 \text{ K}$.

Fase B — La condizione di non strozzamento. Il flusso resta supersonico e non strozzato finché la temperatura totale d'uscita non supera quella di strozzamento associata al Mach d'ingresso: $T_{02} \leq T_0^*(M_1)$. Riscritta con la funzione di Rayleigh:

$$\frac{T_{01}}{T_0^*}(M_1) \leq \frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{1455}{2667} = 0,545.$$

Sul ramo supersonico la funzione T_0/T_0^* è *decescente* con il Mach (dal valore 1 a $M = 1$ verso l'asintoto $(\gamma^2 - 1)/\gamma^2 = 0,490$ per $M \rightarrow \infty$): la condizione è dunque soddisfatta per Mach d'ingresso sufficientemente *alti*.

Fase C — Il Mach limite. Risolvendo numericamente $T_0/T_0^*(M_1) = 0,545$ sul ramo supersonico (interpolando sulla Tavola 3 fra $M = 5$ e $M = 6$):

$$M_1 = 5,47.$$

Per $M_1 > 5,47$ il combustore assorbe il calore senza strozzarsi.

Commento. Due osservazioni. Primo: il risultato spiega *perché* esistono gli SCRAMjet — a Mach di volo elevati, rallentare la corrente a valori subsonici in camera produrrebbe perdite d'urto e temperature ingestibili, e la combustione deve restare supersonica; il choking termico fissa il Mach minimo di camera. Secondo: a 2667 K l'ipotesi $\gamma = 1,4$ costante è già ottimistica (il problema la impone, e va dichiarata): un calcolo di progetto userebbe proprietà termodinamiche variabili.

Problema 12 — Fanno a ritroso: dalle condizioni d'uscita a quelle d'ingresso

In un tubo di diametro interno $D = 0,02$ m e lunghezza $L = 40$ m scorre aria. Le condizioni *all'uscita* sono $M_2 = 0,5$, $p_2 = 1$ atm, $T_2 = 270$ K. Assumendo flusso adiabatico monodimensionale con $f = 0,005$ costante, calcolare M_1 , p_1 , T_1 all'ingresso.

Fase A — Il bilancio delle lunghezze, all'indietro. Il condotto consuma

$$\frac{4\tilde{f}L}{D} = \frac{4 \times 0,005 \times 40}{0,02} = 40,0,$$

un valore enorme (tubo lungo e sottile). Dalla Tavola 4 a $M_2 = 0,5$: $\left(\frac{4\tilde{f}L^*}{D}\right)_2 = 1,069$. Andando a ritroso, all'ingresso deve valere

$$\left(\frac{4\tilde{f}L^*}{D}\right)_1 = 1,069 + 40,0 = 41,07 \quad \Rightarrow \quad M_1 = 0,126$$

(ramo subsonico; il Mach d'ingresso deve essere *minore* di quello d'uscita, perché l'attrito accelera il subsonico).

Fase B — Pressione e temperatura d'ingresso. Componendo con lo stato stellato (Tavola 4 a $M = 0,126$ e $M = 0,5$):

$$p_1 = p_2 \frac{p_1/p^*}{p_2/p^*} = 1 \times \frac{8,70}{2,138} = 4,07 \text{ atm}, \quad T_1 = T_2 \frac{T_1/T^*}{T_2/T^*} = 270 \times \frac{1,196}{1,143} = 282,6 \text{ K}.$$

Commento. Per spingere l'aria lungo 40 m di tubo da 2 cm serve un rapporto di pressione di oltre 4:1 — quasi tutto mangiato dall'attrito. E il condotto, con $M_2 = 0,5$ in uscita, non è nemmeno strozzato: esercizio per casa, quanto tubo in più lo strozzerebbe? (Risposta: $L_2^* = 1,069 \times D/(4\tilde{f}) \simeq 1,1$ m.)

Problema 13 — Fanno supersonico in condotto corto

Aria fluisce adiabaticamente in un tubo di diametro $D = 0,061$ m e lunghezza $L = 0,914$ m. All'ingresso: $M_1 = 2,5$, $p_1 = 0,5$ atm, $T_1 = 288,9$ K. Con $f = 0,005$ costante, calcolare all'uscita M_2 , p_2 , T_2 e p_{02} .

Fase A — Bilancio delle lunghezze. $4\tilde{f}L/D = 4 \times 0,005 \times 0,914/0,061 = 0,300$. Dalla Tavola 4 a $M_1 = 2,5$: $\left(\frac{4\tilde{f}L^*}{D}\right)_1 = 0,432$; residuo all'uscita

$$\left(\frac{4\tilde{f}L^*}{D}\right)_2 = 0,432 - 0,300 = 0,132 \quad \Rightarrow \quad M_2 = 1,49$$

(ramo supersonico: l'attrito decelera).

Fase B — Stato d'uscita. Componendo i rapporti stellati fra $M = 2,5$ e $M = 1,49$:

$$p_2 = 0,5 \times \frac{0,612}{0,292} = 1,05 \text{ atm}, \quad T_2 = 288,9 \times \frac{0,831}{0,533} = 450 \text{ K}.$$

Fase C — Pressione totale. Dalla Tavola 1: $p_{01} = 0,5 \times 17,09 = 8,54$ atm; con i rapporti p_0/p_0^* della Tavola 4:

$$p_{02} = p_{01} \frac{(p_0/p_0^*)_2}{(p_0/p_0^*)_1} = 8,54 \times \frac{1,169}{2,637} = 3,79 \text{ atm}.$$

Commento. Meno di un metro di tubo, e il Mach crolla da 2,5 a 1,49 con più di metà della pressione totale perduta: la stessa ferocia dell'attrito supersonico vista nell'esercizio svolto II. Verifica di coerenza:

la temperatura totale, adiabatica, resta $T_0 = 288,9 \times 2,25 = 650 \text{ K}$ a entrambe le stazioni (controllate con la Tavola 1 a $M = 1,49$: $450 \times 1,444 = 650 \text{ K}$, torna esattamente).

Problema 14 — La condotta dal parco bombole alla camera di ristagno

La camera di ristagno di una galleria è alimentata da un parco bombole esterno all'edificio tramite una lunga condotta di diametro interno $D = 0,102 \text{ m}$. Il rapporto fra la pressione statica al parco bombole e quella in camera vale 10 (con 100 atm alle bombole). Assumendo flusso subsonico adiabatico con $f = 0,005$, quanto può essere lunga la condotta senza strozzarsi?

Fase A — Tradurre la domanda. La lunghezza massima si ha quando il flusso è *esattamente* strozzato: $M_2 = 1$ all'uscita, cioè l'uscita coincide con lo stato stellato. In tal caso $p_2 = p^*$ e il rapporto di pressioni assegnato diventa

$$\frac{p_1}{p^*} = 10.$$

Fase B — Il Mach d'ingresso. Sulla Tavola 4, colonna p/p^* , ramo subsonico, il valore 10 cade a

$$M_1 = 0,109$$

(per Mach piccoli vale l'approssimazione $p/p^* \simeq \sqrt{(\gamma+1)/2}/M \simeq 1,095/M$, che dà subito $M_1 \simeq 0,11$: sempre utile un controllo d'ordine di grandezza).

Fase C — La lunghezza massima. Alla stessa riga della Tavola 4: $4\tilde{f}L^*/D = 55,3$. Con $D = 0,102 \text{ m}$:

$$L_{\max} = L^* = 55,3 \times \frac{D}{4\tilde{f}} = 55,3 \times \frac{0,102}{0,02} = 281 \text{ m}.$$

Commento. Quasi trecento metri: più che sufficienti per attraversare un laboratorio. Ma il vincolo è reale — se la condotta fosse più lunga, il flusso si strozzerebbe e la portata disponibile in camera calerebbe da sola, con la galleria che non raggiunge più le condizioni di progetto. Notare l'eleganza del metodo: il rapporto di pressioni fissa M_1 , e M_1 fissa la lunghezza; due letture di tavola.

Problema 15 — La derivazione dell'equazione differenziale di Fanno

Partendo dalla forma differenziale della quantità di moto con attrito (9.4), ricavare per esteso l'equazione (9.5).

Fase A — Adimensionalizzare la quantità di moto. Punto di partenza:

$$dp + \rho u \, du = -\frac{1}{2} \rho u^2 \frac{4f \, dx}{D}.$$

Osserviamo (identità (8.3)) che $\rho u^2 = \gamma p M^2$. Dividendo tutto per p :

$$\frac{dp}{p} + \frac{\rho u^2}{p} \frac{du}{u} = -\frac{\gamma M^2}{2} \frac{4f \, dx}{D} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} + \gamma M^2 \frac{du}{u} = -\frac{\gamma M^2}{2} \frac{4f \, dx}{D}. \quad (\perp)$$

Il problema è ora ridurre dp/p e du/u a dM/M .

Fase B — La velocità in funzione del Mach. Dalla definizione $M^2 = u^2/(\gamma RT)$, differenziando logicamente:

$$2 \frac{dM}{M} = 2 \frac{du}{u} - \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T}.$$

L'energia adiabatica $c_p T + u^2/2 = \text{cost}$, differenziata, dà $c_p dT + u du = 0$, cioè

$$\frac{dT}{T} = -\frac{u^2}{c_p T} \frac{du}{u} = -(\gamma - 1)M^2 \frac{du}{u}$$

(avendo usato $c_p T = a^2/(\gamma - 1)$). Sostituendo nella precedente e raccogliendo du/u :

$$\frac{du}{u} \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right] = \frac{dM}{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \frac{dM/M}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}. \quad (\perp\perp)$$

Fase C — La pressione in funzione della velocità. Continuità $\rho u = \text{cost}$: $d\rho/\rho = -du/u$. Stato $p = \rho R T$:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} = -\frac{du}{u} - (\gamma - 1)M^2 \frac{du}{u} = -\left[1 + (\gamma - 1)M^2 \right] \frac{du}{u}.$$

Fase D — Ricomporre. Sostituiamo nella $(\perp)$:

$$\left\{ -\left[1 + (\gamma - 1)M^2 \right] + \gamma M^2 \right\} \frac{du}{u} = -\frac{\gamma M^2}{2} \frac{4f dx}{D}.$$

La parentesi vale $M^2 - 1$; quindi $(M^2 - 1) du/u = -\frac{\gamma M^2}{2} 4f dx/D$, ossia

$$\frac{4f dx}{D} = \frac{2(1 - M^2)}{\gamma M^2} \frac{du}{u},$$

e con la $(\perp\perp)$:

$$\boxed{\frac{4f dx}{D} = \frac{2(1 - M^2)}{\gamma M^2 \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]} \frac{dM}{M}}$$

che è esattamente la (9.5). Integrata fra M e 1, produce la formula della lunghezza di strozzamento (9.6).

Commento. La derivazione è un modello di metodo: ogni equazione di governo è stata usata *una* volta, in forma differenziale logaritmica — quantità di moto in $(\perp)$, definizione di Mach e energia in $(\perp\perp)$, continuità e stato nella Fase C — e l'algebra ha fatto il resto. Ritroverete la stessa tecnica, identica, nel ricavare le relazioni area-Mach del flusso quasi-monodimensionale.

Problema 16 — Calore adimensionale e similitudine

Aria entra a $M_1 = 2,5$ in un condotto ad area costante, dove riceve un calore pari al 30 % dell'entalpia totale d'ingresso. Calcolare il Mach d'uscita e commentare il significato fluidodinamico del risultato.

Fase A — Il dato in forma totale. L'entalpia totale d'ingresso è $h_{01} = c_p T_{01}$; il calore vale $q = 0,3 c_p T_{01}$. Dalla (8.2):

$$c_p (T_{02} - T_{01}) = 0,3 c_p T_{01} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_{02}}{T_{01}} = 1,3.$$

Nessun valore dimensionale di q , di T_1 , di p_1 è necessario.

Fase B — Il Mach d'uscita. Con $M_1 = 2,5$: $T_{01}/T_0^* = 0,710$ (Tavola 3). Allora

$$\frac{T_{02}}{T_0^*} = 1,3 \times 0,710 = 0,923 \quad \Rightarrow \quad M_2 = 1,44$$

(ramo supersonico: il calore ha decelerato la corrente senza portarla a $M = 1$; il margine di strozzamento sarebbe $q/h_{01} = 1/0,710 - 1 = 0,41$, cioè il 41 %).

Fase C — Il significato fluidodinamico. Il Mach d'uscita non dipende dal valore in joule del calore addotto, ma solo dal rapporto adimensionale q/h_{01} (e da M_1 , γ). È un esempio puro di *similitudine gasdinamica*: due condotti con temperature d'ingresso diverse ma stesso M_1 e stesso q/h_{01} hanno identica evoluzione del Mach. È lo stesso principio per cui tutte le tavole di questa monografia sono adimensionali, e per cui le prove in galleria si trasferiscono al volo reale attraverso i gruppi adimensionali, non attraverso i valori assoluti.

Osservazione — Il senso di tutto questo

Sedici problemi, quattro famiglie: relazioni isentropiche e critiche (3.1–3.3), urti e Pitot (3.4–3.7), Rayleigh (3.8–3.11, 3.16), Fanno (3.12–3.15). Se li ripercorrete, noterete che lo schema risolutivo è sempre lo stesso, in quattro mosse: identificare il regime e il modello; passare alle grandezze totali; usare lo stato di riferimento (critico o stellato) come pedina di scambio; comporre i rapporti. Chi possiede questo schema non deve ricordare sedici soluzioni: ne deve ricordare una.

13 Appendice: tavole gasdinamiche essenziali ($\gamma = 1,4$)

Nota — Come usare queste tavole

Le quattro tavole che seguono rendono la monografia autosufficiente per lo svolgimento di ogni esercizio: contengono le stesse funzioni tabulate nelle appendici dei testi di gasdinamica, calcolate con le formule di questa monografia. Per valori intermedi di M si interpola linearmente fra le righe adiacenti (oppure, meglio, si usano direttamente le formule con una calcolatrice: sono tutte in forma chiusa). Tutti i valori sono stati generati con uno script di calcolo indipendente.

13.1 Tavola 1 — Flusso isentropico

M	T_0/T	p_0/p	ρ_0/ρ	M^*	M	T_0/T	p_0/p	ρ_0/ρ	M^*
0,05	1,0005	1,0018	1,0013	0,0548	1,20	1,2880	2,4250	1,8827	1,1583
0,10	1,0020	1,0070	1,0050	0,1094	1,30	1,3380	2,7707	2,0708	1,2311
0,15	1,0045	1,0158	1,0113	0,1639	1,40	1,3920	3,1823	2,2861	1,2999
0,20	1,0080	1,0283	1,0201	0,2182	1,50	1,4500	3,6710	2,5317	1,3646
0,25	1,0125	1,0444	1,0315	0,2722	1,60	1,5120	4,2504	2,8111	1,4254
0,30	1,0180	1,0644	1,0456	0,3257	1,70	1,5780	4,9360	3,1280	1,4825
0,35	1,0245	1,0884	1,0624	0,3788	1,80	1,6480	5,7458	3,4865	1,5360
0,40	1,0320	1,1166	1,0819	0,4313	1,90	1,7220	6,7006	3,8912	1,5861
0,45	1,0405	1,1491	1,1043	0,4833	2,00	1,8000	7,8244	4,3469	1,6330
0,50	1,0500	1,1862	1,1297	0,5345	2,20	1,9680	10,6927	5,4333	1,7179
0,55	1,0605	1,2283	1,1582	0,5851	2,40	2,1520	14,6200	6,7937	1,7922
0,60	1,0720	1,2755	1,1898	0,6348	2,50	2,2500	17,0859	7,5938	1,8257
0,65	1,0845	1,3283	1,2248	0,6837	2,60	2,3520	19,9540	8,4839	1,8571
0,70	1,0980	1,3871	1,2633	0,7318	2,80	2,5680	27,1383	10,5679	1,9140
0,75	1,1125	1,4523	1,3054	0,7789	3,00	2,8000	36,7327	13,1188	1,9640
0,80	1,1280	1,5243	1,3514	0,8251	3,20	3,0480	49,4370	16,2195	2,0079
0,85	1,1445	1,6038	1,4013	0,8704	3,50	3,4500	76,2723	22,1079	2,0642
0,90	1,1620	1,6913	1,4555	0,9146	4,00	4,2000	151,84	36,1512	2,1381
0,95	1,1805	1,7874	1,5141	0,9578	4,50	5,0500	289,41	57,3097	2,1936
1,00	1,2000	1,8929	1,5774	1,0000	5,00	6,0000	529,09	88,1816	2,2361
1,10	1,2420	2,1351	1,7191	1,0812	6,00	8,2000	1578,88	192,5461	2,2953
					7,00	10,8000	4139,84	383,3182	2,3333
					8,00	13,8000	9762,85	707,4532	2,3591

13.2 Tavola 2 — Urto normale

M_1	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	p_{02}/p_1
1,00	1,0000	1,000	1,0000	1,0000	1,0000	1,893
1,10	0,9118	1,245	1,1691	1,0649	0,9989	2,133
1,20	0,8422	1,513	1,3416	1,1280	0,9928	2,408
1,30	0,7860	1,805	1,5157	1,1909	0,9794	2,714
1,40	0,7397	2,120	1,6897	1,2547	0,9582	3,049
1,50	0,7011	2,458	1,8621	1,3202	0,9298	3,413
1,60	0,6684	2,820	2,0317	1,3880	0,8952	3,805
1,70	0,6405	3,205	2,1977	1,4583	0,8557	4,224
1,80	0,6165	3,613	2,3592	1,5316	0,8127	4,670
1,90	0,5956	4,045	2,5157	1,6079	0,7674	5,142
2,00	0,5774	4,500	2,6667	1,6875	0,7209	5,640
2,20	0,5471	5,480	2,9512	1,8569	0,6281	6,716
2,40	0,5231	6,553	3,2119	2,0403	0,5401	7,897
2,50	0,5130	7,125	3,3333	2,1375	0,4990	8,526
2,60	0,5039	7,720	3,4490	2,2383	0,4601	9,181
2,80	0,4882	8,980	3,6636	2,4512	0,3895	10,569
3,00	0,4752	10,333	3,8571	2,6790	0,3283	12,061
3,20	0,4643	11,780	4,0315	2,9220	0,2762	13,656
3,50	0,4512	14,125	4,2609	3,3151	0,2129	16,242
4,00	0,4350	18,500	4,5714	4,0469	0,1388	21,068
4,50	0,4236	23,458	4,8119	4,8751	0,0917	26,539
5,00	0,4152	29,000	5,0000	5,8000	0,0617	32,653
6,00	0,4042	41,833	5,2683	7,9406	0,0297	46,815
7,00	0,3974	57,000	5,4444	10,4694	0,0154	63,553
8,00	0,3929	74,500	5,5652	13,3867	0,0085	82,865

L'ultima colonna, p_{02}/p_1 , è la funzione del Pitot supersonico (formula di Rayleigh) usata negli esercizi sui tubi di Pitot.

13.3 Tavola 3 — Flusso con adduzione di calore (Rayleigh)

M	T_0/T_0^*	p/p^*	T/T^*	p_0/p_0^*
0,05	0,0119	2,3916	0,0143	1,2657
0,10	0,0468	2,3669	0,0560	1,2591
0,15	0,1020	2,3267	0,1218	1,2486
0,20	0,1736	2,2727	0,2066	1,2346
0,25	0,2568	2,2069	0,3044	1,2177
0,30	0,3469	2,1314	0,4089	1,1985
0,35	0,4389	2,0487	0,5141	1,1779
0,40	0,5290	1,9608	0,6151	1,1566
0,45	0,6139	1,8699	0,7080	1,1351
0,50	0,6914	1,7778	0,7901	1,1141
0,55	0,7599	1,6860	0,8599	1,0940
0,60	0,8189	1,5957	0,9167	1,0753
0,65	0,8683	1,5080	0,9608	1,0582
0,70	0,9085	1,4235	0,9929	1,0431
0,75	0,9401	1,3427	1,0140	1,0301
0,80	0,9639	1,2658	1,0255	1,0193
0,85	0,9810	1,1931	1,0285	1,0109
0,90	0,9921	1,1246	1,0245	1,0049
0,95	0,9981	1,0603	1,0146	1,0012
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,10	0,9939	0,8909	0,9603	1,0049

M	T_0/T_0^*	p/p^*	T/T^*	p_0/p_0^*
1,20	0,9787	0,7958	0,9118	1,0194
1,30	0,9580	0,7130	0,8592	1,0437
1,40	0,9343	0,6410	0,8054	1,0777
1,50	0,9093	0,5783	0,7525	1,1215
1,60	0,8842	0,5236	0,7017	1,1756
1,70	0,8597	0,4756	0,6538	1,2402
1,80	0,8363	0,4335	0,6089	1,3159
1,90	0,8141	0,3964	0,5673	1,4033
2,00	0,7934	0,3636	0,5289	1,5031
2,20	0,7561	0,3086	0,4611	1,7434
2,40	0,7242	0,2648	0,4038	2,0451
2,50	0,7101	0,2462	0,3787	2,2218
2,60	0,6970	0,2294	0,3556	2,4177
2,80	0,6738	0,2004	0,3149	2,8731
3,00	0,6540	0,1765	0,2803	3,4245
3,20	0,6370	0,1565	0,2508	4,0871
3,50	0,6158	0,1322	0,2142	5,3280
4,00	0,5891	0,1026	0,1683	8,2268
4,50	0,5698	0,0818	0,1354	12,5023
5,00	0,5556	0,0667	0,1111	18,6339
6,00	0,5363	0,0467	0,0785	38,9459
7,00	0,5244	0,0345	0,0583	75,4138
8,00	0,5165	0,0265	0,0449	136,6235

13.4 Tavola 4 — Flusso con attrito (Fanno)

M	$4\tilde{f}L^*/D$	p/p^*	T/T^*	p_0/p_0^*
0,05	280,02	21,9034	1,1994	11,5914
0,10	66,9216	10,9435	1,1976	5,8218
0,15	27,9320	7,2866	1,1946	3,9103
0,20	14,5333	5,4554	1,1905	2,9635
0,25	8,4834	4,3546	1,1852	2,4027
0,30	5,2993	3,6191	1,1788	2,0351
0,35	3,4525	3,0922	1,1713	1,7780
0,40	2,3085	2,6958	1,1628	1,5901
0,45	1,5664	2,3865	1,1533	1,4487
0,50	1,0691	2,1381	1,1429	1,3398
0,55	0,7281	1,9341	1,1315	1,2549
0,60	0,4908	1,7634	1,1194	1,1882
0,65	0,3246	1,6183	1,1065	1,1356
0,70	0,2081	1,4935	1,0929	1,0944
0,75	0,1273	1,3848	1,0787	1,0624
0,80	0,0723	1,2893	1,0638	1,0382
0,85	0,0363	1,2047	1,0485	1,0207
0,90	0,0145	1,1291	1,0327	1,0089
0,95	0,0033	1,0613	1,0165	1,0021
1,00	0,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,10	0,0099	0,8936	0,9662	1,0079

M	$4\tilde{f}L^*/D$	p/p^*	T/T^*	p_0/p_0^*
1,20	0,0336	0,8044	0,9317	1,0304
1,30	0,0648	0,7285	0,8969	1,0663
1,40	0,0997	0,6632	0,8621	1,1149
1,50	0,1361	0,6065	0,8276	1,1762
1,60	0,1724	0,5568	0,7937	1,2502
1,70	0,2078	0,5130	0,7605	1,3376
1,80	0,2419	0,4741	0,7282	1,4390
1,90	0,2743	0,4394	0,6969	1,5553
2,00	0,3050	0,4082	0,6667	1,6875
2,20	0,3609	0,3549	0,6098	2,0050
2,40	0,4099	0,3111	0,5576	2,4031
2,50	0,4320	0,2921	0,5333	2,6367
2,60	0,4526	0,2747	0,5102	2,8960
2,80	0,4898	0,2441	0,4673	3,5001
3,00	0,5222	0,2182	0,4286	4,2346
3,20	0,5504	0,1961	0,3937	5,1210
3,50	0,5864	0,1685	0,3478	6,7896
4,00	0,6331	0,1336	0,2857	10,7188
4,50	0,6676	0,1083	0,2376	16,5622
5,00	0,6938	0,0894	0,2000	25,0000
6,00	0,7299	0,0638	0,1463	53,1798
7,00	0,7528	0,0476	0,1111	104,14
8,00	0,7682	0,0369	0,0870	190,11