

La “forma a goccia”

Il corpo di minima resistenza: dalla fisica del moto al rapporto ottimale

Prof. B. Raucci

Appunti per il quarto anno — Indirizzo Trasporti e Logistica, art. Aeronautica

Tesi

Nel regime subsonico incomprimibile, per corpi isolati non portanti e a numeri di Reynolds sufficientemente elevati, tra tutti i corpi che racchiudono uno stesso volume e avanzano in un fluido a velocità assegnata, quello di minima resistenza non è la sfera né un corpo appuntito, ma un corpo **affusolato**: naso arrotondato, massimo spessore avanzato e coda lunga, dolcemente rastremata. Costruiremo un *modello di scala*, fondato sui principi fisici del moto dei fluidi e completato da ipotesi semplificative, capace di spiegare perché esiste un rapporto di finezza ottimale, e ne ricaveremo un’espressione in forma chiusa.

Campo di validità — da tenere presente

La tesi vale nel **regime subsonico incomprimibile**, per **corpi isolati non portanti a Reynolds elevati**. Il problema cambia natura altrove: a bassissimo Reynolds domina il regime viscoso di Stokes; in transonico e supersonico entrano comprimibilità e resistenza d’onda; per corpi portanti compare la resistenza indotta; per geometrie reali pesano interferenze, rugosità, appendici e condizioni d’installazione. Entro questi limiti, il modello che segue coglie il compromesso fisico essenziale.

1 Da dove nasce la resistenza: i due meccanismi fisici

Un corpo immerso in una corrente subisce una forza nella direzione del moto, la resistenza D . Essa ha due sole origini fisiche, e la distinzione è fondamentale:

$$D = \underbrace{D_f}_{\text{attrito}} + \underbrace{D_p}_{\text{pressione}} .$$

- La **resistenza d’attrito** D_f è la risultante, in direzione del moto, degli *sforzi tangenziali viscosi* τ_w esercitati dal fluido su ogni elemento della superficie bagnata. Dipende dall’estensione S_{wet} della superficie e dallo stato (laminare/turbolento) dello strato limite.
- La **resistenza di pressione** D_p (o “di forma”) è la risultante, nella stessa direzione, delle *pressioni normali* p agenti sulla superficie. In un fluido ideale essa sarebbe nulla (paradosso di d’Alembert); nel fluido reale nasce perché lo strato limite *si stacca* e la pressione a poppa non recupera il valore di prua.

Inquadramento di riferimento (Anderson)

La trattazione classica dell’aerodinamica (Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*) fissa questa stessa dicotomia e ne ricava una classificazione dei corpi:

- **corpo tozzo** (*blunt body*): la resistenza è *prevalentemente di pressione* (sfera, cilindro, lastra normale alla corrente);
- **corpo affusolato** (*streamlined body*): la resistenza è *prevalentemente d’attrito* — la separazione è quasi assente.

Un dato quantitativo di riferimento: per un profilo affusolato (NACA 0012, calcolo CFD di Lombardi et al. a $Re \approx 3 \times 10^6$) circa l’**85%** della resistenza è attrito e solo il **15%** è pressione. La transizione laminare→turbolento, inoltre, *aumenta* D_f ma *riduce* D_p (lo strato

limite turbolento, più energico, resiste meglio al gradiente avverso e ritarda la separazione): è il principio del *trip wire* sulla sfera.

Tutta la storia della “goccia” è la storia di come *governare* D_p . Vediamo perché.

2 Il campo di pressione attorno al corpo: Bernoulli

Consideriamo la corrente esterna allo strato limite, dove la viscosità è trascurabile. Lungo una linea di corrente vale il teorema di Bernoulli:

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_0 = \text{cost.}$$

La quantità p_0 (pressione totale) si conserva. Ne segue la legge fondamentale che governa tutto il fenomeno:

Legge pressione–velocità

$$V \uparrow \implies p \downarrow \qquad V \downarrow \implies p \uparrow$$

Dove il fluido *accelera* la pressione *cala*; dove il fluido *rallenta* la pressione *risale*.

Seguiamo allora una particella che scorre lungo il corpo, dal naso alla coda:

1. **Naso** → **massimo spessore**. La sezione di passaggio della vena fluida si restringe, la corrente accelera ($V \uparrow$), la pressione cala ($p \downarrow$). Il gradiente è *favorevole*: $\frac{dp}{dx} < 0$.
2. **Massimo spessore** → **coda**. La sezione torna ad allargarsi, la corrente decelera ($V \downarrow$), la pressione deve *risalire* ($p \uparrow$). Il gradiente è *avverso*: $\frac{dp}{dx} > 0$.

È questa seconda fase — la *risalita di pressione* obbligata a poppa — che mette in crisi lo strato limite.

3 Il punto critico: la separazione dello strato limite

Dentro lo strato limite la velocità passa da zero (alla parete, per aderenza) al valore esterno V_e . Le particelle più vicine alla parete hanno già dissipato gran parte della loro energia cinetica per attrito. Quando incontrano il gradiente avverso, devono spendere energia per risalire la pressione: se non ne hanno abbastanza, si fermano e poi **invertono il moto** (vedi figura 1).

Criterio di separazione

La separazione avviene nel punto in cui il profilo di velocità alla parete ha pendenza nulla, cioè lo sforzo tangenziale si annulla:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.$$

A monte di questo punto $\partial u / \partial y|_0 > 0$ (flusso aderente); a valle diventa negativo (flusso invertito): lo strato limite si **distacca** dalla parete e si forma la *scia*. La posizione del punto di separazione è governata dall'intensità del gradiente avverso:

$$\frac{dp}{dx} \text{ grande} \implies \text{separazione precoce} \implies \text{scia ampia} \implies D_p \text{ grande.}$$

Confrontiamo allora due geometrie estreme.

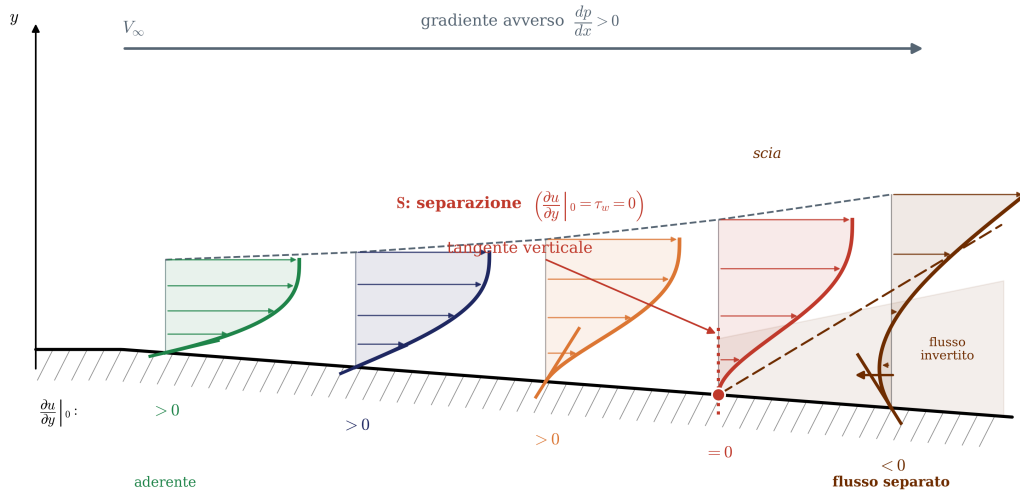
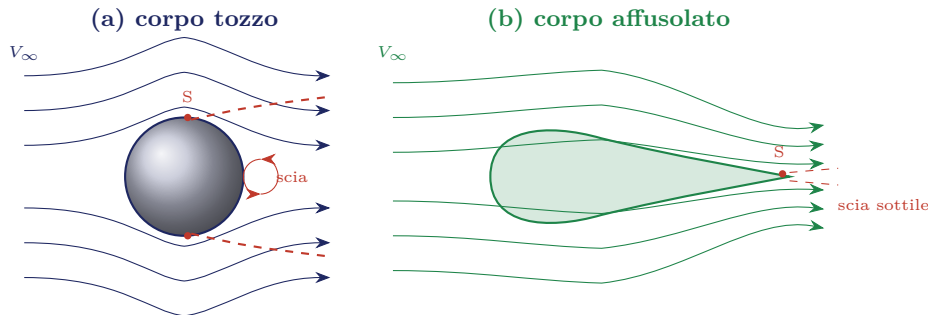


Figura 1: Evoluzione dei profili di velocità nello strato limite sotto gradiente avverso: la pendenza a parete $\partial u/\partial y|_0$ cala fino ad annullarsi nel punto di separazione S ($\tau_w = 0$) e poi si inverte, generando flusso invertito e scia.

- (a) **Corpo tozzo** (sfera). Oltre il massimo spessore la sezione collassa rapidamente: il gradiente avverso è violento, la separazione avviene presto (vicino a 90° dal naso), la scia è larga quanto il corpo. D_p domina.
- (b) **Corpo affusolato** (goccia). La coda lunga fa risalire la pressione *gradualmente*: il gradiente avverso è mite, lo strato limite resta aderente quasi fino all'estremità, la scia è un filo sottile. D_p quasi scompare.



Ordine di grandezza

Sfera liscia (subcritica): $C_D \approx 0,47$ sull'area frontale. Corpo affusolato equivalente: $C_D \approx 0,05$. Il rapporto è ≈ 9 : a parità di sezione, la goccia oppone *nove volte* meno resistenza. Quasi tutta la differenza è scia eliminata, non attrito.

4 La forma ottimale esiste: dimostrazione del minimo

Abbiamo capito *qualitativamente* perché allungare la coda conviene. Ma allungare all'infinito non può essere ottimale, perché cresce la superficie e con essa l'attrito. Costruiamo ora un *modello di scala* dei due contributi — fondato sui principi fisici del moto e completato da ipotesi semplificative dichiarate — che mostra l'esistenza di un allungamento ottimale e ne fornisce un'espressione in forma chiusa.

Impostazione del problema

Caratterizziamo la forma con il **rapporto di finezza** $f = l/d$ (lunghezza su diametro massimo). Confrontiamo corpi a *volume costante* V (stesso “contenuto utile”), così da isolare l’effetto della sola forma. Per un corpo assialsimmetrico (modello: ellissoide di rivoluzione)

$$V = \frac{\pi}{6} d^2 l = \frac{\pi}{6} d^3 f \implies d = \left(\frac{6V}{\pi f} \right)^{1/3}, \quad l = f d.$$

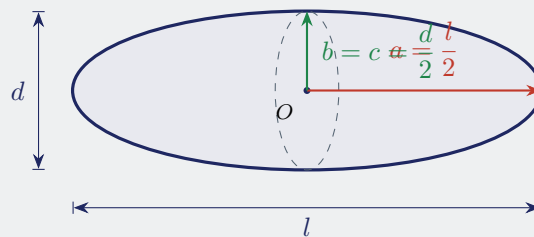
Promemoria geometrico — da dove viene $V = \frac{\pi}{6} d^2 l$

La formula non è un’approssimazione: è il volume *esatto* del modello scelto, l’ellissoide di rivoluzione (sferoide prolato, un “sigaro”). Si parte dal volume dell’ellissoide generale di semiassi a, b, c :

$$V = \frac{4}{3} \pi a b c.$$

Il nostro corpo è lungo l lungo l’asse di rivoluzione e ha diametro massimo d nelle due direzioni trasversali; i semiassi sono dunque la metà di ciascuna dimensione:

$$a = \frac{l}{2} \text{ (assiale)}, \quad b = c = \frac{d}{2} \text{ (trasversali, uguali)}.$$



Sostituendo i semiassi:

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{l d^2}{8} = \frac{\pi}{6} d^2 l.$$

Poiché $f = l/d$, cioè $l = f d$, si ottiene la forma con la finezza, $V = \frac{\pi}{6} d^3 f$, da cui l’inversione usata sopra. Un’osservazione utile in classe: $\frac{\pi}{6} d^3$ è proprio il volume di una *sfera di diametro* d , sicché

$$V_{\text{ellissoide}} = \underbrace{\frac{\pi}{6} d^3}_{\text{sfera di diam. } d} \times f.$$

L’ellissoide è quindi quella sfera *stirata* di un fattore f lungo l’asse: a parità di sezione trasversale, allungare di un fattore f moltiplica per f il volume. È ciò che consente di fissare V e far variare la sola forma.

Costruiamo i due contributi, ciascuno da un principio fisico.

Resistenza d’attrito. È proporzionale alla superficie bagnata. Per un corpo affusolato S_{wet} scala come $d \cdot l$ (cilindro equivalente):

$$D_f = q C_f S_{\text{wet}}, \quad S_{\text{wet}} \simeq \pi d l = \pi f d^2.$$

Sostituendo $d^2 = (6V/\pi)^{2/3} f^{-2/3}$:

$$\boxed{D_f = q C_f \pi \left(\frac{6V}{\pi} \right)^{2/3} f^{1/3}} \implies D_f \propto f^{1/3} \quad (\nearrow).$$

L'attrito **cresce** con l'allungamento: $\sim f^{1/3}$.

Quale C_f ? Il coefficiente d'attrito *equivalente*

Il C_f del modello **non** è il valore di lastra piana liscia, ma il coefficiente d'attrito *equivalente* C_{fe} (Anderson, *Aircraft Performance and Design*), definito da $D_0 = q C_{fe} S_{wet}$: esso *ingloba*, oltre all'attrito puro, anche il drag di forma residuo, la rugosità e le escrescenze. È un punto cruciale per non cadere in contraddizione numerica:

- lastra piana *liscia* turbolenta a Re di volo ($\sim 10^7 \div 10^8$): $C_f \approx 0,0013 \div 0,0025$ (formula $0,074/Re^{1/5}$) — è il *pavimento ideale*;
- corpo *reale* (fusoliera, gondola): $C_{fe} \approx 0,003 \div 0,005$, perché rugosità, giunzioni, antenne e recupero imperfetto alzano il valore effettivo.

È con C_{fe} realistico — non con la lastra liscia — che f^* cade nell'intervallo $4 \div 6$ del progetto. Si assume infine C_{fe} circa costante nell'intervallo di finezze: a volume costante $l \sim f^{2/3}$ e quindi anche Re varia con f , ma per un modello didattico l'ipotesi è accettabile, purché dichiarata.

Resistenza di pressione. Qui interviene l'ipotesi centrale del modello. Bernoulli lega velocità e pressione lungo la corrente esterna, ma *non* determina da solo il punto di separazione, l'ampiezza della scia e il difetto di recupero di pressione: questi dipendono dalla viscosità, dallo stato dello strato limite, dal Reynolds e dalla geometria di poppa. Assumiamo perciò come *ipotesi di scala*, fisicamente motivata, che il coefficiente di forma sia tanto più piccolo quanto più è *magro* il corpo, cioè quanto più è piccolo lo spessore relativo $d/l = 1/f$:

$$C_{D,p} \sim \frac{k}{f}, \quad k = \text{costante semi-empirica che riassume il difetto di recupero di pressione legato alla forma di poppa.}$$

Questa relazione **non è una legge universale**: è una rappresentazione di scala del fatto che una maggiore finezza rende più graduale il recupero di pressione, ritarda la separazione e riduce la scia. La sua giustificazione quantitativa — e l'identificazione di k — è svolta nell'Appendice A. La resistenza di pressione agisce sull'area frontale $S = \frac{\pi}{4}d^2$:

$$D_p = q C_{D,p} \frac{\pi}{4} d^2 \sim q \frac{k}{f} \frac{\pi}{4} \left(\frac{6V}{\pi} \right)^{2/3} f^{-2/3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_p \sim f^{-5/3}} \quad (\searrow).$$

La pressione **cala** con l'allungamento, e cala in fretta: $\sim f^{-5/3}$.

Resistenza totale a meno di costanti

Raccogliendo la costante comune $A \equiv q (6V/\pi)^{2/3}$:

$$D(f) = A \left[\underbrace{C_f \pi f^{1/3}}_{\text{attrito} \nearrow} + \underbrace{\frac{\pi k}{4} f^{-5/3}}_{\text{pressione} \searrow} \right].$$

Condizione di minimo. Una funzione somma di un termine crescente e di uno decrescente ammette un minimo interno. Lo troviamo annullando la derivata prima. Conviene derivare la quantità tra parentesi $g(f) = C_f \pi f^{1/3} + \frac{\pi k}{4} f^{-5/3}$:

$$g'(f) = C_f \pi \cdot \frac{1}{3} f^{-2/3} + \frac{\pi k}{4} \cdot \left(-\frac{5}{3} \right) f^{-8/3} = \frac{\pi}{3} f^{-8/3} \left(C_f f^2 - \frac{5k}{4} \right).$$

Imponendo $g'(f^*) = 0$ (il fattore $f^{-8/3}$ non si annulla mai):

$$C_f (f^*)^2 - \frac{5k}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad (f^*)^2 = \frac{5k}{4C_f}.$$

Rapporto di finezza ottimale — forma chiusa

$$f^* = \frac{l}{d}|_{\text{ott}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{k}{C_f}}$$

Il rapporto ottimale dipende *solo* dal rapporto tra la costante di forma k (semi-empirica, legata al recupero di pressione) e il coefficiente d'attrito C_f . La struttura della formula discende dai principi fisici del moto; il valore di k è fissato da un'ipotesi di scala calibrata su dati, non da Bernoulli soltanto. È quindi un risultato di *modello*, robusto e predittivo, non una soluzione esatta del problema generale di minima resistenza.

Verifica che sia un minimo. La derivata seconda di g in f^* risulta positiva,

$$g''(f^*) = \frac{4}{15} \frac{2^{2/3} 5^{1/6} C_f^{11/6}}{k^{5/6}} \cdot \pi > 0,$$

quindi f^* è effettivamente un punto di **minimo** della resistenza, non di massimo.

Dai numeri alla realtà

Con valori fisici tipici — $C_f \approx 0,003 \div 0,005$ (strato limite turbolento) e una costante di forma $k \approx 0,05 \div 0,08$ per corpi ben affusolati — la formula dà

$$f^* \approx 4 \div 6.$$

È esattamente l'intervallo in cui si progettano fusoliere, gondole motore e gocce d'ala. Il modello, con costanti calibrate su valori realistici, riproduce il dato di progetto: è questa coerenza — non una pretesa di esattezza — a renderlo utile.

Esempio svolto — dal Reynolds al rapporto di finezza

Problema. Una fusoliera di addestratore avanza a $V_\infty = 85 \text{ m s}^{-1}$ (circa $M = 0,25$) ed ha lunghezza $l = 9 \text{ m}$. Stimarne il rapporto di finezza ottimale, partendo dal numero di Reynolds.

Fase A — Reynolds di volo. A livello del mare ($\rho = 1,225 \text{ kg m}^{-3}$, $\mu = 1,789 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$):

$$Re = \frac{\rho V_\infty l}{\mu} = \frac{1,225 \cdot 85 \cdot 9}{1,789 \times 10^{-5}} \approx 5,2 \times 10^7.$$

Fase B — C_f di lastra piana (pavimento ideale). Formula turbolenta di Anderson (Eq. 19.2): $C_f = 0,074/Re^{1/5}$:

$$C_f = \frac{0,074}{(5,2 \times 10^7)^{1/5}} \approx 0,0021.$$

Questo è il valore *liscio*; non si usa direttamente nel modello.

Fase C — coefficiente equivalente. Per una fusoliera reale (rugosità, giunzioni, escrescenze) si adotta $C_{fe} \approx 0,004$ (Anderson, APD), circa il doppio del valore liscio.

Fase D — finezza ottimale. Con $k \approx 0,06$ (corpo ben affusolato):

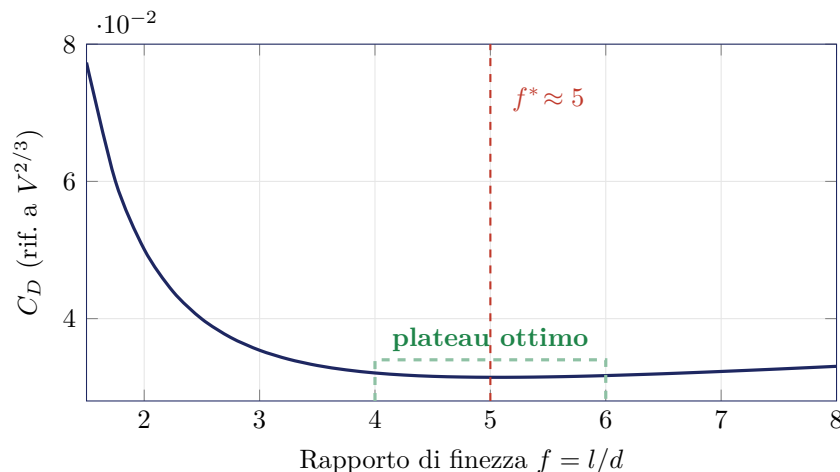
$$f^* = \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{k}{C_{fe}}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{0,06}{0,004}} \approx 4,3.$$

Lettura del risultato

$f^* \approx 4,3$ cade in pieno nell'intervallo di progetto $4 \div 6$, e coincide con i valori reali di fusoliere snelle. L'esempio mostra il punto delicato in azione: usando il C_f liscio (0,0021) si otterrebbe $f^* \approx 6$, troppo alto; è l'uso del coefficiente *equivalente* a riportare la previsione sul dato sperimentale.

5 Conferma empirica e il “plateau”

Le correlazioni sperimentali (Hoerner) confermano il risultato e aggiungono un'informazione preziosa per il progettista: attorno al minimo la curva è *piatta*.

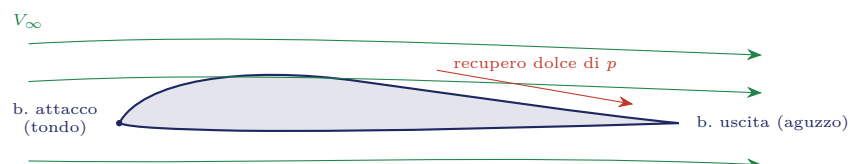


Lettura progettuale

Il fatto che la curva sia piatta tra $f \approx 4$ e $f \approx 6$ è una notizia eccellente per l'ingegnere: la resistenza varia di pochi punti percentuali in tutto l'intervallo. Si può quindi scegliere f in base ad *altri* vincoli (volume interno, strutture, impianti) senza pagare quasi nulla in resistenza. La forma ottimale è *robusta*.

6 La goccia asimmetrica: il profilo alare

Un profilo alare condivide con il corpo affusolato lo stesso principio aerodinamico: bordo d'attacco arrotondato per evitare separazioni premature e bordo d'uscita sottile per favorire un recupero ordinato della pressione. Non è però semplicemente “una goccia aperta”: il profilo introduce un fenomeno ulteriore, la *circolazione*, da cui nasce la *portanza*. È questa la differenza essenziale — un corpo a goccia assialsimmetrico non portante non genera circolazione netta. Resta valido, come *analogia geometrica* e non come equivalenza, il parallelismo sulla gestione del recupero di pressione.



Corrispondenza goccia ↔ profilo

- **Naso tondo ↔ bordo d'attacco arrotondato:** la corrente accelera dolcemente, p cala senza picchi, lo strato limite si forma aderente.
- **Coda affusolata ↔ bordo d'uscita aguzzo:** il recupero di pressione è diluito su gran

parte della corda, il gradiente avverso resta mite, la separazione è ritardata fino al bordo d'uscita.

- Lo *spessore relativo* del profilo, t/c , gioca un ruolo *analogo* a quello di $d/l = 1/f$ della goccia. I profili a bassa resistenza hanno $t/c \approx 0,10 \div 0,15$: la stessa logica di “magrezza” ottimale. È un'analogia utile, non un'equivalenza completa tra un corpo assialsimmetrico (3D) e un profilo (2D), dove conta anche la circolazione.

Un equivoco da sfatare

La goccia d'acqua *che cade* non ha la forma “a lacrima” del disegno stilizzato. Una piccola goccia in caduta è quasi sferica (domina la tensione superficiale); ingrossandosi si *appiattisce* sul fondo. La “forma a goccia” aerodinamica è una conquista dell'ingegneria, governata dalla separazione dello strato limite — fisica del tutto diversa dalla tensione superficiale che modella la pioggia.

Conclusione — che cosa abbiamo davvero dimostrato

Il risultato ottenuto **non** va interpretato come una soluzione esatta del problema generale di minima resistenza. La resistenza di un corpo reale dipende dal numero di Reynolds, dalla transizione dello strato limite, dalla rugosità superficiale, dalla comprimibilità e dalla forma dettagliata della poppa.

Il modello costruito coglie però il *compromesso fisico essenziale*: l'aumento della finezza riduce la resistenza di pressione, perché rende più dolce il recupero di pressione e ritarda la separazione; allo stesso tempo aumenta la superficie bagnata e quindi la resistenza d'attrito. La presenza di un minimo nasce proprio dall'equilibrio tra questi due effetti antagonisti. Con le ipotesi adottate, $D_f \sim f^{1/3}$ e $D_p \sim f^{-5/3}$, da cui $f^* = \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{k/C_f}$; per valori realistici di C_f e k , il minimo cade in $f^* \approx 4 \div 6$, coerente con fusoliere snelle, gondole e carenature.

Sintesi in tre righe

Naso tondo per far aderire la corrente $\rightarrow$ coda lunga per diluire il recupero di pressione ($dp/dx \downarrow$, separazione ritardata, $D_p \downarrow$) $\rightarrow$ lunghezza non eccessiva per non pagare attrito ($D_f \uparrow$). L'equilibrio dei due effetti dà $f^* = \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{k/C_f} \approx 4 \div 6$: la forma a goccia.

Strumento interattivo

Web-app companion

È disponibile un simulatore interattivo che accompagna questa monografia: muovendo il rapporto di finezza f si osservano in tempo reale lo spostamento del punto di separazione, l'ampiezza della scia e la curva di resistenza $C_D(f)$ con il relativo minimo.

Link: [braucci.github.io/goccia]

A Derivazione del coefficiente di forma k dall'integrale di pressione

Nel corpo della trattazione abbiamo posto $C_{D,p} \sim k/f$ come ipotesi di scala. Questa appendice la giustifica a partire dalla definizione *esatta* della resistenza di pressione come integrale del campo C_p sulla superficie del corpo, identifica la costante semi-empirica k e cura il segno, chiarendo perché per un corpo *reale* l'esponente rilevante è -1 (e non -2 , come darebbe la teoria puramente potenziale senza separazione).

A.1 Resistenza di pressione come integrale di superficie

La resistenza di pressione è la componente assiale della risultante delle pressioni:

$$D_p = \oint_{S_b} p (\hat{n} \cdot \hat{x}) dA,$$

dove $\hat{n}$ è la normale uscente e $\hat{x}$ la direzione del moto. Introducendo il coefficiente di pressione $C_p = (p - p_\infty)/q$ (il termine costante p_∞ dà contributo nullo su una superficie chiusa) e adimensionalizzando con l'area frontale $S = \pi R^2$:

$$C_{D,p} = \frac{1}{S} \oint_{S_b} C_p (\hat{n} \cdot \hat{x}) dA$$

Per un corpo di rivoluzione di raggio $r(x)$, l'elemento di area proiettata in direzione assiale è $dA_x = 2\pi r dr$, sicché

$$C_{D,p} = -\frac{2}{R^2} \int_0^L C_p(x) r(x) r'(x) dx.$$

Il paradosso di d'Alembert

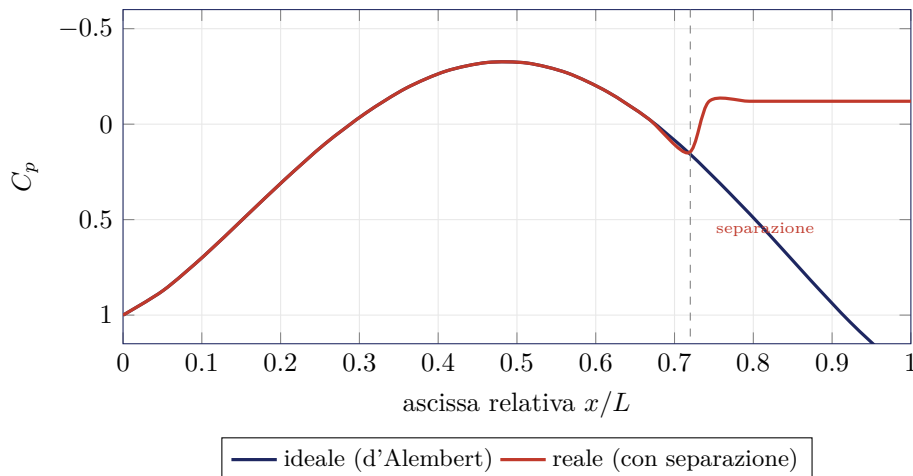
In fluido ideale (potenziale, senza viscosità) il campo C_p è *simmetrico* tra prua e poppa: la depressione sui fianchi è bilanciata, e la pressione recupera a poppa esattamente il valore di prua. L'integrale si annulla identicamente:

$$C_{D,p}^{\text{ideale}} = 0.$$

È il celebre paradosso di d'Alembert: *un corpo in fluido ideale non oppone resistenza*. La resistenza di pressione reale nasce **solo** dalla rottura di questa simmetria, cioè dalla *separazione* dello strato limite, che impedisce alla pressione di recuperare a poppa.

A.2 Il campo C_p : ideale contro reale

La figura confronta l'andamento di $C_p(x)$ lungo il corpo nei due casi. La differenza tra le due curve a poppa è — letteralmente — la resistenza di pressione.



Nel caso ideale (blu) la pressione risale a poppa fino a $C_p > 0$: l'integrale si chiude a zero. Nel caso reale (rosso) lo strato limite si stacca a $x/L \approx 0,72$ e la pressione resta *congelata* a un valore di base $C_{p,b} < 0$: il mancato recupero è l'area tra le due curve, ed è la resistenza di pressione.

A.3 Modello di base-drag e identificazione di k

A valle della separazione il mantello del corpo non contribuisce più (la corrente non lo tocca): la resistenza di pressione si concentra sulla **faccia di base**, cioè sulla sezione trasversale “aperta” dalla scia al punto di distacco, di area A_b . Su questa faccia la normale uscente punta all’indietro, $\hat{n} \cdot \hat{x} = -1$, e la pressione è quella di base, $p_b = p_\infty + q C_{p,b}$ con $C_{p,b} < 0$ (zona depressa). Il contributo alla resistenza è allora

$$D_{\text{base}} = p_b (\hat{n} \cdot \hat{x}) A_b = -q C_{p,b} A_b,$$

(il termine p_∞ si elide sulla superficie chiusa). Adimensionalizzando con $q S$:

Segno della resistenza di base

$$C_{D,p} = -C_{p,b} \frac{A_b}{S} = |C_{p,b}| \frac{A_b}{S} > 0.$$

Il risultato è **automaticamente positivo**: il segno meno davanti, combinato con $C_{p,b} < 0$, dà una resistenza positiva senza bisogno di imporre il valore assoluto “a mano”. È la normale della faccia di base a fissare il segno corretto.

Modellando il recupero medio sulla base con il fattore geometrico $A_b/S \rightarrow \frac{2}{3}$ (poppa che si chiude dolcemente), si ottiene la forma compatta $C_{D,p} \simeq \frac{2}{3} |C_{p,b}|$.

Resta da legare $C_{p,b}$ alla geometria. La posizione del distacco è governata dalla *pendenza* del contorno (criterio di separazione: lo strato limite regge finché la pendenza non supera un valore critico). La pendenza media della poppa è

$$\left| \frac{dr}{dx} \right|_{\text{poppa}} \sim \frac{R}{L/2} = \frac{2R}{L} = \frac{d}{L} = \frac{1}{f}.$$

Il difetto di recupero di pressione — e quindi $|C_{p,b}|$ — è al primo ordine proporzionale a questa pendenza: una poppa più snella (f grande) recupera meglio e lascia un $|C_{p,b}|$ più piccolo. Dunque $|C_{p,b}| \sim 1/f$, da cui

$$C_{D,p} \simeq \frac{2}{3} |C_{p,b}| \sim \frac{k}{f}, \quad k \equiv \frac{2}{3} (|C_{p,b}| f)$$

con k costante semi-empirica (non “ordine uno” in senso stretto: vale $k \approx 0,05 \div 0,08$ per corpi ben affusolati, come quantificato sotto).

Valore di k e consistenza

Dai dati sperimentali sui corpi affusolati, $C_{D,p}^{\text{base}} \approx 0,010 \div 0,015$ in corrispondenza di $f \approx 5$, da cui

$$k = C_{D,p} \cdot f \approx 0,05 \div 0,08.$$

È esattamente l’intervallo usato nel corpo della monografia, che restituisce $f^* = \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{k/C_f} \approx 4 \div 6$. La trattazione è quindi internamente consistente: il valore di k non è postulato ma *ricavato* dall’integrale di pressione.

Nota sui due regimi — per il lettore esperto

La teoria potenziale linearizzata dei corpi snelli (Munk–Ward) fornisce, per un corpo *che si chiude senza separazione*, un drag di forma che scala come $1/f^2$ (o logaritmicamente). Tale termine descrive corpi “ideali” senza scia. Per un corpo *reale* a numeri di Reynolds di volo, invece, domina il **base-drag** legato alla separazione, che scala come $1/f$: è questo il regime fisicamente rilevante per fusoliere e gocce d’ala, ed è quello adottato qui. La scelta dell’esponente -1 è dunque deliberata e giustificata dalla fisica della scia, non un’approssimazione di

comodo.

A.4 Riepilogo della catena dimostrativa

Dal principio al risultato

$$\begin{aligned}
 D_p &= \oint p(\hat{n} \cdot \hat{x}) dA \xrightarrow{\text{definizione esatta}} C_{D,p} = \frac{1}{S} \oint C_p(\hat{n} \cdot \hat{x}) dA \xrightarrow{\text{forma adimensionale}} \underbrace{C_{D,p}^{\text{ideale}}}_{\text{d'Alembert}} = 0 \\
 &\rightarrow \underbrace{\text{separazione}}_{\text{rottura simmetria}} \Rightarrow C_p = C_{p,b} \text{ a poppa} \rightarrow \underbrace{C_{D,p} = \frac{2}{3}|C_{p,b}|}_{\text{integrale di base}} \\
 &\rightarrow \underbrace{|C_{p,b}| \sim 1/f}_{\text{geometria poppa}} \rightarrow \boxed{C_{D,p} \sim k/f}
 \end{aligned}$$

B Dove separa lo strato limite: il metodo integrale di Thwaites

Nel corpo della monografia abbiamo trattato il punto di separazione come una *scatola nera*: sappiamo che $\tau_w = 0$ lo individua, ma non lo abbiamo *calcolato*. La nuova letteratura di riferimento permette di chiuderlo quantitativamente, almeno per lo strato limite laminare, con il **metodo integrale di Thwaites**.

Registro epistemico

Il metodo di Thwaites è una **correlazione integrale semi-empirica**, non una soluzione esatta delle equazioni dello strato limite. Risolve in forma approssimata l'equazione di *quantità di moto* di von Kármán assumendo che la famiglia dei profili di velocità dipenda da un solo parametro. La costante di separazione $\lambda_{\text{sep}} \approx -0,09$ è *calibrata* su soluzioni esatte. Valida per regime laminare incomprimibile.

B.1 La formula di Thwaites

Detta $U_e(x)$ la velocità al bordo dello strato limite (data dalla soluzione esterna, p.es. Bernoulli) e ν la viscosità cinematica, lo spessore di quantità di moto θ si ottiene da una *quadratura* chiusa:

$$\theta^2(x) = \frac{0,45 \nu}{U_e^6(x)} \int_0^x U_e^5(\xi) d\xi$$

Si introduce il **parametro di gradiente di pressione** adimensionale

$$\lambda(x) = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx},$$

positivo dove la corrente accelera ($dU_e/dx > 0$, gradiente favorevole) e negativo dove rallenta ($dU_e/dx < 0$, gradiente avverso). Il criterio di separazione è

$$\lambda(x_{\text{sep}}) = \lambda_{\text{sep}} \approx -0,09$$

È la traduzione *quantitativa* del nostro $\tau_w = 0$: lo strato limite regge finché il gradiente avverso non ha eroso abbastanza quantità di moto da portare λ alla soglia.

B.2 Validazione: il flusso di Howarth

Il banco di prova classico è la *decelerazione lineare* (Howarth): $U_e(x) = U_0 (1 - x/L)$, gradiente avverso costante. La quadratura si fa a mano. Posto $s = x/L$:

$$\theta^2 = \frac{0,45 \nu L}{6 U_0 (1-s)^6} [1 - (1-s)^6], \quad \lambda(s) = -0,075 [(1-s)^{-6} - 1].$$

Imponendo $\lambda = -0,09$:

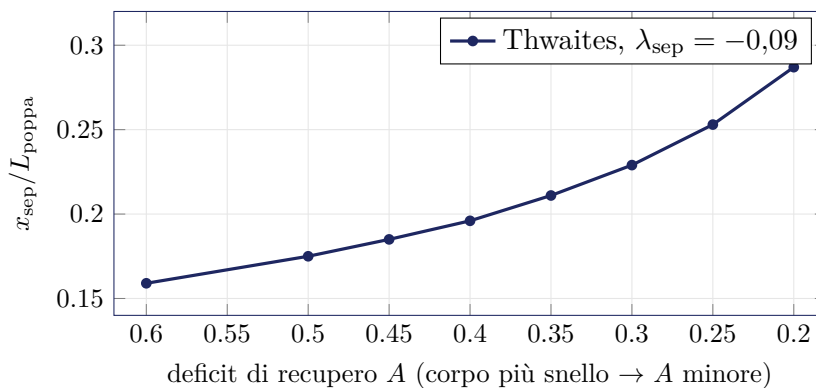
$$(1-s)^{-6} = 2,2 \implies s_{\text{sep}} = 1 - 2,2^{-1/6} \approx 0,123.$$

Accordo con la soluzione esatta

Thwaites predice $x_{\text{sep}}/L \approx 0,123$; la soluzione numerica esatta delle equazioni dello strato limite per il flusso di Howarth dà $x_{\text{sep}}/L \approx 0,120$. L'errore è del **2,6%**: notevole per un metodo a una sola quadratura. (Verificato numericamente con Python/SymPy prima della stesura.)

B.3 Il legame con la finezza: perché $C_{D,p} \sim k/f$

Applichiamo il criterio alla poppa di un corpo affusolato. Sul tratto di recupero modelliamo $U_e(s) = U_{\text{max}} [1 - A (1 - \cos \pi s)]$, dove A è il **deficit di velocità** da recuperare (quanto la corrente deve rallentare a poppa). Il punto chiave fisico:



Procedendo verso sinistra (corpo più snello, deficit A minore) il punto di separazione **arretra** e, oltre una certa soglia, la separazione *scompare* del tutto: la corrente resta aderente fino alla coda. Ecco la fisica dietro il modello di scala del corpo principale:

$$\begin{aligned} f \uparrow &\implies \text{minor sovravelocità al massimo spessore} \implies A \downarrow \\ &\implies x_{\text{sep}} \uparrow \implies |C_{p,b}| \downarrow \\ &\implies C_{D,p} = \frac{k}{f} \downarrow. \end{aligned}$$

Il metodo di Thwaites non sostituisce l'ipotesi di scala $C_{D,p} \sim k/f$: la *fonda*, mostrando da dove nasce la dipendenza da f e rendendo x_{sep} un numero calcolabile anziché un postulato.

Per lo strato limite turbolento: criterio di Stratford

Nelle applicazioni reali ad alto Re lo strato limite è in gran parte *turbolento*, e il metodo di Thwaites (laminare) non si applica. Il criterio quantitativo analogo è quello di **Stratford**, basato sul coefficiente di pressione C_p e sul suo gradiente: $C_p (x dC_p/dx)^{1/2}$ raggiunge una costante di soglia alla separazione. La sua trattazione completa è un naturale sviluppo

successivo di questa appendice.