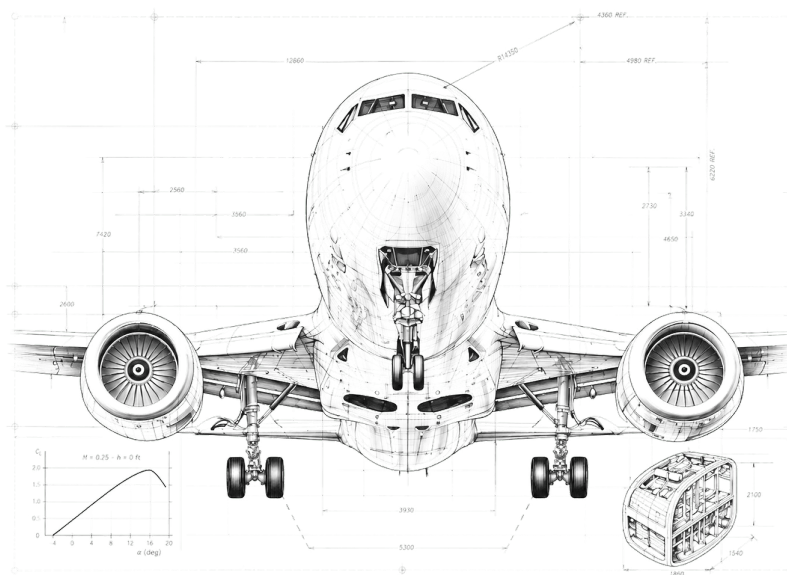


Diagrammi di taglio e di momento flettente dell'ala

Dalla distribuzione dei carichi in apertura
alle sollecitazioni sulla semiala:
teoria, esercizio guidato e calcolo con Python



Prof. Ing. Biagio Raucci

Struttura, Costruzione, Sistemi e Impianti del Mezzo

Articolazione Costruzione del Mezzo Aeronautico

L'ala di un velivolo in volo è, dal punto di vista strutturale, una trave incastrata caricata dalla portanza. Chiedersi quanto valgano il taglio e il momento flettente sezione per sezione significa chiedersi quanto materiale serve, e dove, per non rompersi: è la domanda da cui nasce ogni longherone.

Indice

Simbologia	2
1 L'ala come trave incastrata	5
1.1 Dal velivolo alla trave	5
1.2 I carichi che sollecitano la semiala	6
1.3 Il coefficiente di contingenza	7
2 Carico, taglio e momento flettente	8
2.1 Taglio e momento flettente in una sezione	8
2.2 Le relazioni differenziali	9
2.3 Le regole di tracciamento	9
3 I carichi in apertura	11
3.1 La distribuzione di portanza	11
3.1.1 La condizione di volo dimensionante	12
3.2 Il peso dell'ala	12
3.3 Il carico netto e i carichi concentrati	13
4 Esercizio guidato: ala trapezia con carrello	14
4.1 Fase A — La geometria dell'ala	14
4.2 Fase B — La condizione di volo dimensionante	15
4.3 Fase C — La distribuzione di portanza	15
4.4 Fase D — Peso dell'ala, carico netto, carrello	15
4.5 Fase E — Il diagramma di taglio	16
4.6 Fase F — Il diagramma di momento flettente	18
5 I diagrammi con Python	21
5.1 L'idea: integrare numericamente col metodo dei trapezi	21
5.2 Il programma completo	21
5.3 Lettura guidata del programma	24
5.4 Sperimentare con il programma	24
6 Esercizi proposti	26
A Il sistema tecnico di unità	27
B Le forme chiuse di $T(\gamma)$ e $M(\gamma)$	28

Simbologia

Questa monografia adotta la **simbologia aeronautica internazionale**, quella che ritroverete nei testi di riferimento (Anderson, Megson, Peery, Bruhn), nella manualistica tecnica e in qualunque documento di progetto redatto in lingua inglese. Alcuni simboli differiscono da quelli tradizionalmente usati nei testi italiani: la corrispondenza è riportata nella tabella 1 e va conosciuta, perché all'Esame di Stato si incontrano entrambe le convenzioni.

Grandezze geometriche

Simbolo	Grandezza	Unità	Note
b	apertura alare	m	$b/2$ semiapertura
S	superficie alare	m^2	in pianta
$c(y)$	corda locale	m	<i>chord</i>
c_r	corda di radice	m	<i>root</i>
c_t	corda di estremità	m	<i>tip</i>
$\bar{c}$	corda media geometrica	m	$\bar{c} = S/b$
AR	allungamento alare	—	$AR = b^2/S$
λ	rapporto di rastremazione	—	$\lambda = c_t/c_r$
y	coordinata di apertura	m	$y = 0$ in mezzeria
x, z	corda e direzione normale	m	terna velivolo

Grandezze aerodinamiche e di volo

Simbolo	Grandezza	Unità	Note
L	portanza (totale)	N	<i>lift</i>
D	resistenza	N	<i>drag</i>
W	peso	N	<i>weight</i>
V_∞	velocità della corrente	m/s	
V_A	velocità del punto A	m/s	manovra
ρ	densità dell'aria	kg/m^3	
q_∞	pressione dinamica	Pa	$\frac{1}{2}\rho V^2$
C_L	coeff. di portanza dell'ala	—	
$C_{L,max}$	coeff. di portanza massimo	—	stallo
c_ℓ	coeff. di portanza di profilo	—	bidimensionale
n	fattore di carico	—	$n = L/W$
n_{ult}	fattore di carico ultimo	—	$n_{ult} = k n$

Carichi e sollecitazioni

Simbolo	Grandezza	Unità	Note
$L'(y)$	portanza per unità di apertura	N/m	<i>running lift</i>
$W'(y)$	peso alare per unità di apertura	N/m	
$w(y)$	carico netto per unità di apertura	N/m	$w = L' - W'$
W_w	peso della sola ala	N	<i>wing</i>
W_{lg}	peso di una gamba di carrello	N	<i>landing gear</i>
y_{lg}	stazione del carrello	m	
$T(y)$	taglio	N	<i>shear force</i>
$M(y)$	momento flettente	N m	<i>bending moment</i>

Corrispondenza con la simbologia dei testi italiani

Tabella 1. Corrispondenza fra la simbologia internazionale adottata in questa monografia e quella tradizionale dei testi italiani di costruzioni aeronautiche. Le due caselle evidenziate sono le più insidiose: il simbolo λ cambia *significato* passando da una convenzione all'altra.

Grandezza	Testi italiani	Internazionale
peso totale	Q	W
carico alare	Q/S	W/S
corda di radice / mezzeria	l_0	c_r
corda di estremità	l_e	c_t
corda media	l_m	$\bar{c}$
allungamento alare	λ	AR
rapporto di rastremazione	r	λ
portanza per unità di apertura	$p(y)$	$L'(y)$
peso alare per unità di apertura	$p'(y)$	$W'(y)$
carico netto per unità di apertura	$q(y)$	$w(y)$
peso dell'ala	Q_a	W_w
coefficiente di robustezza	N	n_{ult}
taglio	$T(y)$	$T(y)$ (V, S_z)
momento flettente	$M_f(y)$	$M(y)$

Osservazione

La riga più pericolosa della tabella 1 è quella di λ . Nei testi italiani λ è l'*allungamento*; nella letteratura internazionale λ è il *rapporto di rastremazione* e l'allungamento si scrive AR (*aspect ratio*). Chi legge una formula senza controllare la legenda dei simboli può scambiare un 7 per un 0,6: un errore che si propaga fino alla sezione del longherone. La regola, valida ben oltre questa monografia, è sempre la stessa: *prima la legenda, poi la formula*.

Due simboli da non confondere

La simbologia internazionale è coerente ma non priva di omonimie, e due meritano un avviso esplicito.

- T : in questa monografia è sempre il *taglio*, secondo l'uso consolidato dei testi italiani di costruzioni aeronautiche. Nella letteratura internazionale lo stesso simbolo indica la *spinta* (*thrust*) e il *taglio*

si scrive V (scuola americana: Peery, Bruhn) oppure S_z (scuola britannica: Megson). Qui la spinta non compare mai — il problema è puramente strutturale — e nessuna ambiguità è possibile; ma incontrando V o S_z in un testo inglese saprete di che cosa si parla.

- M : qui è sempre il *momento flettente*. Il numero di Mach, che si indica con lo stesso simbolo, non compare in questa monografia: voliamo a 82 m/s, cioè a $Ma \simeq 0,24$, e gli effetti di comprimibilità sono trascurabili.

L'ala come trave incastrata

Dove stiamo andando

In questo capitolo costruiamo il *modello strutturale* dell'ala: capiremo perché, ai fini del calcolo delle sollecitazioni, una semiala si comporta come una trave incastrata in mezzzeria, quali carichi la sollecitano in volo e perché questi carichi vanno moltiplicati per il coefficiente di contingenza. Alla fine del capitolo avremo davanti agli occhi lo schema di trave su cui, nei capitoli successivi, tratteremo i diagrammi di taglio e di momento flettente.

1.1 Dal velivolo alla trave

Guardate un aliante in volo dal finestrino di un altro aliante, oppure l'ala di un liner dal vostro sedile vicino al finestrino: la vedrete flettersi verso l'alto, dolcemente, con le estremità che salgono di qualche decina di centimetri rispetto alla radice. Quella curvatura non è un difetto: è la risposta elastica di una *trave* al carico che la sostiene in volo, cioè la portanza.

Il passaggio concettuale fondamentale di questa monografia è proprio questo: quando ci interessa la resistenza strutturale, dimentichiamo per un momento profili, svergolamenti e prese d'aria, e vediamo l'ala per ciò che è meccanicamente: una trave a sbalzo, di sezione variabile, caricata da forze distribuite e concentrate.

Modello di trave della semiala

Ai fini del calcolo delle sollecitazioni si schematizza ciascuna semiala come una **trave incastrata in mezzzeria** (in corrispondenza della fusoliera) e **libera all'estremità**. La coordinata y corre lungo l'apertura, con origine in mezzzeria ($y = 0$) ed estremità in $y = b/2$, dove b è l'apertura alare.

Perché proprio “incastrata”? Perché la fusoliera, attraverso gli attacchi alari, impedisce alla radice dell'ala sia di traslare sia di ruotare: sono esattamente le due condizioni cinematiche che definiscono un incastro. Tutto il carico portante raccolto dalla semiala deve “scaricarsi” lì, e infatti — lo verificheremo con i numeri — è alla radice che taglio e momento flettente raggiungono i valori massimi. Non è un caso che gli attacchi alari e le sezioni di radice dei longheroni siano tra gli elementi più massicci e più controllati dell'intera cellula.

Due piani, due disegni

La figura 1.1 è volutamente divisa in due riquadri, e la ragione è più profonda di un'esigenza grafica. La *pianta* vive nel piano dell'ala, individuato dalla corda (x) e dall'apertura (y): è lì che leggiamo c_r , c_t , $b/2$, la stazione y_g del carrello. Ma i carichi che ci interessano — portanza, peso proprio, carico del carrello — sono diretti lungo z , cioè **perpendicolarmente** a quel piano: sulla pianta li vedremmo “di punta”, ridotti a un punto.

Disegnare le frecce della portanza sulla pianta, come talvolta capita di vedere, significa rappresentare una forza in un piano cui essa non appartiene: il disegno diventa contraddittorio e induce l'errore di confondere l'ala con una trave caricata nel proprio piano. La regola operativa è semplice: *la geometria si quota in pianta, le forze si disegnano nella vista perpendicolare*. Tutti i diagrammi di taglio e momento che costruiremo appartengono al secondo piano, quello della vista (b).

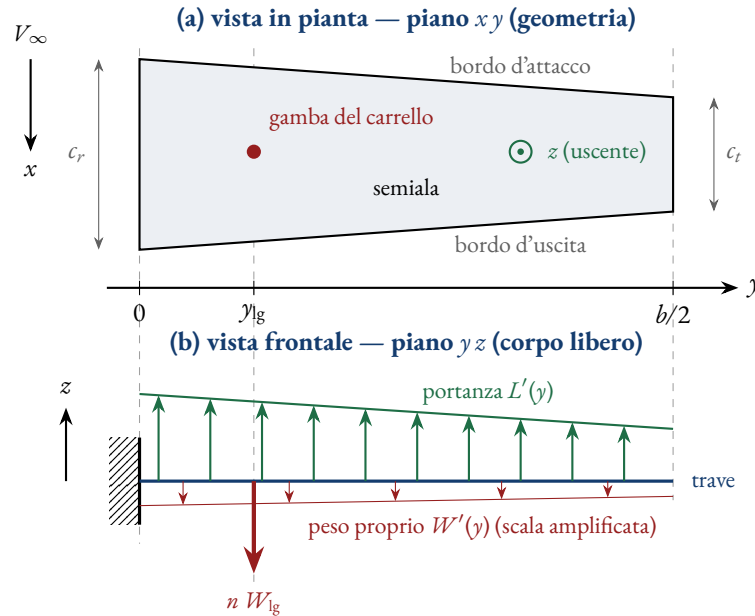


Figura 1.1. Schema strutturale della semiala nelle due viste che servono a descriverlo. In (a) la *vista in pianta*, cioè il piano xy dell'ala: contiene tutta la geometria (corde, apertura, stazione del carrello), e la portanza è diretta *fuori dal foglio*, come ricorda il simbolo dell'asse z uscente. In (b) la *vista frontale* nel piano yz , perpendicolare al piano alare: è il vero diagramma di corpo libero, con la portanza distribuita $L'(y)$ verso l'alto, il peso proprio $W'(y)$ verso il basso (disegnato con scala amplificata per leggibilità) e il carico concentrato $n W_{lg}$ del carrello. Le linee tratteggiate mettono in corrispondenza le stesse stazioni y nelle due viste.

1.2 I carichi che sollecitano la semiala

In volo rettilineo o in manovra simmetrica, la semiala è sollecitata da tre famiglie di carichi, tutte rappresentate nella vista (b) della figura 1.1.

1. **La portanza**, distribuita su tutta l'apertura e diretta verso l'alto. È il carico dominante: è lei che sostiene l'intero peso del velivolo e che, in manovra, lo moltiplica per il fattore di carico. Indichiamo con $L'(y)$ la portanza *per unità di apertura*, misurata in N/m.
2. **Il peso proprio dell'ala**, anch'esso distribuito lungo l'apertura ma diretto verso il basso. Lo indichiamo con $W'(y)$. Può sembrare un dettaglio, ma è un dettaglio *benefico*: il peso dell'ala si oppone alla portanza e quindi *alleggerisce* la flessione. È il motivo per cui i grandi liner imbarcano il combustibile nelle ali: ogni newton di peso collocato in ala è un newton che il longherone non deve riportare in fusoliera.
3. **I carichi concentrati**: carrelli, gondole motrici, serbatoi esterni, carichi subalari. Agiscono in sezioni ben precise e, come vedremo, lasciano una firma inconfondibile nei diagrammi: un *salto* nel taglio e uno *spigolo* nel momento flettente.

Osservazione

Un modo efficace di leggere la struttura alare è pensarla come un sistema di raccolta e trasporto: la portanza nasce ovunque sulla superficie, viene “raccolta” dalle centine, “convogliata” verso i longheroni e “trasportata” da questi fino agli attacchi di radice. Il taglio T e il momento flettente M che calcoleremo sono esattamente la misura, sezione per sezione, di quanto carico sta transitando in quel punto del trasporto.

1.3 Il coefficiente di contingenza

C'è un ultimo ingrediente prima di poter scrivere i numeri. Il velivolo non vola sempre a 1 *g*: in una richiamata, in una virata stretta o attraversando una raffica, la portanza deve superare il peso, anche di parecchio. Il rapporto fra la portanza effettiva e il peso è il *fattore di carico*

$$n = \frac{L}{W}. \quad (1.1)$$

Le norme di aeronavigabilità impongono che la struttura sopporti, senza deformazioni permanenti, il massimo fattore di carico previsto per la categoria del velivolo: è il *coefficiente di contingenza*, che nel nostro esercizio vale $n = 2,5$, valore tipico dei velivoli da trasporto. Tutti i carichi del nostro schema di trave vanno quindi moltiplicati per n : la portanza totale non varrà W ma nW , e anche i pesi (ala, carrello) parteciperanno all'equilibrio moltiplicati per n , perché in manovra ogni massa “pesa” n volte tanto.

Esempio: perché le masse pesano n volte tanto

Un motore da 300 kg appeso sotto l'ala esercita, in volo livellato, una forza di circa 2,9 kN. Nella richiamata a $n = 2,5$ dello stesso velivolo, la sua inerzia lo fa “pesare” $2,5 \times 2,9 \text{ kN} \approx 7,4 \text{ kN}$: è come se sotto l'ala fossero appesi due motori e mezzo. È la stessa sensazione che provate sulle gambe al fondo di una giostra che risale: per un istante, il vostro corpo pesa più del solito.

Il senso di tutto questo

Abbiamo trasformato un oggetto aerodinamicamente complicato — l'ala — in un oggetto strutturalmente semplice: una trave incastrata con carichi distribuiti e concentrati, tutti amplificati dal coefficiente di contingenza. Da questo momento in poi il problema è un problema di scienza delle costruzioni: dato lo schema di carico, determinare taglio e momento flettente in ogni sezione. È ciò che impareremo a fare nel prossimo capitolo.

Carico, taglio e momento flettente

Dove stiamo andando

Qui costruiamo gli strumenti teorici: definiamo taglio e momento flettente in una sezione della semiala, dimostriamo le relazioni differenziali che li legano al carico distribuito e ne ricaviamo le regole pratiche di tracciamento dei diagrammi (grado delle curve, salti, spigoli, punti di massimo). Sono poche righe di matematica, ma sono le righe che governano l'intero esercizio del capitolo 4.

2.1 Taglio e momento flettente in una sezione

Immaginiamo di “tagliare” idealmente la semiala in una generica stazione y e di osservare il tronco esterno, quello che va da y all'estremità $b/2$. Questo tronco è in equilibrio: dunque, attraverso la sezione di taglio, il resto della struttura deve trasmettergli una forza e una coppia che bilancino esattamente i carichi che agiscono su di esso.

Taglio e momento flettente

Detto $w(y)$ il carico netto distribuito (positivo verso l'alto) e dette P_i le eventuali forze concentrate applicate nelle stazioni y_i , si definiscono, nella sezione di ascissa y :

$$T(y) = \int_y^{b/2} w(\xi) d\xi - \sum_{y_i > y} P_i, \quad (2.1)$$

$$M(y) = \int_y^{b/2} w(\xi) (\xi - y) d\xi - \sum_{y_i > y} P_i (y_i - y). \quad (2.2)$$

Il **taglio** $T(y)$ è la risultante di tutti i carichi esterni alla sezione; il **momento flettente** $M(y)$ è il momento risultante degli stessi carichi rispetto alla sezione considerata. Nelle somme, le P_i sono prese positive se dirette verso il basso (pesi).

La scelta di guardare il tronco *esterno* non è un vezzo: è la prassi aeronautica, ed è comodissima. All'estremità alare non c'è nulla oltre la sezione, quindi $T(b/2) = 0$ e $M(b/2) = 0$ automaticamente: i diagrammi partono da zero all'estremità e crescono procedendo verso la radice, dove il carico “raccolto” è ormai tutto.

Esempio: l'ombrello rovesciato

Tenete un ombrello aperto controvento dal manico: ogni stecca è una piccola trave incastrata al centro, caricata dalla spinta del vento distribuita sul telo. La stecca non si rompe mai in punta — lì non c'è quasi carico da trasportare — ma vicino al mozzo, dove ogni stecca deve riportare al manico *tutta* la spinta raccolta dal suo spicchio di telo. La semiala funziona esattamente così: per questo il longherone è robusto alla radice e sottile all'estremità.

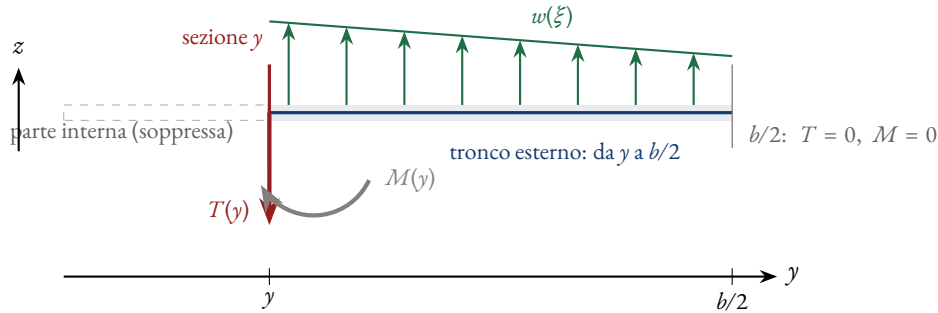


Figura 2.1. Convenzione dei segni adottata, nel piano yz . Si isola il tronco *esterno* alla sezione, compreso fra la stazione y e l'estremità $b/2$; su di esso agisce il carico netto $w(\xi)$, positivo verso l'alto. Perché il tronco sia in equilibrio, la parte interna deve trasmettergli attraverso la sezione una forza e una coppia: sono, in modulo, proprio il taglio $T(y)$ e il momento flettente $M(y)$ delle (2.1) e (2.2). Con questa convenzione T è positivo quando la risultante dei carichi esterni alla sezione è diretta verso l'alto (caso della portanza) e M è positivo quando tende a flettere l'ala verso l'alto, comprimendo l'estradosso e tendendo l'intradosso. All'estremità libera entrambi si annullano.

2.2 Le relazioni differenziali

Le definizioni (2.1) e (2.2) già contengono, in forma integrale, tutto quello che ci serve. Rendiamolo esplicito derivando rispetto a y . Per il taglio, il teorema fondamentale del calcolo integrale dà immediatamente

$$\frac{dT}{dy} = -w(y). \quad (2.3)$$

Per il momento conviene riscrivere la (2.2) come $M(y) = \int_y^{b/2} w \xi d\xi - y \int_y^{b/2} w d\xi$ (nelle sezioni prive di carichi concentrati) e derivare:

$$\frac{dM}{dy} = -w(y)y - \int_y^{b/2} w d\xi + y w(y) = -T(y). \quad (2.4)$$

Formula chiave

Con la convenzione “carichi esterni alla sezione”:

$$\boxed{\frac{dT}{dy} = -w(y) \quad \frac{dM}{dy} = -T(y)}$$

Il carico è la pendenza (cambiata di segno) del taglio; il taglio è la pendenza (cambiata di segno) del momento. Equivalentemente, in forma integrale: *il taglio si ottiene integrando il carico, il momento integrando il taglio*, procedendo dall'estremità verso la radice.

Osservazione

I segni meno derivano soltanto dal fatto che integriamo “a ritroso”, da y verso l'estremità: man mano che ci si sposta verso la punta (y cresce) resta sempre meno carico da raccogliere, e quindi T e M diminuiscono. Ciò che conta fisicamente, e che dovete ricordare, è la *gerarchia delle integrazioni*: $w \rightarrow T \rightarrow M$.

2.3 Le regole di tracciamento

Dalle relazioni differenziali discendono alcune regole pratiche che permettono di controllare a vista qualunque diagramma — il vostro, quello del libro, quello prodotto dal calcolatore.

1. **Regola dei gradi.** Ogni integrazione alza di uno il grado della curva. Nel nostro esercizio il carico netto $w(y)$ è *lineare* (ala trapezia): il taglio sarà dunque una *parabola* e il momento flettente una *cubica*.
2. **Regola del salto.** Dove agisce una forza concentrata P , il taglio presenta una *discontinuità* pari a P : la funzione integranda contiene lì una “delta” e l'integrale salta. Il momento, che è l'integrale del taglio, resta invece continuo ma cambia pendenza: presenta uno *spigolo*.
3. **Regola degli zeri.** All'estremità libera T e M sono nulli; alla radice sono massimi (se il carico netto non cambia segno lungo l'apertura, come nel nostro caso).
4. **Regola di verifica globale.** Il taglio in mezzeria deve coincidere con la somma algebrica di *tutti* i carichi della semiala: è un bilancio che si scrive in una riga e che intercetta la quasi totalità degli errori di calcolo.

Attenzione

Lo studente frettoloso tende a dimenticare la regola del salto e disegna un taglio “liscio” anche in presenza del carrello. Errore grave: il salto non è un dettaglio estetico, è la traccia del fatto che in quella sezione la struttura deve trasferire, di colpo, tutta la forza concentrata. Le centine di forza in corrispondenza di carrelli e attacchi motore esistono precisamente per gestire quel salto.

Il senso di tutto questo

Due definizioni e due derivate: non serve altro. Il taglio è il carico raccolto, il momento è il taglio accumulato; le forze concentrate producono salti nel primo e spigoli nel secondo. Con queste regole in tasca possiamo affrontare il problema vero: quanto valgono, numericamente, $w(y)$, $T(y)$ e $M(y)$ per un'ala assegnata? Serve prima di tutto conoscere i carichi: è l'oggetto del prossimo capitolo.

I carichi in apertura

Dove stiamo andando

Sappiamo integrare, ma non sappiamo ancora *che cosa* integrare. In questo capitolo costruiamo le tre distribuzioni di carico della semiala trapezia: la portanza per unità di apertura $L'(y)$, il peso proprio $W'(y)$ e i carichi concentrati. Introduciamo l'ipotesi semplificativa di C_L costante in apertura — discutendone limiti e raffinamenti — e la formula empirica per la stima del peso alare.

3.1 La distribuzione di portanza

La portanza per unità di apertura in una stazione y si scrive, per analogia diretta con la formula globale della portanza,

$$L'(y) = q_\infty c_\ell(y) c(y), \quad \text{con} \quad q_\infty = \frac{1}{2} \rho V^2, \quad (3.1)$$

dove q_∞ è la *pressione dinamica* della corrente indisturbata, $c(y)$ la corda locale e $c_\ell(y)$ il coefficiente di portanza della sezione. L'apice in L' ricorda che si tratta di una portanza *per unità di apertura* (N/m) e non di una forza: è la notazione internazionale corrente. La corda la conosciamo dalla geometria; il problema vero è $c_\ell(y)$, che in generale dipende dalla forma in pianta, dallo svergolamento e dall'aerodinamica tridimensionale dell'ala.

Per un'ala a pianta trapezia con svergolamento piccolo, però, l'esperienza e la teoria mostrano che i valori locali di c_ℓ si scostano poco dal coefficiente di portanza globale del velivolo. È l'ipotesi semplificativa che adotteremo:

Ipotesi di lavoro: c_ℓ costante in apertura

Per ala trapezia con piccolo svergolamento assumiamo $c_\ell(y) \simeq C_L$ per ogni y . La distribuzione di portanza diventa allora *proporzionale alla corda locale*:

$$L'(y) = q_\infty C_L c(y) = \frac{1}{2} \rho V^2 C_L c(y). \quad (3.2)$$

Poiché in un'ala trapezia la corda varia linearmente da c_r (radice) a c_t (estremità), anche la distribuzione di portanza è *trapezia*: basta calcolarla in due sezioni,

$$L'_r = \frac{1}{2} \rho V^2 C_L c_r, \quad L'_t = \frac{1}{2} \rho V^2 C_L c_t,$$

e congiungere con una retta.

Quanto è buona questa ipotesi?

Piuttosto buona per rastremazioni moderate, e comunque *conservativa* nella zona che ci interessa. La distribuzione reale su un'ala trapezia sta fra la distribuzione proporzionale alla corda e quella ellittica di minima resistenza indotta: il metodo di Schrenk [3] la approssima proprio con la media delle due, mentre il Report NACA 572 [4] fornisce tabelle accurate per ali trapezie con piccolo svergolamento. Rispetto a questi metodi, la nostra ipotesi sovrastima leggermente il carico verso la radice e lo sottostima verso l'estremità: per il momento flettente alla radice, che è la grandezza dimensionante, l'errore è modesto e va

nel verso della sicurezza. In sede d'esame l'ipotesi di c_ℓ costante è pienamente accettabile, purché — come stiamo facendo — venga dichiarata.

3.1.1 La condizione di volo dimensionante

Resta da scegliere *a quale velocità* e *a quale* C_L valutare la (3.2). La risposta viene dal diagramma di manovra: il punto più gravoso per la flessione dell'ala è il **punto A**, intersezione fra la parabola di stallo e la retta orizzontale $n = n_{\max}$. In quel punto il velivolo vola al C_L massimo (assetto di stallo, $C_{L,\max}$) e sviluppa contemporaneamente il massimo fattore di carico: la portanza totale vale $n W$, il massimo che la struttura dovrà mai sopportare.

Imponendo l'equilibrio verticale in manovra, $n W = \frac{1}{2} \rho V_A^2 C_{L,\max} S$, si ricava la velocità del punto A:

$$V_A = \sqrt{\frac{2 n (W/S)}{\rho C_{L,\max}}}. \quad (3.3)$$

Si noti l'eleganza del risultato: basta il *carico alare* W/S , non servono separatamente peso e superficie.

3.2 Il peso dell'ala

Il peso proprio dell'ala si oppone alla portanza. Ma quanto pesa un'ala che... non abbiamo ancora progettato? È il classico circolo del progettista: per dimensionare la struttura servono i carichi, per conoscere i carichi serve il peso della struttura. Si esce dal circolo con le *formule statistiche*, costruite regredendo i dati di velivoli esistenti. Ne adottiamo una di impianto classico:

$$W_w = 0,022 n_{\text{ult}} AR S \sqrt[3]{W}, \quad (3.4)$$

con W e W_w espressi in kg_f , S in m^2 , AR l'allungamento alare e n_{ult} il *fattore di carico ultimo*:

$$n_{\text{ult}} = k n, \quad (3.5)$$

prodotto del coefficiente di contingenza n (il fattore di carico *limite*) per il coefficiente di sicurezza k . È la grandezza che i testi italiani chiamano *coefficiente di robustezza* e indicano con N : stesso significato fisico, simbolo diverso. Per k le norme storiche del Registro Aeronautico Italiano indicavano $k = 2$; le norme attuali adottano $k = 1,5$ con diversa filosofia di verifica, ma per coerenza con la taratura della formula statistica manteniamo $k = 2$.

Attenzione: formula empirica, unità obbligate

La (3.4) *non è dimensionalmente omogenea*: il coefficiente 0,022 ingloba le unità e vale soltanto se W è in kg_f e S in m^2 , restituendo W_w in kg_f . È il destino di tutte le formule statistiche: vanno usate *esattamente* nelle unità per cui sono state tarate, e il risultato va poi convertito nel Sistema Internazionale ($1 \text{ kg}_f = 9,80665 \text{ N}$). Dimenticare questa regola è uno degli errori più frequenti — e più rovinosi — in sede d'esame.

In prima approssimazione ipotizziamo la struttura alare omogenea: il peso risulta allora distribuito proporzionalmente alla superficie in pianta e quindi, ancora una volta, *proporzionale alla corda*. Tenendo conto del coefficiente di contingenza (in manovra anche l'ala “pesa” n volte tanto):

$$W'(y) = n \frac{W_w}{S} c(y), \quad \text{da cui} \quad W'_r = n \frac{W_w}{S} c_r, \quad W'_t = n \frac{W_w}{S} c_t. \quad (3.6)$$

3.3 Il carico netto e i carichi concentrati

Portanza e peso alare sono entrambi proporzionali alla corda: la loro differenza, il *carico netto*

$$w(y) = L'(y) - W'(y), \quad (3.7)$$

è dunque anch'essa una distribuzione trapezia, individuata dai due valori $w_r = L'_r - W'_r$ e $w_t = L'_t - W'_t$. È questa la distribuzione che entrerà nelle integrazioni del capitolo 2.

Ai carichi distribuiti si aggiungono infine i carichi concentrati. Nel nostro esercizio ce n'è uno solo per semiala: la gamba del carrello principale, di peso W_{lg} , applicata alla stazione y_{lg} pari a metà carreggiata. In manovra il suo contributo vale $n W_{lg}$, diretto verso il basso. In mancanza di dati costruttivi, il peso del carrello si stima statisticamente come una frazione del peso totale; adotteremo il valore classico

$$W_{lg} \simeq 0,04 W. \quad (3.8)$$

Osservazione

Vale la pena notare la piccola ironia strutturale del carrello retrattile in ala: a terra sostiene l'intero velivolo, in volo è solo zavorra appesa. Ma è zavorra *ben piazzata*: essendo vicino alla radice (y_{lg} piccolo) e diretto verso il basso, il suo contributo riduce leggermente taglio e momento nelle sezioni interne. Come per il combustibile in ala, ogni peso spostato dalla fusoliera all'ala lavora "a favore" della flessione.

Il senso di tutto questo

Ora abbiamo tutto: una distribuzione trapezia di carico netto, individuata da due soli numeri w_r e w_t , più un carico concentrato $n W_{lg}$ in posizione nota. Lo schema di trave del capitolo 1 è diventato uno schema *quantitativo*. Non resta che mettere i numeri e integrare: è l'esercizio del prossimo capitolo.

Esercizio guidato: ala trapezia con carrello

Dove stiamo andando

Questo è il cuore della monografia. Applichiamo l'intero impianto dei capitoli precedenti a un tema d'esame classico: il tracciamento dei diagrammi di taglio e di momento flettente per un'ala trapezia con carrello. Procederemo per fasi, secondo lo schema usato in classe: geometria (A), condizione di volo (B), distribuzione di portanza (C), peso dell'ala e carichi (D), diagramma di taglio (E), diagramma di momento flettente (F). Ogni numero è verificato con il calcolo numerico del capitolo 5.

Testo del problema

Tracciare il diagramma di taglio e di momento flettente per l'ala a pianta trapezia, con carrello retrattile in ala, di un velivolo avente le seguenti caratteristiche:

peso totale	$W = 6160 \text{ kg}_f$	$(\simeq 60,4 \text{ kN})$
carico alare	$W/S = 220 \text{ kg}_f/\text{m}^2$	$(\simeq 2158 \text{ N/m}^2)$
allungamento	$AR = 7$	
rapporto di rastremazione	$\lambda = c_t/c_r = 0,6$	
coefficiente di contingenza	$n = 2,5$	
profilo	NACA 64 ₂ -215	$(C_{L,\max} = 1,3)$

Si assumano con plausibile criterio il peso e la carreggiata del carrello. Quota di riferimento: livello del mare in aria tipo ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$).

4.1 Fase A — La geometria dell'ala

Dati: $W, W/S, AR, \lambda$. **Incognite:** S, b , corde c_r e c_t .

Il carico alare è il rapporto fra peso e superficie: la superficie segue subito,

$$S = \frac{W}{W/S} = \frac{6160}{220} = 28 \text{ m}^2. \quad (4.1)$$

Dalla definizione di allungamento $AR = b^2/S$ ricaviamo l'apertura:

$$b = \sqrt{AR S} = \sqrt{7 \cdot 28} = 14 \text{ m}, \quad (4.2)$$

e quindi la corda media geometrica

$$\bar{c} = \frac{S}{b} = \frac{28}{14} = 2 \text{ m}. \quad (4.3)$$

Per un'ala trapezia la corda media è la semisomma delle corde di radice e di estremità. Insieme alla definizione di rastremazione otteniamo un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} \frac{c_t}{c_r} = \lambda = 0,6 \\ \frac{c_r + c_t}{2} = \bar{c} = 2 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow c_r(1 + 0,6) = 4 \text{ m} \Rightarrow \boxed{c_r = 2,5 \text{ m}, \quad c_t = 1,5 \text{ m}} \quad (4.4)$$

Verifica: $S = \frac{c_r + c_t}{2} b = \frac{2,5 + 1,5}{2} \cdot 14 = 28 \text{ m}^2 \checkmark$

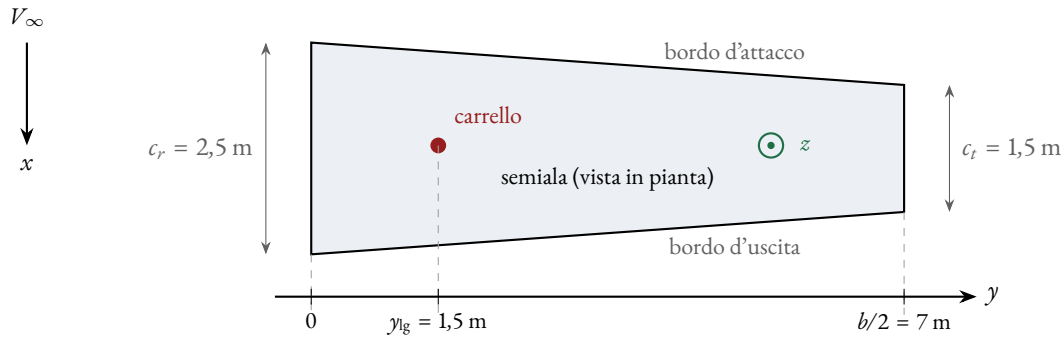


Figura 4.1. Geometria quotata della semiala trapezia, con la stazione del carrello principale. Questa è la sola vista in cui si leggono le dimensioni; le forze non compaiono perché sono dirette lungo z , cioè perpendicolarmente al foglio (si veda lo schema di carico della figura 4.2).

4.2 Fase B — La condizione di volo dimensionante

Dati: $n, W/S, C_{L,\max}, \rho$. **Incognita:** V_A .

Il calcolo si esegue nel punto A del diagramma di manovra (assetto di stallo, massimo fattore di carico), perché — come visto nel capitolo 3 — a quella condizione corrispondono i massimi valori di taglio e momento flettente. Dalla (3.3):

$$V_A = \sqrt{\frac{2n(W/S)}{\rho C_{L,\max}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,5 \cdot 2157,5}{1,225 \cdot 1,3}} = \boxed{82,3 \text{ m/s}} \simeq 296 \text{ km/h.} \quad (4.5)$$

Verifica di sensatezza: circa 300 km/h per un bimotore leggero da sei tonnellate in richiamata al limite: ordine di grandezza pienamente plausibile.

4.3 Fase C — La distribuzione di portanza

Dati: $\rho, V_A, C_{L,\max}, c_r, c_t$. **Incognite:** L'_r, L'_t .

Con l'ipotesi di c_ℓ costante in apertura, la (3.2) valutata nelle due sezioni estreme fornisce:

$$L'_r = \frac{1}{2} \rho V_A^2 C_{L,\max} c_r = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot (82,30)^2 \cdot 1,3 \cdot 2,5 = 13\,484 \text{ N/m} \simeq 13,48 \text{ kN/m}, \quad (4.6)$$

$$L'_t = \frac{1}{2} \rho V_A^2 C_{L,\max} c_t = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot (82,30)^2 \cdot 1,3 \cdot 1,5 = 8090 \text{ N/m} \simeq 8,09 \text{ kN/m}. \quad (4.7)$$

Verifica globale (regola d'oro): la portanza totale delle due semiali deve valere nW . L'area del trapezio di carico sull'intera apertura è

$$L = \frac{L'_r + L'_t}{2} b = \frac{13484 + 8090}{2} \cdot 14 = 151,0 \text{ kN} \quad \text{e} \quad nW = 2,5 \cdot 60,41 = 151,0 \text{ kN.} \quad \checkmark \quad (4.8)$$

La coincidenza è esatta, e non per caso: la (3.3) è stata ricavata proprio imponendo questo equilibrio. Se nel vostro compito i due numeri non coincidono, c'è un errore a monte: cercatelo prima di proseguire.

4.4 Fase D — Peso dell'ala, carico netto, carrello

Dati: $W, AR, S, n, k = 2$. **Incognite:** $W_w, W'_r, W'_t, w_r, w_t, W_{lg}$.

D.1 — Peso dell'ala

Il fattore di carico ultimo vale $n_{\text{ult}} = k n = 2 \cdot 2,5 = 5$. La formula statistica (3.4), in unità tecniche, fornisce

$$W_w = 0,022 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 28 \cdot \sqrt[3]{6160} = 21,56 \cdot 18,33 = 395 \text{ kgf} \simeq 3,88 \text{ kN}. \quad (4.9)$$

Il peso dell'ala è circa il 6,4% del peso totale: valore ragionevole per la categoria.

D.2 — Distribuzione del peso alare

Con l'ipotesi di struttura omogenea, dalla (3.6) (il fattore n è già incluso):

$$W'_r = n \frac{W_w}{S} c_r = 2,5 \cdot \frac{3876}{28} \cdot 2,5 = 865 \text{ N/m}, \quad (4.10)$$

$$W'_t = n \frac{W_w}{S} c_t = 2,5 \cdot \frac{3876}{28} \cdot 1,5 = 519 \text{ N/m}. \quad (4.11)$$

Si noti l'ordine di grandezza: il peso alare contrasta appena il $6 \div 7\%$ della portanza. Aiuta, ma non cambia la sostanza.

D.3 — Carico netto distribuito

$$w_r = L'_r - W'_r = 13484 - 865 = 12619 \text{ N/m}, \quad w_t = L'_t - W'_t = 8090 - 519 = 7571 \text{ N/m}. \quad (4.12)$$

Il carico netto varia linearmente fra questi due valori (figura 4.3):

$$w(y) = w_r + (w_t - w_r) \frac{y}{b/2} = 12619 - 721,1 y \quad [\text{N/m}], \quad y \text{ in m}. \quad (4.13)$$

D.4 — Il carrello

Il testo lascia a noi la scelta: assumiamo, con criterio statistico (3.8), un peso del carrello pari al 4% del peso totale e una carreggiata di 3 m, cosicché ogni gamba è applicata a $y_{\text{lg}} = 1,5 \text{ m}$ dalla mezzeria:

$$W_{\text{lg}} = 0,04 W = 246 \text{ kgf} \simeq 2,42 \text{ kN}, \quad n W_{\text{lg}} = 2,5 \cdot 2,42 = 6,04 \text{ kN (verso il basso)}. \quad (4.14)$$

Con questo, lo schema di carico della semiala è completamente definito e quotato: è quello della figura 4.2, che riporta il *solo* carico netto $w(y)$ (portanza già diminuita del peso proprio) e il carico concentrato del carrello. Si osservi che questo disegno vive nel piano yz , perpendicolare alla pianta della figura 4.1: è il diagramma di corpo libero su cui, nelle fasi E e F, scriveremo le equazioni di equilibrio.

4.5 Fase E — Il diagramma di taglio

Dati: $w_r, w_t, n W_{\text{lg}}, y_{\text{lg}}$. **Incognita:** $T(y)$.

Applichiamo la definizione (2.1), con la convenzione dei segni della figura 2.1. Il contributo del carico distribuito è l'area del trapezio di carico compreso fra la sezione y e l'estremità; detto $a = b/2 - y$ il tratto residuo:

$$V_{\text{distr}}(y) = \frac{w(y) + w_t}{2} a. \quad (4.15)$$

A questo va sottratto, per le sole sezioni interne al carrello ($y < y_{\text{lg}}$), il carico concentrato $n W_{\text{lg}}$:

$$T(y) = \begin{cases} \frac{w(y) + w_t}{2} \left(\frac{b}{2} - y \right) - n W_{\text{lg}} & 0 \leq y < y_{\text{lg}}, \\ \frac{w(y) + w_t}{2} \left(\frac{b}{2} - y \right) & y_{\text{lg}} < y \leq \frac{b}{2}. \end{cases} \quad (4.16)$$

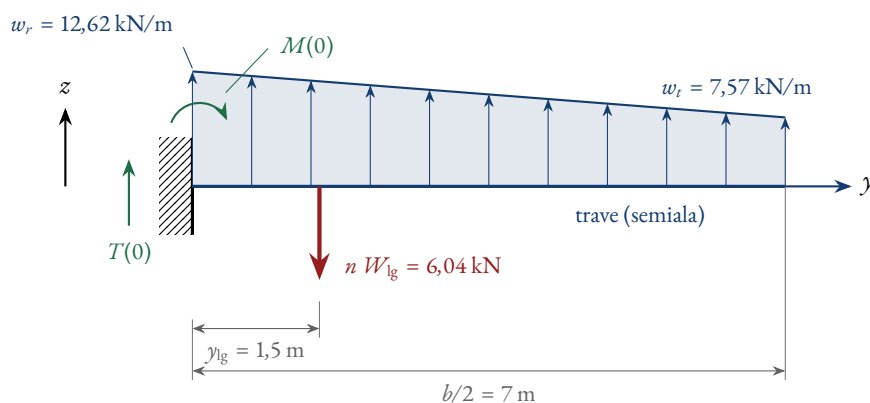


Figura 4.2. Schema di carico quotato della semiala, nel piano yz perpendicolare alla pianta. Il trapezio rappresenta il carico netto $w(y)$ (portanza al netto del peso proprio), la freccia rossa il carico concentrato $n W_{lg}$ del carrello. In verde, alla sezione di incastro, le due incognite del problema: il taglio $T(0)$ e il momento flettente $M(0)$.

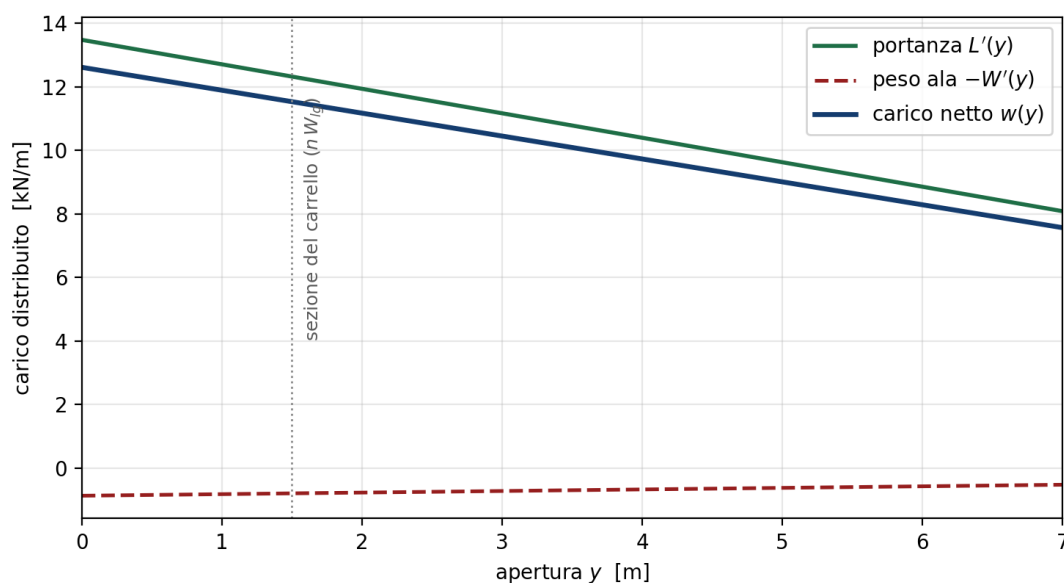


Figura 4.3. Distribuzione dei carichi in apertura: portanza $L'(y)$, peso alare $W'(y)$ (riportato negativo perché diretto verso il basso) e carico netto $w(y)$. La linea punteggiata indica la sezione del carrello. Si tratta di un *grafico di funzioni* lungo l'apertura, non di uno schema di corpo libero: lo schema di corpo libero, con le forze al loro posto, è quello della figura 4.2.

Essendo $w(y)$ lineare, la (4.16) è una *parabola* con un *salto* di ampiezza $n W_{lg}$ in y_{lg} : esattamente ciò che prevedono le regole di tracciamento del capitolo 2.

Calcoliamo i valori notevoli. In mezzeria ($y = 0, a = 7$ m):

$$T(0) = \frac{12619 + 7571}{2} \cdot 7 - 6041 = 70666 - 6041 = \boxed{64,6 \text{ kN}} (\simeq 6590 \text{ kgf}). \quad (4.17)$$

A cavallo del carrello, con $w(y_{lg}) = 12619 - 721,1 \cdot 1,5 = 11537 \text{ N/m}$ e $a = 5,5$ m:

$$T(y_{lg}^+) = \frac{11537 + 7571}{2} \cdot 5,5 = 52,5 \text{ kN}, \quad T(y_{lg}^-) = 52,5 - 6,04 = 46,5 \text{ kN}. \quad (4.18)$$

Il diagramma completo è in figura 4.4.

Verifica globale: il taglio in mezzeria deve coincidere con il bilancio dei carichi dell'intera semiala,

$$T(0) = \frac{n W - n W_w}{2} - n W_{lg} = \frac{151,0 - 9,69}{2} - 6,04 = 70,67 - 6,04 = 64,6 \text{ kN}. \quad \checkmark \quad (4.19)$$

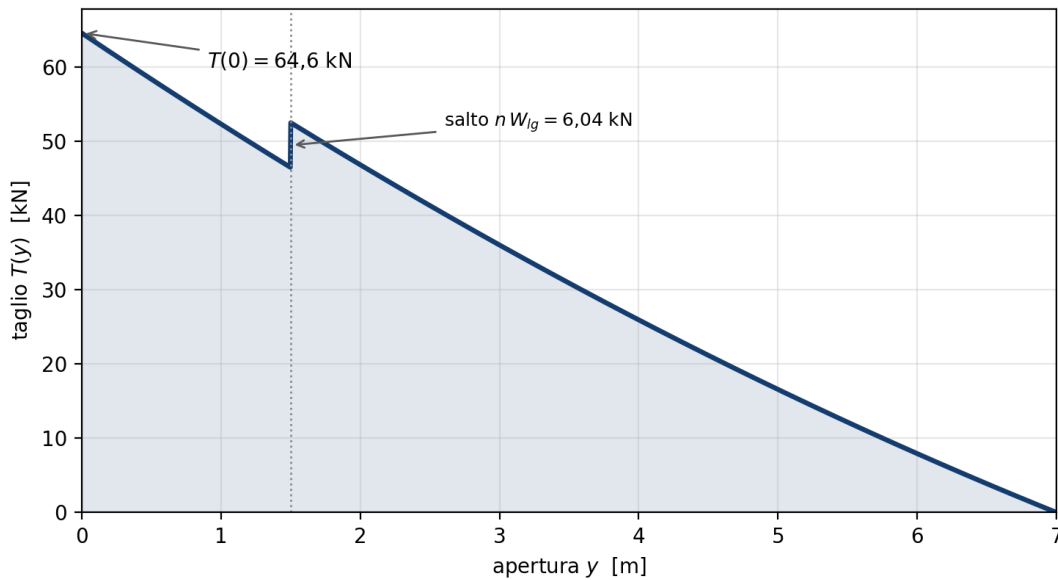


Figura 4.4. Diagramma di taglio della semiala. Si noti l'andamento parabolico e il salto di ampiezza $n W_{lg}$ in corrispondenza del carrello.

4.6 Fase F — Il diagramma di momento flettente

Dati: $w(y)$, $T(y)$. **Incognita:** $M(y)$.

Applichiamo la definizione (2.2): momento, rispetto alla sezione y , di tutti i carichi esterni. Per il carico distribuito conviene scomporre il trapezio residuo (base $a = b/2 - y$) in un rettangolo di intensità w_t e un triangolo di intensità massima $w(y) - w_t$ al vertice interno:

- il rettangolo ha risultante $w_t a$ applicata a distanza $a/2$ dalla sezione: momento $w_t a^2/2$;
- il triangolo ha risultante $\frac{1}{2} [w(y) - w_t] a$ applicata nel baricentro, a distanza $a/3$ dalla sezione: momento $[w(y) - w_t] a^2/6$.

Sommando e sottraendo il contributo del carrello per $y < y_{lg}$:

$$M(y) = w_t \frac{a^2}{2} + [w(y) - w_t] \frac{a^2}{6} - \underbrace{n W_{lg} (y_{lg} - y)}_{\text{solo se } y < y_{lg}}, \quad a = \frac{b}{2} - y. \quad (4.20)$$

La (4.20) è una *cubica* in y , continua ovunque ma con uno *spigolo* (discontinuità della pendenza) in y_{lg} : di nuovo, esattamente come previsto dalla teoria.

Il valore in mezzeria ($a = 7$ m):

$$\begin{aligned} M(0) &= 7571 \cdot \frac{49}{2} + (12619 - 7571) \cdot \frac{49}{6} - 6041 \cdot 1,5 \\ &= 185,5 + 41,2 - 9,1 = \boxed{217,7 \text{ kNm}} \quad (\simeq 22\,200 \text{ kgf}\cdot\text{m}). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Il diagramma completo è in figura 4.5; la tabella 4.1 riassume i valori nelle stazioni principali.

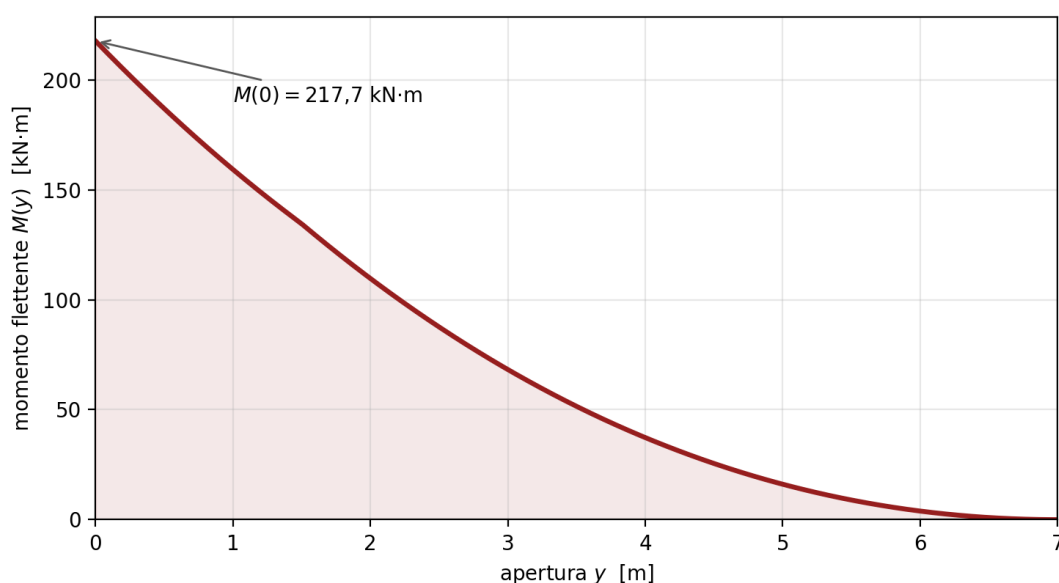


Figura 4.5. Diagramma di momento flettente della semiala: andamento cubico, nullo all'estremità e massimo alla radice, con spigolo (poco visibile a questa scala) nella sezione del carrello.

Tabella 4.1. Valori di carico netto, taglio e momento flettente nelle stazioni principali della semiala (calcolo numerico del capitolo 5).

y [m]	w [kN/m]	T [kN]	M [kNm]
0,0	12,62	64,63	217,7
1,0	11,90	52,37	159,2
1,5 ⁻	11,54	46,51	134,5
1,5 ⁺	11,54	52,55	134,5
2,0	11,18	46,87	109,7
3,0	10,46	36,05	68,3
4,0	9,74	25,96	37,3
5,0	9,01	16,59	16,1
6,0	8,29	7,93	3,9
7,0	7,57	0,00	0,0

E prima dei calcolatori? L'integrazione grafica

Prima dell'avvento del calcolo automatico, integrazioni come le nostre si eseguivano *graficamente*, con il metodo del poligono funicolare: si divideva il diagramma di carico in strisce, si proiettavano le ordinate medie su una retta polare e si costruiva, parallela per parallela, una spezzata la cui ordinata — letta con le opportune scale — forniva l'integrale cercato. Applicato ai nostri dati, il metodo grafico restituisce un taglio in mezzeria di circa 6600 kg_f e un momento di circa 22 750 kg_f·m: scarti dell'ordine dello 0,2% e del 2,5% rispetto ai valori esatti, dovuti alle inevitabili imprecisioni del tracciamento manuale. Era un metodo ingegnoso e, per l'epoca, rapidissimo; oggi lo sostituiamo con dieci righe di Python, che vedremo nel prossimo capitolo. Ma il suo principio — integrare è accumulare aree — resta il modo giusto di *pensare* questi diagrammi.

Il senso di tutto questo

Fermiamoci a leggere i risultati, perché è per questo che li abbiamo calcolati. Alla radice della semiala transitano 64,6 kN di taglio — il peso di circa quattro automobili — e 218 kNm di momento flettente: come se quelle quattro automobili fossero appese a un braccio di leva di oltre tre metri. Sono questi i numeri con cui, nel seguito del corso, dimensioneremo solette e anima del longherone: il diagramma di momento dirà *quanta* sezione resistente serve, e il suo decrescere verso l'estremità dirà *dove* possiamo alleggerire. Ogni ala rastremata che vedete in volo è la traduzione in alluminio di un diagramma come quello di figura 4.5.

I diagrammi con Python

Dove stiamo andando

In questo capitolo rifacciamo l'intero esercizio con il calcolatore: scriveremo un programma Python completo che, a partire dai soli dati del problema, ricostruisce la geometria, calcola i carichi, integra numericamente e disegna i tre diagrammi delle figure 4.3, 4.4 e 4.5. L'obiettivo è doppio: verificare in modo indipendente i calcoli manuali e consegnarvi uno strumento riutilizzabile per qualunque variante del problema — altri pesi, altre rastremazioni, altri fattori di carico — senza rifare una sola integrazione a mano.

5.1 L'idea: integrare numericamente col metodo dei trapezi

Il cuore del programma è l'integrazione delle equazioni (2.1) e (2.2). Sul calcolatore rappresentiamo la semiapertura con una griglia fitta di stazioni $y_0 = 0, y_1, \dots, y_N = b/2$ a passo costante Δy , e su questa griglia campioniamo il carico $w_i = w(y_i)$. L'integrale fra due stazioni contigue si approssima con l'area del trapezio:

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} w d\xi \simeq \frac{w_i + w_{i+1}}{2} \Delta y, \quad (5.1)$$

e il taglio in una stazione è la somma dei trapezi da lì all'estremità — una *somma cumulata a ritroso*, che è la traduzione numerica letterale della definizione “risultante dei carichi esterni alla sezione”. Il momento si ottiene ripetendo l'identica operazione sul taglio appena calcolato: la gerarchia $w \rightarrow T \rightarrow M$ diventa, in codice, due chiamate alla stessa riga.

Osservazione

Per la distribuzione trapezia il metodo dei trapezi è addirittura *esatto* sul taglio (l'area sotto una retta è calcolata senza errore) e commette sul momento un errore che decresce con Δy^2 : con 2000 intervalli su 7 m lo scarto rispetto alla soluzione in forma chiusa dell'appendice B è di pochi N m su oltre duecentomila — del tutto trascurabile. Il vantaggio del metodo numerico è che funziona *identico* anche quando la distribuzione non è trapezia: carico ellittico, distribuzione di Schrenk, serbatoi parzialmente pieni.

5.2 Il programma completo

Il listato seguente è autosufficiente: richiede soltanto le librerie `numpy` e `matplotlib`, entrambe gratuite e già disponibili in qualunque installazione scientifica di Python (o direttamente online, ad esempio su Google Colab, senza installare nulla).

Listing 5.1. Il programma `genera_diagrammi.py`, incluso nel progetto della monografia.

```
1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 # =====
4 # genera_diagrammi.py -- Serie Raucci
5 # Diagrammi di taglio T(y) e di momento flettente M(y) per la semiala
```

```

6 # trapezia con carrello. Sostituisce l'integrazione grafica con
7 # l'integrazione numerica (metodo dei trapezi).
8 # Simbologia internazionale: W peso, L' portanza per unita' di
9 # apertura, W' peso alare per unita' di apertura, w carico netto,
10 # T taglio, M momento flettente.
11 # =====
12 import numpy as np
13 import matplotlib.pyplot as plt
14
15 # ----- 1. dati (SI)
16 g = 9.80665 # accelerazione di gravita' [m/s^2]
17 rho = 1.225 # densita' ISA a quota zero [kg/m^3]
18 W = 6160 * g # peso totale [N]
19 WS = 220 * g # carico alare W/S [N/m^2]
20 AR = 7.0 # allungamento alare [-]
21 taper = 0.6 # rastremazione lambda = c_t/c_r [-]
22 n = 2.5 # coefficiente di contingenza [-]
23 CL_max = 1.3 # C_L massimo (stallo) [-]
24 k = 2.0 # coefficiente di sicurezza RAI [-]
25 y_lg = 1.5 # stazione del carrello [m]
26
27 # ----- 2. geometria dell'ala
28 S = W / WS # superficie alare [m^2]
29 b = np.sqrt(AR * S) # apertura alare [m]
30 c_bar = S / b # corda media geometrica [m]
31 c_r = 2 * c_bar / (1 + taper) # corda di radice [m]
32 c_t = taper * c_r # corda di estremita' [m]
33
34 # ----- 3. condizione di volo: punto A della manovra
35 VA = np.sqrt(2 * n * WS / (rho * CL_max)) # [m/s]
36
37 # ----- 4. carichi distribuiti in apertura
38 n_ult = k * n # fattore di carico
39 # ultimo
40 W_w = 0.022 * n_ult * AR * S * (W / g)**(1/3) * g # peso ala [N]
41 W_lg = 0.04 * W # peso carrello [N]
42
43 y = np.linspace(0.0, b / 2, 2001) # stazioni [m]
44 c = c_r + (c_t - c_r) * y / (b / 2) # corda locale [m]
45 L_prime = 0.5 * rho * CL_max * VA**2 * c # portanza [N/m]
46 W_prime = n * (W_w / S) * c # peso ala [N/m]
47 w = L_prime - W_prime # carico netto [N/m]
48
49 # ----- 5. integrazione numerica (dall'estremita')
50 # T(y) = integrale di w da y all'estremita' + salto del carrello
51 dy = y[1] - y[0]
52 T = np.zeros_like(y)
53 T[:-1] = np.cumsum((0.5 * (w[1:] + w[:-1]) * dy)[::-1]))[:-1]
54 T -= np.where(y < y_lg, n * W_lg, 0.0) # carico concentrato
55
56 # M(y) = integrale di T da y all'estremita'
57 M = np.zeros_like(y)
58 M[:-1] = np.cumsum((0.5 * (T[1:] + T[:-1]) * dy)[::-1]))[:-1]
59 print(f"V_A = {VA:8.2f} m/s")

```

```

60 print(f"T radice = {T[0]/1000:8.2f} kN ({T[0]/g:8.1f} kgf)")
61 print(f"M radice = {M[0]/1000:8.2f} kN*m ({M[0]/g:7.0f} kgf*m)")
62
63 # ----- 6. diagrammi
64 blu, rosso, verde = "#143C6E", "#961E1E", "#1E6E46"
65
66 fig, ax = plt.subplots(figsize=(7.5, 4.2))
67 ax.plot(y, L_prime / 1000, color=verde, lw=2.0,
68 label=r"portanza $L'(y)$")
69 ax.plot(y, -W_prime / 1000, color=rosso, lw=1.8, ls="--",
70 label=r"peso ala $-W'(y)$")
71 ax.plot(y, w / 1000, color=blu, lw=2.4, label=r"carico netto $w(y)$")
72 ax.axvline(y_lg, color="0.55", lw=1.0, ls=":")
73 ax.text(y_lg + 0.08, 4.0, r"sezione del carrello ($n\,W_{lg}$)",
74 rotation=90, va="bottom", color="0.35", fontsize=9)
75 ax.set_xlabel(r"apertura $y$ [m]")
76 ax.set_ylabel(r"carico distribuito [kN/m]")
77 ax.grid(alpha=0.3); ax.legend(); ax.set_xlim(0, b / 2)
78 fig.tight_layout()
79 fig.savefig("immagini/distribuzione_carichi.png", dpi=200)
80
81 fig, ax = plt.subplots(figsize=(7.5, 4.2))
82 ax.plot(y, T / 1000, color=blu, lw=2.4)
83 ax.fill_between(y, T / 1000, color=blu, alpha=0.12)
84 ax.axvline(y_lg, color="0.55", lw=1.0, ls=":")
85 ax.annotate(rf"$T(0) = {T[0]/1000:.1f}$ kN".replace(".", "{,}"),
86 xy=(0, T[0] / 1000), xytext=(0.9, 60), fontsize=10,
87 arrowprops=dict(arrowstyle="->", color="0.35"))
88 ax.annotate(rf"$salto\,n\,W_{lg}$ = {n * W_lg / 1000:.2f}$ kN".replace(
89 ".", "{,}"),
90 xy=(y_lg, 49.5), xytext=(2.6, 52), fontsize=9,
91 arrowprops=dict(arrowstyle="->", color="0.35"))
92 ax.set_xlabel(r"apertura $y$ [m]")
93 ax.set_ylabel(r"taglio $T(y)$ [kN]")
94 ax.grid(alpha=0.3); ax.set_xlim(0, b / 2); ax.set_ylim(bottom=0)
95 fig.tight_layout()
96 fig.savefig("immagini/diagramma_taglio.png", dpi=200)
97
98 fig, ax = plt.subplots(figsize=(7.5, 4.2))
99 ax.plot(y, M / 1000, color=rosso, lw=2.4)
100 ax.fill_between(y, M / 1000, color=rosso, alpha=0.10)
101 ax.annotate(rf"$M(0) = {M[0]/1000:.1f}$ kN$\cdot$m".replace(".", "{,}"),
102 xy=(0, M[0] / 1000), xytext=(1.0, 190), fontsize=10,
103 arrowprops=dict(arrowstyle="->", color="0.35"))
104 ax.set_xlabel(r"apertura $y$ [m]")
105 ax.set_ylabel(r"momento flettente $M(y)$ [kN$\cdot$m]")
106 ax.grid(alpha=0.3); ax.set_xlim(0, b / 2); ax.set_ylim(bottom=0)
107 fig.tight_layout()
108 fig.savefig("immagini/diagramma_momento.png", dpi=200)
109 print("Figure salvate in immagini/.")

```

5.3 Lettura guidata del programma

Blocco 1 — Dati.

Tutti i dati del problema, convertiti in unità SI moltiplicando per $g = 9,806\,65\text{ m/s}^2$ i valori assegnati in kg_f . Cambiare velivolo significa cambiare soltanto queste righe.

Blocco 2 — Geometria.

Le quattro righe della Fase A: superficie, apertura, corda media, corde estreme. Si noti la formula $c_r = 2\bar{c}/(1 + \lambda)$, che è la soluzione generale del sistema risolto a mano nel capitolo 3.

Blocco 3 — Condizione di volo.

La velocità del punto A, equazione (3.3).

Blocco 4 — Carichi.

La formula statistica del peso alare viene valutata riportando il peso in kg_f (si osservi il fattore W/g) e riconvertendo il risultato in newton: è la traduzione in codice dell'avvertenza sulle unità del capitolo 3. Seguono la corda locale c , campionata sulle 2001 stazioni del vettore y , e le tre distribuzioni L' , W' e w .

Blocco 5 — Integrazione.

La riga chiave del programma. L'espressione

```
np.cumsum((0.5*(w[1:]+w[:-1])*dy)[::-1])[::-1]
```

si legge da dentro a fuori: costruisci le aree dei trapezi elementari (5.1), capovolgi il vettore ($::-1$), somma cumulativamente partendo dall'estremità, capovolgi di nuovo per tornare all'ordine naturale delle stazioni. Il carrello entra con una sola riga: `np.where(y < y_lg, n*W_lg, 0.0)` sottrae il carico concentrato a tutte e sole le stazioni interne, producendo automaticamente il salto nel diagramma. Il momento si ottiene ripetendo l'operazione sul taglio.

Blocco 6 — Diagrammi.

Pura rappresentazione grafica, con la palette della collana. Le annotazioni riportano i valori alla radice e l'ampiezza del salto.

Il calcolatore non sostituisce il criterio

Il programma esegue in un decimo di secondo ciò che a mano richiede un'ora, ma esegue *qualunque* cosa gli si chieda, compresi gli errori. Prima di fidarvi di un risultato numerico, sottoponetelo sempre alle verifiche di criterio del capitolo 2: il taglio all'estremità è zero? Il salto vale esattamente $n W_{lg}$? Il taglio in mezz'ora torna con il bilancio globale $(nW - nW_w)/2 - nW_{lg}$? Il nostro programma stampa i valori alla radice proprio per rendere immediato questo controllo: l'output riporta $T(0) = 64,63\text{ kN}$ e $M(0) = 217,66\text{ kNm}$, in accordo con i calcoli manuali del capitolo 4 e con le forme chiuse dell'appendice B.

5.4 Sperimentare con il programma

Un programma che replica l'esercizio è utile; un programma con cui *giocare* è formativo. Tre esperimenti consigliati, ciascuno da un solo parametro:

1. Portate la rastremazione a $\lambda = 1$ (ala rettangolare) e poi a $\lambda = 0,3$: osservate come, a parità di superficie e di portanza totale, la rastremazione sposta il carico verso la radice e riduce il momento flettente. State guardando il motivo per cui quasi tutte le ali sono rastremate.
2. Raddoppiate il peso del carrello o spostatelo a $y_{lg} = 3\text{ m}$: il salto nel taglio cresce o si sposta, e lo spigolo del momento lo segue.

3. Azzerate il peso dell'ala ($W_w = 0$): quantificate quanto la distribuzione dei pesi in ala “regala” alla struttura.

Il senso di tutto questo

Il metodo numerico non è un trucco per evitare la teoria: è la teoria stessa, eseguita con pazienza infinita. Le due somme cumulate del Blocco 5 *sono* le equazioni (2.1) e (2.2); il salto prodotto da `np.where` è la regola del salto. Chi capisce la teoria scrive il programma in dieci minuti; chi copia il programma senza teoria non saprà mai dire se il risultato è giusto. In sede d'esame — e ancor più in ufficio tecnico — vale sempre la seconda metà di questa frase.

Esercizi proposti

Dove stiamo andando

Tre esercizi in ordine di difficoltà crescente, tutti risolvibili sia a mano (con le forme chiuse dell'appendice B) sia con il programma del capitolo 5. Per ciascuno è indicato il risultato finale: usatelo come traguardo, non come punto di partenza. Seguite sempre il metodo in cinque passi: dati, modello, equazione, incognita, verifica.

Esercizio proposto 1 — Ala pulita

Per lo stesso velivolo dell'esercizio guidato, tracciare i diagrammi di taglio e momento flettente nell'ipotesi di *carrello retrattile in fusoliera* (nessun carico concentrato in ala). Tutti gli altri dati restano invariati.

Suggerimento: cambia una sola cosa rispetto all'esercizio guidato; chiedetevi prima, qualitativamente, se taglio e momento alla radice cresceranno o diminuiranno.

Risultati: $T(0) = 70,7 \text{ kN}$; $M(0) = 226,7 \text{ kNm}$. Diagrammi senza salti né spigoli.

Esercizio proposto 2 — Categoria semiacrobatica

Lo stesso velivolo viene ricertificato con coefficiente di contingenza $n = 3,8$ (carrello in ala come nell'esercizio guidato, $k = 2$). Ricalcolare la velocità del punto A, le distribuzioni di carico e i valori alla radice di taglio e momento flettente.

Attenzione: il cambio di n si propaga *ovunque*: velocità di calcolo, portanza, coefficiente di robustezza (e quindi peso dell'ala), peso apparente del carrello.

Risultati: $V_A = 101,5 \text{ m/s}$; $w_r = 18,50 \text{ kN/m}$, $w_t = 11,10 \text{ kN/m}$; $T(0) = 94,4 \text{ kN}$; $M(0) = 318,6 \text{ kNm}$.

Esercizio proposto 3 — Ala rettangolare a confronto

A parità di superficie ($S = 28 \text{ m}^2$), apertura ($b = 14 \text{ m}$), condizione di volo e carichi dell'esercizio guidato, si sostituisca l'ala trapezia con un'ala *rettangolare* di corda $l = \bar{c} = 2 \text{ m}$. Calcolare taglio e momento flettente alla radice e confrontare con l'ala trapezia, commentando il risultato.

Risultati: carico netto uniforme $w = 10,10 \text{ kN/m}$; $T(0) = 64,6 \text{ kN}$ (identico: la portanza totale non cambia); $M(0) = 238,3 \text{ kNm}$, circa il 9% *in più* dell'ala trapezia. A parità di portanza, l'ala rettangolare trasporta il carico più lontano dalla radice: ecco, in un numero, il vantaggio strutturale della rastremazione.

Il senso di tutto questo

I tre esercizi coprono le tre mosse tipiche del progettista: togliere un carico (P1), cambiare la severità della norma (P2), cambiare la geometria (P3). Se sapete prevedere *qualitativamente* l'esito di ognuna prima di calcolare — e poi verificare la previsione con i numeri — avete capito davvero i diagrammi di sollecitazione.

Il sistema tecnico di unità

I temi d'esame di impianto classico — come quello svolto in questa monografia — esprimono spesso i dati nel *sistema tecnico*, oggi abbandonato ma vivissimo nella letteratura aeronautica storica. Conviene saperlo leggere con disinvoltura.

Nel sistema tecnico la grandezza fondamentale non è la massa ma la **forza**, misurata in chilogrammi-forza: 1 kg_f è il peso di una massa di 1 kg nella gravità standard,

$$1 \text{ kg}_f = 9,806\,65 \text{ N} \simeq 9,81 \text{ N}. \quad (\text{A.1})$$

Ne discendono le corrispondenze usate in questa monografia:

grandezza	sistema tecnico	SI
peso totale	$W = 6160 \text{ kg}_f$	60,41 kN
carico alare	$220 \text{ kg}_f/\text{m}^2$	2157,5 N/m ²
carico distribuito	$1 \text{ kg}_f/\text{m}$	9,807 N/m
momento	$1 \text{ kg}_f \cdot \text{m}$	9,807 N m
densità dell'aria	$0,125 \text{ kg}_f \text{ s}^2/\text{m}^4$	1,225 kg/m ³

L'ultima riga merita un commento, perché è la più insidiosa. Nel sistema tecnico la densità dell'aria a quota zero si scrive $\rho = 0,125$: non sono chilogrammi su metro cubo, ma kg_f s²/m⁴, l'unità di massa tecnica per unità di volume. Il legame con il valore SI è semplicemente $1,225/9,80665 = 0,1249$. Chi incontra “ $\rho = 0,125$ ” in un testo storico e lo infila in una formula SI ottiene risultati sbagliati di un fattore dieci: quando i dati sono in kg_f, o si lavora *coerentemente* in unità tecniche, o — come abbiamo fatto noi — si converte tutto in SI prima di iniziare. Mai a metà.

Le forme chiuse di $T(y)$ e $M(y)$

Per la distribuzione trapezia l'integrazione può farsi una volta per tutte in forma simbolica. Con $w(y) = w_r + (w_t - w_r)y/(b/2)$ e $a = b/2 - y$, le equazioni (4.16) e (4.20) del testo si riscrivono come polinomi in y . Sostituendo i valori numerici dell'esercizio guidato ($w_r = 12\,619\text{ N/m}$, $w_t = 7571\text{ N/m}$, $b/2 = 7\text{ m}$, $n W_{lg} = 6041\text{ N}$, $y_{lg} = 1,5\text{ m}$; y in metri, risultati in N e N m):

$$T(y) = \begin{cases} 64\,625 - 12\,619y + 360,5y^2 & 0 \leq y < 1,5 \\ 70\,666 - 12\,619y + 360,5y^2 & 1,5 < y \leq 7 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$$M(y) = \begin{cases} 217\,660 - 64\,625y + 6\,309,5y^2 - 120,2y^3 & 0 \leq y \leq 1,5 \\ 226\,720 - 70\,666y + 6\,309,5y^2 - 120,2y^3 & 1,5 \leq y \leq 7 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Le proprietà generali si leggono direttamente sui coefficienti:

- il taglio è una parabola e il momento una cubica (regola dei gradi);
- i due rami del taglio differiscono per la sola costante $6041 = n W_{lg}$ (regola del salto), mentre i rami del momento si raccordano con continuità in $y = 1,5$ (entrambi valgono $134,5\text{ kNm}$) cambiando pendenza;
- derivando si verifica che $dT/dy = -w(y)$ e $dM/dy = -T(y)$;
- in $y = 7$ entrambe le espressioni si annullano (regola degli zeri).

Queste forme chiuse sono il banco di prova ideale per il programma numerico: sul reticolo di 2001 stazioni del capitolo 5 lo scarto massimo fra soluzione numerica e forma chiusa risulta inferiore a 3 N m sul momento e a 1 N sul taglio.

Riferimenti

- [1] V. Losito, *Fondamenti di Aeronautica Generale*, Accademia Aeronautica, Napoli, 1994.
- [2] J. D. Anderson, *Introduction to Flight*, McGraw–Hill, New York.
- [3] O. Schrenk, *A Simple Approximation Method for Obtaining the Spanwise Lift Distribution*, NACA TM 948, 1940. Disponibile su NTRS: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19930094469>.
- [4] R. F. Anderson, *Determination of the Characteristics of Tapered Wings*, NACA Report 572, 1936. Disponibile su NTRS: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19930091647>.
- [5] T. H. G. Megson, *Aircraft Structures for Engineering Students*, Elsevier.