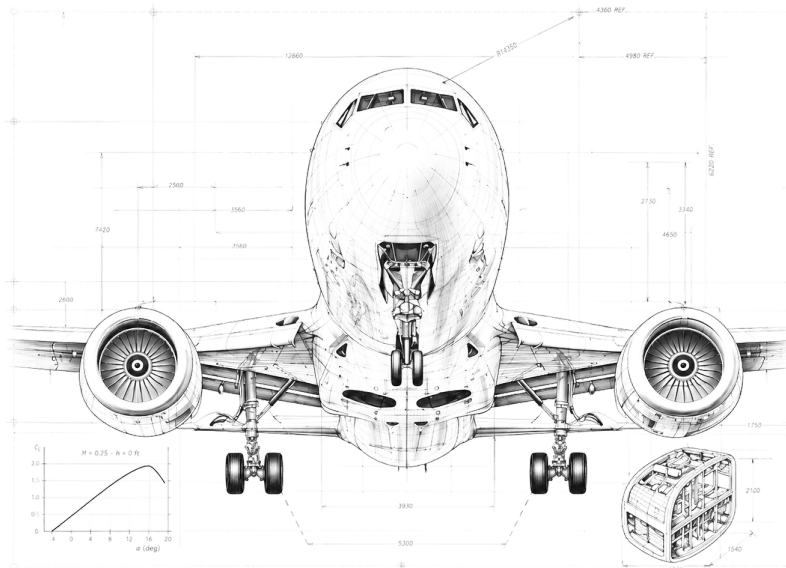


Dalla trave inflessa al longherone alare

Reazioni vincolari, caratteristiche di sollecitazione,
geometria delle aree, flessione e taglio,
fino alle strutture a semiguscio

con un'esercitazione guidata e dodici esercizi svolti,
dalla trave piena al longherone alare



Prof. Ing. Biagio Raucci

ITIS «E. Majorana» — Costruzioni Aeronautiche

Monografia autoconsistente per lo studio individuale. Tutti i valori numerici riportati sono stati verificati con calcolo indipendente. I contenuti teorici sono sviluppati in forma originale; l'esercitazione guidata della Sezione 5 riprende i dati di un classico esercizio universitario di statica delle travi, qui interamente rielaborato e commentato passo per passo.

Indice

Premessa	3
1 Equilibrio e reazioni vincolari	4
1.1 Il modello di trave	4
1.2 I carichi	4
1.3 I vincoli e le loro reazioni	5
1.4 Le equazioni cardinali della statica	5
2 Le caratteristiche di sollecitazione	7
2.1 Il metodo delle sezioni	7
2.2 Le relazioni indefinite di equilibrio	8
2.3 Il procedimento operativo	9
3 Geometria delle aree	11
3.1 Baricentro e momento statico	11
3.2 Momenti d'inerzia	11
3.3 Il teorema del trasporto (Huygens–Steiner)	12
4 Flessione, linea elastica e verifica di resistenza	14
4.1 Le ipotesi del modello	14
4.2 La formula di Navier	15
4.3 La linea elastica	15
4.4 La verifica di resistenza	16
4.5 La flessione deviata: quando gli assi non sono principali	16
4.6 La formula di Navier generalizzata	17
4.7 L'asse neutro e la via degli assi principali	18
5 Esercitazione guidata: la mensola con carico distribuito	19
5.1 Il problema	20
5.2 Fase 1 — Reazioni vincolari	20
5.3 Fase 2 — Taglio e momento flettente	21
5.4 Fase 3 — Geometria della sezione	22
5.5 Fase 4 — Linea elastica	23
5.6 Fase 5 — Verifica di resistenza	25
5.7 Riepilogo dei risultati	25
6 Esercizi svolti sulle sezioni aeronautiche	26
6.1 Esercizio 6.1 — Doppio T non simmetrico (longherone alare)	26
6.2 Esercizio 6.2 — Sezione a T (mensola con carico in punta)	29
6.3 Esercizio 6.3 — Sezione a C (trave appoggiata, carico in mezzzeria)	31
6.4 Esercizio 6.4 — Sezione a Z e flessione deviata	33
6.5 Esercizio 6.5 — Angolare a L: la seconda trappola (e la controprova)	36
6.6 Quadro comparativo	39
7 Il gancio aeronautico: la flessione nel semiguscio	40
7.1 L'idealizzazione a semiguscio	40
7.2 Esercizio 7.1 — Longherone a due solette	42
7.3 Esercizio 7.2 — Cassone simmetrico idealizzato	43
7.4 Esercizio 7.3 — Cassone in flessione biassiale	44
8 Il taglio: la formula di Jourawski e le anime	46
8.1 Il taglio nasce dalla flessione	46

8.2	La formula di Jourawski	46
8.3	La forma della distribuzione	47
8.4	Il taglio nelle pareti sottili e l'anima aeronautica	47
8.5	Esercizio 8.1 — Distribuzione della τ in un rettangolo	48
8.6	Esercizio 8.2 — Il doppio T: l'anima porta il taglio	49
8.7	Esercizio 8.3 — Dimensionare l'anima: resistenza e imbozzamento	50
9	Sintesi operativa: il longherone a C dell'ala	51
A	Formulario essenziale	55
A.1	Statica e caratteristiche di sollecitazione	55
A.2	Schemi statici ricorrenti	55
A.3	Geometria delle aree	55
A.4	Flessione e verifica	56
A.5	Semiguscio (Sezioni 7 e 9)	56
A.6	Taglio (Sezione 8)	56

Premessa: a chi si rivolge questa monografia

Questa monografia accompagna lo studente del triennio di Costruzioni Aeronautiche in uno dei passaggi più importanti dell'intero corso: il momento in cui la statica smette di essere un esercizio astratto di equazioni e diventa lo strumento con cui si giudica se una struttura — un longherone d'ala, una centina, un montante di carrello — *regge* oppure no.

Il percorso è costruito come una scala a quattro gradini, ciascuno indispensabile per salire al successivo:

1. **le reazioni vincolari** (Sezione 1): come il mondo esterno “risponde” ai carichi applicati a una trave;
2. **le caratteristiche di sollecitazione** (Sezione 2): come i carichi si trasmettono *dentro* la trave, sezione per sezione, sotto forma di taglio e momento flettente;
3. **la geometria delle aree** (Sezione 3): perché la capacità di una sezione di resistere alla flessione non dipende solo da *quanto* materiale c'è, ma soprattutto da *dove* è messo;
4. **la flessione e la verifica** (Sezione 4): la formula di Navier e la linea elastica, cioè il calcolo delle tensioni e degli abbassamenti, con il confronto finale rispetto ai limiti del materiale.

La Sezione 5 mette insieme i quattro gradini in un'*esercitazione guidata completa*, svolta con un livello di dettaglio volutamente “rilassato”: nessun passaggio è dato per scontato, ogni costante di integrazione è ricavata, ogni segno è giustificato. La Sezione 6 ripete poi lo stesso schema su cinque sezioni che incontrerete di continuo nelle costruzioni aeronautiche: il *doppio T non simmetrico*, il *T semplice*, la *C*, la *Z* e l'*angolare*, le ultime due con una sorpresa istruttiva sulla flessione deviata. La Sezione 7, infine, è il *gancio aeronautico*: mostra come tutta questa teoria si traduca nel dimensionamento delle solette e dei correnti di una struttura a semiguscio — ala o fusoliera — dove la flessione è assorbita da poche aree concentrate. La Sezione 8, infine, affronta il *taglio*: la formula di Jourawski, la distribuzione delle tensioni tangenziali e il dimensionamento delle anime, fino alla trave a campo di trazione — il regime in cui lavorano davvero le ali e le fusoliere. La Sezione 9, infine, è la *sintesi operativa*: un unico esercizio conclusivo che dimensiona da capo a fondo il longherone a C di un'ala, mettendo in pratica insieme tutti i concetti della monografia.

Come studiare questa monografia

Leggete la teoria con carta e penna: rifate *ogni* passaggio, non limitatevi a seguirlo con gli occhi. Quando arrivate a un esercizio svolto, provate prima a impostarlo da soli e usate la soluzione come verifica, non come scorciatoia. È esattamente il metodo che vi servirà all'Esame di Stato: lì nessuno vi chiederà di ricordare una formula a memoria, ma di *saperla usare* dentro un procedimento ordinato.

1 Equilibrio e reazioni vincolari

Dove stiamo andando

In questo capitolo rispondiamo alla prima domanda che ci si pone davanti a qualunque struttura: *quali forze scambia con il mondo esterno?* Impareremo a riconoscere i vincoli, a contarne le reazioni e a calcolarle con le equazioni cardinali della statica. Senza questo passo, nulla di ciò che segue è possibile: non si può studiare cosa accade *dentro* una trave se prima non si conosce cosa accade *ai suoi estremi*.

1.1 Il modello di trave

In tutta la monografia lavoreremo con il modello più fecondo della meccanica delle strutture: la *trave*, cioè un solido in cui una dimensione (la lunghezza) prevale nettamente sulle altre due (quelle della sezione trasversale). È il modello naturale per il longherone di un'ala, per un corrente di fusoliera, per il montante di un carrello: tutti elementi in cui la geometria “lunga e sottile” suggerisce di descrivere il comportamento dell'intero solido attraverso ciò che accade lungo la sua *linea d'asse*.

Definizione — Trave

Si chiama **trave** un solido generato da una figura piana (la *sezione trasversale*) il cui baricentro percorre una linea (la *linea d'asse*) mantenendosi ortogonale ad essa, con la condizione che le dimensioni della sezione siano piccole rispetto alla lunghezza della linea d'asse. Nel nostro caso la linea d'asse è un segmento rettilineo, e la trave si dice *rettilinea*.

Adotteremo, in coerenza con l'esercitazione guida della Sezione 5, il seguente sistema di riferimento: l'asse z coincide con la linea d'asse della trave, l'asse y è verticale (positivo verso l'alto) e l'asse x completa la terna esente da ambiguità, uscente dal piano del foglio. I carichi che considereremo agiscono nel piano yz : la trave, di conseguenza, si inflette in quel piano e il momento flettente ha come asse vettore l'asse x .

Osservazione — Perché proprio $y-z$?

Nei testi di Scienza delle Costruzioni è frequente l'asse della trave chiamato x ; nei testi di strutture aeronautiche (Megson in primis) l'asse della trave è z , perché x e y vengono riservati al piano della sezione, dove si svolge tutto il lavoro sulla geometria delle aree. Adottiamo questa seconda convenzione: vi accompagnerà per tutto il corso e la ritroverete identica nei manuali professionali.

1.2 I carichi

Sulla trave possono agire:

- **forze concentrate** F (N): schematizzano azioni applicate su zone molto piccole rispetto alla lunghezza della trave. Esempio aeronautico: la reazione trasmessa dall'attacco di un motore al longherone che lo sostiene.

- **carichi distribuiti** q (N/m): forze “spalmate” lungo un tratto di trave. Esempio principe: la *portanza* lungo l’apertura alare, che investe l’ala non in un punto ma con continuità, centina dopo centina. Anche il peso proprio della struttura e quello del combustibile nei serbatoi alari sono carichi distribuiti.
- **coppie concentrate** $\mathcal{M}$ (N m): momenti applicati in una sezione. Esempio: il momento di cerniera trasmesso da un alettone al bordo d’uscita dell’ala.

Un risultato che useremo continuamente è la *riduzione del carico distribuito*: ai soli fini del calcolo delle reazioni vincolari (e solo di quelle!), un carico uniforme q esteso su una lunghezza l equivale a una forza concentrata di intensità

$$Q = ql \quad (1.1)$$

applicata nel punto medio del tratto caricato, cioè nel baricentro del “rettangolo di carico”. La giustificazione è immediata: la risultante di infinite forze elementari $q \, dz$ vale $\int_0^l q \, dz = ql$, e il suo punto di applicazione è quello che ne conserva il momento rispetto a un polo qualsiasi, ossia il baricentro della distribuzione.

Attenzione — Equivalenza solo esterna

La sostituzione $q \rightarrow Q = ql$ è lecita per calcolare le *reazioni vincolari*, perché riguarda l’equilibrio globale della trave. È invece **sbagliata** per calcolare taglio e momento flettente all’interno della trave: le caratteristiche interne “sentono” la reale distribuzione del carico, non la sua risultante. Lo verificheremo esplicitamente nella Sezione 2: con il carico distribuito il momento è una parabola, con la forza concentrata equivalente sarebbe una spezzata. Stessa risultante, storia interna completamente diversa.

1.3 I vincoli e le loro reazioni

Un *vincolo* è un dispositivo che impedisce alcuni movimenti della trave. Per il principio di azione e reazione, impedire un movimento significa esercitare una forza (o un momento) capace di impedirlo: tale forza è la *reazione vincolare*. Nel piano, un corpo rigido possiede tre gradi di libertà (due traslazioni e una rotazione); di conseguenza i vincoli piani si classificano in base a quanti gradi di libertà sopprimono.

Vincolo	GdL soppressi	Reazioni	Cosa impedisce
Carrello (appoggio)	1	R ($\perp$ al piano d’appoggio)	traslazione ortogonale
Cerniera	2	R_y, R_z	entrambe le traslazioni
Incastro	3	$R_y, R_z, \mathcal{M}$	traslazioni e rotazione

Osservazione — I vincoli in aeronautica

Le strutture aeronautiche reali sono ricche di questi schemi. L’attacco ala–fusoliera di un velivolo con ala a sbalzo lavora, in prima approssimazione, come un *incastro*: blocca l’ala in traslazione e in rotazione, e infatti alla radice alare troviamo momento flettente e taglio massimi. Un montante di controvento, invece, è collegato con *cerniere* ai suoi estremi: non trasmette momento, ma solo forza lungo il proprio asse — ed è per questo che lo si dimensiona a sforzo normale (e a instabilità). Riconoscere il vincolo giusto è il primo atto del progetto.

1.4 Le equazioni cardinali della statica

Un corpo è in equilibrio quando risultante e momento risultante di *tutte* le forze che lo sollecitano — carichi attivi e reazioni vincolari — sono nulli. Nel piano yz , con momenti valutati attorno all’asse x , ciò si traduce in tre equazioni scalari:

Formula chiave — Equazioni cardinali della statica nel piano

$$\sum F_z = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_x^{(P)} = 0 \quad (1.2)$$

dove il polo P per il calcolo dei momenti è *arbitrario*: se le prime due equazioni sono soddisfatte, l'annullarsi del momento rispetto a un polo garantisce che si annulli rispetto a qualunque altro.

La libertà nella scelta del polo è un'arma tattica preziosa: conviene sempre scegliere il polo nel punto in cui convergono più reazioni incognite, così che i loro momenti si annullino e l'equazione contenga il minor numero possibile di incognite.

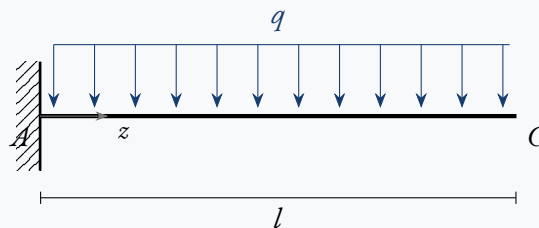
Definizione — Strutture isostatiche

Una struttura si dice **isostatica** quando il numero di reazioni vincolari incognite eguaglia il numero di equazioni di equilibrio indipendenti disponibili (tre, nel piano) e i vincoli sono ben disposti. In tal caso le reazioni si determinano con la sola statica. Se le incognite sono di più, la struttura è *iperstatica* e occorre mettere in conto la deformabilità; se sono di meno, è *labile* e non può stare in equilibrio sotto carichi generici.

Tutte le travi di questa monografia sono isostatiche: la mensola (incastro, tre reazioni) e la trave appoggiata (cerniera più carrello, $2 + 1 = 3$ reazioni).

Esercizio svolto 1.1 — Reazioni di una mensola con carico distribuito

Traccia. Una mensola di lunghezza $l = 2$ m, incastrata in A ($z = 0$) e libera in C ($z = l$), porta un carico uniformemente distribuito $q = 250$ N/m diretto verso il basso. Determinare le reazioni vincolari.



Passo 1 — Individuazione delle incognite. L'incastro sopprime tre gradi di libertà, dunque introduce tre reazioni: R_{zA} (orizzontale), R_{yA} (verticale) e M_A (momento). La struttura è isostatica: tre incognite, tre equazioni.

Passo 2 — Riduzione del carico. Per il solo equilibrio globale, il carico distribuito equivale alla risultante

$$Q = ql = 250 \cdot 2 = 500 \text{ N}$$

applicata verso il basso nel punto medio B , a distanza $l/2 = 1$ m dall'incastro.

Passo 3 — Equazioni cardinali. Assumendo positivi R_{yA} verso l'alto e M_A antiorario, e scegliendo come polo l'incastro A (così R_{yA} e R_{zA} non compaiono nell'equazione dei momenti):

$$\sum F_z = 0 : \quad R_{zA} = 0$$

$$\sum F_y = 0 : \quad R_{yA} - ql = 0 \implies R_{yA} = ql = 500 \text{ N}$$

$$\sum M_x^{(A)} = 0 : \quad M_A - ql \cdot \frac{l}{2} = 0 \implies M_A = \frac{ql^2}{2} = \frac{250 \cdot 4}{2} = 500 \text{ N m}$$

Passo 4 — Lettura fisica del risultato. L'incastro spinge la trave verso l'alto con 500 N (deve sorreggere tutto il peso del carico) e la "trattiene" con un momento di 500 N m che le impedisce di ruotare in avanti sotto il carico: esattamente ciò che fa l'attacco di radice di un'ala a sbalzo, che sostiene la portanza complessiva della semiala e ne contrasta il momento flettente. Se avessimo assunto versi diversi per le reazioni, avremmo ottenuto gli stessi moduli con segni opportuni: il segno, in statica, è solo il confronto tra il verso ipotizzato e quello reale.

Il senso di tutto questo

Le reazioni vincolari sono il "bilancio esterno" della trave: quanto entra dai carichi deve uscire dai vincoli. Ma il bilancio esterno, da solo, non dice nulla sulla sorte del materiale: due travi con le stesse reazioni possono avere destini interni opposti. Per giudicare la resistenza dobbiamo entrare *dentro* la trave: è l'oggetto del prossimo capitolo.

2 Le caratteristiche di sollecitazione

Dove stiamo andando

Ora entriamo dentro la trave. Immaginiamo di tagliarla in una sezione generica e ci chiediamo: quali azioni devono scambiarsi le due parti per restare in equilibrio? La risposta — sforzo normale, taglio e momento flettente — costituisce le *caratteristiche di sollecitazione*. Ricaveremo poi le due relazioni differenziali che le legano al carico: sono il cuore matematico di tutto il calcolo delle travi.

2.1 Il metodo delle sezioni

L'idea, dovuta a Eulero, è di una semplicità disarmante. Prendiamo una trave in equilibrio sotto carichi e reazioni, e tagliamola idealmente in una sezione S posta all'ascissa z . Ciascuna delle due parti, isolata, *non* è più in equilibrio sotto i soli carichi esterni che la competono: perché lo torni ad essere, sulla faccia del taglio devono agire le azioni che, prima del taglio, la parte rimossa trasmetteva attraverso il materiale. Nel piano, queste azioni si riducono a tre enti:

Definizione — Caratteristiche di sollecitazione

Nella sezione di ascissa z si definiscono:

- **sforzo normale** $N(z)$: componente della risultante interna lungo l'asse z (positivo se di *trazione*);
- **taglio** $T(z)$: componente della risultante interna nel piano della sezione, lungo y ;
- **momento flettente** $M(z)$: momento risultante interno attorno all'asse x della sezione.

Esse rappresentano, in forma sintetica, il "flusso di forze" che attraversa il materiale in quella sezione.

2.1.1 Convenzioni di segno

Le convenzioni sono una scelta, non una legge di natura: l'importante è dichiararle e mantenerle. In questa monografia, in accordo con l'esercitazione guida, adottiamo:

- taglio T **positivo** se, sulla faccia di normale uscente concorde con $+z$ (la faccia "di destra" del concio), agisce nel verso di $+y$;
- momento M **positivo** se *tende le fibre inferiori* della trave (la trave si incurva "a sorriso", concavità verso l'alto).

Attenzione — Il momento negativo della mensola

Con questa convenzione, una mensola caricata verso il basso ha momento flettente *negativo* lungo tutta la campata: le fibre tese sono quelle *superiori* (la trave si incurva “a broncio”). Non è un errore, è un’informazione: il segno del momento vi dice da che parte sta la trazione, e quindi — pensando a materiali o giunzioni che temono la trazione — da che parte sta il pericolo. Un’ala a sbalzo in volo, caricata dalla portanza verso l’alto, ha invece le fibre tese sul ventre: ecco perché il rivestimento inferiore (*lower skin*) delle ali lavora prevalentemente a trazione, in crociera, e quello superiore a compressione, con tutti i problemi di instabilità che studieremo più avanti.

2.2 Le relazioni indefinite di equilibrio

Il legame profondo fra carico, taglio e momento emerge studiando l’equilibrio di un *concio elementare*, cioè di una fetta di trave di lunghezza infinitesima dz , estratta da un tratto soggetto al carico distribuito q (positivo verso il basso, cioè verso $-y$). Sulle due facce del concio agiscono le caratteristiche T , M (faccia di sinistra) e $T + dT$, $M + dM$ (faccia di destra), con i versi positivi della convenzione.

Equilibrio alla traslazione verticale. Sommiamo le forze lungo y :

$$T - (T + dT) - q dz = 0$$

da cui, semplificando T :

Formula chiave — Prima relazione indefinita

$$\frac{dT}{dz} = -q \quad (2.1)$$

La pendenza del diagramma del taglio è, punto per punto, l’opposto del carico distribuito.

Equilibrio alla rotazione. Calcoliamo i momenti rispetto al baricentro della faccia di destra del concio (scelta furba: così $T + dT$ non compare):

$$M + dM - M - T dz + q dz \cdot \frac{dz}{2} = 0.$$

L’ultimo termine è un infinitesimo del secondo ordine ($\propto dz^2$) e si trascura rispetto agli altri, che sono del primo ordine. Rimane:

Formula chiave — Seconda relazione indefinita

$$\frac{dM}{dz} = T \quad (2.2)$$

La pendenza del diagramma del momento è, punto per punto, il valore del taglio.

Osservazione — Un dividendo gratuito

Le (2.1) e (2.2) regalano un formidabile strumento di autocontrollo dei diagrammi:

- dove q è costante, T è lineare e M è parabolico;
- dove $q = 0$, T è costante e M è lineare;
- dove $T = 0$, il momento è *stazionario*: massimo o minimo. Il punto di taglio nullo è il candidato naturale per la sezione più sollecitata a flessione;

- una forza concentrata produce un *salto* nel diagramma del taglio (e uno spigolo in quello del momento); una coppia concentrata produce un salto nel diagramma del momento.

Prima di consegnare un compito, controllate sempre i vostri diagrammi contro questa lista: è il modo più rapido per scovare gli errori.

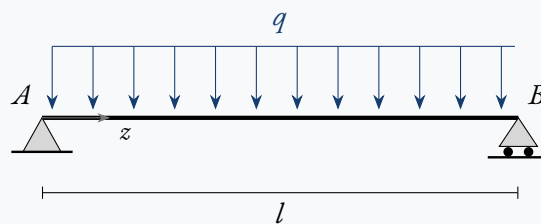
2.3 Il procedimento operativo

Per costruire i diagrammi di $T(z)$ e $M(z)$ seguiremo sistematicamente questo schema in quattro fasi:

1. **Reazioni vincolari** con le equazioni cardinali (Sezione 1);
2. **Integrazione**, tratto per tratto, delle relazioni indefinite (2.1) e (2.2); oppure, in alternativa del tutto equivalente, *equilibrio della porzione*: $T(z)$ e $M(z)$ eguagliano la risultante e il momento delle forze poste da un lato della sezione;
3. **Costanti di integrazione** dalle condizioni al contorno statiche: agli estremi liberi taglio e momento sono nulli (salvo carichi concentrati proprio in punta); in corrispondenza dei vincoli valgono le reazioni calcolate;
4. **Tracciamento e controllo** dei diagrammi con le regole dell'osservazione precedente.

Esercizio svolto 2.1 — Trave appoggiata con carico distribuito

Traccia. Trave su due appoggi A ($z = 0$) e B ($z = l$), carico uniforme q verso il basso. Ricavare $T(z)$, $M(z)$ e la posizione del momento massimo, in forma letterale.



Passo 1 — Reazioni. Per la simmetria del sistema (geometria e carico simmetrici rispetto alla mezzeria), ciascun appoggio porta metà del carico totale:

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$$

Verifica con i momenti in A : $R_B l - ql \cdot l/2 = 0 \Rightarrow R_B = ql/2$. ✓

Passo 2 — Taglio. Dall'equilibrio della porzione a sinistra della sezione z : la reazione R_A spinge in su, il carico qz già superato spinge in giù, quindi

$$T(z) = \frac{ql}{2} - qz.$$

Controllo con la (2.1): $dT/dz = -q$. ✓ Il taglio è massimo agli appoggi ($\pm ql/2$) e si annulla in mezzeria, $z = l/2$.

Passo 3 — Momento. Integrando la (2.2):

$$M(z) = \int T \, dz = \frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2} + c.$$

La condizione al contorno $M(0) = 0$ (l'appoggio non trasmette momento) dà $c = 0$:

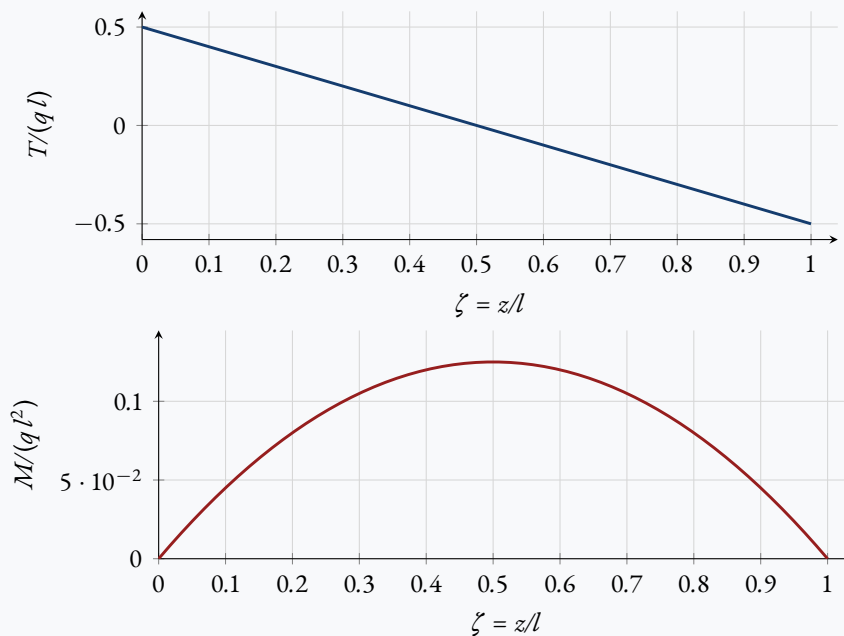
$$M(z) = \frac{qz}{2} (l - z).$$

Passo 4 — Momento massimo. Dove $T = 0$, cioè in mezzeria:

$$M_{\max} = M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^2}{8}.$$

Questa formula — “ ql^2 su otto” — è una delle più celebri di tutta la tecnica delle costruzioni: memorizzatela, la userete nell'Esercizio 6.1 e innumerevoli altre volte.

Passo 5 — Diagrammi. Essendo il risultato letterale, riportiamo i diagrammi in forma *adimensionale*: in ascissa $\zeta = z/l$, in ordinata $T/(ql)$ e $M/(ql^2)$. Così i grafici valgono per *qualunque* trave appoggiata con carico uniforme.



Il taglio è la retta che scende da $+1/2$ a $-1/2$ annullandosi in mezzeria; il momento è la parabola che culmina proprio lì, con vertice a $1/8 = 0,125$. Notate la coerenza con le (2.1)–(2.2): dove T cambia segno, M ha tangente orizzontale.

Approfondimento — Il taglio nullo e la caccia al momento massimo

La regola “momento massimo dove il taglio si annulla” non è un trucco mnemonico: è la (2.2) letta come condizione di stazionarietà, $dM/dz = T = 0$. Attenzione però ai casi in cui il massimo cade agli estremi del dominio: nella mensola dell'Esercizio 1.1 il taglio non si annulla mai all'interno (vale $q(l - z) > 0$ per $z < l$), e il momento massimo in valore assoluto si trova all'incastro, sul bordo del dominio. La matematica insegna: gli estremi di una funzione vanno cercati dove la derivata si annulla *oppure* sulla frontiera.

Il senso di tutto questo

I diagrammi di taglio e momento sono la “radiografia” della trave: mostrano dove il materiale lavora di più e dove riposa. È su questa radiografia che il progettista aeronautico decide, ad esempio, di rastremare un longherone verso l'estremità alare (dove il momento cala) risparmiando peso prezioso: la struttura segue il diagramma. Ma per trasformare un momento flettente in una *tensione* — e quindi in un verdetto di resistenza — ci manca un ingrediente: la geometria della sezione. È il tema del prossimo capitolo.

3 Geometria delle aree

Dove stiamo andando

Due travi con lo stesso momento flettente possono trovarsi in condizioni opposte: una tranquilla, l'altra prossima al collasso. La differenza sta nella *sezione*. In questo capitolo costruiamo gli strumenti per descriverla quantitativamente: baricentro, momento statico, momenti d'inerzia e teorema del trasporto. Sono i mattoni con cui, nel Sezione 4, scriveremo la formula di Navier.

3.1 Baricentro e momento statico

Consideriamo la sezione trasversale come figura piana di area A nel piano xy . Si definiscono *momenti statici* (o del primo ordine) rispetto agli assi x e y :

$$S_x = \int_A y \, dA, \quad S_y = \int_A x \, dA. \quad (3.1)$$

Definizione — Baricentro

Il **baricentro** G della sezione è il punto di coordinate

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{1}{A} \int_A x \, dA, \quad y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{1}{A} \int_A y \, dA. \quad (3.2)$$

Per costruzione, i momenti statici calcolati rispetto ad assi *baricentrici* (cioè passanti per G) sono nulli. Se la sezione possiede un asse di simmetria, il baricentro vi appartiene.

Per le sezioni composte da n parti semplici (i nostri profili a T, a C, a doppio T sono unioni di rettangoli) l'integrale diventa una somma:

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{G,i}}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad (3.3)$$

dove $y_{G,i}$ è la quota del baricentro della singola parte. È la “media pesata” delle posizioni, con le aree come pesi: una soletta grande e lontana “tira” il baricentro verso di sé più di un'anima sottile.

3.2 Momenti d'inerzia

Definizione — Momenti d'inerzia di superficie

Rispetto agli assi x e y si definiscono i **momenti d'inerzia** (o del secondo ordine):

$$I_x = \int_A y^2 \, dA, \quad I_y = \int_A x^2 \, dA, \quad (3.4)$$

e il **momento centrifugo** (o prodotto d'inerzia):

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA. \quad (3.5)$$

I_x e I_y sono sempre positivi (integrali di quadrati); I_{xy} può avere qualunque segno e si *annulla* se almeno uno dei due assi è di simmetria per la sezione. Le dimensioni sono [lunghezza]⁴: nel SI m⁴, ma nella pratica tecnica è comodissimo il mm⁴.

Il significato fisico di I_x merita una sosta. Nell'integrale $\int y^2 \, dA$ ogni areola dA contribuisce con il *quadrato* della sua distanza dall'asse: il materiale lontano dall'asse conta moltissimo, quello vicino quasi niente. Ecco la ragione geometrica di una delle scelte più caratteristiche delle costruzioni aeronautiche: nel longherone alare si concentra il materiale nelle *solette* (i *caps*), lontane dall'asse neutro, collegandole con un'anima sottile che serve principalmente a portare il taglio. Massima inerzia, minimo peso.

Per il rettangolo di base b e altezza h , con asse x baricentrico parallelo alla base, il calcolo diretto dà il risultato che useremo decine di volte:

$$I_x^{\text{rett}} = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 b \, dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{b h^3}{12}. \quad (3.6)$$

Si noti la dipendenza *cubica* dall'altezza: raddoppiare h moltiplica l'inerzia per otto. È il motivo per cui i longheroni sono alti e stretti, compatibilmente con lo spessore del profilo alare.

3.3 Il teorema del trasporto (Huygens–Steiner)

Le formule come la (3.6) valgono rispetto al baricentro *della singola parte*. Ma nella formula di Navier serve l'inerzia rispetto al baricentro *dell'intera sezione*. Il ponte fra i due è il teorema del trasporto.

Formula chiave — Teorema di Huygens–Steiner

Se x_G è l'asse baricentrico di una figura di area A e x' è un asse ad esso parallelo a distanza δ , allora

$$I_{x'} = I_{x_G} + A \delta^2. \quad (3.7)$$

L'inerzia rispetto a un asse non baricentrico è quella baricentrica *più* il termine di trasporto $A \delta^2$, sempre positivo: l'inerzia baricentrica è la minima fra tutte le parallele. Per il momento centrifugo vale l'analogo $I_{x'y'} = I_{x_G y_G} + A \delta_x \delta_y$, dove però i trasporti δ_x, δ_y hanno segno.

Dimostrazione. Poniamo $y' = y + \delta$, con y misurato dall'asse baricentrico. Allora

$$I_{x'} = \int_A (y + \delta)^2 \, dA = \underbrace{\int_A y^2 \, dA}_{I_{x_G}} + 2\delta \underbrace{\int_A y \, dA}_{S_{x_G}=0} + \delta^2 \underbrace{\int_A dA}_A = I_{x_G} + A \delta^2.$$

Il termine misto sparisce proprio perché il momento statico rispetto a un asse baricentrico è nullo: è qui che la definizione di baricentro mostra la sua potenza. ■

3.3.1 La procedura per le sezioni composte

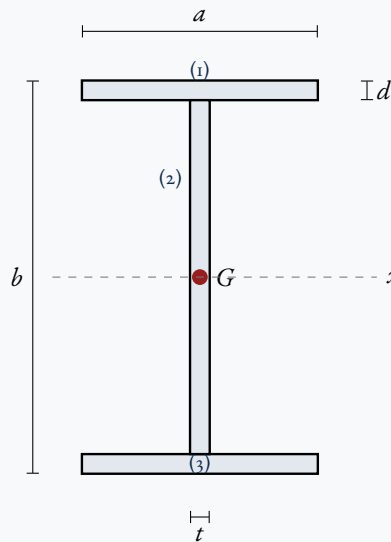
Mettendo insieme i pezzi, il calcolo dell'inerzia di una sezione composta segue sempre questi quattro passi:

1. **scomporre** la sezione in rettangoli;
2. **trovare il baricentro** globale con la (3.3);

3. **per ogni rettangolo:** inerzia propria $b_i b_i^3/12$ più trasporto $A_i \delta_i^2$, con $\delta_i = y_{G,i} - y_G$;
4. **sommare** tutti i contributi: $I_x = \sum_i \left(\frac{b_i b_i^3}{12} + A_i \delta_i^2 \right)$.

Esercizio svolto 3.1 — Inerzia del doppio T simmetrico

Traccia. Calcolare I_x baricentrico della sezione a doppio T simmetrico dell'esercitazione guida: larghezza solette $a = 0,12$ m, altezza totale $b = 0,2$ m, spessore solette $d = 0,01$ m, spessore anima $t = 0,01$ m.



Passo 1 — Scomposizione e baricentro. La sezione si scompone in tre rettangoli: soletta superiore (1) e inferiore (3), entrambe $a \times d$, e anima (2), $t \times (b - 2d)$. La sezione ha due assi di simmetria, quindi il baricentro è nel centro geometrico: nessun calcolo necessario. (È l'unico caso fortunato: nelle sezioni della Sezione 6 il baricentro andrà cercato.)

Passo 2 — Solette. Ognuna ha inerzia propria $a d^3/12$ e baricentro a distanza $\delta = b/2 - d/2$ dall'asse baricentrico:

$$I_1 = I_3 = \frac{a d^3}{12} + a d \left(\frac{b}{2} - \frac{d}{2} \right)^2 = \frac{0,12 \cdot 0,01^3}{12} + 0,12 \cdot 0,01 \cdot 0,095^2.$$

Numericamente: inerzia propria $= 1 \times 10^{-8} \text{ m}^4$, trasporto $= 1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 9,025 \cdot 10^{-3} = 1,083 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, quindi

$$I_1 = I_3 = 1,084 \times 10^{-5} \text{ m}^4.$$

Notate il rapporto: il trasporto vale circa *mille volte* l'inerzia propria. Nelle solette sottili e lontane, è il termine $A\delta^2$ a fare tutto il lavoro.

Passo 3 — Anima. È baricentrica ($\delta = 0$), dunque solo inerzia propria:

$$I_2 = \frac{t (b - 2d)^3}{12} = \frac{0,01 \cdot 0,18^3}{12} = 4,86 \times 10^{-6} \text{ m}^4.$$

Passo 4 — Somma.

$$I_x = 2 I_1 + I_2 = 2 \cdot 1,084 \cdot 10^{-5} + 4,86 \cdot 10^{-6} = 2,654 \times 10^{-5} \text{ m}^4.$$

Le due solette, che rappresentano il 50% dell'area ($2ad = 24 \text{ cm}^2$ contro 18 cm^2 dell'anima), forniscono l'82% dell'inerzia. La geometria conta più della quantità.

Approfondimento — Quando serve il momento centrifugo

Finché la sezione ha un asse di simmetria nel piano di carico, $I_{xy} = 0$ rispetto agli assi baricentrici e la flessione resta “retta”: la trave si inflette nel piano del carico. Ma alcune sezioni carissime all’aeronautica — la Z dei correnti di rivestimento, la L delle squadrette — non hanno assi di simmetria: per esse $I_{xy} \neq 0$ e un carico verticale produce anche inflessione laterale (*flessione deviata*). Lo toccheremo con mano, numeri alla mano, nell’Esercizio 6.4: vedrete che ignorare I_{xy} può sottostimare la tensione massima di quasi il 100%. Un errore, in aeronautica, inaccettabile.

Il senso di tutto questo

Il momento d’inerzia è la “pagella geometrica” della sezione: misura quanto bene il materiale è disposto per resistere alla flessione. Con i diagrammi della Sezione 2 (quanto momento arriva) e l’inerzia di questo capitolo (quanto la sezione sa incassarlo) abbiamo tutti gli ingredienti per la domanda finale: *che tensione nasce nel materiale?* È il momento della formula di Navier.

4 Flessione, linea elastica e verifica di resistenza**Dove stiamo andando**

Qui si chiude il cerchio. Dal momento flettente $M(z)$ e dall’inerzia I_x ricaviamo la tensione nel materiale (formula di Navier), poi l’equazione differenziale della deformata (linea elastica) e infine il criterio di verifica: confrontare la tensione massima con i limiti del materiale. È lo schema logico di ogni calcolo di resistenza che farete, dall’esercitazione di domani al progetto d’esame.

4.1 Le ipotesi del modello

La teoria che segue — dovuta a Eulero e Bernoulli, perfezionata da Navier e de Saint-Venant — vale sotto ipotesi precise, che è doveroso dichiarare perché delimitano il campo di validità dei risultati:

1. **materiale elastico lineare, omogeneo e isotropo**: vale la legge di Hooke $\sigma = E \varepsilon$, con lo stesso modulo E ovunque e in ogni direzione;
2. **conservazione delle sezioni piane** (ipotesi di Eulero–Bernoulli): le sezioni, piane e ortogonali all’asse prima della deformazione, restano piane e ortogonali all’asse deformato. È un’ottima ipotesi per travi snelle, nelle quali la deformabilità a taglio risulta trascurabile;
3. **piccoli spostamenti e piccole rotazioni**: la curvatura della linea d’asse coincide, a meno di infinitesimi di ordine superiore, con la derivata seconda della deformata;
4. **tensioni entro il limite di proporzionalità**: tutta la teoria è elastica; oltre lo snervamento servono modelli diversi.

Attenzione — Validità del modello

Per travi tozze (lunghezza confrontabile con l’altezza della sezione), per pannelli sottili soggetti a instabilità, o quando le tensioni si avvicinano allo snervamento, il modello di Eulero–Bernoulli perde validità e i risultati vanno considerati indicativi. Nelle travi di questa monografia il rapporto luce/altezza è sempre ≥ 10 e le tensioni restano lontanissime dai limiti: siamo pienamente nel campo di validità.

4.2 La formula di Navier

Vediamo come le ipotesi generino, in tre soli passaggi, la formula più usata di tutta la meccanica delle strutture.

Passo 1 — Cinematica. Se le sezioni ruotano restando piane, le fibre longitudinali si allungano proporzionalmente alla distanza y dall'asse attorno a cui la sezione ruota (l'*asse neutro*). Detta κ la curvatura della linea d'asse:

$$\varepsilon_z(y) = -\kappa y. \quad (4.1)$$

Il segno segue dalla convenzione: con momento positivo (fibre inferiori tese, concavità verso l'alto) le fibre con $y < 0$ si allungano.

Passo 2 — Legame costitutivo. Per la legge di Hooke:

$$\sigma_z(y) = E \varepsilon_z = -E \kappa y. \quad (4.2)$$

La tensione varia *linearmente* sull'altezza della sezione: il famoso “diagramma a farfalla”.

Passo 3 — Equivalenza statica. Le tensioni devono restituire le caratteristiche di sollecitazione. In flessione pura lo sforzo normale è nullo:

$$N = \int_A \sigma_z dA = -E\kappa \int_A y dA = -E\kappa S_x = 0 \implies S_x = 0,$$

cioè *l'asse neutro passa per il baricentro*: ecco perché tutto il Sezione 3 insiste sugli assi baricentrici. Il momento risultante deve invece eguagliare M_x :

$$M_x = - \int_A \sigma_z y dA = E\kappa \int_A y^2 dA = E \kappa I_x,$$

da cui la curvatura $\kappa = M_x/(EI_x)$ e, sostituendo nella (4.2):

Formula chiave — Formula di Navier

$$\sigma_z(y) = - \frac{M_x}{I_x} y \quad (4.3)$$

La tensione normale è proporzionale al momento flettente, inversamente proporzionale al momento d'inerzia, e cresce linearmente con la distanza dall'asse neutro baricentrico. Il valore massimo si raggiunge sulle fibre estreme, $y = \pm c$:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x| c}{I_x} = \frac{|M_x|}{W_x}, \quad W_x \equiv \frac{I_x}{c} \quad (4.4)$$

dove W_x è il *modulo di resistenza* della sezione (m^3).

Osservazione — La quantità EI_x e il prodotto M_x/W_x

Nella derivazione è comparsa la *rigidezza flessionale* EI_x : il prodotto fra una proprietà del materiale (E) e una della geometria (I_x). È la grandezza che governa *quanto* la trave si deforma. La resistenza, invece, è governata da $W_x = I_x/c$. Due sezioni possono avere la stessa inerzia ma moduli di resistenza diversi, se le fibre estreme sono a distanze diverse dal baricentro: è ciò che accade nelle sezioni *non simmetriche* della Sezione 6, dove lembo superiore e inferiore hanno tensioni differenti. In quei casi la verifica va fatta su *entrambi* i lembi.

4.3 La linea elastica

La stessa relazione momento–curvatura, $\kappa = M_x/(EI_x)$, letta con l'approssimazione dei piccoli spostamenti $\kappa \simeq d^2v/dz^2$ (dove $v(z)$ è l'abbassamento della linea d'asse), diventa un'equazione differenziale per la deformata:

Formula chiave — Equazione della linea elastica

$$E I_x \frac{d^2 v}{dz^2} = M(z) \quad (4.5)$$

Nota l'espressione di $M(z)$, due integrazioni successive forniscono la rotazione $\varphi(z) \simeq dv/dz$ e l'abbassamento $v(z)$. Le due costanti di integrazione si determinano con le *condizioni al contorno cinematiche*:

- incastro: $v = 0$ e $dv/dz = 0$;
- appoggio o cerniera: $v = 0$ (la rotazione è libera).

Il segno nella (4.5) dipende dall'orientamento dell'asse y e dalla convenzione sul momento; con le nostre scelte (y verso l'alto, $M > 0$ che tende le fibre inferiori) un momento positivo produce concavità verso l'alto, $v'' > 0$, in coerenza con l'equazione scritta.

Osservazione — Perché la freccia interessa l'aeronautica

Sulle strutture aeronautiche la verifica di rigidezza è spesso severa quanto quella di resistenza: un'ala troppo flessibile modifica la distribuzione di portanza, degrada l'efficacia degli alettoni (fino all'inversione dei comandi) e abbassa le velocità critiche aeroelastiche di divergenza e flutter. Per questo, accanto a $\sigma_{\max}$, calcoleremo sempre anche la freccia massima: due verdeti, resistenza e rigidezza, entrambi necessari.

4.4 La verifica di resistenza

Il materiale è caratterizzato da (almeno) due valori limite, determinati con la prova di trazione: la tensione di snervamento σ_s , oltre la quale nascono deformazioni permanenti, e la tensione di rottura σ_r . La *verifica* è il confronto:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{amm}} = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{k}, \quad (4.6)$$

dove $k > 1$ è il *coefficiente di sicurezza*, che copre le incertezze su carichi, materiale, modello e realizzazione. È utile anche il rapporto inverso, il *margin* effettivamente disponibile: $n = \sigma_{\text{lim}}/\sigma_{\max}$.

Attenzione — Le due verifiche coesistono

Nella pratica aeronautica si verificano *entrambe* le condizioni: nessuno snervamento al carico limite e nessuna rottura al carico di robustezza (carico limite moltiplicato per il fattore di sicurezza, tipicamente 1,5). Nei nostri esercizi, con carichi didattici volutamente modesti, i margini risulteranno molto ampi: l'obiettivo qui è imparare il *procedimento*, che resta identico quando i numeri si fanno seri.

4.5 La flessione deviata: quando gli assi non sono principali**Dove stiamo andando**

La formula di Navier (4.3) nasconde un'ipotesi che finora abbiamo dato per scontata: che l'asse x attorno al quale agisce il momento sia un *asse principale* d'inerzia della sezione, cioè che il momento centrifugo I_{xy} sia nullo. Per il rettangolo, per il doppio T e per la C questo è vero d'ufficio, grazie alla simmetria. Ma le sezioni davvero interessanti dell'aeronautica — la Z degli irrigidimenti, l'angolare dei correnti, i profili aperti a parete sottile — *non* hanno quella simmetria. In questi casi un momento puramente verticale genera anche uno spostamento laterale, e la Navier semplice sbaglia. Qui costruiamo lo strumento corretto.

Riprendiamo la formula di Navier nella forma dimostrata a pagina 15, $\sigma_z = -M_x y / I_x$. Il momento centrifugo non vi compare: implicitamente si è assunto che l'asse neutro coincida con l'asse x e che la deformazione avvenga tutta nel piano verticale. È lecito solo se la sezione è simmetrica rispetto a x (o a y): in tal caso ogni contributo $xy dA$ da un lato è cancellato dal suo simmetrico, e $I_{xy} = \int_A xy dA = 0$.

Definizione — Assi principali d'inerzia

Si dicono *assi principali d'inerzia* di una sezione, nel suo baricentro, quella coppia di assi ortogonali rispetto ai quali il momento centrifugo si annulla, $I_{xy} = 0$. Rispetto ad essi i momenti d'inerzia assumono i valori estremi (uno massimo, uno minimo). Un asse di simmetria è sempre principale.

Quando la sezione *non* possiede assi di simmetria allineati con gli assi di riferimento, $I_{xy} \neq 0$ e la flessione si dice *deviata*: la trave, sollecitata da un momento diretto lungo x , si inflette in un piano che *non* contiene y . È il fenomeno che abbiamo osservato numericamente nella sezione a Z; adesso lo inquadrriamo in generale.

4.6 La formula di Navier generalizzata

Ripercorriamo i tre passi della derivazione di Navier (pagina 15), stavolta senza chiedere alla sezione alcuna simmetria.

Passo 1 — Cinematica. L'ipotesi di conservazione delle sezioni piane afferma che, dopo la deformazione, la sezione resta un piano. La deformazione assiale ε_z è allora una funzione *affine* delle coordinate:

$$\varepsilon_z(x, y) = \varepsilon_0 + \chi_x x + \chi_y y, \quad (4.7)$$

dove ε_0 è la dilatazione dell'asse e χ_x, χ_y sono legate alle due curvature. Nessuna ipotesi di simmetria è stata usata: un piano nello spazio ha proprio tre parametri.

Passo 2 — Legame costitutivo. Per la legge di Hooke la tensione è anch'essa affine:

$$\sigma_z(x, y) = a + b x + c y, \quad (4.8)$$

con $a = E\varepsilon_0$, $b = E\chi_x$, $c = E\chi_y$. Il diagramma delle tensioni non è più una "farfalla" piana sull'altezza, ma un *piano inclinato* sopra la sezione: questo è il cuore concettuale della flessione deviata.

Passo 3 — Equivalenza statica. Le tre costanti a, b, c si determinano imponendo che le tensioni restituiscano le caratteristiche di sollecitazione. In flessione pura lo sforzo normale è nullo; con assi *baricentrici* ($\int_A x dA = \int_A y dA = 0$) la prima equazione impone subito $a = 0$:

$$N = \int_A \sigma_z dA = a A + b \int_A x dA + c \int_A y dA = a A = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Restano i due momenti. Con la convenzione della monografia ($M_x = - \int_A \sigma_z y dA$, positivo quando tende le fibre a $y < 0$; e in modo simmetrico $M_y = + \int_A \sigma_z x dA$, positivo quando tende le fibre a $x > 0$) e con le definizioni $I_{xx} = \int y^2 dA$, $I_{yy} = \int x^2 dA$, $I_{xy} = \int xy dA$ (il momento d'inerzia finora indicato con I_x è, nella notazione a due indici, I_{xx} : i due simboli sono sinonimi in tutta la monografia):

$$M_x = - \int_A (b x + c y) y dA = - b I_{xy} - c I_{xx}, \quad (4.9)$$

$$M_y = + \int_A (b x + c y) x dA = b I_{yy} + c I_{xy}. \quad (4.10)$$

È un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite b, c . Il suo determinante è (a meno del segno) la quantità che ricorrerà in ogni formula:

$$D \equiv I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2.$$

Risolvendo (per esempio con Cramer) si ottengono

$$b = \frac{M_x I_{xy} + M_y I_{xx}}{D}, \quad c = -\frac{M_x I_{yy} + M_y I_{xy}}{D},$$

e sostituendo nella (4.8) ($a = 0$):

Formula chiave — Navier generalizzata

$$\sigma_z(x, y) = \frac{(M_x I_{xy} + M_y I_{xx})x - (M_x I_{yy} + M_y I_{xy})y}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \quad (4.11)$$

È la legge di distribuzione delle tensioni normali per una sezione qualsiasi, sotto due momenti flettenti M_x e M_y . La tensione è lineare tanto in y quanto in x : il diagramma è un piano inclinato.

Osservazione — I due casi particolari che già conosciamo

La (4.11) contiene, come casi limite, tutto ciò che abbiamo visto finora.

- **Sezione con assi principali** ($I_{xy} = 0$) e momento solo verticale ($M_y = 0$): resta $\sigma_z = -M_x y / I_{xx}$, cioè esattamente la Navier semplice (4.3). Nessuna sorpresa: quando gli assi sono principali, la formula generale si sgonfia in quella elementare.
- **Sezione con assi principali** ma *doppio* momento ($I_{xy} = 0, M_y \neq 0$): si ottiene $\sigma_z = -M_x y / I_{xx} + M_y x / I_{yy}$, cioè la semplice *sovrapposizione* di due flessioni rette ortogonali. È la “flessione deviata facile”, quella dei manuali: due Navier indipendenti sommate.
- **Sezione senza simmetria** ($I_{xy} \neq 0$): i due momenti si *mescolano*. Anche con $M_y = 0$ compare un termine in x — ed è proprio la (6.1) applicata nella sezione a Z, che ora risulta dimostrata e non più calata dall’alto.

Attenzione — Il segno di M_x e l’uso del modulo

Nella (4.11) i momenti vanno inseriti *con il loro segno*. Nell’esercizio sulla Z abbiamo invece introdotto M_x come *modulo*, dichiarando a parole quali fibre risultano tese: è una scorciatoia legittima e comoda quando $M_y = 0$, perché il segno complessivo si legge dalla fisica del problema. Le due strade danno lo stesso risultato — lo verificheremo numericamente nell’esercizio che segue — ma la forma con i segni (4.11) è l’unica sicura quando entrambi i momenti sono presenti.

4.7 L’asse neutro e la via degli assi principali

L’asse neutro. L’*asse neutro* è il luogo dei punti a tensione nulla, $\sigma_z = 0$: la retta lungo la quale il materiale non è né teso né compresso, attorno a cui la sezione ruota. Ponendo a zero il numeratore della (4.11) si ottiene una retta per il baricentro, di pendenza

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{M_x I_{xy} + M_y I_{xx}}{M_x I_{yy} + M_y I_{xy}}. \quad (4.12)$$

Nel caso di solo momento verticale ($M_y = 0$) la (4.12) si riduce a

$$\tan \alpha = \frac{I_{xy}}{I_{yy}},$$

la stessa formula usata nella sezione a Z. Il punto più istruttivo è questo:

Osservazione — L'asse neutro non è perpendicolare al carico

Nella flessione retta l'asse neutro è orizzontale (coincide con x) e la trave si abbassa verticalmente. Nella flessione deviata, invece, l'asse neutro è *inclinato*: la sezione ruota attorno a una retta che *non* è perpendicolare al piano di carico. Di conseguenza la trave, caricata verticalmente, si sposta *anche di lato*. È esattamente ciò che accade a un corrente a Z o a un angolare non irrigidito: sotto un carico “dritto” scappano di traverso. La direzione dello spostamento è sempre perpendicolare all'asse neutro, non al carico.

La via alternativa: gli assi principali. Esiste un secondo modo, del tutto equivalente, di trattare la flessione deviata: ruotare gli assi fino a portarli in direzione principale, dove $I_{xy} = 0$, e li applicare due Navier semplici sovrapposte. La rotazione che annulla il momento centrifugo ha ampiezza θ_p data da

$$\tan 2\theta_p = \frac{2 I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}}, \quad (4.13)$$

e i momenti d'inerzia principali (il massimo e il minimo) valgono

$$I_{1,2} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}. \quad (4.14)$$

Approfondimento — Le due strade sono la stessa strada

La formula generalizzata (4.11) e il metodo degli assi principali non sono teorie diverse: sono lo stesso calcolo visto da due sistemi di riferimento. La (4.11) tiene fissi gli assi “comodi” (quelli in cui la sezione è quotata) e paga il prezzo di un I_{xy} non nullo; il metodo principale ruota gli assi per azzerare I_{xy} e paga il prezzo di dover ruotare anche momenti e coordinate. Il risultato è identico *cifra per cifra*, come vedremo tra un istante. La formula generalizzata è in genere più rapida quando la sezione è già quotata su x, y ; gli assi principali sono più eleganti quando interessa la *direzione* lungo cui la trave è più (o meno) rigida — informazione preziosa, per esempio, nel progetto di un corrente che non deve sbandare.

Il senso di tutto questo

Riassumiamo l'intera catena logica, che nella Sezione 5 percorreremo su un caso concreto senza saltare un solo anello:

$$\text{carichi} \rightarrow \text{reazioni} \rightarrow T(z), M(z) \rightarrow I_x \rightarrow \sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max} c}{I_x} \rightarrow \text{confronto con } \sigma_s, \sigma_r$$

più il ramo parallelo della rigidezza: $M(z) \rightarrow EI_x v'' = M \rightarrow v(z) \rightarrow$ freccia massima. Chi padroneggia questa catena possiede il nucleo del calcolo strutturale. E chi ha seguito anche le ultime tre sottosezioni sa che, quando la sezione perde la simmetria, la stessa catena regge: basta sostituire alla Navier semplice la sua forma generalizzata (4.11).

5 Esercitazione guidata: la mensola con carico distribuito**Dove stiamo andando**

In questo capitolo percorriamo, dall'inizio alla fine e senza omettere un solo passaggio, l'esercitazione completa: reazioni vincolari, diagrammi di taglio e momento, linea elastica e verifica di resistenza di una mensola a doppio T con carico distribuito. È il modello in scala di ciò che vi verrà chiesto in ogni prova: leggetelo con la penna in mano.

5.1 Il problema

Una trave a mensola, incastrata all'estremità A ($z = 0$) e libera all'estremità C ($z = l$), è realizzata in lega di alluminio ed è soggetta a un carico uniformemente distribuito q diretto verso il basso, esteso all'intera luce. La sezione è un doppio T simmetrico. Si chiede di:

1. determinare le reazioni vincolari;
2. tracciare i diagrammi del taglio $T(z)$ e del momento $M(z)$;
3. ricavare l'equazione della linea elastica e la freccia massima;
4. verificare la resistenza nella sezione più sollecitata.

Tabella 5.1. Dati del problema.

Grandezza	Simbolo	Valore	Unità
Modulo elastico	E	72 000	MPa
Tensione di snervamento	σ_s	441	MPa
Tensione di rottura	σ_r	516	MPa
Lunghezza trave	l	2	m
Larghezza solette	a	0,12	m
Altezza sezione	b	0,20	m
Spessore solette	d	0,01	m
Spessore anima	t	0,01	m
Carico distribuito	q	250	N/m

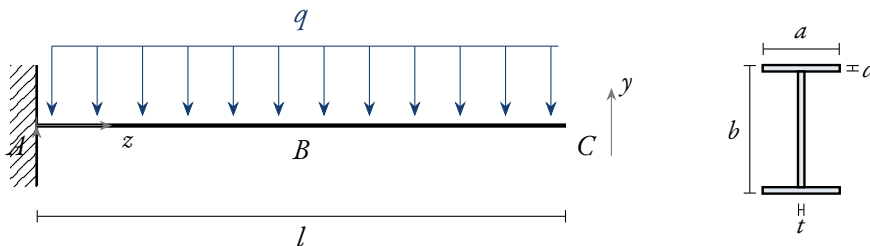


Figura 5.1. Schema statico della mensola e geometria della sezione a doppio T.

5.2 Fase I — Reazioni vincolari

L'incastro in A introduce tre reazioni incognite: R_{zA} , R_{yA} e M_A . Poiché non vi sono carichi lungo z , la prima equazione cardinale dà subito $R_{zA} = 0$: l'equilibrio si gioca tutto sulla traslazione verticale e sulla rotazione attorno a x .

Riduciamo il carico distribuito, *ai soli fini dell'equilibrio globale*, alla sua risultante:

$$Q = q l = 250 \cdot 2 = 500 \text{ N},$$

applicata verso il basso nel punto medio B ($z = l/2 = 1 \text{ m}$).

Assumiamo R_{yA} positiva verso l'alto e M_A positivo antiorario, e scriviamo le equazioni cardinali con polo in A :

$$\sum F_y = 0 : R_{yA} - q l = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{yA} = q l = 500 \text{ N}, \quad (5.1)$$

$$\sum M_x^{(A)} = 0 : M_A - q l \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = \frac{q l^2}{2} = 500 \text{ N m}. \quad (5.2)$$

Osservazione — I segni sono figli delle convenzioni

Nella dispensa universitaria da cui questo esercizio trae i dati, le reazioni compaiono come $R_{yA} = -500 \text{ N}$ e $M_A = 500 \text{ N m}$: lì si è scelto di rappresentare la reazione con verso positivo concorde al carico, e il segno meno ne corregge il verso. I *moduli* — che sono la fisica del problema — coincidono esattamente. Morale: dichiarate sempre la vostra convenzione in testa allo svolgimento e sarete inattaccabili.

5.3 Fase 2 — Taglio e momento flettente

Usiamo le relazioni indefinite di equilibrio ricavate nella Sezione 2. Il carico è uniforme su tutta la luce, quindi un solo tratto di integrazione copre l'intera trave.

5.3.1 Il taglio

Dalla (2.1), con q costante:

$$\frac{dT}{dz} = -q \quad \Rightarrow \quad T(z) = -qz + c_1. \quad (5.3)$$

La costante c_1 si determina imponendo la condizione al contorno statica all'estremo libero: in C non vi sono forze applicate, dunque

$$T(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad -ql + c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = ql. \quad (5.4)$$

Sostituendo:

$$T(z) = q(l - z) \quad (5.5)$$

Il taglio decresce linearmente da $T(0) = ql = 500 \text{ N}$ all'incastro fino a zero in punta. Controllo incrociato: il valore all'incastro coincide con la reazione R_{yA} , come deve essere — il taglio nella prima sezione è esattamente la forza che l'incastro trasmette alla trave.

5.3.2 Il momento flettente

Dalla (2.2), sostituendo la (5.5) e integrando:

$$\frac{dM}{dz} = T(z) = ql - qz \quad \Rightarrow \quad M(z) = qlz - \frac{qz^2}{2} + c_2. \quad (5.6)$$

Anche qui la condizione al contorno è all'estremo libero, dove nessuna coppia è applicata:

$$M(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad ql^2 - \frac{ql^2}{2} + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{ql^2}{2}. \quad (5.7)$$

Quindi:

$$M(z) = -\frac{qz^2}{2} + qlz - \frac{ql^2}{2} = -\frac{q}{2}(z^2 - 2lz + l^2) \quad (5.8)$$

e riconoscendo il quadrato del binomio:

$$M(z) = -\frac{q(l - z)^2}{2} \quad (5.9)$$

La forma compatta (5.9) ha una lettura fisica limpida: il momento nella sezione z è quello prodotto dal carico *a valle* della sezione, $q(l - z)$, applicato nel suo baricentro a distanza $(l - z)/2$. Il segno negativo dice che le fibre tese sono quelle superiori, come in ogni mensola caricata verso il basso. Il massimo in modulo è all'incastro:

$$|M|_{\max} = |M(0)| = \frac{ql^2}{2} = 500 \text{ N m} = M_A. \quad \checkmark$$

5.3.3 Diagrammi e valori campionati

La Tabella 5.2 riporta i valori di T e M campionati ogni 0,1 m; i diagrammi sono in Figura 5.2 e 5.3.

Tabella 5.2. Taglio e momento flettente lungo la trave (valori verificati con calcolo numerico indipendente).

z [m]	T [N]	M [N m]	z [m]	T [N]	M [N m]
0,0	500	-500,00	1,1	225	-101,25
0,1	475	-451,25	1,2	200	-80,00
0,2	450	-405,00	1,3	175	-61,25
0,3	425	-361,25	1,4	150	-45,00
0,4	400	-320,00	1,5	125	-31,25
0,5	375	-281,25	1,6	100	-20,00
0,6	350	-245,00	1,7	75	-11,25
0,7	325	-211,25	1,8	50	-5,00
0,8	300	-180,00	1,9	25	-1,25
0,9	275	-151,25	2,0	0	0,00
1,0	250	-125,00			

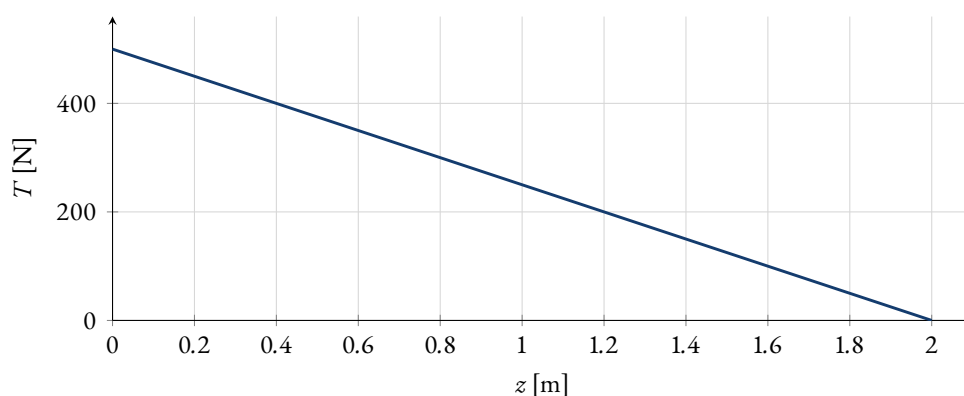


Figura 5.2. Diagramma del taglio: lineare, massimo all'incastro (500 N), nullo all'estremo libero.

Osservazione — Autocontrollo dei diagrammi

Verifichiamo la lista della Sezione 2: q costante $\Rightarrow T$ lineare ✓ e M parabolico ✓; in $z = l$ il taglio è nullo e infatti la parabola del momento vi arriva con tangente orizzontale ✓; nessuna forza concentrata, nessun salto ✓. Diagrammi coerenti.

5.4 Fase 3 — Geometria della sezione

Il calcolo dell'inerzia è stato svolto in dettaglio nell'Esercizio svolto 3.1; ne richiamiamo i risultati in Tabella 5.3.

Tabella 5.3. Momenti d'inerzia della sezione a doppio T.

Contributo	Valore [m ⁴]
Soletta superiore, I_1	$1,084 \times 10^{-5}$
Anima, I_2	$4,860 \times 10^{-6}$
Soletta inferiore, I_3	$1,084 \times 10^{-5}$
Totale, I_x	$2,654 \times 10^{-5}$

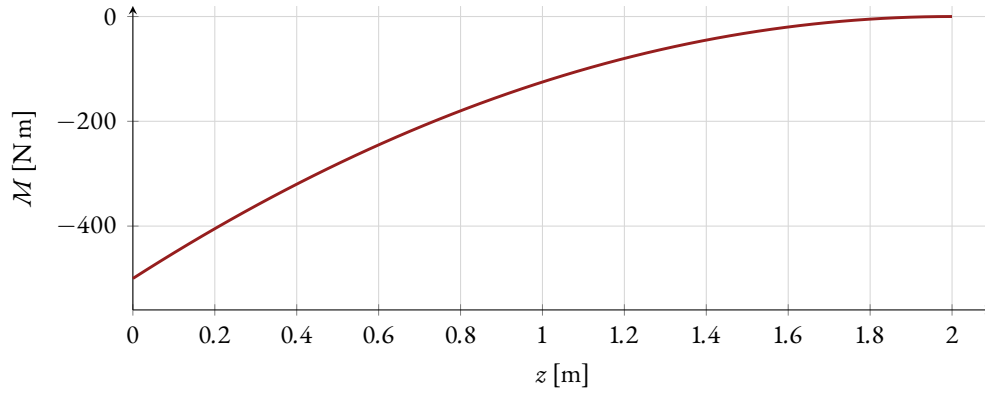


Figura 5.3. Diagramma del momento flettente: parabolico, massimo in modulo all'incastro (500 N m), nullo con tangente orizzontale all'estremo libero (dove anche il taglio è nullo).

5.5 Fase 4 — Linea elastica

Scriviamo l'equazione della linea elastica (4.5) con il momento (5.9):

$$EI_x \frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{qz^2}{2} + qlz - \frac{ql^2}{2}. \quad (5.10)$$

Prima integrazione (si ottiene la rotazione $\varphi \simeq dv/dz$):

$$EI_x \frac{dv}{dz} = -\frac{qz^3}{6} + ql \frac{z^2}{2} - \frac{ql^2}{2} z + c_3. \quad (5.11)$$

Seconda integrazione (si ottiene l'abbassamento):

$$EI_x v(z) = -\frac{qz^4}{24} + ql \frac{z^3}{6} - \frac{ql^2}{4} z^2 + c_3 z + c_4. \quad (5.12)$$

Condizioni al contorno. L'incastro blocca sia l'abbassamento sia la rotazione:

$$v(0) = 0, \quad \frac{dv}{dz}(0) = 0.$$

Imponendo la rotazione nulla nella (5.11): tutti i termini in z si annullano per $z = 0$ e resta $c_3 = 0$. Imponendo l'abbassamento nullo nella (5.12): analogamente $c_4 = 0$. Le condizioni cinematiche dell'incastro “uccidono” entrambe le costanti: è la controparte deformativa di ciò che l'incastro fa staticamente.

Formula chiave — Linea elastica della mensola con carico uniforme

$$v(z) = -\frac{qz^2}{24EI_x} (z^2 - 4lz + 6l^2), \quad v_{\max} = |v(l)| = \frac{ql^4}{8EI_x}. \quad (5.13)$$

Il segno negativo conferma che la trave si abbassa. Notate la dipendenza dalla *quarta potenza* della luce: raddoppiare l'apertura di una semiala, a parità di tutto il resto, moltiplica la freccia per sedici. Ecco perché le ali ad alto allungamento (alianti, HALE) sono così visibilmente flessibili.

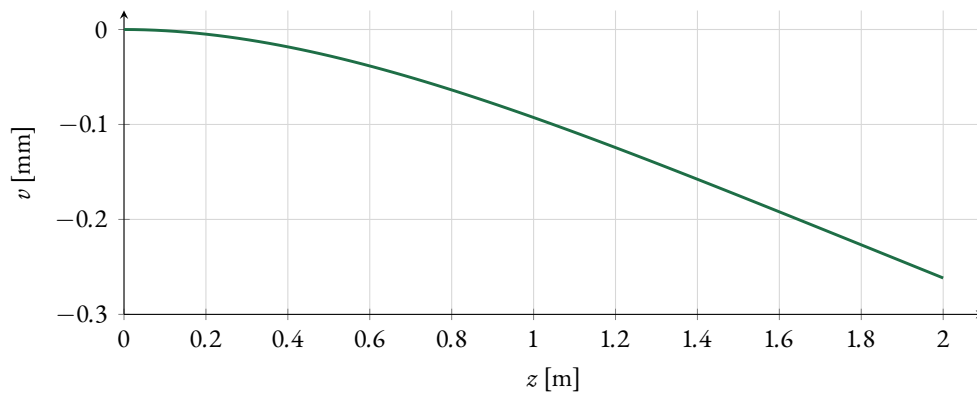
Numericamente, con $EI_x = 72\,000 \cdot 10^6 \cdot 2,654 \cdot 10^{-5} = 1,911 \times 10^6 \text{ N m}^2$:

$$v_{\max} = \frac{250 \cdot 2^4}{8 \cdot 1,911 \cdot 10^6} = 2,62 \times 10^{-4} \text{ m} \approx 0,26 \text{ mm}.$$

La Tabella 5.4 e la Figura 5.4 mostrano l'andamento completo.

Tabella 5.4. Abbassamenti della linea elastica (valori verificati con calcolo numerico indipendente).

z [m]	v [m]	z [m]	v [m]
0,0	0,000	1,1	$-1,082 \times 10^{-4}$
0,1	$-1,265 \times 10^{-6}$	1,2	$-1,243 \times 10^{-4}$
0,2	$-4,893 \times 10^{-6}$	1,3	$-1,409 \times 10^{-4}$
0,3	$-1,064 \times 10^{-5}$	1,4	$-1,577 \times 10^{-4}$
0,4	$-1,828 \times 10^{-5}$	1,5	$-1,748 \times 10^{-4}$
0,5	$-2,760 \times 10^{-5}$	1,6	$-1,920 \times 10^{-4}$
0,6	$-3,839 \times 10^{-5}$	1,7	$-2,094 \times 10^{-4}$
0,7	$-5,046 \times 10^{-5}$	1,8	$-2,268 \times 10^{-4}$
0,8	$-6,364 \times 10^{-5}$	1,9	$-2,442 \times 10^{-4}$
0,9	$-7,776 \times 10^{-5}$	2,0	$-2,617 \times 10^{-4}$
1,0	$-9,267 \times 10^{-5}$		

**Figura 5.4.** Linea elastica della mensola: abbassamento nullo con tangente orizzontale all'incastro, freccia massima di circa 0,26 mm all'estremo libero.

5.6 Fase 5 — Verifica di resistenza

La sezione più sollecitata è quella d'incastro, dove $|M|_{\max} = 500 \text{ N m}$. Con la formula di Navier (4.4), essendo la sezione simmetrica, le fibre estreme sono a $c = b/2 = 0,1 \text{ m}$ sia sopra sia sotto:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max} c}{I_x} = \frac{500 \cdot 0,1}{2,654 \cdot 10^{-5}} = 1,884 \cdot 10^6 \text{ Pa} \approx 1,88 \text{ MPa}.$$

Le fibre superiori sono tese ($M < 0$), quelle inferiori compresse, con uguale intensità.

Il confronto con i limiti del materiale è schiacciante:

$$\sigma_{\max} = 1,88 \text{ MPa} \ll \sigma_s = 441 \text{ MPa} < \sigma_r = 516 \text{ MPa},$$

con un margine rispetto allo snervamento

$$n = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\max}} = \frac{441}{1,88} \approx 234.$$

La struttura è ampiamente verificata, sia rispetto allo snervamento sia, a maggior ragione, rispetto alla rottura.

Attenzione — Un margine 234 non è “buon progetto”

Un coefficiente così alto significa che la trave è enormemente sovradimensionata per questo carico: in aeronautica sarebbe peso sprecato, cioè carico utile perso. I margini tipici delle strutture di volo, al carico di robustezza, sono di poco superiori all'unità: si progetta “al limite, ma con giudizio”. Il valore didattico dell'esercizio sta nel procedimento, che resta identico quando i margini si assottigliano — e allora ogni cifra decimale comincia a contare.

5.7 Riepilogo dei risultati

Tabella 5.5. Quadro riassuntivo dell'esercitazione guidata.

Grandezza	Simbolo	Valore	Unità
Reazione verticale	R_{yA}	500	N
Momento d'incastro	M_A	500	N m
Taglio massimo	$T_{\max}$	500	N
Momento massimo (modulo)	$ M _{\max}$	500	N m
Momento d'inerzia	$I_x \cdot 10^5$	2,654	m ⁴
Freccia massima	$v_{\max}$	0,2617	mm
Tensione massima	$\sigma_{\max}$	1,8839	MPa
Margine sullo snervamento	n	234	–

Il senso di tutto questo

Rileggete l'esercitazione dall'alto: reazioni (Fase 1), caratteristiche interne (Fase 2), geometria (Fase 3), deformata (Fase 4), verifica (Fase 5). Cinque fasi, sempre le stesse, qualunque siano trave, carico e sezione. Nel prossimo capitolo lo dimostriamo cambiando tutto — schema statico, carico e soprattutto sezione — e ritrovando ogni volta la stessa spina dorsale.

6 Esercizi svolti sulle sezioni aeronautiche

Dove stiamo andando

Quattro esercizi, quattro sezioni che vivono davvero dentro un aeroplano: il *doppio T non simmetrico* dei longheroni alari, il *T* delle centine irrigidite e degli attacchi, la *C* dei correnti e dei bordi di pannello, la *Z* degli irrigidimenti di rivestimento. Cambiano schema statico, carico e geometria; non cambia mai la spina dorsale in cinque fasi della Sezione 5. L'ultimo esercizio nasconde però un'insidia che vale da sola il prezzo del capitolo.

Osservazione — Unità di misura: la strategia dei millimetri

Nel Sezione 5 abbiamo lavorato in metri; qui, con sezioni assegnate in millimetri, conviene la prassi degli uffici tecnici: geometria in mm (aree in mm^2 , inerzie in mm^4), momenti convertiti in N mm. Il premio è che le tensioni escono direttamente in $\text{N/mm}^2 = \text{MPa}$, senza potenze di dieci vaganti. Tutti i materiali sono la stessa lega di alluminio della guida: $E = 72\,000 \text{ MPa}$, $\sigma_s = 441 \text{ MPa}$, $\sigma_r = 516 \text{ MPa}$.

6.1 Esercizio 6.1 — Doppio T non simmetrico (longherone alare)

Esercizio svolto 6.1 — Trave appoggiata a doppio T non simmetrico

Traccia. Una trave appoggiata agli estremi, di luce $l = 3 \text{ m}$, porta un carico uniforme $q = 800 \text{ N/m}$ verso il basso. La sezione è un doppio T *non simmetrico*, di altezza totale $h = 200 \text{ mm}$: soletta inferiore $160 \times 12 \text{ mm}$, anima $8 \times 178 \text{ mm}$, soletta superiore $100 \times 10 \text{ mm}$. Determinare reazioni, diagrammi, tensioni massime ai due lembi e freccia in mezzzeria.

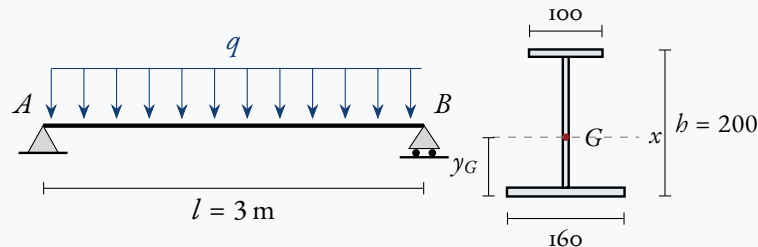


Figura 6.1. Esercizio 6.1: schema statico e sezione a doppio T non simmetrico (quote in mm).

Perché questa sezione. Nei longheroni alari reali la soletta compressa e quella tesa hanno spesso aree diverse: la resistenza a compressione è limitata dall'instabilità, quella a trazione dalla fatica, e il progettista dosa il materiale di conseguenza. La perdita della simmetria ha un prezzo: *il baricentro va calcolato*, e le tensioni ai due lembi non sono più uguali.

Fase 1 — Reazioni. Cerniera in *A*, carrello in *B*: tre reazioni, struttura isostatica. Per simmetria di geometria e carico:

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2} = \frac{800 \cdot 3}{2} = 1200 \text{ N}.$$

Fase 2 — Caratteristiche. Dall'Esercizio svolto 2.1, in forma letterale e poi numerica:

$$T(z) = \frac{ql}{2} - qz, \quad M(z) = \frac{qz}{2}(l - z),$$

$$T_{\max} = \pm 1200 \text{ N (agli appoggi)}, \quad M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{800 \cdot 9}{8} = 900 \text{ N m (in mezzzeria)}.$$

Il momento è positivo: fibre inferiori tese, superiori compresse.

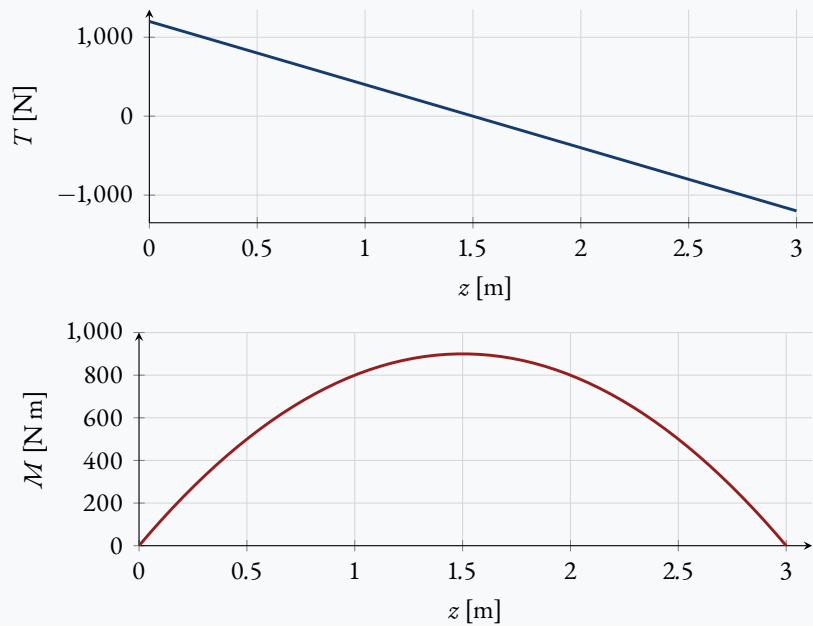


Figura 6.2. Esercizio 6.1: diagrammi del taglio (lineare, nullo in mezzeria) e del momento flettente (parabolico, massimo 900 N m in mezzeria).

Fase 3 — Baricentro. Fissiamo l'origine delle quote y sul lembo inferiore e scomponiamo nei tre rettangoli (Tabella 6.1).

Tabella 6.1. Calcolo del baricentro (quote dal lembo inferiore).

Parte	A_i [mm ²]	$y_{G,i}$ [mm]	$A_i y_{G,i}$ [mm ³]
Soletta inferiore (160 × 12)	1920	6	11 520
Anima (8 × 178)	1424	101	143 824
Soletta superiore (100 × 10)	1000	195	195 000
Totale	4344		350 344

$$y_G = \frac{\sum A_i y_{G,i}}{\sum A_i} = \frac{350\,344}{4344} = 80,65 \text{ mm}$$

dal lembo inferiore. Il baricentro sta *sotto* la metà altezza (100 mm): la grande soletta inferiore lo tira a sé, esattamente come previsto dalla logica della media pesata.

Fase 3-bis — Momento d'inerzia. Per ciascuna parte: inerzia propria più trasporto, con $\delta_i = y_{G,i} - y_G$ (Tabella 6.2).

Tabella 6.2. Momento d'inerzia con il teorema del trasporto.

Parte	δ_i [mm]	$b_i b_i^3/12$ [mm ⁴]	$A_i \delta_i^2$ [mm ⁴]	I_i [mm ⁴]
Soletta inf.	-74,65	$2,3040 \times 10^4$	$1,0699 \times 10^7$	$1,0723 \times 10^7$
Anima	20,35	$3,7598 \times 10^6$	$5,8971 \times 10^5$	$4,3495 \times 10^6$
Soletta sup.	114,35	$8,3333 \times 10^3$	$1,3076 \times 10^7$	$1,3084 \times 10^7$
Totale I_x				$2,8156 \times 10^7$

$$I_x = 2,8156 \times 10^7 \text{ mm}^4 = 2,8156 \times 10^{-5} \text{ m}^4.$$

Ancora una volta le solette dominano: insieme forniscono l'85% dell'inerzia. E notate la soletta superiore: pur avendo metà dell'area di quella inferiore, contribuisce di *più* ($1,31 \cdot 10^7$ contro $1,07 \cdot 10^7$), perché è più lontana dal baricentro e il trasporto va con δ^2 .

Fase 4 — Tensioni ai due lembi. Le distanze delle fibre estreme dal baricentro sono diverse:

$$c_{\text{sup}} = h - y_G = 200 - 80,65 = 119,35 \text{ mm}, \quad c_{\text{inf}} = y_G = 80,65 \text{ mm}.$$

Con $M_{\text{max}} = 900 \text{ N m} = 9 \times 10^5 \text{ N mm}$ e la formula di Navier applicata a ciascun lembo:

$$\sigma_{\text{sup}} = \frac{M_{\text{max}} c_{\text{sup}}}{I_x} = \frac{9 \cdot 10^5 \cdot 119,35}{2,8156 \cdot 10^7} = 3,82 \text{ MPa} \quad (\text{compressione}),$$

$$\sigma_{\text{inf}} = \frac{M_{\text{max}} c_{\text{inf}}}{I_x} = \frac{9 \cdot 10^5 \cdot 80,65}{2,8156 \cdot 10^7} = 2,58 \text{ MPa} \quad (\text{trazione}).$$

Il lembo più lontano dal baricentro è il più sollecitato: qui è quello *superiore*, compresso. La verifica va condotta sul massimo dei due: $\sigma_{\text{max}} = 3,82 \text{ MPa} \ll \sigma_s = 441 \text{ MPa}$: ampiamente verificata ($n = 441/3,82 \approx 115$).

Fase 5 — Linea elastica. Per la trave appoggiata con carico uniforme, la doppia integrazione di $EI_x v'' = M(z)$ con le condizioni $v(0) = v(l) = 0$ (del tutto analoga alla Fase 4 della Sezione 5) fornisce

$$v(z) = -\frac{qz}{24EI_x} (l^3 - 2lz^2 + z^3),$$

con freccia massima in mezzeria:

$$v_{\text{max}} = \frac{5ql^4}{384EI_x} = \frac{5 \cdot 800 \cdot 3^4}{384 \cdot 72 \cdot 10^9 \cdot 2,8156 \cdot 10^{-5}} = 4,16 \times 10^{-4} \text{ m} \approx 0,42 \text{ mm}.$$

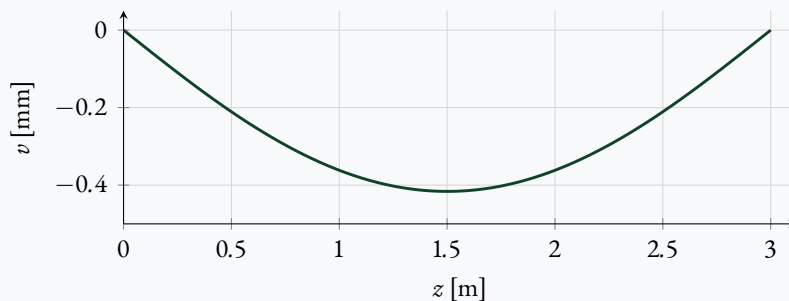


Figura 6.3. Esercizio 6.1: linea elastica, simmetrica, con freccia di 0,42 mm in mezzeria.

Osservazione — Dove conviene mettere il materiale?

Provate, per esercizio, a scambiare le due solette (la grande sopra, la piccola sotto): baricentro e inerzia globale non cambiano (la geometria è la stessa riflessa), ma con momento positivo la compressione andrebbe sul lembo con la soletta *piccola*, la scelta peggiore ai fini dell'instabilità. La disposizione del materiale non è mai neutrale rispetto al segno del momento: è una delle prime lezioni del progetto strutturale.

6.2 Esercizio 6.2 — Sezione a T (mensola con carico in punta)

Esercizio svolto 6.2 — Mensola a T con forza concentrata all'estremità

Traccia. Una mensola di lunghezza $l = 1,5$ m porta una forza concentrata $F = 1200$ N verso il basso applicata all'estremo libero. La sezione è a T, altezza totale $h = 150$ mm: flangia superiore 120×10 mm, anima 10×140 mm. Reazioni, diagrammi, tensioni ai lembi, freccia.

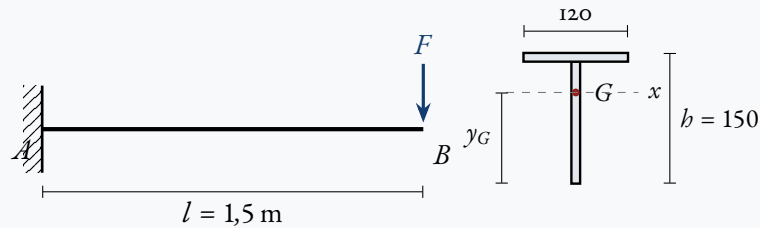


Figura 6.4. Esercizio 6.2: mensola con forza in punta e sezione a T (quote in mm).

Fase 1 — Reazioni. Equazioni cardinali con polo nell'incastro A:

$$R_{yA} = F = 1200 \text{ N}, \quad M_A = F l = 1200 \cdot 1,5 = 1800 \text{ N m}.$$

Fase 2 — Caratteristiche. Tra il carico in punta e l'incastro non ci sono altri carichi ($q = 0$): per le relazioni indefinite, T è costante e M è lineare. Dall'equilibrio della porzione a valle della sezione z :

$$T(z) = F = 1200 \text{ N} \quad \forall z, \quad M(z) = -F(l - z),$$

con massimo in modulo all'incastro, $|M|_{\max} = F l = 1800 \text{ N m}$, e fibre superiori tese (mensola caricata verso il basso). Controllo: $dM/dz = F = T \checkmark$; $M(l) = 0 \checkmark$.

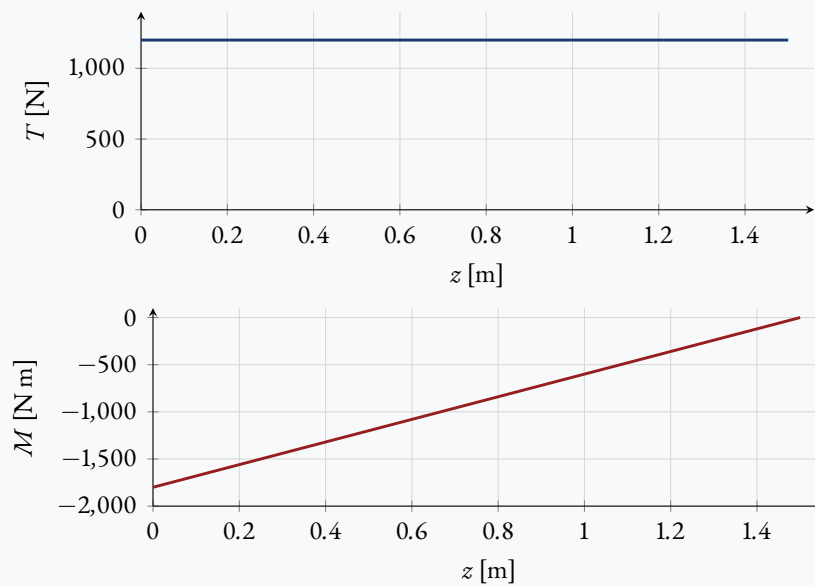


Figura 6.5. Esercizio 6.2: taglio costante ($q = 0$) e momento lineare, massimo in modulo all'incastro.

Fase 3 — Baricentro e inerzia. Quote dal lembo inferiore (estremità dell'anima):

Tabella 6.3. Baricentro e inerzia della sezione a T.

Parte	A_i [mm ²]	$y_{G,i}$ [mm]	δ_i [mm]	$b_i b_i^3/12$ [mm ⁴]	$A_i \delta_i^2$ [mm ⁴]
Anima (10 × 140)	1400	70	-34,62	$2,2867 \times 10^6$	$1,6775 \times 10^6$
Flangia (120 × 10)	1200	145	40,38	$1,0000 \times 10^4$	$1,9571 \times 10^6$

$$y_G = \frac{1400 \cdot 70 + 1200 \cdot 145}{1400 + 1200} = \frac{98\,000 + 174\,000}{2600} = \frac{272\,000}{2600} = 104,62 \text{ mm.}$$

Il baricentro è molto alto: la flangia, larga e lontana, pesa quanto l'anima nel bilancio dei momenti statici. È il tratto caratteristico delle sezioni a T: *fortemente asimmetriche* rispetto all'asse neutro.

$$I_x = (2,2867 + 1,6775 + 0,0100 + 1,9571) \cdot 10^6 = 5,9313 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 5,9313 \times 10^{-6} \text{ m}^4.$$

Fase 4 — Tensioni ai due lembi. Distanze delle fibre estreme:

$$c_{\text{sup}} = 150 - 104,62 = 45,38 \text{ mm}, \quad c_{\text{inf}} = 104,62 \text{ mm.}$$

Con $|M|_{\text{max}} = 1,8 \times 10^6 \text{ N mm}$:

$$\sigma_{\text{sup}} = \frac{1,8 \cdot 10^6 \cdot 45,38}{5,9313 \cdot 10^6} = 13,77 \text{ MPa (trazione)},$$

$$\sigma_{\text{inf}} = \frac{1,8 \cdot 10^6 \cdot 104,62}{5,9313 \cdot 10^6} = 31,75 \text{ MPa (compressione)}.$$

Il rapporto fra le due tensioni è $c_{\text{inf}}/c_{\text{sup}} \approx 2,3$: il piede dell'anima lavora più del doppio della flangia. Verifica: $\sigma_{\text{max}} = 31,75 \text{ MPa} \ll 441 \text{ MPa}$ ($n \approx 14$): verificata.

Fase 5 — Linea elastica. Integrando $EI_x v'' = -F(l - z)$ con le condizioni d'incastro $v(0) = v'(0) = 0$:

$$v(z) = -\frac{F z^2}{6EI_x} (3l - z), \quad v_{\text{max}} = |v(l)| = \frac{F l^3}{3EI_x} = 3,16 \times 10^{-3} \text{ m} \approx 3,16 \text{ mm.}$$

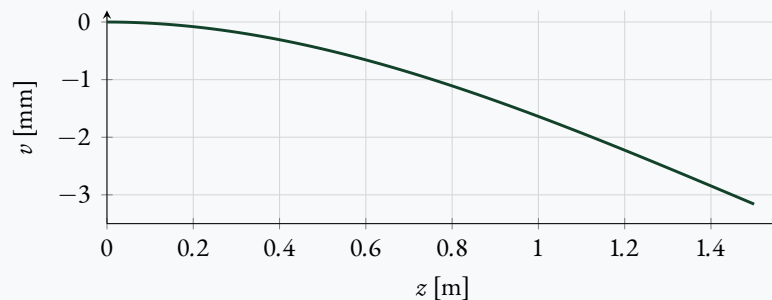


Figura 6.6. Esercizio 6.2: linea elastica della mensola, con tangente orizzontale all'incastro e freccia di 3,16 mm in punta.

Una freccia dieci volte più grande di quelle viste finora: sezione più piccola, momento più alto. La rigidità si paga.

Attenzione — L'errore classico sulla sezione a T

L'errore più frequente nei compiti è verificare la sezione a T *solo* sul lembo della flangia, magari ricordando a memoria $\sigma = Mc/I$ con $c = b/2$. Nella T il baricentro non è a metà altezza: c vale 104,62 mm da una parte e 45,38 mm dall'altra, e usare $b/2 = 75 \text{ mm}$ sottostimerebbe la tensione massima del 28%. Regola d'oro: nelle sezioni monosimmetriche si calcolano *sempre entrambi* i lembi.

6.3 Esercizio 6.3 — Sezione a C (trave appoggiata, carico in mezzzeria)

Esercizio svolto 6.3 — Trave appoggiata a C con forza in mezzzeria

Traccia. Trave appoggiata di luce $l = 2,4$ m con forza concentrata $F = 2000$ N in mezzzeria, diretta verso il basso. Sezione a C di altezza $h = 200$ mm: due flange 60×8 mm e anima 8×184 mm. Reazioni, diagrammi, tensione massima, freccia.

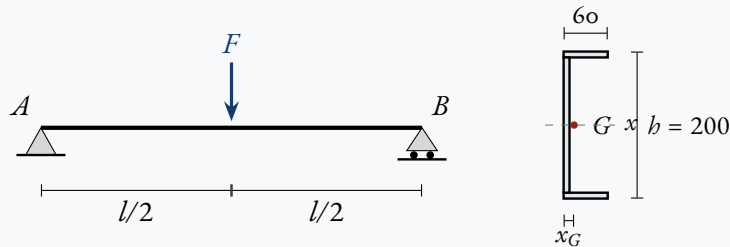


Figura 6.7. Esercizio 6.3: trave appoggiata con forza in mezzzeria e sezione a C (quote in mm).

Fase 1 — Reazioni. Per simmetria:

$$R_A = R_B = \frac{F}{2} = 1000 \text{ N.}$$

Fase 2 — Caratteristiche. Nei due tratti privi di carico distribuito, T è costante e M lineare. Nel primo tratto ($0 \leq z \leq l/2$), dall'equilibrio della porzione di sinistra:

$$T(z) = \frac{F}{2}, \quad M(z) = \frac{F}{2} z;$$

nel secondo tratto il taglio salta di $-F$ al passaggio del carico (regola dei salti!) e vale $-F/2$, mentre il momento scende linearmente fino a zero in B . Il massimo è in mezzzeria:

$$M_{\max} = \frac{F l}{4} = \frac{2000 \cdot 2,4}{4} = 1200 \text{ N m,}$$

con momento positivo: fibre inferiori tese. Il diagramma del momento è il classico “triangolo” con vertice sotto il carico, dove il taglio cambia segno passando per lo zero: massimo confermato dalla regola $T = 0$ (qui sotto forma di salto attraverso lo zero).

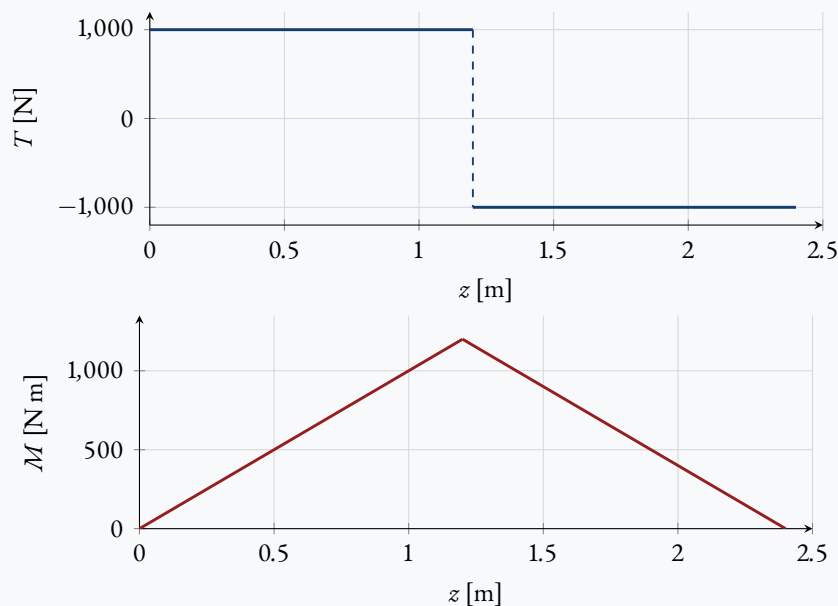


Figura 6.8. Esercizio 6.3: il taglio salta di $-F$ sotto il carico (linea tratteggiata); il momento è il triangolo con vertice 1200 N m in mezzeria.

Fase 3 — Geometria. La C è *simmetrica rispetto all'asse orizzontale*: il baricentro giace a metà altezza, $y_G = 100$ mm, e $I_{xy} = 0$: la flessione è retta e la Navier si applica nella forma semplice. Inerzia (flange con $\delta = \pm 96$ mm, anima baricentrica):

$$I_x = 2 \left[\frac{60 \cdot 8^3}{12} + 60 \cdot 8 \cdot 96^2 \right] + \frac{8 \cdot 184^3}{12} = 2 \left[2,560 \cdot 10^3 \frac{1}{10^3} + 4,4237 \cdot 10^6 \right] + 4,1530 \cdot 10^6$$

ossia, ordinando i numeri:

$$I_x = 2(2560 + 4\,423\,680) + 4\,153\,003 = 1,3005 \times 10^7 \text{ mm}^4 = 1,3005 \times 10^{-5} \text{ m}^4.$$

Fase 4 — Tensione massima. Sezione simmetrica: $c = 100$ mm su entrambi i lembi. Con $M_{\max} = 1,2 \times 10^6$ N m:

$$\sigma_{\max} = \frac{1,2 \cdot 10^6 \cdot 100}{1,3005 \cdot 10^7} = 9,23 \text{ MPa},$$

trazione al lembo inferiore, compressione al superiore, in ugual misura. Verifica soddisfatta con ampio margine ($n \approx 48$).

Fase 5 — Linea elastica. L'integrazione va condotta tratto per tratto (il momento cambia espressione in mezzeria), imponendo $v(0) = v(l) = 0$ e la continuità di v e v' sotto il carico. Nel primo tratto, $0 \leq z \leq l/2$:

$$v(z) = -\frac{Fz}{48EI_x} (3l^2 - 4z^2),$$

e il secondo tratto è lo specchio del primo. La freccia massima è in mezzeria:

$$v_{\max} = \frac{Fl^3}{48EI_x} = \frac{2000 \cdot 2,4^3}{48 \cdot 72 \cdot 10^9 \cdot 1,3005 \cdot 10^{-5}} = 6,15 \times 10^{-4} \text{ m} \approx 0,62 \text{ mm}.$$

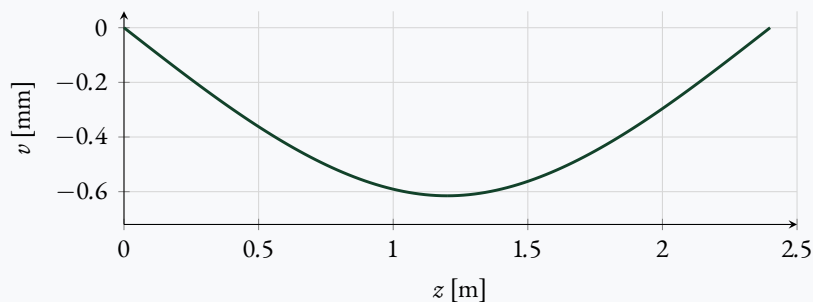


Figura 6.9. Esercizio 6.3: linea elastica simmetrica con freccia di 0,62 mm sotto il carico. Si noti il punto angoloso *assente*: sotto la forza la pendenza è continua, cambia solo la curvatura.

Approfondimento — La C e il centro di taglio

La flessione della C, l'abbiamo visto, è retta e tranquilla. La sua insidia sta altrove: nel *taglio*. Il baricentro della nostra C dista $x_G = 14,3$ mm dal dorso dell'anima, ma il punto per cui deve passare la forza trasversale affinché la trave si fletta *senza torcersi* — il *centro di taglio* — non coincide con il baricentro: per le sezioni a C giace *all'esterno* della sezione, dalla parte opposta alle flange. Un carico verticale applicato nel piano dell'anima produce quindi, oltre alla flessione, una torsione parassita — e le sezioni aperte in

parete sottile sono pessime a torsione. Per questo, nella pratica costruttiva, i profili a C vengono caricati attraverso opportuni collegamenti o accoppiati dorso a dorso (a formare un doppio T, che ha il centro di taglio nel baricentro). Il calcolo quantitativo del centro di taglio appartiene a un capitolo successivo del corso; qui basti il messaggio: *per le sezioni aperte non simmetriche rispetto al piano di carico, chiedersi sempre dove passa la forza.*

6.4 Esercizio 6.4 — Sezione a Z e flessione deviata

Esercizio svolto 6.4 — Mensola a Z con carico distribuito: la trappola della Navier

Traccia. Una mensola di lunghezza $l = 1,8$ m porta un carico uniforme $q = 300$ N/m verso il basso. La sezione è a Z, altezza $b = 200$ mm: anima 8×184 mm, due flange 50×8 mm disposte da parti opposte (superiore verso $+x$, inferiore verso $-x$). Calcolare la tensione normale massima e la deformata.

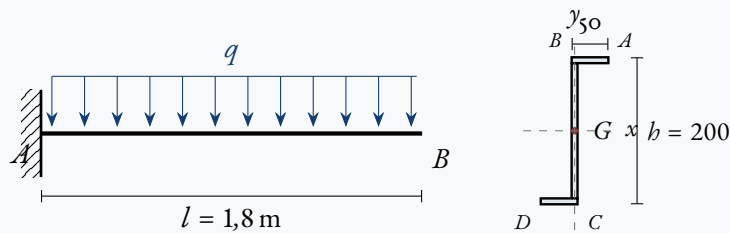


Figura 6.10. Esercizio 6.4: mensola con carico distribuito e sezione a Z (quote in mm); A, B, C, D sono gli spigoli estremi.

Fase 1–2 — Statica. Identica alla guida della Sezione 5:

$$T_{\max} = ql = 540 \text{ N}, \quad |M_x|_{\max} = \frac{ql^2}{2} = \frac{300 \cdot 1,8^2}{2} = 486 \text{ N m}$$

all'incastro, con fibre superiori tese. Gli andamenti sono identici, a scala, a quelli della mensola guida:

$$T(z) = q(l - z), \quad M_x(z) = -\frac{q(l - z)^2}{2}.$$

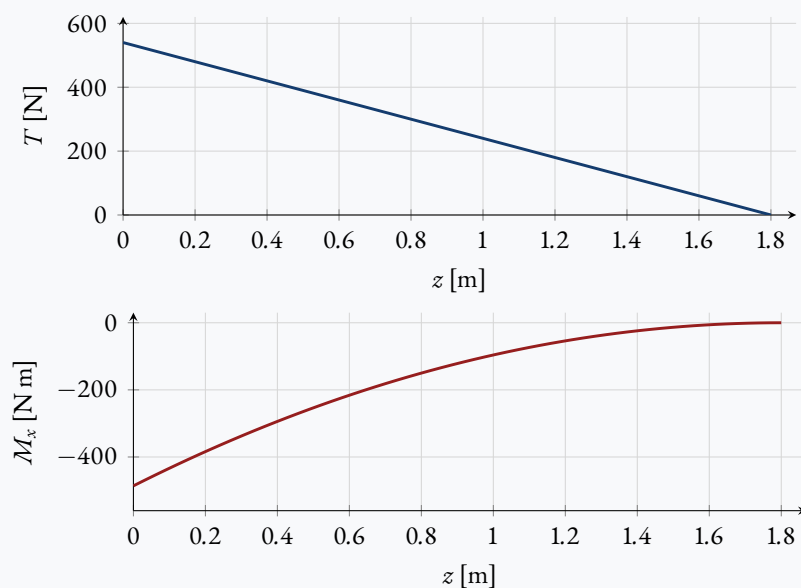


Figura 6.11. Esercizio 6.4: diagrammi del taglio e del momento flettente, massimi in modulo all'incastro.

Fase 3 — Geometria: qui cambia tutto. Fissiamo gli assi baricentrici: per l'antisimmetria della Z (simmetria *puntuale* rispetto al centro), il baricentro è nel centro dell'anima. Poniamo dunque l'origine lì: anima da $y = -92$ a $y = +92$ (spessore 8, da $x = -4$ a $x = +4$); flangia superiore da $x = -46$ a $x = +46$, y da 92 a 100; flangia inferiore da $x = -46$ a $x = +46$, y da -100 a -92 . I baricentri delle flange sono in $(\pm 21, \pm 96)$.

Calcoliamo *tutte e tre* le inerzie:

$$I_{xx} = \frac{8 \cdot 184^3}{12} + 2 \left[\frac{50 \cdot 8^3}{12} + 400 \cdot 96^2 \right] \\ = 4,1530 \cdot 10^6 + 2(2133 + 3\,686\,400) = 1,1530 \times 10^7 \text{ mm}^4,$$

$$I_{yy} = \frac{184 \cdot 8^3}{12} + 2 \left[\frac{8 \cdot 50^3}{12} + 400 \cdot 21^2 \right] \\ = 7851 + 2(83\,333 + 176\,400) = 5,2732 \times 10^5 \text{ mm}^4,$$

e soprattutto il momento centrifugo, che per la Z *non è nullo* (nessun asse di simmetria!). Ogni rettangolo ha I_{xy} proprio nullo (possiede assi di simmetria propri), restano i trasporti $A_i \delta_{x,i} \delta_{y,i}$:

$$I_{xy} = \underbrace{0}_{\text{anima}} + \underbrace{400 \cdot (+21) \cdot (+96)}_{\text{flangia sup.}} + \underbrace{400 \cdot (-21) \cdot (-96)}_{\text{flangia inf.}} = 2 \cdot 806\,400 = 1,6128 \times 10^6 \text{ mm}^4.$$

I due trasporti hanno lo *stesso segno* (prodotti di coordinate concordi): si sommano invece di elidersi. È la firma geometrica della Z.

Fase 4a — Il tentativo ingenuo (sbagliato). Applichiamo per un momento la Navier semplice, come se nulla fosse, con $c = 100$ mm e $M_x = 4,86 \times 10^5$ N mm:

$$\sigma^{(\text{ingenua})} = \frac{M_x c}{I_{xx}} = \frac{4,86 \cdot 10^5 \cdot 100}{1,1530 \cdot 10^7} = 4,22 \text{ MPa}.$$

Teniamo da parte questo numero: fra poco scopriremo che è *gravemente sbagliato*.

Fase 4b — La formula corretta. Quando $I_{xy} \neq 0$, la condizione di equivalenza statica va imposta su *entrambi* i momenti, M_x e M_y , e conduce alla *formula di Navier generalizzata* (4.11), dimostrata per esteso nel paragrafo 4.6. Nel nostro caso $M_y = 0$ e, prendendo M_x come modulo con le fibre superiori tese, essa si scrive:

$$\sigma_z(x, y) = \frac{M_x (I_{yy} y - I_{xy} x)}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}. \quad (6.1)$$

La tensione dipende ora *anche da x*: il diagramma non è più una farfalla piana sull'altezza, ma un piano inclinato nello spazio della sezione. Il denominatore vale

$$I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2 = 1,1530 \cdot 10^7 \cdot 5,2732 \cdot 10^5 - (1,6128 \cdot 10^6)^2 = 3,4789 \times 10^{12} \text{ mm}^8.$$

Fase 4c — Tensioni nei punti estremi. Valutiamo la (6.1) nei quattro spigoli estremi della sezione, con $M_x = 4,86 \cdot 10^5$ N mm (momento che tende le fibre superiori: per coerenza con il segno della mensola usiamo il modulo e leggiamo trazione sulle fibre superiori):

Tabella 6.4. Tensioni normali negli spigoli della sezione a Z (formula generalizzata).

Punto	x [mm]	y [mm]	σ_z [MPa]	Stato
A — estremo flangia sup.	46	100	−3,00	compressione
B — spigolo anima sup.	−4	100	8,27	trazione
C — spigolo anima inf.	4	−100	−8,27	compressione
D — estremo flangia inf.	−46	−100	3,00	trazione

A titolo d'esempio, il calcolo esplicito nel punto $B(-4, 100)$:

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \frac{4,86 \cdot 10^5 (5,2732 \cdot 10^5 \cdot 100 - 1,6128 \cdot 10^6 \cdot (-4))}{3,4789 \cdot 10^{12}} \\ &= \frac{4,86 \cdot 10^5 \cdot 5,9183 \cdot 10^7}{3,4789 \cdot 10^{12}} = 8,27 \text{ MPa.}\end{aligned}$$

Fase 4d — Il confronto che vale la lezione. La tensione massima reale è

$$\sigma_{\max} = 8,27 \text{ MPa} \quad \text{contro} \quad \sigma^{(\text{ingenua})} = 4,22 \text{ MPa} :$$

la Navier semplice *sottostima la tensione del 49%*, quasi un fattore due. E non sbaglia solo il valore: sbaglia anche il *punto*. Il massimo non è all'estremo della flangia (punto A , che addirittura risulta compresso pur stando dalla parte “tesa” della sezione!), ma allo spigolo anima-flangia B . L'asse neutro, luogo dei punti a tensione nulla ($I_{yy}y = I_{xy}x$), è inclinato di

$$\alpha = \arctan \frac{I_{xy}}{I_{yy}} = \arctan \frac{1,6128 \cdot 10^6}{5,2732 \cdot 10^5} = \arctan 3,06 \approx 71,9^\circ$$

rispetto all'asse x : quasi verticale, nonostante il momento applicato sia puramente attorno a x . La trave, caricata verticalmente, si inflette anche di lato. La Fase 5 quantifica esattamente questo.

Fase 5 — Linea elastica: la trave scarta di lato. Con $I_{xy} \neq 0$ anche l'equazione della linea elastica va generalizzata: la curvatura verticale e quella laterale sono *accoppiate*. Per carico puramente verticale ($M_y = 0$) si dimostra che

$$E I_{\text{eff}} v'' = M_x(z), \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}{I_{yy}} = \frac{3,4789 \cdot 10^{12}}{5,2732 \cdot 10^5} = 6,5973 \times 10^6 \text{ mm}^4,$$

e che lo spostamento laterale è proporzionale a quello verticale:

$$u(z) = \frac{I_{xy}}{I_{yy}} v(z) = 3,06 v(z).$$

Notate: $I_{\text{eff}} \approx 0,57 I_{xx}$ — la trave è quasi metà meno rigida di quanto direbbe il calcolo ingenuo. La deformata ha la stessa forma della mensola guida, con I_{eff} al posto di I_x :

$$\begin{aligned}v(z) &= -\frac{q z^2}{24 E I_{\text{eff}}} (z^2 - 4 l z + 6 l^2), \quad |v(l)| = \frac{q l^4}{8 E I_{\text{eff}}} = 0,83 \text{ mm}, \\ |u(l)| &= 3,06 \cdot 0,83 = 2,53 \text{ mm}, \quad \delta_{\text{tot}} = \sqrt{u^2 + v^2} = 2,67 \text{ mm}.\end{aligned}$$

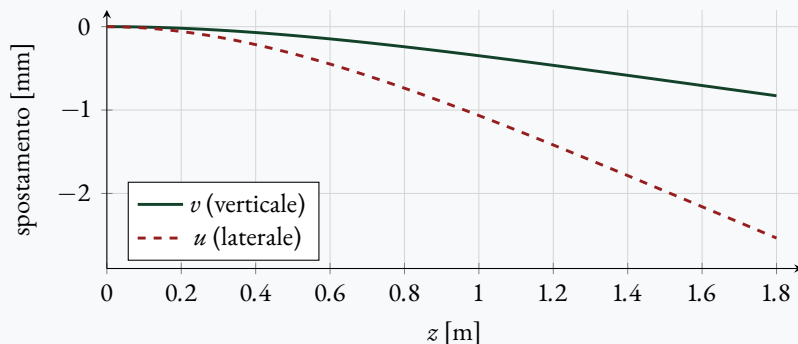


Figura 6.12. Esercizio 6.4: la punta della mensola a Z scende di 0,83 mm ma scarta lateralmente di ben 2,53 mm — tre volte tanto. La sezione trasla ortogonalmente all'asse neutro inclinato di $71,9^\circ$.

Il rapporto $u/v = I_{xy}/I_{yy} = \tan \alpha$ non è una coincidenza: la sezione si sposta *perpendicolarmente all'asse neutro*, in perfetta coerenza con la Fase 4d. Tensioni e spostamenti raccontano la stessa storia.

Attenzione — Quando NON fidarsi della Navier semplice

La formula $\sigma = M_x y / I_{xx}$ vale se e solo se gli assi x, y sono *principali* d'inerzia della sezione, cioè se $I_{xy} = 0$. È garantito quando la sezione ha almeno un asse di simmetria contenuto nel piano di carico (doppio T, T, C caricata nel piano dell'anima, rettangoli, tubi). Per le sezioni prive di assi di simmetria — Z, L, profili qualsiasi — occorre la forma generalizzata (6.1), oppure lavorare negli assi principali. Nei velivoli reali gli irrigidimenti a Z sono però collegati con continuità al rivestimento, che ne vincola la flessione laterale: il pannello irrigidito nel suo complesso si comporta meglio del corrente isolato. Il nostro calcolo vale per il profilo *libero*: è il caso peggiore, e come tale va conosciuto. Dichiarare i limiti del modello è parte integrante del calcolo.

6.5 Esercizio 6.5 — Angolare a L: la seconda trappola (e la controprova)**Esercizio svolto 6.5 — Mensola ad angolare con forza in punta**

Traccia. Una mensola di lunghezza $l = 0,7$ m porta una forza $F = 350$ N verso il basso all'estremo libero. La sezione è un *angolare a lati uguali* L $60 \times 60 \times 8$ mm (due ali di lunghezza 60 mm e spessore 8 mm). Calcolare la tensione normale massima con la formula generalizzata e *verificare* il risultato passando agli assi principali; determinare infine la deformata.

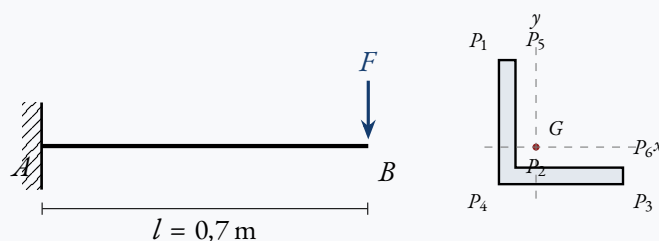


Figura 6.13. Esercizio 6.5: mensola con forza in punta e sezione angolare a lati uguali (quote in mm); P_1 – P_6 sono i sei spigoli.

Perché questa sezione. L'angolare è il profilo del corrente d'ala e dei raccordi per eccellenza. A lati uguali possiede *un* asse di simmetria — la bisettrice a 45° — ma quell'asse *non* è allineato con gli assi x, y del disegno di fabbricazione. Rispetto a x, y , dunque, $I_{xy} \neq 0$: siamo di nuovo in flessione deviata, come per la Z, ma con una geometria che ci regala una controprova elegante.

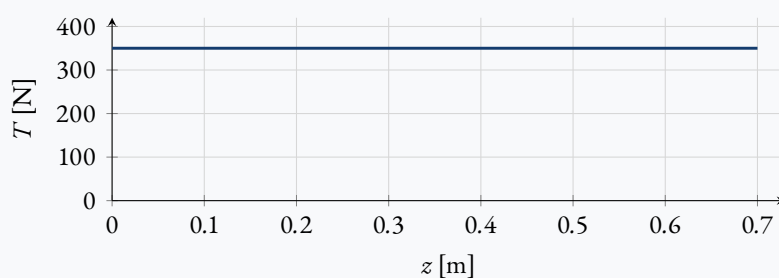
Fase 1 — Reazioni. Equazioni cardinali con polo nell'incastro:

$$R_{yA} = F = 350 \text{ N}, \quad M_A = F l = 350 \cdot 0,7 = 245 \text{ N m}.$$

Fase 2 — Caratteristiche. Fra la punta e l'incastro non vi sono altri carichi: taglio costante, momento lineare.

$$T(z) = F = 350 \text{ N}, \quad M_x(z) = -F(l - z),$$

con $|M_x|_{\max} = F l = 245 \text{ N m}$ all'incastro e fibre *superiori* tese (mensola caricata verso il basso).



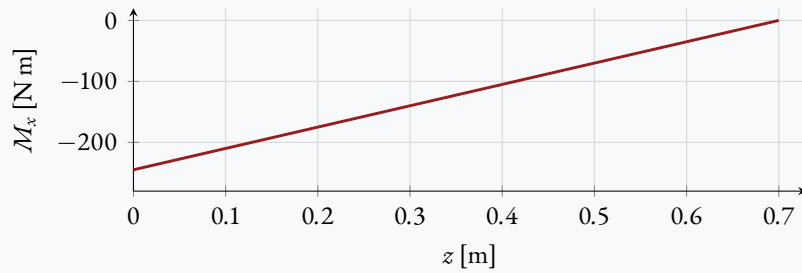


Figura 6.14. Esercizio 6.5: taglio costante e momento lineare, massimi in modulo all'incastro.

Fase 3 — Geometria completa. Origine nello spigolo (tallone), scomposizione in ala verticale (8×60) e ala orizzontale meno lo spigolo (52×8). Per la simmetria a 45° risulta $x_G = y_G$:

$$A = 896 \text{ mm}^2, \quad x_G = y_G = 17,93 \text{ mm}.$$

Le tre inerzie baricentriche (per lati uguali $I_{xx} = I_{yy}$):

$$I_{xx} = I_{yy} = 2,9687 \times 10^5 \text{ mm}^4, \quad I_{xy} = -1,7383 \times 10^5 \text{ mm}^4.$$

Il momento centrifugo è *negativo* e tutt'altro che trascurabile (oltre la metà di I_{xx}): la flessione sarà marcatamente deviata. Il denominatore della Navier generalizzata:

$$D = I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2 = 8,8132 \cdot 10^{10} - 3,0217 \cdot 10^{10} = 5,7915 \times 10^{10} \text{ mm}^8.$$

Fase 4a — Il tentativo ingenuo. Chi applicasse la Navier semplice userebbe la fibra più lontana dall'asse x ($y = c = 42,07 \text{ mm}$, gli spigoli P_1 e P_5 in alto):

$$\sigma^{(\text{ing})} = \frac{|M_x|c}{I_{xx}} = \frac{2,45 \cdot 10^5 \cdot 42,07}{2,9687 \cdot 10^5} = 34,7 \text{ MPa}.$$

Numero da tenere in sospetto: la formula ingenua non sa nemmeno distinguere P_1 da P_5 , che sono alla stessa quota ma, come vedremo, lavorano in modo diverso.

Fase 4b — La formula generalizzata. Applichiamo la (4.11) con $M_y = 0$ e $M_x = -2,45 \times 10^5 \text{ N mm}$ (segno negativo: fibre superiori tese). Con $M_y = 0$ essa si riduce a $\sigma_z = M_x(I_{xy}x - I_{yy}y)/D$. Valutiamola nei sei spigoli:

Tabella 6.5. Tensioni normali negli spigoli dell'angolare (formula generalizzata).

Spigolo	x [mm]	y [mm]	σ_z [MPa]	Stato
P_1 punta ala vert.	-17,93	42,07	39,65	trazione
P_5 dorso ala vert.	-9,93	42,07	45,53	trazione (max)
P_2 spigolo interno	-9,93	-9,93	-19,77	compressione
P_6 dorso ala orizz.	42,07	-9,93	18,47	trazione
P_3 punta ala orizz.	42,07	-17,93	8,42	trazione
P_4 tallone	-17,93	-17,93	-35,70	compressione

A titolo d'esempio, lo spigolo P_5 ($-9,93, 42,07$):

$$\sigma_z = \frac{-2,45 \cdot 10^5 (-1,7383 \cdot 10^5 \cdot (-9,93) - 2,9687 \cdot 10^5 \cdot 42,07)}{5,7915 \cdot 10^{10}} = 45,53 \text{ MPa}.$$

La tensione massima è 45,53 MPa in P_5 , non in P_1 : la formula ingenua sbagliava del **24%** e per giunta indicava lo spigolo sbagliato. Verifica di resistenza: $n = 441/45,53 \approx 9,7$.

Fase 4c — L'asse neutro. Con $M_y = 0$:

$$\tan \alpha = \frac{I_{xy}}{I_{yy}} = \frac{-1,7383 \cdot 10^5}{2,9687 \cdot 10^5} = -0,5855 \Rightarrow \alpha \approx -30,4^\circ.$$

L'asse neutro è inclinato di 30° sotto l'orizzontale: la sezione ruota attorno a quella retta, e la punta si sposta perpendicolarmente ad essa — quindi *anche di lato*.

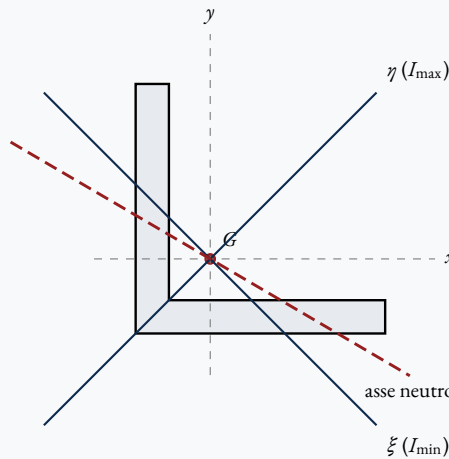


Figura 6.15. Esercizio 6.5: assi principali a $\pm 45^\circ$ (l'angolare a lati uguali è simmetrico rispetto alla bisettrice) e asse neutro a $-30,4^\circ$. Il carico è verticale, ma l'asse neutro non è orizzontale: ecco la flessione deviata.

Approfondimento — La controprova per assi principali

Verifichiamo il risultato con la seconda strada. Gli assi principali sono a $\theta_p = -45^\circ$ (dalla (4.13), con $I_{xx} = I_{yy}$ il denominatore si annulla e l'angolo è esattamente $\pm 45^\circ$), e le inerzie principali valgono

$$I_\eta = I_1 = 4,7070 \times 10^5 \text{ mm}^4, \quad I_\xi = I_2 = 1,2304 \times 10^5 \text{ mm}^4.$$

Proiettando il momento (vettore lungo x , modulo $2,45 \times 10^5 \text{ N mm}$) sugli assi principali si ottengono $M_\xi = M_\eta = 1,732 \times 10^5 \text{ N mm}$; applicando la Navier semplice sui due assi principali e sommando, lo spigolo P_5 dà

$$\sigma_z(P_5) = \frac{M_\eta}{I_\eta} \xi - \frac{M_\xi}{I_\xi} \eta = 45,53 \text{ MPa},$$

identico al valore della formula generalizzata. Ripetendo per tutti gli spigoli, lo scarto fra i due metodi è nullo a meno degli arrotondamenti (la verifica numerica completa è in `scripts/verifica_navier_gen.py`). Le due strade sono la stessa strada: era proprio ciò che avevamo promesso.

Fase 5 — Linea elastica: la punta scappa di lato. Per la componente verticale vale la freccia della mensola con carico in punta, purché si usi l'inerzia efficace $I_{\text{eff}} = D/I_{yy}$ introdotta per la Z:

$$I_{\text{eff}} = \frac{5,7915 \cdot 10^{10}}{2,9687 \cdot 10^5} = 1,9509 \times 10^5 \text{ mm}^4 \quad (\approx 0,66 I_{xx}),$$

$$v(z) = -\frac{F z^2(3l - z)}{6 E I_{\text{eff}}}, \quad |v(l)| = \frac{F l^3}{3 E I_{\text{eff}}} = 2,85 \text{ mm},$$

mentre lo spostamento laterale, proporzionale a quello verticale tramite I_{xy}/I_{yy} , vale

$$|u(l)| = \left| \frac{I_{xy}}{I_{yy}} \right| |v(l)| = 0,5855 \cdot 2,85 = 1,67 \text{ mm}, \quad \delta_{\text{tot}} = \sqrt{u^2 + v^2} = 3,30 \text{ mm}.$$

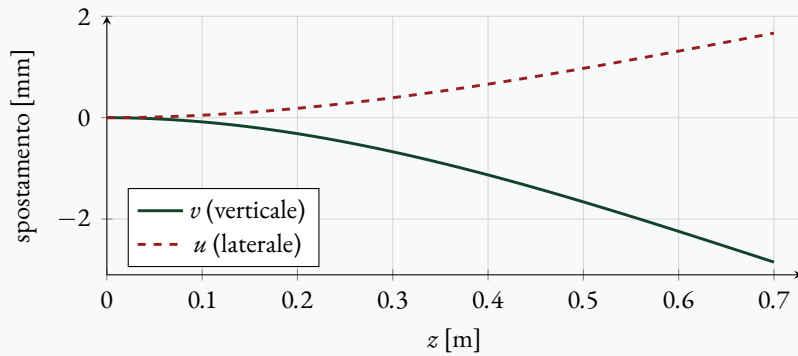


Figura 6.16. Esercizio 6.5: la punta scende di 2,85 mm e simultaneamente scarta di lato di 1,67 mm.

Il senso di tutto questo

L'angolare conferma, con una geometria diversa dalla Z, la stessa lezione: quando $I_{xy} \neq 0$ la Navier semplice sottostima la tensione e ne sbaglia la posizione, e la trave caricata dritto si deforma di sghebo. Ma soprattutto abbiamo *chiuso il cerchio*: la formula generalizzata e gli assi principali, applicati alla stessa sezione, danno lo stesso identico numero. La teoria del paragrafo 4.6 non era un esercizio di stile, ma lo strumento esatto per queste sezioni.

6.6 Quadro comparativo

Tabella 6.6. Sintesi dei cinque esercizi (materiale: lega leggera, $E = 72\,000 \text{ MPa}$, $\sigma_s = 441 \text{ MPa}$).

Es.	Sezione	Schema	$ M _{\text{max}} [\text{N m}]$	$I_x [\text{mm}^4]$	$\sigma_{\text{max}} [\text{MPa}]$	$v_{\text{max}} [\text{mm}]$
6.1	doppio T non simm.	appoggiata, q	900	$2,816 \times 10^7$	3,82	0,42
6.2	T semplice	mensola, F	1800	$5,931 \times 10^6$	31,75	3,16
6.3	C	appoggiata, F	1200	$1,301 \times 10^7$	9,23	0,62
6.4	Z	mensola, q	486	$1,153 \times 10^7$	8,27	—
6.5	L (angolare)	mensola, F	245	$2,969 \times 10^5$	45,53	3,30

Nota alla tabella. Per le sezioni deviate (6.4 e 6.5) la colonna I_x riporta I_{xx} , ma la tensione e la freccia sono state calcolate con la formula generalizzata e con $I_{\text{eff}} = D/I_{yy}$: per la Z la colonna v_{max} è omessa perché lo spostamento è intrinsecamente bidirezionale (v e u , si veda l'esercizio); per l'angolare si riporta direttamente la risultante δ_{tot} .

Il senso di tutto questo

Cinque sezioni, cinque morali: la sezione non simmetrica esige il calcolo del baricentro e la verifica su entrambi i lembi (6.1); la T punisce chi usa $h/2$ a memoria (6.2); la C è docile a flessione ma nasconde la torsione del centro di taglio (6.3); la Z, senza assi di simmetria, sconfessa la Navier semplice e pretende

quella generalizzata (6.4); l'angolare ribadisce la lezione e ci regala la controprova per assi principali (6.5). Il metodo in cinque fasi, però, non è mai cambiato: cambiano gli strumenti geometrici, non la logica. È questa la competenza che l'esame — e il mestiere — vi chiederanno.

7 Il gancio aeronautico: la flessione nel semiguscio

Dove stiamo andando

Finora la sezione era un blocco pieno di materiale e la flessione lo percorreva tutto con la legge di Navier. Ma la struttura di un'ala o di una fusoliera non è piena: è un *guscio sottile* irrigidito — un rivestimento di pochi decimi di millimetro, tenuto in forma da correnti e da solette di longherone. In questa architettura la flessione non si spalma sull'intera sezione: viene *concentrata* nelle solette e nei correnti, che lavorano quasi a sola trazione o compressione. Qui colleghiamo tutta la teoria della trave inflessa al suo impiego reale: dimensionare le solette che assorbono il momento.

7.1 L'idealizzazione a semiguscio

Una struttura a *semiguscio* (in inglese *semi-monocoque*) è composta da tre famiglie di elementi con compiti distinti: il *rivestimento* (la pelle sottile), i *correnti* e le *solette* dei longheroni (gli irrigidimenti longitudinali), e le *anime* dei longheroni (le pareti verticali). La ripartizione dei compiti è netta e nasce da un fatto geometrico: gli irrigidimenti hanno sezione piccola ma sono *lontani* dall'asse neutro, mentre la pelle è sottile. Ne segue che

- le **solette** e i **correnti** assorbono quasi tutta la *tensione normale* dovuta alla flessione (il loro braccio è grande: sono efficaci a resistere al momento);
- il **rivestimento** e le **anime** assorbono quasi tutto il *taglio*.

Questa osservazione suggerisce un modello semplificato potentissimo, dovuto alla scuola inglese di costruzioni aeronautiche (Megson): si sostituiscono i correnti e le solette con *concentrazioni di area*, dette *booms* (correnti idealizzati), collocate sulla linea media della pelle, sulle quali la tensione normale si assume *costante*; e si assume che la pelle porti *solo taglio*. La capacità della pelle di portare anche tensione normale non si butta via: la si *trasferisce* ai booms adiacenti, aumentandone l'area di una quantità equivalente.

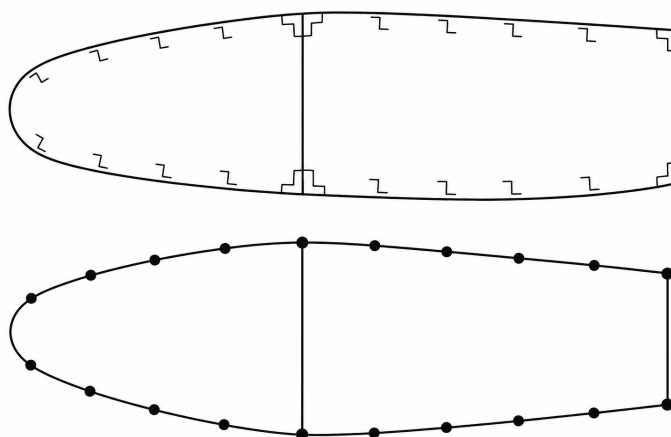


Figura 7.1. Dalla sezione alare reale al modello a booms: correnti e solette diventano aree concentrate, la pelle porta solo taglio.

Definizione — Corrente idealizzato (boom)

Un *boom* è un'area concentrata B , posta sulla linea media del rivestimento, che rappresenta la capacità di portare tensione normale di un corrente (o di una soletta) e della porzione di pelle a esso associata. Sui booms la tensione normale si considera costante; fra un boom e l'altro la pelle lavora a solo taglio.

Come si trasferisce la pelle ai booms. Consideriamo un pannello di pelle di spessore t_D e lunghezza b compreso fra due booms, 1 e 2, sui quali la tensione normale vale σ_1 e σ_2 . Imponendo che il pannello reale e quello idealizzato trasmettano lo stesso carico assiale e lo stesso momento (equilibrio attorno a un lembo del pannello), si ricavano le aree da aggiungere:

$$B_1 = \frac{t_D b}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right), \quad B_2 = \frac{t_D b}{6} \left(2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right). \quad (7.1)$$

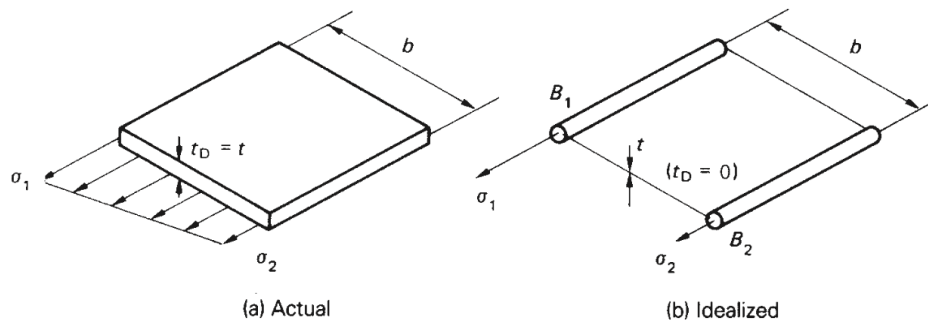


Figura 7.2. Il pannello reale (tensione lineare da σ_1 a σ_2) e quello idealizzato (due booms + pelle a solo taglio): l'equivalenza statica genera la (7.1).

Due casi limite chiariscono la formula:

- **sforzo assiale puro** ($\sigma_1 = \sigma_2$, cioè $\sigma_2/\sigma_1 = 1$): $B_1 = B_2 = t_D b/2$. Metà del pannello a ciascun boom, com'è naturale;
- **flessione pura** con i due booms su lati opposti dell'asse neutro ($\sigma_2/\sigma_1 = -1$): $B_1 = B_2 = t_D b/6$. La pelle, tesa da un lato e compressa dall'altro, contribuisce molto meno.

Quando il rapporto σ_2/σ_1 non è noto in partenza, per la sola flessione lo si sostituisce con il rapporto delle ordinate y_2/y_1 , dato che in flessione retta la tensione è proporzionale a y .

Attenzione — L'idealizzazione dipende dal carico

La stessa struttura richiede idealizzazioni *diverse* a seconda del carico: un pannello sotto sforzo assiale dà $t_D b/2$, lo stesso pannello in flessione dà $t_D b/6$. È un punto delicato e spesso frainteso: non esiste “l'area del boom” in assoluto, ma l'area del boom *per quella condizione di carico*. In questa sezione ci occupiamo di flessione.

Proprietà della sezione e formula di Navier. Una volta idealizzata la sezione, la sola area che porta tensione normale è quella dei booms. Ne segue una conseguenza importante:

- il *baricentro* della sezione è il baricentro delle *aree dei booms*;
- i momenti d'inerzia si calcolano come *somme discrete* sui booms, non più come integrali:

$$I_{xx} = \sum_i B_i y_i^2, \quad I_{yy} = \sum_i B_i x_i^2, \quad I_{xy} = \sum_i B_i x_i y_i,$$

con (x_i, y_i) riferite al baricentro dei booms.

La tensione normale in ciascun boom è poi data *dalla stessa formula di Navier* della trave piena — semplice se gli assi sono principali, generalizzata (4.11) in caso contrario. Cambia soltanto il modo di calcolare le inerzie: da integrale a somma. È il ponte concettuale di questa sezione.

Formula chiave — Il momento è una coppia nelle solette

Nel caso più semplice — due sole solette di area A_f , distanti b , con l'anima che porta solo taglio — l'idealizzazione dà $I_{xx} = 2A_f (b/2)^2 = A_f b^2/2$, e la tensione nelle solette vale

$$\sigma = \frac{M (b/2)}{I_{xx}} = \frac{M}{A_f b} \quad \Longleftrightarrow \quad P = \sigma A_f = \frac{M}{b}. \quad (7.2)$$

Il momento flettente è assorbito da una *coppia di forze* $P = M/b$: trazione in una soletta, compressione nell'altra. È l'immagine fisica più importante di tutta la costruzione aeronautica.

Il criterio. Il dimensionamento a flessione segue subito. Imponendo che la tensione non superi l'ammissibile $\sigma_{amm} = \sigma_{lim}/k$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{due solette:} \quad A_f &\geq \frac{M}{b \sigma_{amm}}; \\ \text{più booms:} \quad |\sigma_i| &= \left| \frac{M y_i}{I_{xx}} \right| \leq \sigma_{amm} \quad \forall i. \end{aligned}$$

Nei tre esercizi che seguono percorriamo questa scala di complessità: prima due solette, poi un cassone simmetrico idealizzato, infine un cassone sotto flessione biassiale, dove riemerge la deviazione studiata nel paragrafo 4.6.

7.2 Esercizio 7.1 — Longherone a due solette

Esercizio svolto 7.1 — Dimensionamento delle solette di un longherone

Traccia. Un longherone alare è schematizzabile come due solette collegate da un'anima che porta solo taglio. Nella sezione di incastro il momento flettente di progetto (già comprensivo del fattore di robustezza) vale $M = 60 \text{ kN m}$; la distanza fra i baricentri delle solette è $b = 280 \text{ mm}$. Il materiale è la lega di alluminio della monografia ($\sigma_s = 441 \text{ MPa}$); si adotti un coefficiente di sicurezza $k = 1,5$ sullo snervamento. Dimensionare le solette.

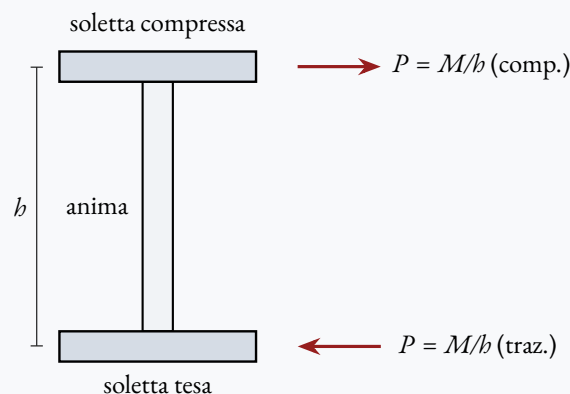


Figura 7.3. Esercizio 7.1: il momento assorbito da una coppia di forze $P = M/b$ nelle due solette.

Passo 1 — La tensione ammissibile.

$$\sigma_{amm} = \frac{\sigma_s}{k} = \frac{441}{1,5} = 294 \text{ MPa}.$$

Passo 2 — La forza nella soletta. Il momento è assorbito dalla coppia $P = M/b$:

$$P = \frac{M}{b} = \frac{60 \cdot 10^6 \text{ N mm}}{280 \text{ mm}} = 2,143 \times 10^5 \text{ N} \approx 214 \text{ kN}.$$

Passo 3 — L'area minima. La soletta è sollecitata a trazione (o compressione) semplice dalla forza P ; la condizione $P/A_f \leq \sigma_{amm}$ dà

$$A_{f,\min} = \frac{P}{\sigma_{amm}} = \frac{2,143 \cdot 10^5}{294} = 728,9 \text{ mm}^2.$$

Passo 4 — Scelta e verifica. Si adotta un profilo estruso da $A_f = 800 \text{ mm}^2$ (arrotondamento in eccesso verso un valore commerciale). La verifica:

$$I_{xx} = \frac{A_f b^2}{2} = \frac{800 \cdot 280^2}{2} = 3,136 \times 10^7 \text{ mm}^4, \quad \sigma = \frac{M (b/2)}{I_{xx}} = \frac{M}{A_f b} = 267,9 \text{ MPa}.$$

Essendo $267,9 \text{ MPa} \leq 294 \text{ MPa}$, la verifica è soddisfatta con margine $n = 441/267,9 = 1,65$ sullo snervamento.

Il senso di tutto questo

Il risultato $\sigma = M/(A_f b)$ è Navier travestita: la ritroviamo scrivendo $\sigma = M c/I_{xx}$ con $c = b/2$ e $I_{xx} = A_f b^2/2$. Ma la forma $P = M/b$ è più eloquente per il progettista: dice *quanta forza* deve reggere ogni soletta, e quindi quanti bulloni, quanti rivetti, quale sezione estrusa. È la porta d'ingresso al dimensionamento strutturale vero.

7.3 Esercizio 7.2 — Cassone simmetrico idealizzato

Esercizio svolto 7.2 — Idealizzazione e dimensionamento dei correnti d'angolo

Traccia. Un cassone alare monocella ha sezione rettangolare 500 mm (larghezza) $\times$ 300 mm (altezza), con quattro correnti d'angolo. Il rivestimento superiore e inferiore ha spessore $t_r = 2$ mm, le anime dei due longheroni $t_a = 2,5$ mm. Il momento di progetto in flessione verticale è $M_x = 180 \text{ kN m}$; $\sigma_{amm} = 294 \text{ MPa}$. Dimensionare l'area dei correnti d'angolo.

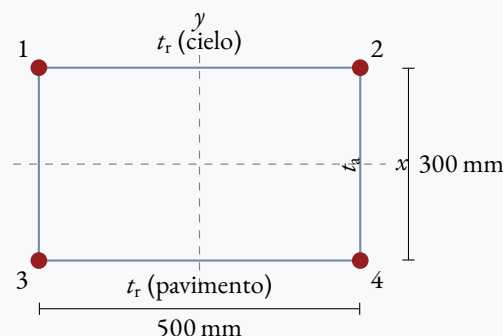


Figura 7.4. Esercizio 7.2: cassone rettangolare idealizzato in quattro booms d'angolo; la pelle porta solo taglio.

Passo 1 — Idealizzazione della pelle (flessione pura). Ogni corrente d'angolo raccoglie metà del pannello di cielo (o pavimento) e il contributo di un'anima.

- *Pannello di cielo*, fra i due correnti superiori: essi sono alla stessa quota, dunque $\sigma_1 = \sigma_2$ e la (7.1) dà $t_r b/2$ a ciascuno:

$$\Delta B_{\text{cielo}} = \frac{t_r b}{2} = \frac{2 \cdot 500}{2} = 500 \text{ mm}^2.$$

- *Anima*, fra corrente superiore ($y = +150$) e inferiore ($y = -150$): $\sigma_2/\sigma_1 = -1$, e la (7.1) dà $t_a b/6$:

$$\Delta B_{\text{anima}} = \frac{t_a b}{6} = \frac{2,5 \cdot 300}{6} = 125 \text{ mm}^2.$$

Contributo totale della pelle a ogni corrente d'angolo: $\Delta B = 500 + 125 = 625 \text{ mm}^2$.

Passo 2 — Dimensionamento. Detta A_c l'area del corrente (incognita), l'area idealizzata di ogni boom è $B = A_c + 625$. Per simmetria i quattro booms sono uguali e a distanza $d = 150 \text{ mm}$ dall'asse x :

$$I_{xx} = 4 B d^2 = 4 (A_c + 625) \cdot 150^2 = 90000 (A_c + 625).$$

La tensione massima (ai correnti, $y = \pm d$) e la condizione di verifica:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x d}{I_{xx}} = \frac{M_x}{4 B d} \leq \sigma_{\text{amm}} \Rightarrow B \geq \frac{M_x}{4 d \sigma_{\text{amm}}} = \frac{1,8 \cdot 10^8}{4 \cdot 150 \cdot 294} = 1020,4 \text{ mm}^2,$$

da cui $A_c \geq 1020,4 - 625 = 395,4 \text{ mm}^2$.

Passo 3 — Scelta e verifica. Si adotta $A_c = 500 \text{ mm}^2$ (margine di sicurezza più ampio e valore di comodo). Allora $B = 1125 \text{ mm}^2$ e

$$I_{xx} = 90000 \cdot 1125 = 1,0125 \times 10^8 \text{ mm}^4,$$

$$\sigma_{\max} = \frac{1,8 \cdot 10^8 \cdot 150}{1,0125 \cdot 10^8} = 266,7 \text{ MPa} \leq 294 \text{ MPa}.$$

Verifica soddisfatta, margine $n = 441/266,7 = 1,65$.

Il senso di tutto questo

Notate la potenza del metodo: un cassone reale, con pelle e anime, si è ridotto a quattro numeri (le aree B) e a una somma $I_{xx} = \sum B_i y_i^2$. Poi è tutta e solo Navier. L'idealizzazione non è un'approssimazione grossolana: è il modo in cui l'industria dimensiona davvero, e la (7.1) è ciò che le dà fondamento.

7.4 Esercizio 7.3 — Cassone in flessione biassiale

Esercizio svolto 7.3 — Dimensionamento sotto momento verticale e laterale

Traccia. Lo stesso cassone rettangolare $400 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$ (quattro correnti d'angolo di area idealizzata B , già comprensiva della pelle) è sollecitato *simultaneamente* da un momento verticale (portanza) $M_x = 90 \text{ kN m}$ e da un momento laterale (resistenza o carico di raffica laterale) $M_y = 30 \text{ kN m}$. Dimensionare i correnti d'angolo con $\sigma_{\text{amm}} = 294 \text{ MPa}$.

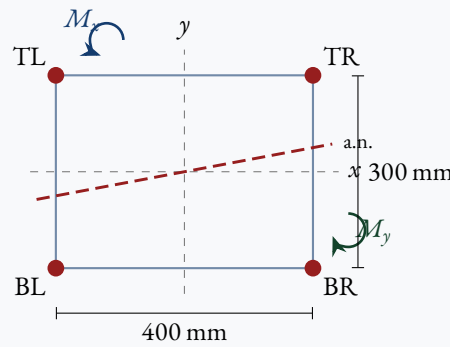


Figura 7.5. Esercizio 7.3: flessione biassiale. L'asse neutro (a.n.) ruota di $10,6^\circ$ rispetto all'orizzontale; il corrente critico è quello dove i due contributi si sommano.

Passo 1 — Perché serve la formula generalizzata. Il cassone è simmetrico rispetto a entrambi gli assi, dunque $I_{xy} = 0$: la (4.11) si riduce alla *sovrapposizione* di due flessioni rette ortogonali,

$$\sigma_z = -\frac{M_x}{I_{xx}} y + \frac{M_y}{I_{yy}} x.$$

Trascurare M_y (cioè usare la sola Navier verticale) sarebbe un errore: lo quantificheremo alla fine.

Passo 2 — Inerzie. Con semi-altezza $d = 150$ mm e semi-larghezza $c = 200$ mm, i quattro booms uguali danno

$$I_{xx} = 4 B d^2 = 90000 B, \quad I_{yy} = 4 B c^2 = 160000 B.$$

Passo 3 — Il corrente critico. La tensione è massima nell'angolo dove i due termini hanno lo stesso segno e si sommano in modulo:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x d}{I_{xx}} + \frac{M_y c}{I_{yy}} = \frac{M_x}{4 B d} + \frac{M_y}{4 B c} = \frac{1}{4 B} \left(\frac{M_x}{d} + \frac{M_y}{c} \right).$$

Imponendo $\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{amm}}$:

$$B \geq \frac{1}{4 \sigma_{\text{amm}}} \left(\frac{M_x}{d} + \frac{M_y}{c} \right) = \frac{1}{4 \cdot 294} \left(\frac{9 \cdot 10^7}{150} + \frac{3 \cdot 10^7}{200} \right) = 637,8 \text{ mm}^2.$$

Passo 4 — Scelta e verifica. Si adotta $B = 700 \text{ mm}^2$. Allora $I_{xx} = 6,3 \times 10^7$, $I_{yy} = 1,12 \times 10^8 \text{ mm}^4$ e

$$\sigma_{\max} = \frac{9 \cdot 10^7 \cdot 150}{6,3 \cdot 10^7} + \frac{3 \cdot 10^7 \cdot 200}{1,12 \cdot 10^8} = 214,3 + 53,6 = 267,9 \text{ MPa} \leq 294 \text{ MPa}.$$

Verifica soddisfatta, $n = 441/267,9 = 1,65$.

Passo 5 — L'asse neutro e l'errore da evitare. L'asse neutro, luogo $\sigma_z = 0$, ha pendenza

$$\tan \alpha = \frac{M_y I_{xx}}{M_x I_{yy}} = \frac{3 \cdot 10^7 \cdot 6,3 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^7 \cdot 1,12 \cdot 10^8} = 0,1875 \Rightarrow \alpha \approx 10,6^\circ :$$

inclinato, non orizzontale. La sezione è in flessione deviata, come nel paragrafo 4.6, ma stavolta la deviazione nasce dal *doppio momento*, non da I_{xy} . Se avessimo dimensionato con la sola M_x avremmo trovato $\sigma = 214,3 \text{ MPa}$, *sottostimando la tensione reale del 20%*: un margine apparente che in volo non esiste.

Il senso di tutto questo

Tre esercizi, una sola idea: il momento va nelle solette, e le solette si dimensionano con Navier. Cambia la veste — due solette, quattro correnti, due momenti insieme — ma la spina dorsale è sempre la stessa formula della trave inflessa. Quando la sezione idealizzata perde anche la simmetria (un cassone cambrato, correnti di area diversa), $I_{xy} \neq 0$ e si usa la (4.11) con le somme discrete $I_{xx} = \sum B_i y_i^2$, $I_{xy} = \sum B_i x_i y_i$: identica, nella logica, agli esercizi sulla Z e sull'angolare. Il cerchio, dalla trave piena al cassone alare, è chiuso.

8 Il taglio: la formula di Jourawski e le anime

Dove stiamo andando

Fin qui la trave ha lavorato a flessione, e le tensioni erano normali (σ_z). Ma sulle sezioni agisce anche il *taglio* T , che abbiamo diagrammato fin dalla Sezione 2 senza ancora trasformarlo in tensione. Adesso lo facciamo. Scopriremo che il taglio genera tensioni *tangenziali* τ distribuite secondo la formula di Jourawski, e che nelle strutture aeronautiche sono le *anime* dei longheroni a sopportarle. Il capitolo culmina in un fatto che distingue nettamente l'aeronautica dall'edilizia: l'anima sottile *s'imbozza* a taglio molto prima di snervarsi — e la si progetta apposta perché lo faccia.

8.1 Il taglio nasce dalla flessione

Nella Sezione 2 abbiamo visto la relazione differenziale $dM/dz = T$: il taglio è la *pendenza* del diagramma del momento. Questo legame ha una conseguenza fisica precisa. Se il momento $M(z)$ varia lungo l'asse, allora le tensioni normali $\sigma_z = My/I_x$ sulle due facce di un concio di lunghezza dz sono *diverse*: c'è uno squilibrio longitudinale. Quello squilibrio dev'essere equilibrato da tensioni tangenziali interne. Il taglio, insomma, non è un attore indipendente: è la manifestazione tagliante della flessione che cambia.

8.2 La formula di Jourawski

Isoliamo un concio di trave di lunghezza dz e, con un taglio orizzontale alla quota $y = y_1$, separiamo la porzione di sezione oltre quel livello (area A^* , in figura la parte superiore).

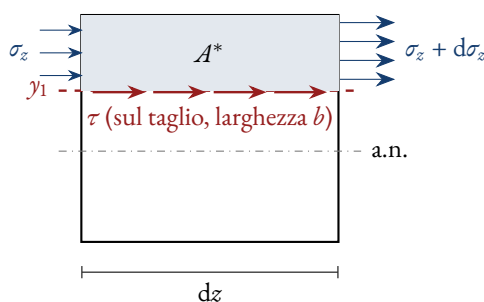


Figura 8.1. Concio di lunghezza dz : la differenza fra le tensioni normali sulle due facce del blocco A^* è equilibrata dalle tensioni tangenziali τ sul taglio orizzontale.

La forza normale che agisce su A^* alla sezione z vale

$$N(z) = \int_{A^*} \sigma_z dA = \frac{M(z)}{I_x} \int_{A^*} y dA = \frac{M(z) S^*}{I_x}, \quad S^* = \int_{A^*} y dA,$$

dove S^* è il *momento statico* dell'area A^* rispetto all'asse neutro. Alla faccia $z + dz$ la forza è $N + dN = (M + dM) S^*/I_x$, dunque l'incremento

$$dN = \frac{dM S^*}{I_x} = \frac{T dz S^*}{I_x} \quad (\text{perché } dM = T dz).$$

Questo squilibrio è equilibrato dalle tensioni tangenziali che agiscono sul taglio orizzontale, di larghezza b e lunghezza dz : $\tau b dz = dN$. Semplificando dz :

Formula chiave — Jourawski

$$\tau = \frac{T S^*}{I_x b} \quad (8.1)$$

La tensione tangenziale da taglio alla quota y_1 dipende da: il taglio T ; il *momento statico* S^* dell'area oltre y_1 rispetto all'asse neutro; il momento d'inerzia I_x dell'intera sezione; la larghezza b della sezione alla quota considerata. Per la reciprocità delle tensioni tangenziali ($\tau_{zy} = \tau_{yz}$), la τ longitudinale appena calcolata è uguale a quella trasversale che agisce sulla sezione.

Attenzione — Dove Jourawski dice il vero

La (8.1) assume τ costante sulla larghezza b e diretta lungo y . È un'ottima approssimazione per sezioni compatte e per pareti sottili, ma è solo approssimata nelle sezioni tozze o presso gli spigoli rientranti. Per le travi aeronautiche a parete sottile — il nostro caso — è invece molto accurata, ed è lo strumento standard.

8.3 La forma della distribuzione

Due proprietà discendono direttamente dalla (8.1) e vanno tenute a mente.

- **τ si annulla ai lembi estremi.** Ai bordi superiore e inferiore l'area A^* si riduce a nulla, quindi $S^* = 0$ e $\tau = 0$. Il taglio non produce tensione tangenziale sulle fibre estreme, che sono invece le più sollecitate a flessione: taglio e flessione hanno massimi in punti *opposti* della sezione.
- **τ è massima (di regola) sull'asse neutro**, dove S^* è massimo. Per il rettangolo la distribuzione è una *parabola* con $\tau_{\max} = \frac{3}{2} T/A = 1,5 \tau_{\text{med}}$.

Nelle sezioni a doppio T e nei cassoni la larghezza b crolla passando dalla piattabanda all'anima: la (8.1), avendo b al denominatore, fa *saltare* la τ verso l'alto proprio nell'anima. È la ragione strutturale per cui, in un longherone, è **l'anima a portare quasi tutto il taglio** mentre le piattabande lo ignorano quasi del tutto — l'esatto complemento della flessione, che invece vive nelle piattabande.

8.4 Il taglio nelle pareti sottili e l'anima aeronautica

Per una parete sottile di spessore t conviene ragionare in termini di *flusso di taglio* $q = \tau t = T S^*/I_x$, una forza per unità di lunghezza indipendente da t . Nell'anima di un longherone, poiché le piattabande concentrano l'area lontano dall'asse neutro, il flusso è quasi costante e vale l'approssimazione ingegneristica

Formula chiave — Taglio nell'anima e dimensionamento

$$\tau_{\text{anima}} \approx \frac{T}{A_{\text{anima}}} = \frac{T}{t_w b_w}, \quad t_w \geq \frac{T}{b_w \tau_{\text{amm}}}, \quad (8.2)$$

con $\tau_{\text{amm}} = \tau_s/k$ e, per il criterio di von Mises, $\tau_s = \sigma_s/\sqrt{3}$. È il dimensionamento a *resistenza* dell'anima.

Attenzione — La resistenza non basta: l'imbozzamento

Le anime aeronautiche sono sottilissime (frazioni di millimetro). Una lastra sottile caricata a taglio s'imbozza (instabilità) a una tensione critica

$$\tau_{cr} = k_s \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2,$$

dove b è il lato corto del pannello (fra due centine/irrigidimenti) e k_s un coefficiente che dipende dal rapporto delle dimensioni ($k_s = 5,34 + 4(b/a)^2$ per pannello appoggiato). Poiché $\tau_{cr} \propto t^2$, per le anime sottili essa è *piccolissima*: l'anima imbozza molto prima di arrivare a τ_{amm} .

Qui l'aeronautica prende una strada opposta all'edilizia. Invece di ispessire l'anima per impedire l'imbozzamento (soluzione pesante), si *accetta* che l'anima s'imbozzi e la si fa lavorare a *campo di trazione diagonale* (teoria di Wagner): dopo l'imbozzamento, l'anima non regge più compressione lungo la diagonale, ma si comporta come una serie di bande tese in diagonale, ancorate da piattabande e irrigidimenti verticali dimensionati apposta. È il principio della *trave a campo di trazione*, presente in ogni ala e fusoliera. Lo vedremo all'opera nell'Esercizio 8.3.

8.5 Esercizio 8.1 — Distribuzione della τ in un rettangolo**Esercizio svolto 8.1 — La parabola di Jourawski**

Traccia. Una sezione rettangolare $b = 40$ mm, $h = 150$ mm è attraversata da un taglio $T = 24$ kN. Tracciare la distribuzione di τ e calcolarne il valore massimo.

Passo 1 — Grandezze geometriche.

$$A = b h = 6000 \text{ mm}^2, \quad I_x = \frac{b h^3}{12} = \frac{40 \cdot 150^3}{12} = 1,125 \times 10^7 \text{ mm}^4.$$

Passo 2 — Momento statico a quota y . L'area oltre y ha momento statico

$$S^*(y) = \int_y^{h/2} \eta b \, d\eta = \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2 \right].$$

Sostituendo nella (8.1) (con larghezza costante b):

$$\tau(y) = \frac{T}{I_x b} \cdot \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2 \right] = \frac{T}{2I_x} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2 \right],$$

una *parabola* in y .

Passo 3 — Il massimo, sull'asse neutro ($y = 0$).

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2I_x} \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{24000}{2 \cdot 1,125 \cdot 10^7} \cdot 75^2 = 6,00 \text{ MPa}.$$

Si verifica la regola aurea del rettangolo:

$$\tau_{\text{med}} = \frac{T}{A} = \frac{24000}{6000} = 4,00 \text{ MPa}, \quad \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{med}}} = 1,5.$$

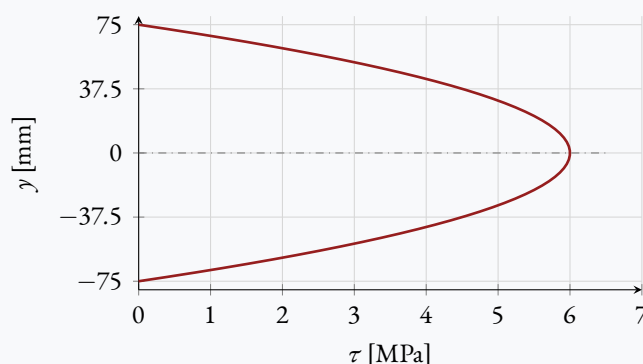


Figura 8.2. Esercizio 8.1: distribuzione parabolica di τ , nulla ai lembi e massima (6 MPa) sull'asse neutro.

Il senso di tutto questo

Notate l'ordine di grandezza: $\tau_{\max} = 6$ MPa, contro i quasi 300 MPa tipici della flessione. Nelle travi compatte il taglio è spesso secondario. È nelle strutture a parete sottile — dove l'area è concentrata nelle solette e l'anima è esile — che il taglio diventa dimensionante. È lì che andiamo.

8.6 Esercizio 8.2 — Il doppio T: l'anima porta il taglio

Esercizio svolto 8.2 — Ripartizione del taglio in un longherone

Traccia. Un longherone a doppio T simmetrico ha piattabande $B_f = 80 \text{ mm} \times t_f = 10 \text{ mm}$ e anima $b_w = 180 \text{ mm} \times t_w = 6 \text{ mm}$ (altezza totale $H = 200 \text{ mm}$). Sotto un taglio $T = 30 \text{ kN}$, determinare la distribuzione di τ e verificare che l'anima porta quasi tutto il taglio.

Passo 1 — Inerzia. Con le piattabande a $y_f = b_w/2 + t_f/2 = 95 \text{ mm}$:

$$I_x = 2 \left(\frac{B_f t_f^3}{12} + B_f t_f y_f^2 \right) + \frac{t_w b_w^3}{12} = 1,7369 \times 10^7 \text{ mm}^4.$$

Passo 2 — τ alla giunzione piattabanda/anima. Il momento statico della sola piattabanda è $S^* = B_f t_f y_f = 800 \cdot 95 = 76\,000 \text{ mm}^3$. Qui la larghezza *salta* da B_f (nella flangia) a t_w (nell'anima):

$$\tau^{(\text{flangia})} = \frac{T S^*}{I_x B_f} = 1,64 \text{ MPa}, \quad \tau^{(\text{anima})} = \frac{T S^*}{I_x t_w} = 21,88 \text{ MPa}.$$

Il salto è nel rapporto $B_f/t_w = 80/6 \approx 13,3$: la τ esplode entrando nell'anima.

Passo 3 — τ massima sull'asse neutro. Ora S^* include anche la mezza anima: $S^* = 76\,000 + t_w \cdot \frac{b_w}{2} \cdot \frac{b_w}{4} = 76\,000 + 24\,300 = 100\,300 \text{ mm}^3$, da cui

$$\tau_{\max} = \frac{T S^*}{I_x t_w} = 28,87 \text{ MPa}.$$

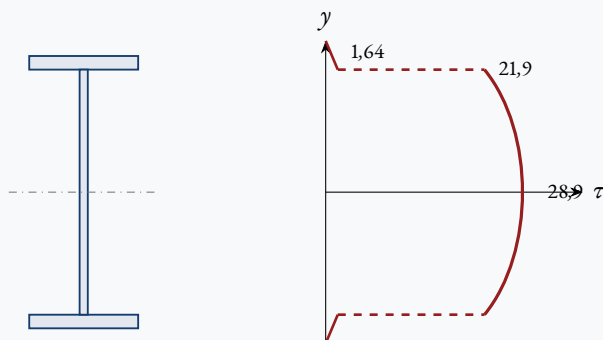


Figura 8.3. Esercizio 8.2: la τ è trascurabile nelle piattabande, salta di oltre 13 volte entrando nell'anima e vi disegna una parabola quasi piatta (valori in MPa).

Passo 4 — L'approssimazione dell'anima. La stima ingegneristica (8.2) dà

$$\tau \approx \frac{T}{A_{\text{anima}}} = \frac{30000}{6 \cdot 180} = 27,78 \text{ MPa},$$

che sottostima τ_{max} di appena il 3,8%. Integrando il flusso sull'intera altezza si trova che l'anima porta il 95,6% del taglio: le piattabande sono quasi inerti a taglio.

Il senso di tutto questo

Ecco la divisione del lavoro nella sua forma più pura: la flessione è nelle piattabande (dove $\tau \approx 0$), il taglio è nell'anima (dove σ da flessione è minima, essendo vicino all'asse neutro). Ogni elemento fa il suo mestiere. Ed è per questo che si dimensiona l'anima con la formula scarna $\tau \approx T/A_{\text{anima}}$: sbaglia di pochissimo e va dritta al punto.

8.7 Esercizio 8.3 — Dimensionare l'anima: resistenza e imbozzamento

Esercizio svolto 8.3 — L'anima aeronautica e il campo di trazione

Traccia. L'anima di un longherone alare, alta $h_w = 250$ mm, deve reggere un taglio $T = 40$ kN. Materiale: lega Al ($\sigma_s = 441$ MPa, $E = 72\,000$ MPa, $\nu = 0,33$). Dimensionare lo spessore t_w a resistenza e poi verificarlo a imbozzamento, con centine distanti $a = 500$ mm.

Passo 1 — La tensione ammissibile a taglio. Per von Mises $\tau_s = \sigma_s/\sqrt{3} = 441/\sqrt{3} = 254,6$ MPa; con $k = 1,5$:

$$\tau_{\text{amm}} = \frac{\tau_s}{k} = 169,7 \text{ MPa}.$$

Passo 2 — Dimensionamento a resistenza. Dalla (8.2):

$$t_w \geq \frac{T}{h_w \tau_{\text{amm}}} = \frac{40000}{250 \cdot 169,7} = 0,94 \text{ mm}.$$

Si adotta $t_w = 1,0$ mm, cui corrisponde $\tau_{\text{lav}} = T/(t_w h_w) = 160$ MPa $\leq 169,7$ MPa: a resistenza, verificato.

Passo 3 — Verifica a imbozzamento (la sorpresa). Il pannello d'anima misura $a \times b = 500 \times 250$ mm ($a/b = 2$), quindi $k_s = 5,34 + 4(b/a)^2 = 6,34$. La tensione critica:

$$\tau_{\text{cr}} = k_s \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t_w}{b} \right)^2 = 6,34 \cdot \frac{\pi^2 \cdot 72000}{12(1-0,33^2)} \left(\frac{1,0}{250} \right)^2 = 6,74 \text{ MPa}.$$

Il verdetto è clamoroso: $\tau_{\text{cr}} = 6,74$ MPa contro $\tau_{\text{lav}} = 160$ MPa. **L'anima imbozza al 4,2% del carico di lavoro.**

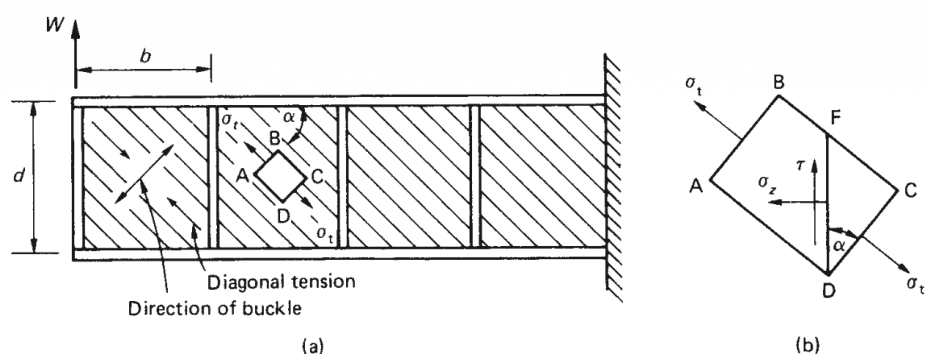


Figura 8.4. Oltre τ_{cr} l'anima si corruga in diagonale e lavora a trazione diagonale (trave di Wagner); gli irrigidimenti verticali ancorano il campo di trazione.

Passo 4 — Le due strade. Per impedire l'imbozzamento a 160 MPa servirebbe o un'anima di spessore $t_w \geq 4,9$ mm (quasi cinque volte più pesante!), o centine a passo $a \approx 42$ mm (impraticabile). Nessuna delle due è accettabile in un'ala, dove ogni grammo conta.

Passo 5 — La scelta aeronautica. Si accetta che l'anima imbozzi e la si progetta come *trave a campo di trazione*: l'anima sottile ($t_w = 1$ mm) porta il taglio come una membrana tesa in diagonale, mentre irrigidimenti verticali e piattabande — dimensionati per la componente del campo di trazione — ne raccolgono le reazioni. È cosicché sono fatte, davvero, le ali e le fusoliere.

Il senso di tutto questo

Qui la costruzione aeronautica rivela la sua natura. In edilizia l'imbozzamento è un cedimento da scongiurare; in aeronautica è un *regime di lavoro* da sfruttare. La stessa formula di Jourawski che dimensiona l'anima a resistenza ci avverte, con l'analisi di imbozzamento, che la resistenza non basta: bisogna governare l'instabilità. Ridurre peso senza governare l'instabilità è la differenza fra un'ala e un rottame. È la lezione con cui questa monografia si congeda.

9 Sintesi operativa: il longherone a C dell'ala

Dove stiamo andando

Siamo arrivati alla fine. Tutto ciò che abbiamo costruito — reazioni, caratteristiche di sollecitazione, geometria delle aree, Navier, idealizzazione a semiguscio, coppia M/b , Jourawski, imbozzamento, campo di trazione, instabilità euleriana — confluisce qui, in un solo problema completo: dimensionare un longherone alare a sezione a C, dalle forze in gioco fino alle dimensioni verificate. Le solette porteranno la flessione (una tesa, una compressa), l'anima porterà il taglio. È l'esame di maturità della monografia.

Esercizio conclusivo — Dimensionamento completo del longherone a C

Traccia. Il longherone principale di una semiala lunga $s = 5$ m è sollecitato da un carico aerodinamico di progetto (già comprensivo del fattore di robustezza) schematizzabile come distribuito uniforme $w = 4,8$ N/mm. La sezione è a C, con solette superiore e inferiore distanti $b = 180$ mm e anima alta $h_w = 180$ mm; le centine sono a passo $a = 450$ mm. Materiale: lega di alluminio ($\sigma_s = 441$ MPa, $E = 72\,000$ MPa, $\nu = 0,33$), coefficiente di sicurezza $k = 1,5$. Dimensionare le solette e l'anima nella sezione di radice.

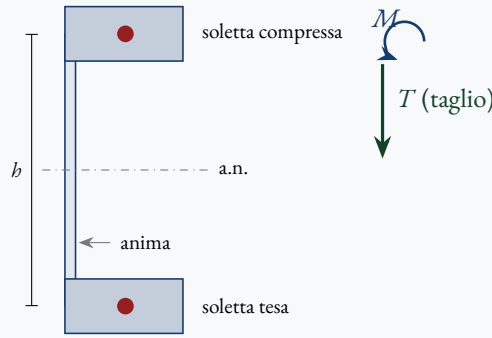


Figura 9.1. Sezione a C idealizzata a semiguscio: due solette (booms) a distanza b e un'anima sottile. La flessione va nelle solette, il taglio nell'anima.

Fase A — I carichi al radice. Trattando la semiala come una mensola incastrata alla radice, con carico uniforme w , taglio e momento massimi valgono

$$T = w_s = 4,8 \cdot 5000 = 24\,000 \text{ N} = 24 \text{ kN},$$

$$M = \frac{ws^2}{2} = \frac{4,8 \cdot 5000^2}{2} = 6,0 \times 10^7 \text{ N mm} = 60 \text{ kN m}.$$

(Il carico uniforme è una semplificazione cautelativa: la portanza reale si concentra più all'interno, ma questo modello è adeguato per il predimensionamento e ne dichiariamo i limiti.)

Fase B — Idealizzazione a semiguscio. Riduciamo la C a due booms (le solette, che portano la tensione normale) collegati da un'anima che porta solo taglio. La flessione diventa la coppia (7.2) $P = M/b$; il taglio resta T sull'anima.

Fase C — Le solette (flessione). La coppia interna:

$$P = \frac{M}{b} = \frac{6,0 \cdot 10^7}{180} = 333,3 \text{ kN (compr. sopra, traz. sotto)}.$$

C1 — Soletta tesa. È trazione semplice: $A_f \geq P/\sigma_{\text{amm}}$, con $\sigma_{\text{amm}} = \sigma_s/k = 294 \text{ MPa}$:

$$A_{f,\min} = \frac{333333}{294} = 1133,8 \text{ mm}^2 \Rightarrow A_f = 1200 \text{ mm}^2,$$

$$\sigma_t = \frac{P}{A_f} = \frac{333333}{1200} = 277,8 \text{ MPa} \quad (n = 1,59).$$

C2 — Soletta compressa. Stessa forza, ma qui comanda l'instabilità: la soletta è un'asta compressa di luce pari al passo delle centine $a = 450 \text{ mm}$. Con il carico critico euleriano $\sigma_{\text{cr}} = \pi^2 E I / (A_f a^2)$, la condizione $\sigma_{\text{cr}} \geq \sigma_t$ richiede

$$I_{\min} \geq \frac{\sigma_t A_f a^2}{\pi^2 E} = \frac{277,8 \cdot 1200 \cdot 450^2}{\pi^2 \cdot 72000} = 9,50 \times 10^4 \text{ mm}^4, \quad \rho_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_f}} = 8,90 \text{ mm}.$$

Si adotta per la soletta compressa un profilo estruso di pari area ma più "aperto", con raggio d'inerzia $\rho = 10 \text{ mm}$ ($I = A_f \rho^2 = 1,2 \times 10^5 \text{ mm}^4$). Verifica:

$$\lambda = \frac{a}{\rho} = 45, \quad \sigma_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = 350,9 \text{ MPa} \geq 277,8 \text{ MPa} \quad (n = 1,26).$$

Attenzione — Trazione e compressione non sono simmetriche

Stessa forza, due dimensionamenti diversi: la soletta tesa è governata dalla *resistenza* del materiale, quella compressa dall'*instabilità*. È il motivo per cui, nei velivoli reali, la soletta compressa è spesso più massiccia o irrigidita di quella tesa. Qui abbiamo controllato l'instabilità globale (euleriana); resta da verificare quella *locale* (crippling) delle pareti del profilo, con la stessa filosofia.

Fase D — L'anima (taglio). Con $\tau_{amm} = \tau_s/k = (\sigma_s/\sqrt{3})/1,5 = 169,7$ MPa:

D1 — Resistenza. Dalla (8.2):

$$t_w \geq \frac{T}{b_w \tau_{amm}} = \frac{24000}{180 \cdot 169,7} = 0,79 \text{ mm} \Rightarrow t_w = 1,0 \text{ mm},$$

$$\tau_{lav} = \frac{T}{t_w b_w} = \frac{24000}{180} = 133,3 \text{ MPa} \quad (n = 1,91).$$

D2 — Imbozzamento. Il pannello d'anima misura $a \times b_w = 450 \times 180$ mm ($a/b = 2,5$, $k_s = 5,34 + 4(b/a)^2 = 5,98$):

$$\tau_{cr} = k_s \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t_w}{b_w} \right)^2 = 12,27 \text{ MPa}.$$

L'anima imbozza al 9,2% del carico di lavoro: come nell'Esercizio 8.3, la si progetta a *campo di trazione* (Wagner), con gli irrigidimenti verticali (le centine, appunto) ad ancorare le bande tese in diagonale.

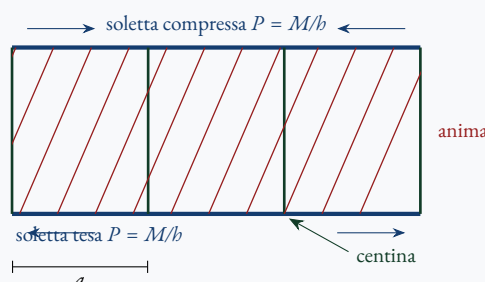


Figura 9.2. Il percorso dei carichi: la flessione è la coppia $P = M/b$ nelle solette (compressione sopra, trazione sotto); il taglio è raccolto dall'anima, che imbozza e lavora a campo di trazione fra le centine.

Fase E — Verifica d'insieme. Controlliamo la coppia con Navier idealizzata. Con due booms a $y = \pm b/2 = \pm 90$:

$$I_x = 2 A_f \left(\frac{b}{2} \right)^2 = 2 \cdot 1200 \cdot 90^2 = 1,944 \times 10^7 \text{ mm}^4, \quad \sigma = \frac{M(b/2)}{I_x} = 277,8 \text{ MPa},$$

identica a P/A_f : la coppia e Navier sono la stessa cosa, come promesso nella Sezione 7. Volendo raffinare, l'anima porta anch'essa un po' di flessione: trasferendo $\Delta B = t_w b_w / 6 = 30 \text{ mm}^2$ a ciascuna soletta (7.1), la tensione scende a 271,0 MPa (l'anima allevia le solette del 2,4%: un piccolo margine in più, spesso trascurato a favore di sicurezza).

Tabella 9.1. Riepilogo del dimensionamento (sezione di radice).

Elemento	Dimensione	Sollecit. [MPa]	n	Governato da
Soletta tesa	$A_f = 1200 \text{ mm}^2$	277,8	1,59	resistenza
Soletta compressa	$A_f = 1200, \rho = 10 \text{ mm}$	277,8	1,26	instabilità
Anima	$t_w = 1,0 \text{ mm}$	133,3	1,91	resist. + campo traz.
Centine	passo $a = 450 \text{ mm}$	—	—	instab. soletta/anima

Osservazione — Il centro di taglio e la cella chiusa

Un'ultima finezza, doverosa per la C. Una sezione a C ha il *centro di taglio* spostato *fuori* dal profilo, dal lato dell'anima: se il carico di taglio non passa di lì, il longherone *svergola*. Nel velivolo reale il longherone non lavora mai da solo: il rivestimento chiude la sezione in una *cella*, che sposta il centro di taglio e irrobustisce enormemente la resistenza a torsione. È la ragione strutturale profonda per cui le ali sono *gusci chiusi* e non semplici travi a C. Il nostro dimensionamento a flessione e taglio resta valido; la torsione è il capitolo che la cella chiusa apre.

Il senso di tutto questo

Guardate indietro la strada percorsa. Siamo partiti da una trave e da tre reazioni vincolari; abbiamo imparato a leggere T e M , a calcolare baricentri e inerzie, a distribuire le tensioni con Navier — anche quando la sezione perde ogni simmetria. Poi abbiamo scoperto che l'ala non è piena, ma un guscio: la flessione si concentra nelle solette, il taglio nell'anima. E infine, in questa sezione, abbiamo dimensionato un longherone vero, scoprendo che la stessa forza chiede alla soletta tesa la *resistenza* e a quella compressa la *stabilità*, e che l'anima sottile va progettata per imbozzare e lavorare a trazione diagonale. Non c'è un solo concetto, in questo esercizio, che non provenga dalle pagine precedenti. È questo il senso di una monografia: non una collezione di formule, ma un unico ragionamento che, dalla trave inflessa, arriva fino all'ala. Buon volo.

A Formulario essenziale

A.1 Statica e caratteristiche di sollecitazione

Equazioni cardinali (piano)	$\sum F_z = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_x^{(P)} = 0$
Risultante carico uniforme	$Q = q l$ nel punto medio del tratto caricato
Relazioni indefinite	$\frac{dT}{dz} = -q, \quad \frac{dM}{dz} = T$
Momento massimo	dove $T = 0$, oppure sulla frontiera del dominio

A.2 Schemi statici ricorrenti

Schema	$ M _{\max}$	dove	$v_{\max}$
Mensola, carico uniforme q	$\frac{q l^2}{2}$	incastro	$\frac{q l^4}{8 EI_x}$
Mensola, forza in punta F	$F l$	incastro	$\frac{F l^3}{3 EI_x}$
Appoggiata, carico uniforme q	$\frac{q l^2}{8}$	mezzeria	$\frac{5 q l^4}{384 EI_x}$
Appoggiata, forza in mezzeria F	$\frac{F l}{4}$	mezzeria	$\frac{F l^3}{48 EI_x}$

A.3 Geometria delle aree

Baricentro (sezione composta)	$y_G = \frac{\sum A_i y_{G,i}}{\sum A_i}$
Rettangolo $b \times h$ (asse baricentrico)	$I_x = \frac{b h^3}{12}$
Trasporto (Huygens–Steiner)	$I_{x'} = I_{x_G} + A \delta^2$
Trasporto del momento centrifugo	$I_{x'y'} = I_{x_G y_G} + A \delta_x \delta_y$
Sezione composta	$I_x = \sum_i \left(\frac{b_i h_i^3}{12} + A_i \delta_i^2 \right)$

A.4 Flessione e verifica

Navier (assi principali, $I_{xy} = 0$)	$\sigma_z = -\frac{M_x}{I_x} y, \quad \sigma_{\max} = \frac{ M_x c}{I_x} = \frac{ M_x }{W_x}$
Modulo di resistenza	$W_x = \frac{I_x}{c}$
Navier generalizzata	$\sigma_z = \frac{(M_x I_{xy} + M_y I_{xx})x - (M_x I_{yy} + M_y I_{xy})y}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}$
Asse neutro (per $M_y=0$: I_{xy}/I_{yy})	$\tan \alpha = \frac{M_x I_{xy} + M_y I_{xx}}{M_x I_{yy} + M_y I_{xy}}$
Inerzie principali	$I_{1,2} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$
Angolo principale	$\tan 2\theta_p = \frac{2 I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}}$
Linea elastica	$E I_x \frac{d^2 v}{dz^2} = M(z)$
Condizioni al contorno	incastro: $v = 0, v' = 0$; appoggio: $v = 0$
Verifica di resistenza	$\sigma_{\max} \leq \frac{\sigma_{\lim}}{k}, \quad n = \frac{\sigma_{\lim}}{\sigma_{\max}}$

A.5 Semiguscio (Sezioni 7 e 9)

Trasferimento pelle ai booms	$B_1 = \frac{t_D b}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \quad (\text{assiale: } \frac{t_D b}{2}; \text{ flessione: } \frac{t_D b}{6})$
Proprietà discrete	$I_{xx} = \sum_i B_i y_i^2, \quad I_{xy} = \sum_i B_i x_i y_i$
Coppia nelle solette	$P = \frac{M}{b}, \quad \sigma = \frac{M}{A_f b}$
Dimensionamento soletta	$A_f \geq \frac{M}{b \sigma_{\text{amm}}}$
Instabilità euleriana (soletta compressa)	$\sigma_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad \lambda = \frac{a}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{I/A}$

A.6 Taglio (Sezione 8)

Jourawski	$\tau = \frac{T S^*}{I_x b}, \quad S^* = \int_{A^*} y dA$
Rettangolo	$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{T}{A} \quad (\text{parabola, nulla ai lembi})$
Anima (approssimazione)	$\tau \approx \frac{T}{t_w b_w}, \quad t_w \geq \frac{T}{b_w \tau_{\text{amm}}}$
Snervamento a taglio (von Mises)	$\tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$
Imbozzamento a taglio	$\tau_{\text{cr}} = k_s \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2, \quad k_s = 5,34 + 4 \left(\frac{b}{a} \right)^2$

Nota — Validità delle formule

Tutte le formule di questa appendice presuppongono: materiale elastico lineare omogeneo isotropo, sezioni piane (Eulero–Bernoulli), piccoli spostamenti, tensioni entro il limite di proporzionalità. La Navier semplice richiede inoltre assi principali d'inerzia ($I_{xy} = 0$): in caso contrario, usare la forma generalizzata. Nel semiguscio le proprietà si riferiscono alla sola area che porta tensione normale (i booms); la formula di imbozzamento vale per pannello piano appoggiato sui quattro lati, con b lato corto.