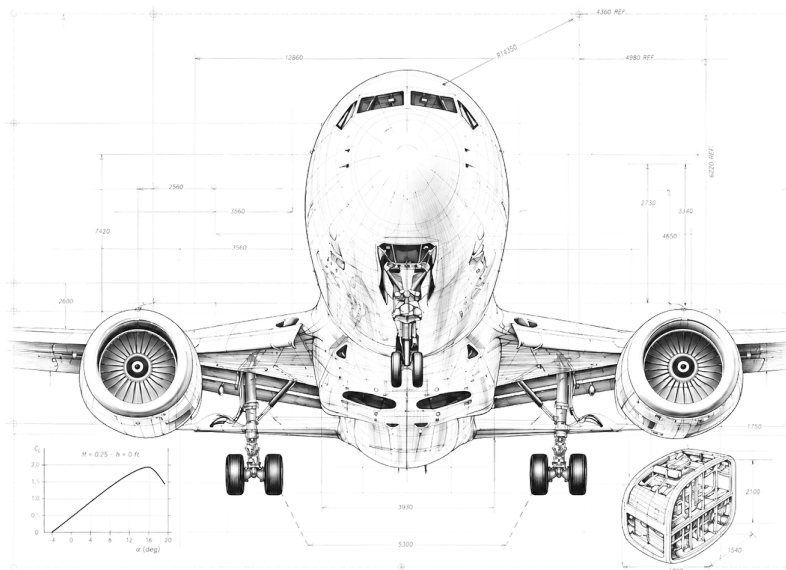

Onde d'urto oblique e onde di espansione

Teoria delle onde oblique, relazione θ - β - M ,
interazioni fra onde, espansioni di Prandtl-Meyer
e teoria urto-espansione

con 38 esercizi completamente svolti nel Sistema Internazionale



Prof. Ing. Biagio Raucci

ITIS «E. Majorana» — Costruzioni Aeronautiche

Articolazione *Costruzione del Mezzo Aeronautico*

Indice

Premessa	4
I Onde d'urto oblique e onde di espansione	5
1.1 Il quadro fisico: perché le onde diventano oblique	5
1.1.1 Compressione ed espansione a un angolo di parete	5
1.1.2 L'origine fisica delle onde oblique: l'angolo di Mach	6
1.2 L'onda d'urto obliqua	7
1.2.1 Geometria e volume di controllo	8
1.2.2 L'urto obliquo è un urto normale in incognito	9
1.2.3 La relazione θ - β - M	9
1.2.4 Esercizi svolti sull'urto obliquo	11
1.3 Cunei, coni e coefficienti aerodinamici	14
1.3.1 Il cuneo: soluzione esatta bidimensionale	14
1.3.2 Il cono: l'effetto di alleggerimento tridimensionale	14
1.3.3 Coefficiente di pressione e resistenza d'onda del cuneo	15
1.4 Rappresentazioni grafiche: polare d'urto e diagrammi p-theta	16
1.4.1 Il piano odografo e la polare d'urto	16
1.4.2 Il diagramma pressione-deflessione	17
1.5 Interazioni fra onde	18
1.5.1 Riflessione regolare da una parete solida	18
1.5.2 Sistemi a più urti: la lezione delle prese d'aria	20
1.5.3 Intersezione di urti di famiglie opposte e linee di scorrimento	20
1.5.4 Intersezione di urti della stessa famiglia	21
1.5.5 Riflessione di Mach	21
1.5.6 L'urto staccato davanti a un corpo tozzo	21
1.5.7 Urti tridimensionali	22
1.6 Le onde di espansione di Prandtl-Meyer	23
1.6.1 Che cosa succede in un ventaglio di espansione	23
1.6.2 La derivazione: dall'onda di Mach all'equazione differenziale	23
1.6.3 Esercizi svolti sulle espansioni	25
1.7 La teoria urto-espansione	27
1.7.1 Il metodo e il profilo a diamante	27
1.7.2 La lastra piana incidente	28
1.7.3 La scia della lastra: dove va la corrente dopo il bordo d'uscita	28
1.7.4 La pressione di base	29
1.8 Nota storica: Gottinga, Prandtl e la nascita della teoria	30
1.9 Sintesi operativa	31
1.9.1 Onde di Mach	31
1.9.2 Urto obliquo: il principio della componente normale	31
1.9.3 Relazione theta-beta-M	31
1.9.4 Espansione di Prandtl-Meyer	32
1.9.5 Teoria urto-espansione	32
1.9.6 Interazioni: le condizioni di compatibilità	32
1.9.7 Schema di attacco dei problemi	32

I.10	Ventuno problemi svolti	32
A	Richiami: isentropiche, urto normale, Rayleigh–Pitot	41

Premessa: come usare questa monografia

Questa monografia prosegue il percorso della Serie dedicato alla fluidodinamica comprimibile. Nelle monografie precedenti abbiamo costruito gli strumenti fondamentali: le equazioni di conservazione in forma integrale, le relazioni isentropiche, l'onda d'urto *normale*. Qui facciamo il passo successivo, quello che apre davvero le porte dell'aerodinamica supersonica applicata: le onde *oblique*, cioè le onde d'urto inclinate rispetto alla corrente e i ventagli di espansione. Sono questi i fenomeni che si osservano attorno a un'ala a freccia in volo supersonico, dentro la presa d'aria di un caccia, all'uscita di un ugello propulsivo, sul bordo d'attacco di un profilo a diamante.

Prerequisiti

Per seguire con profitto il testo occorre avere assimilato: le relazioni isentropiche per gas caloricamente perfetto (p_0/p , T_0/T in funzione di M); le relazioni dell'urto normale (p_2/p_1 , T_2/T_1 , ρ_2/ρ_1 , M_2 , p_{02}/p_{01} in funzione di M_1); il concetto di grandezza totale (o di ristagno) e il suo comportamento attraverso un urto (temperatura totale conservata, pressione totale ridotta). Tutte le relazioni richiamate sono raccolte, per comodità, nell'Appendice [A](#).

Il metodo di lavoro della Serie

Tutti i valori numerici di questa monografia sono stati calcolati con le relazioni *esatte* del gas perfetto ($\gamma = 1,4$ salvo diverso avviso), verificati con script di calcolo indipendenti, e sono espressi nel Sistema Internazionale. Non si usano letture grafiche né tabelle arrotondate: dove i manuali classici ottengono risultati con *accuratezza tabellare* (interpolazioni, letture da diagrammi), i nostri valori possono differire di qualche unità sull'ultima cifra. È un buon esercizio, per lo studente, confrontare i due approcci e rendersi conto di quanto (poco) cambino le conclusioni ingegneristiche.

Onde d'urto oblique e onde di espansione

1.1 Il quadro fisico: perché le onde diventano oblique

Dove stiamo andando

In questo paragrafo costruiamo l'intuizione fisica. Vedremo che una corrente supersonica reagisce a una deviazione della parete in due modi opposti: con un *urto obliquo* se la parete «entra» nella corrente, con un *ventaglio di espansione* se la parete «si ritira». Poi scopriremo da dove nasce l'inclinazione delle onde, introducendo il concetto di *angolo di Mach*. Tutto il resto della monografia è lo sviluppo quantitativo di queste due idee.

1.1.1 Compressione ed espansione a un angolo di parete

L'urto normale studiato nella monografia precedente è, in realtà, un caso particolare: in natura le onde d'urto si presentano quasi sempre *inclinate* rispetto alla direzione della corrente. Il motivo è semplice: gli ostacoli reali (cunei, prese d'aria, bordi d'attacco) impongono alla corrente una *deviazione*, non un arresto frontale.

Consideriamo una corrente supersonica uniforme su una parete piana che incontra nel punto A uno spigolo (fig. 1.1). Distinguiamo due situazioni.

- **Spigolo concavo** (la parete devia *verso* la corrente di un angolo θ). Le linee di corrente devono piegarsi verso l'interno del flusso: si dice che la corrente è *deviata verso se stessa*. La deviazione avviene bruscamente attraverso un **onda d'urto obliqua** ancorata allo spigolo. A valle dell'urto la corrente è di nuovo uniforme e parallela alla nuova parete; il numero di Mach è diminuito, mentre pressione, temperatura e densità sono aumentate.
- **Spigolo convesso** (la parete si allontana dalla corrente di un angolo θ). Le linee di corrente si aprono *allontanandosi* dal grosso del flusso: la corrente è *deviata via da se stessa*. La deviazione avviene attraverso un **ventaglio di espansione** centrato nello spigolo: un fascio continuo di onde deboli entro cui le linee di corrente si incurvano dolcemente fino a diventare parallele alla nuova parete. Attraverso il ventaglio tutte le grandezze variano con continuità: il Mach cresce, mentre pressione, temperatura e densità diminuiscono.

Osservazione

Le due situazioni sono l'una l'antitesi dell'altra, e insieme formano la «cassetta degli attrezzi» del supersonico bidimensionale: qualunque profilo a facce piane può essere analizzato *esattamente* combinando urti obliqui ed espansioni. È la *teoria urto-espansione* che svilupperemo nel par. 1.7. A differenza dell'urto normale, che è un fenomeno monodimensionale, le onde oblique sono intrinsecamente bidimensionali: le proprietà del campo dipendono da due coordinate spaziali.

Dove le incontriamo in pratica

Il velivolo sperimentale ipersonico X-43 (record di $M \simeq 9,6$ a circa 33,5 km di quota, novembre 2004) è un esempio da manuale: il campo di moto attorno al veicolo e dentro il suo motore *scramjet* è un intreccio

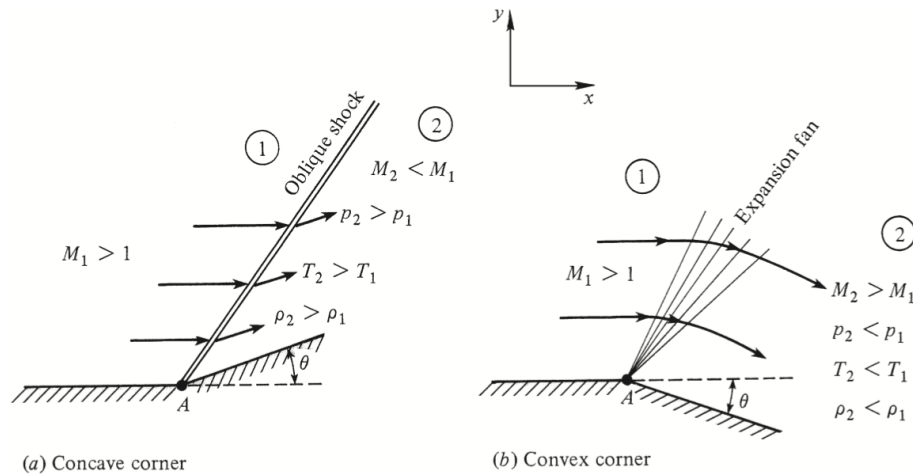


Figura 1.1. Corrente supersonica a uno spigolo di parete. (a) Deviazione verso la corrente: onda d'urto obliqua, compressione discontinua. (b) Deviazione via dalla corrente: ventaglio di espansione, accelerazione continua e isentropica.

fitissimo di urti obliqui ed espansioni che interagiscono fra loro. Il progetto della rampa di compressione di una presa d'aria supersonica, come vedremo nel par. 1.5.2, è letteralmente un esercizio di composizione di urti obliqui.

1.1.2 L'origine fisica delle onde oblique: l'angolo di Mach

Perché le onde si dispongono proprio *oblique*? La risposta sta nel modo in cui i disturbi di pressione si propagano in un gas: per urti fra molecole, alla velocità del suono a . Immaginiamo una sorgente puntiforme di piccoli disturbi sonori — chiamiamola *emettitore* — che si muove in un gas in quiete emettendo continuamente impulsi.

- **Caso subsonico** ($V < a$). Nel tempo t l'impulso emesso nel punto A è diventato una sfera di raggio at , mentre l'emettitore ha percorso solo $Vt < at$: la sorgente resta sempre *dentro* la famiglia dei propri fronti d'onda, che le corrono davanti. Il gas a monte «viene avvisato» dell'arrivo dell'oggetto.
- **Caso supersonico** ($V > a$). Ora $Vt > at$: la sorgente sta costantemente *fuori* dai propri fronti d'onda, li supera. I fronti si addensano lungo un involucro rettilineo tangente a tutte le sfere: una superficie conica di disturbo detta **onda di Mach**.

L'inclinazione dell'onda di Mach rispetto alla direzione del moto si ricava con la sola geometria: il cateto della sfera sonora vale at , l'ipotenusa (spazio percorso dalla sorgente) vale Vt , quindi

$$\sin \mu = \frac{at}{Vt} = \frac{a}{V} = \frac{1}{M}.$$

Angolo di Mach

$$\mu = \arcsin \frac{1}{M} \quad (1.1)$$

L'angolo di Mach dipende *solo* dal numero di Mach locale: a $M = 1$ vale 90° , a $M = 2$ vale 30° , e si «coricha» sempre più al crescere di M .

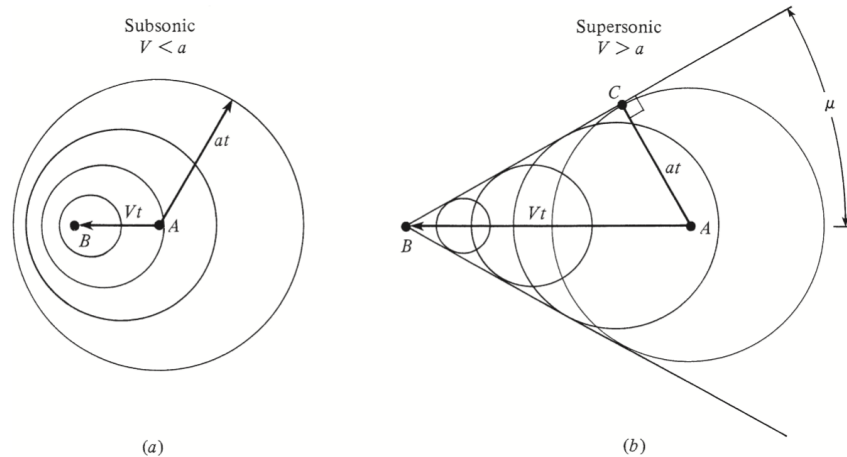


Figura 1.2. Propagazione dei disturbi emessi da una sorgente in moto: nel caso subsonico la sorgente resta dentro i fronti d'onda; nel caso supersonico li supera e i fronti si organizzano lungo l'involuppo rettilineo (onda di Mach) inclinato dell'angolo μ .

Se al posto del debole emettitore mettiamo un disturbo *forte* — un cuneo che fende il gas a velocità supersonica — i fronti si addensano in un'onda molto più intensa: un'onda d'urto obliqua, inclinata di un angolo β con $\beta > \mu$. Il meccanismo fisico è lo stesso; l'onda di Mach è semplicemente il caso limite di urto obliquo *infinitamente debole*. Questa gerarchia ($\mu \leq \beta \leq 90^\circ$) ci accompagnerà per tutta la monografia.

Esercizio svolto 1 — Angolo di Mach di un velivolo

Dati. Un velivolo vola a $M = 2,2$ in aria calma.

Richiesta. L'angolo del cono di Mach generato dal velivolo (assimilato a un disturbo debole).

Svolgimento. Applichiamo direttamente la (1.1):

$$\mu = \arcsin \frac{1}{2,2} = \arcsin 0,4545 = 27,04^\circ.$$

Il rombo sonico raggiunge un osservatore al suolo solo quando questi è entrato nel cono: ecco perché un aereo supersonico si vede prima di sentirlo. ■

Il senso di tutto questo

Abbiamo due fatti da portare con noi. Primo: una corrente supersonica gestisce le deviazioni con onde localizzate — urti se comprime, ventagli se espande — perché l'informazione non può risalire la corrente. Secondo: l'inclinazione minima possibile di un'onda è l'angolo di Mach $\mu = \arcsin(1/M)$, l'inclinazione massima è 90° (urto normale). Tutta la fisica dell'urto obliquo vive tra questi due estremi.

1.2 L'onda d'urto obliqua

Dove stiamo andando

Costruiamo ora la teoria quantitativa dell'urto obliquo. La strategia è elegante: applicando le leggi di conservazione a un volume di controllo a cavallo dell'onda scopriremo che l'urto obliquo è, in fondo, un urto normale «visto di traverso»: solo la componente di velocità *perpendicolare* all'onda subisce l'urto,

quella tangenziale passa indisturbata. Questo ci permetterà di riciclare tutte le relazioni dell'urto normale, a patto di usarle con il Mach normale $M_{n1} = M_1 \sin \beta$. Chiuderà il cerchio la relazione θ - β - M , il cuore geometrico dell'intera teoria.

1.2.1 Geometria e volume di controllo

Fissiamo la nomenclatura con riferimento alla fig. 1.3. La corrente a monte, orizzontale, ha velocità V_1 e numero di Mach M_1 . L'onda d'urto è inclinata dell'**angolo d'onda** β rispetto a V_1 . A valle la corrente, di velocità V_2 e Mach M_2 , è ruotata verso l'onda dell'**angolo di deflessione** θ . Scomponiamo le velocità rispetto al piano dell'onda:

u_1, u_2 : componenti normali all'onda; w_1, w_2 : componenti tangenziali.

Ai due lati definiamo i corrispondenti Mach normali e tangenziali, $M_{n1} = u_1/a_1$, $M_{n2} = u_2/a_2$, ecc.

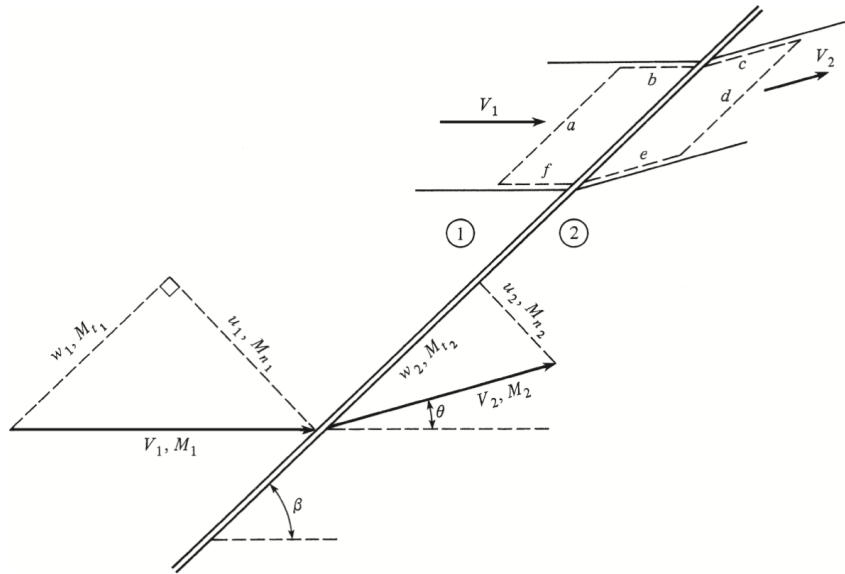


Figura 1.3. Geometria dell'urto obliquo: angolo d'onda β , deflessione θ , scomposizione della velocità in componente normale (u) e tangenziale (w) rispetto al piano dell'onda.

Applichiamo le equazioni di conservazione in forma integrale a un volume di controllo a forma di «scatola» con due facce parallele all'onda (una a monte, una a valle, entrambe di area A) e le facce laterali parallele alle linee di corrente locali. Il moto è stazionario, adiabatico e privo di forze di volume.

Continuità. Il flusso di massa entra ed esce solo dalle facce parallele all'onda, attraversate dalla sola componente normale:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2. \quad (1.2)$$

Quantità di moto tangenziale. Sulle facce parallele all'onda la pressione non agisce in direzione tangenziale, e i contributi delle facce laterali si elidono a coppie. Resta solo il flusso di quantità di moto tangenziale:

$$(-\rho_1 u_1) w_1 + (\rho_2 u_2) w_2 = 0 \xrightarrow{(1.2)} \boxed{w_1 = w_2}$$

Questo è il risultato che cambia tutto: *la componente tangenziale della velocità si conserva attraverso l'urto obliquo*. L'onda «vede» solo la componente normale. (Attenzione: si conservano le *velocità* tangenziali, non i Mach tangenziali, perché la velocità del suono cambia attraverso l'urto.)

Quantità di moto normale. Con lo stesso volume di controllo:

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2. \quad (1.3)$$

Energia. Per moto adiabatico stazionario $h_1 + V_1^2/2 = h_2 + V_2^2/2$; poiché $V^2 = u^2 + w^2$ e $w_1 = w_2$, i termini tangenziali si semplificano e resta

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}. \quad (1.4)$$

1.2.2 L'urto obliquo è un urto normale in incognito

Guardiamo insieme le (1.2), (1.3), (1.4): sono *identiche* alle equazioni dell'urto normale, scritte però per le sole componenti normali u_1, u_2 . La conseguenza è immediata e potentissima: *tutti i salti termodinamici attraverso l'urto obliquo sono governati dalla sola componente normale del Mach a monte*,

$$M_{n1} = M_1 \sin \beta. \quad (1.5)$$

Basta quindi sostituire M_{n1} al posto di M_1 nelle formule dell'urto normale per ottenere, per gas caloricamente perfetto:

Salti attraverso l'urto obliquo (γ costante)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1)M_{n1}^2}{(\gamma - 1)M_{n1}^2 + 2}, \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_{n1}^2 - 1), \quad (1.6)$$

$$M_{n2}^2 = \frac{M_{n1}^2 + \frac{2}{\gamma - 1}}{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}M_{n1}^2 - 1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}. \quad (1.7)$$

Il Mach a valle si ricostruisce dalla geometria (la componente normale a valle è inclinata di $\beta - \theta$ rispetto a V_2):

$$M_2 = \frac{M_{n2}}{\sin(\beta - \theta)} \quad (1.8)$$

Anche il rapporto di pressioni totali p_{02}/p_{01} (e quindi il salto di entropia $s_2 - s_1$) dipende dal solo M_{n1} , con la stessa formula dell'urto normale.

Attenzione

Per l'urto normale bastava *un* parametro (M_1) per definire tutti i salti. Per l'urto obliquo ne servono *due*: ad esempio (M_1, β) , oppure (M_1, θ) , oppure (θ, β) , oppure $(M_1, p_2/p_1)$. L'urto normale è il caso particolare $\beta = 90^\circ$. Dimenticare il secondo parametro è l'errore più comune negli scritti d'esame.

1.2.3 La relazione θ - β - M

Le (1.6)-(1.8) lasciano un vuoto: nei problemi reali conosciamo la geometria dell'ostacolo, cioè θ , non l'angolo d'onda β . Serve il legame fra i tre parametri. Dalla geometria di fig. 1.3:

$$\tan \beta = \frac{u_1}{w_1}, \quad \tan(\beta - \theta) = \frac{u_2}{w_2},$$

e dividendo membro a membro (con $w_1 = w_2$):

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta},$$

dove abbiamo usato continuità e il salto di densità (1.6). Qualche passaggio trigonometrico porta alla forma classica:

Relazione θ - β - M

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \quad (1.9)$$

La (1.9) assegna a ogni coppia (M_1, β) un'unica deflessione θ . Il suo grafico (fig. 1.4) va studiato con cura, perché contiene tutta la fenomenologia dell'urto obliquo:

1. **Deflessione massima.** Per ogni M_1 esiste un $\theta_{\max}(M_1)$: se la geometria impone $\theta > \theta_{\max}$ *non esiste* soluzione con urto rettilineo attaccato. L'urto si **stacca** dal corpo e si incurva (urto staccato, cap. 1.5). A $M_1 = 3$, ad esempio, $\theta_{\max} = 34,07^\circ$.
2. **Soluzione debole e forte.** Per ogni $\theta < \theta_{\max}$ la (1.9) ammette *due* radici in β : quella piccola è la **soluzione debole**, quella grande la **soluzione forte** (salti più intensi, perché M_{n1} è maggiore). In natura, per corpi immersi in corrente libera, si realizza quasi sempre la soluzione debole; la forte può essere forzata da un'elevata contropressione a valle. Dietro l'urto forte $M_2 < 1$ sempre; dietro l'urto debole $M_2 > 1$, tranne in una stretta fascia a ridosso di $\theta_{\max}$.
3. **Limiti per $\theta \rightarrow 0$.** La (1.9) si annulla in due punti: $\beta = \mu$ (onda di Mach, urto evanescente) e $\beta = 90^\circ$ (urto normale). I due rami della curva partono da lì.
4. **Tendenze.** A M_1 fissato, crescendo θ crescono β e tutti i salti, mentre M_2 cala. A θ fissato, crescendo M_1 l'urto (debole) si «coricha» (β cala) ma diventa più forte, perché l'aumento di M_1 prevale sulla diminuzione di $\sin \beta$ nel prodotto $M_{n1} = M_1 \sin \beta$.

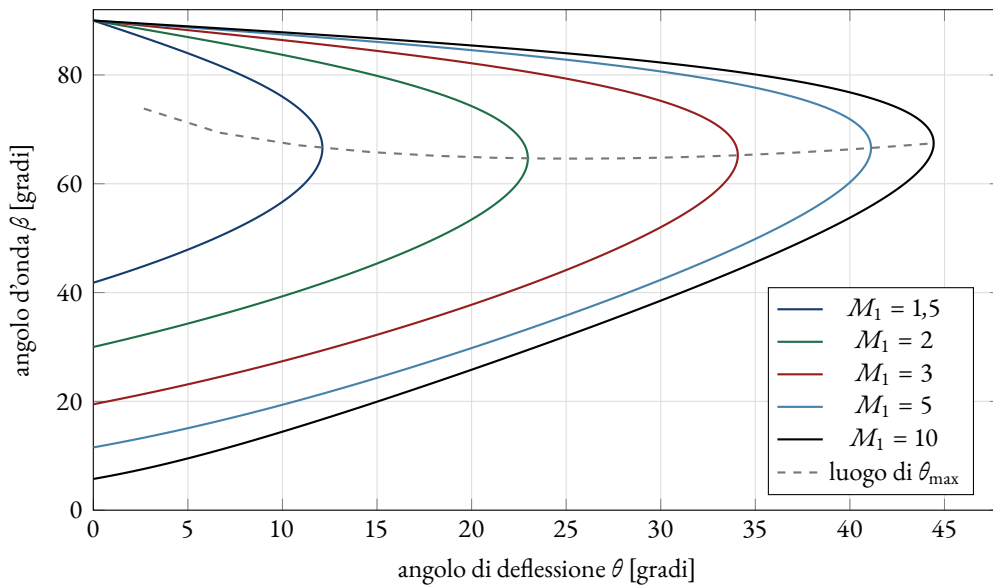


Figura 1.4. Curve θ - β - M per $\gamma = 1,4$ (calcolo esatto dalla (1.9)). Sotto la linea tratteggiata: soluzioni deboli; sopra: soluzioni forti. Oltre $\theta_{\max}$ non esistono urti rettilinei attaccati.

La non linearità degli urti

Nelle (1.6)–(1.9) il Mach compare sempre al quadrato e dentro funzioni trigonometriche: il fenomeno è fortemente *non lineare*. Raddoppiare l'angolo di deflessione, o raddoppiare il Mach, fa *molto più* che raddoppiare l'intensità dell'urto, come verificheremo numericamente negli esercizi svolti 5 e 6. Le teorie linearizzate dei profili sottili, che incontreremo più avanti nel corso, funzionano proprio perché trattano urti *deboli*, per i quali la non linearità è trascurabile.

La forma inversa β – θ – M

La (1.9) dà θ noti M_1 e β ; il problema pratico è però quasi sempre l'inverso. Si può procedere per via grafica (fig. 1.4) o iterativa, ma esiste anche una soluzione *esplicita ed esatta*: la (1.9) è riscrivibile come cubica in $\tan \beta$,

$$\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \tan \theta \tan^3 \beta - (M^2 - 1) \tan^2 \beta + \left(1 + \frac{\gamma+1}{2} M^2\right) \tan \theta \tan \beta + 1 = 0, \quad (1.10)$$

che per urto attaccato ha tre radici reali: una negativa (non fisica) e due positive, corrispondenti alle soluzioni debole e forte. Le radici fisiche si scrivono in forma chiusa:

$$\tan \beta = \frac{M^2 - 1 + 2\lambda \cos \frac{4\pi\delta + \arccos \chi}{3}}{3\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \tan \theta}, \quad (1.11)$$

con $\delta = 1$ per la soluzione debole, $\delta = 0$ per la forte, e

$$\lambda = \left[(M^2 - 1)^2 - 3\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)\left(1 + \frac{\gamma+1}{2} M^2\right) \tan^2 \theta\right]^{1/2}, \quad (1.12)$$

$$\chi = \frac{(M^2 - 1)^3 - 9\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 + \frac{\gamma+1}{4} M^4\right) \tan^2 \theta}{\lambda^3}. \quad (1.13)$$

Nessuna approssimazione entra nella (1.11): è la trigonometria esatta della cubica. È la formula che i nostri script di verifica usano sistematicamente, ed è quella consigliata per i fogli di calcolo dell'esame.

1.2.4 Esercizi svolti sull'urto obliquo

Esercizio svolto 2 — Angolo a compressione a $M_1 = 3$

Dati. Corrente uniforme con $M_1 = 3,0$, $p_1 = 101,3$ kPa (1 atm), $T_1 = 288$ K, deviata da uno spigolo concavo di $\theta = 20^\circ$.

Richieste. β , p_2 , T_2 , M_2 , p_{02} , T_{02} .

Fase A — Angolo d'onda. Dalla (1.11) (soluzione debole) con $M_1 = 3$, $\theta = 20^\circ$: $\beta = 37,76^\circ$.

Fase B — Mach normale a monte.

$$M_{n1} = M_1 \sin \beta = 3 \sin 37,76^\circ = 1,837.$$

Fase C — Salti d'urto (relazioni (1.6)–(1.7) con $M_{n1} = 1,837$):

$$\frac{p_2}{p_1} = 3,771, \quad \frac{T_2}{T_1} = 1,560, \quad M_{n2} = 0,6084, \quad \frac{p_{02}}{p_{01}} = 0,7960.$$

Quindi

$$p_2 = 3,771 \times 101,3 \text{ kPa} = 382,1 \text{ kPa}, \quad T_2 = 1,560 \times 288 = 449,2 \text{ K}.$$

Fase D — Mach a valle dalla (1.8):

$$M_2 = \frac{0,6084}{\sin(37,76^\circ - 20^\circ)} = 1,994.$$

Fase E — Grandezze totali. A monte, isentropicamente, $p_{01}/p_1 = 36,73$ e $T_{01}/T_1 = 2,8$, cioè $p_{01} = 3,722 \text{ MPa}$ e $T_{01} = 806,4 \text{ K}$. Attraverso l'urto la temperatura totale si conserva ($T_{02} = T_{01} = 806,4 \text{ K}$), la pressione totale cala:

$$p_{02} = 0,7960 \times 3,722 \text{ MPa} = 2,963 \text{ MPa} (= 29,24 \text{ atm}).$$

Controllo di coerenza. Possiamo riottenere p_{02}/p_{01} per altra via: $p_{02}/p_{01} = (p_{02}/p_2)(p_2/p_1)(p_1/p_{01})$. Con $M_2 = 1,994$ risulta $p_{02}/p_2 = 7,717$, e $7,717 \times 3,771/36,73 = 0,792$: coerente con 0,796 a meno degli arrotondamenti di stampa (nel calcolo esatto i due valori coincidono). ■

Esercizio svolto 3 — Si aumenta la deflessione

Dati. Come nell'esercizio 2, ma con $\theta = 30^\circ$.

Richieste. p_2 e M_2 ; confronto con il caso $\theta = 20^\circ$.

Fase A. $\beta(3; 30^\circ) = 52,01^\circ$, quindi $M_{n1} = 3 \sin 52,01^\circ = 2,364$.

Fase B. $p_2/p_1 = 6,356 \Rightarrow p_2 = 644,0 \text{ kPa}$; $M_{n2} = 0,5313$ e $M_2 = 0,5313/\sin 22,01^\circ = 1,406$.

Confronto. Passando da 20° a 30° : l'urto si è irrobustito (p_2 da 382 a 644 kPa), l'angolo d'onda è cresciuto (da $37,8^\circ$ a $52,0^\circ$) e il Mach a valle è sceso (da 1,99 a 1,41). È la tendenza generale: a M_1 fissato, *più deflessione significa urto più ripido e più forte*. ■

Esercizio svolto 4 — Si aumenta il Mach

Dati. Come nell'esercizio 2 ($\theta = 20^\circ$), ma con $M_1 = 5$.

Richieste. p_2 e M_2 ; confronto con il caso $M_1 = 3$.

Fase A. $\beta(5; 20^\circ) = 29,80^\circ$; $M_{n1} = 5 \sin 29,80^\circ = 2,485$.

Fase B. $p_2/p_1 = 7,037 \Rightarrow p_2 = 713,1 \text{ kPa}$; $M_{n2} = 0,5176$, $M_2 = 0,5176/\sin 9,80^\circ = 3,022$.

Confronto. Rispetto a $M_1 = 3$: l'urto si è *coricato* (β da $37,8^\circ$ a $29,8^\circ$) ma è diventato *più forte* (p_2/p_1 da 3,77 a 7,04), perché l'aumento di M_1 nel prodotto $M_1 \sin \beta$ prevale sulla riduzione di $\sin \beta$. Il Mach a valle, stavolta, è *cresciuto*. ■

Esercizio svolto 5 — Raddoppio dell'angolo: la non linearità

Dati. $M_1 = 2,8$; spigolo a compressione prima con $\theta = 15^\circ$, poi con $\theta = 30^\circ$.

Richiesta. L'intensità dell'urto raddoppia?

Per $\theta = 15^\circ$: $\beta = 33,86^\circ$, $M_{n1} = 2,8 \sin 33,86^\circ = 1,560$,

$$\frac{p_2}{p_1} = 2,672.$$

Per $\theta = 30^\circ$: $\beta = 54,79^\circ$, $M_{n1} = 2,8 \sin 54,79^\circ = 2,288$,

$$\frac{p_2}{p_1} = 5,939.$$

L'intensità (misurata dal salto di sovrappressione $p_2/p_1 - 1$, o anche solo dal rapporto p_2/p_1) è cresciuta di un fattore $5,939/2,672 = 2,22$: *più del doppio*. La risposta è no: il legame è non lineare, e raddoppiare la deflessione più che raddoppia l'urto. ■

Esercizio svolto 6 — Raddoppio del Mach

Dati. Spigolo a compressione con $\theta = 28^\circ$; corrente prima a $M_1 = 3$, poi a $M_1 = 6$.

Richiesta. L'intensità dell'urto raddoppia?

Per $M_1 = 3$: $\beta = 48,59^\circ$, $M_{n1} = 2,250$, $p_2/p_1 = 5,739$.

Per $M_1 = 6$: $\beta = 38,12^\circ$, $M_{n1} = 3,704$, $p_2/p_1 = 15,84$.

Il rapporto è $15,84/5,74 = 2,76$: di nuovo *molto più del doppio*. Ogni volta che cresce M_{n1} — sia per via di θ (esercizio 5) sia per via di M_1 (qui) — l'urto si irrobustisce in modo più che proporzionale. ■

Esercizio svolto 7 — La formula esplicita all'opera

Dati. $M = 4$, spigolo a compressione con $\theta = 32^\circ$.

Richiesta. L'angolo d'onda della soluzione debole con la formula esplicita (1.11).

Fase A — Blocchi ricorrenti. Con $\gamma = 1,4$, $M = 4$:

$$(M^2 - 1)^2 = 225, \quad (M^2 - 1)^3 = 3375, \quad \frac{\gamma-1}{2}M^2 = 3,2,$$

$$\frac{\gamma+1}{2}M^2 = 19,2, \quad \frac{\gamma+1}{4}M^4 = 153,6,$$

e $\tan^2 32^\circ = 0,39046$.

Fase B — Calcolo di λ dalla (1.12):

$$\lambda = [225 - 3(1 + 3,2)(1 + 19,2) \times 0,39046]^{1/2} = [225 - 99,38]^{1/2} = 11,208.$$

Fase C — Calcolo di χ dalla (1.13):

$$\chi = \frac{3375 - 9(4,2)(1 + 3,2 + 153,6) \times 0,39046}{11,208^3} = \frac{3375 - 2329,0}{1408,1} = 0,7429.$$

Fase D — Radice debole ($\delta = 1$). In radianti, $\arccos 0,7429 = 0,7334$; quindi

$$\frac{4\pi + 0,7334}{3} = 4,4333 \text{ rad}, \quad \cos 4,4333 = -0,2755,$$

$$\tan \beta = \frac{16 - 1 + 2 \times 11,208 \times (-0,2755)}{3 \times 4,2 \times \tan 32^\circ} = \frac{8,824}{7,873} = 1,1207 \Rightarrow \beta = 48,26^\circ.$$

La lettura grafica dalla fig. 1.4 avrebbe dato $\beta \simeq 48^\circ$: la formula esplicita conferma e raffina. ■

Esercizio svolto 8 — Il cuneo come «machmetro»

Dati. Un cuneo con semiangolo $\theta = 10^\circ$ è immerso in una corrente di Mach ignoto; una visualizzazione Schlieren mostra un urto attaccato con $\beta = 44^\circ$.

Richiesta. Il numero di Mach della corrente.

Qui i dati sono (θ, β) e l'incognita è M_1 : usiamo la (1.9) «al contrario», risolvendo $\tan 10^\circ = 2 \cot 44^\circ \frac{M_1^2 \sin^2 44^\circ - 1}{M_1^2(\gamma + \cos 88^\circ) + 2}$ rispetto a M_1 . La radice è

$$M_1 = 1,80.$$

La tecnica è realmente usata in galleria: un cuneo tarato e una foto dell'urto forniscono il Mach della vena. In pratica, però, si preferisce il tubo di Pitot (formula di Rayleigh, Appendice A), più accurato e non intrusivo rispetto alla misura ottica dell'angolo. ■

Il senso di tutto questo

L'urto obliquo si è rivelato un urto normale mascherato: la macchina di calcolo è (i) geometria d'ingresso $M_{n1} = M_1 \sin \beta$, (ii) relazioni d'urto normale su M_{n1} , (iii) geometria d'uscita $M_2 = M_{n2} / \sin(\beta - \theta)$. L'unico anello nuovo è la relazione θ - β - M , con la sua fenomenologia (deflessione massima, doppia soluzione, non linearità). Chi domina la fig. 1.4 domina l'intero argomento.

1.3 Cunei, coni e coefficienti aerodinamici**Dove stiamo andando**

Applichiamo la teoria dell'urto obliquo ai due corpi appuntiti fondamentali: il cuneo bidimensionale e il cono. Vedremo la prima, importante differenza fra flussi 2D e 3D (l'*effetto di alleggerimento tridimensionale*), e useremo il cuneo per introdurre due coefficienti che ci accompagneranno per tutto il corso: il coefficiente di pressione C_p e il coefficiente di resistenza c_d .

1.3.1 Il cuneo: soluzione esatta bidimensionale

Per un cuneo a spigolo vivo con semiangolo $\theta < \theta_{\max}(M_1)$, investito frontalmente da una corrente supersonica, la teoria del par. 1.2 è la soluzione *esatta* (nell'ambito del modello non viscoso): dall'apice parte un urto obliquo rettilineo, e a valle le linee di corrente sono rette parallele alla superficie. Su tutta la faccia del cuneo la pressione è *costante* e vale il p_2 dell'urto.

1.3.2 Il cono: l'effetto di alleggerimento tridimensionale

Anche a un cono aguzzo in moto supersonico si attacca un urto rettilineo (conico), e *subito a valle* dell'urto le proprietà sono ancora date dalle relazioni dell'urto obliquo. Ma la somiglianza finisce qui: fra urto e superficie del cono il campo non è più uniforme. Le linee di corrente si incurvano, e la pressione sulla parete del cono p_s differisce dal p_2 immediatamente a valle dell'urto.

La ragione è geometrica: nel moto attorno a un corpo tridimensionale il fluido dispone di una dimensione in più lungo cui «scansarsi». L'ingombro effettivo percepito dalla corrente è minore, e l'urto necessario a deviarla è *più debole* che nel caso piano. È il cosiddetto **effetto di alleggerimento tridimensionale** (*three-dimensional relieving effect*), tratto comune di tutti i flussi 3D. Un esempio numerico rende l'idea: a $M_1 = 2$, un cuneo con semiangolo 20° genera un urto a $\beta \simeq 53^\circ$; un cono con lo stesso semiapertura genera un urto conico a soli $\beta \simeq 37^\circ$, con p_2, ρ_2 e T_2 sensibilmente più bassi subito a valle. Lo studio quantitativo del flusso conico (equazione di Taylor-Maccoll) è rimandato a una monografia successiva: qui ci basta il messaggio fisico.

Attenzione

Non si applichino mai le relazioni «da cuneo» alla superficie di un cono: per lo stesso angolo di semiapertura il cono lavora con un urto molto più debole e pressioni di parete più basse. Confondere i due casi in un compito di dimensionamento porta a sovrastimare i carichi (errore conservativo ma concettualmente grave).

1.3.3 Coefficiente di pressione e resistenza d'onda del cuneo

Definizione

Il **coefficiente di pressione** in un punto è

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty}, \quad q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2.$$

Per gas perfetto conviene riscrivere la pressione dinamica in funzione di p_∞ e M_∞ :

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma p_\infty}{\gamma p_\infty} \rho_\infty V_\infty^2 = \frac{\gamma p_\infty}{2} \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} = \frac{\gamma}{2} p_\infty M_\infty^2,$$

da cui la forma operativa, con pedice 1 per la corrente indisturbata:

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_1^2} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right). \quad (1.14)$$

Esercizio svolto 9 — C_p sul cuneo

Dati. Cuneo con semiangolo 15° a incidenza nulla in corrente d'aria a $M_1 = 3$.

Richiesta. Il coefficiente di pressione sulla faccia.

Fase A — Urto. Per $M_1 = 3$, $\theta = 15^\circ$: $\beta = 32,24^\circ$, $M_{n1} = 3 \sin 32,24^\circ = 1,600$, e

$$\frac{p_2}{p_1} = 2,822.$$

Fase B — Coefficiente dalla (1.14):

$$C_p = \frac{2}{1,4 \times 9} (2,822 - 1) = 0,289.$$

Commento. Nella (1.14) compaiono solo γ , M_1 e il rapporto p_2/p_1 , che a sua volta dipende solo da (γ, M_1, θ) : dunque C_p è *funzione del solo Mach (e di γ) per una data geometria*. Non dipende né dalla quota né dalla velocità in sé: è l'essenza della similitudine aerodinamica in campo comprimibile non viscoso. ■

Esercizio svolto 10 — Resistenza d'onda del cuneo

Dati. Stesso cuneo ($\varepsilon = 15^\circ$ di semiangolo, incidenza nulla, $M_1 = 3$); si assuma che sulla base agisca la pressione della corrente indisturbata, $p_B = p_1$.

Richiesta. Il coefficiente di resistenza riferito alla corda.

Fase A — Bilancio di forze. Sia c la corda e consideriamo un tratto di apertura unitaria. Ciascuna faccia obliqua, lunga $c / \cos 15^\circ$, riceve la pressione p_2 in direzione normale; la base, alta $2c \tan 15^\circ$, riceve p_1 in direzione opposta al moto. La componente di forza lungo la corrente (resistenza per unità di apertura) è

$$D' = 2 \left[\frac{c}{\cos 15^\circ} p_2 \right] \sin 15^\circ - (2c \tan 15^\circ) p_1 = 2c (p_2 - p_1) \tan 15^\circ.$$

Fase B — Adimensionalizzazione. Con $S = c \times 1$ (area in pianta) e $q_1 = \frac{\gamma}{2} p_1 M_1^2$:

$$c_d = \frac{D'}{q_1 c} = \frac{4}{\gamma M_1^2} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \tan 15^\circ = \frac{4}{1,4 \times 9} (1,822) (0,2679) = 0,155.$$

Fase C — Verifica per integrazione dei C_p . In alternativa, la resistenza di pressione si ottiene integrando i coefficienti di pressione lungo la direzione trasversale:

$$c_d = \frac{1}{c} \int_{LE}^{TE} (C_{p,sup} - C_{p,inf}) dy.$$

Per simmetria $C_{p,sup} = C_{p,inf} = 0,289$ (esercizio 9); sulla faccia superiore $dy = \tan 15^\circ dx$, su quella inferiore $dy = -\tan 15^\circ dx$, e l'integrale dà

$$c_d = \frac{0,2679}{c} \times 2 \times 0,289 \int_0^c dx = 0,155,$$

identico al risultato diretto: buon segno.

Commento fisico. In moto subsonico non viscoso un profilo 2D di apertura infinita non ha resistenza (paradosso di d'Alembert). In supersonico, invece, la resistenza di pressione è *finita* anche senza attrito: è la **resistenza d'onda**, figlia dell'aumento di entropia (perdita di pressione totale) negli urti generati dal corpo. Il c_d appena calcolato è, per costruzione, un coefficiente di resistenza d'onda; e come il C_p , dipende solo da M_1 e γ per una data forma. ■

Il senso di tutto questo

Il cuneo è il laboratorio ideale dell'urto obliquo: pressione uniforme sulle facce, formule chiuse per C_p e c_d , dipendenza dal solo Mach. Il cono ci ha invece regalato la prima lezione di aerodinamica tridimensionale: la terza dimensione «alleggerisce» il campo. Terremo a mente entrambe le cose quando, nel par. 1.7, monteremo questi mattoni nella teoria urto-espansione.

1.4 Rappresentazioni grafiche: polare d'urto e diagrammi p - θ

Dove stiamo andando

Prima di affrontare le interazioni fra onde ci procuriamo due mappe grafiche che le rendono leggibili «a colpo d'occhio»: la *polare d'urto* nel piano delle velocità (piano odografo) e il *diagramma pressione-deflessione*. Non introducono fisica nuova: riorganizzano la relazione θ - β - M in forma geometrica, e sono lo strumento naturale per ragionare su riflessioni, intersezioni e linee di scorrimento.

1.4.1 Il piano odografo e la polare d'urto

Consideriamo un urto obliquo con velocità a monte V_1 assegnata e riportiamo le velocità non nel piano fisico (x, y) ma nel *piano odografo*, di assi (V_x, V_y) : ogni stato uniforme del campo diventa un *punto*. Lo stato a monte è il punto $A = (V_1, 0)$; lo stato a valle, per una certa deflessione θ , è un punto B con $|OB| = V_2$ e anomalia θ . Aumentando la deflessione, V_2 ruota e si accorcia (l'urto si irrobustisce): al variare di θ su tutti i valori ammissibili ($|\theta| \leq \theta_{max}$) il punto a valle descrive una curva chiusa a forma di goccia: la **polare d'urto** relativa a quel V_1 .

Per confrontare polari a Mach diversi conviene adimensionalizzare con la velocità critica a^* (che, essendo il moto adiabatico, è la stessa ai due lati dell'urto), cioè lavorare con il Mach caratteristico $M^* = V/a^*$. Il vantaggio è di compattezza: mentre $M \rightarrow \infty$, M^* tende al valore finito $\sqrt{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \simeq 2,45$, e tutte le polari stanno nella stessa pagina. La circonferenza $M^* = 1$ (*cerchio sonico*) separa gli stati subsonici (interni) da quelli supersonici (esterni).

L'equazione analitica della polare, ricavabile dalle relazioni d'urto del par. 1.2, è

$$\left(\frac{V_y}{a^*}\right)^2 = \frac{(M_1^* - V_x/a^*)^2 [(V_x/a^*) M_1^* - 1]}{\frac{2}{\gamma+1} (M_1^*)^2 - \frac{V_x}{a^*} M_1^* + 1}. \quad (1.15)$$

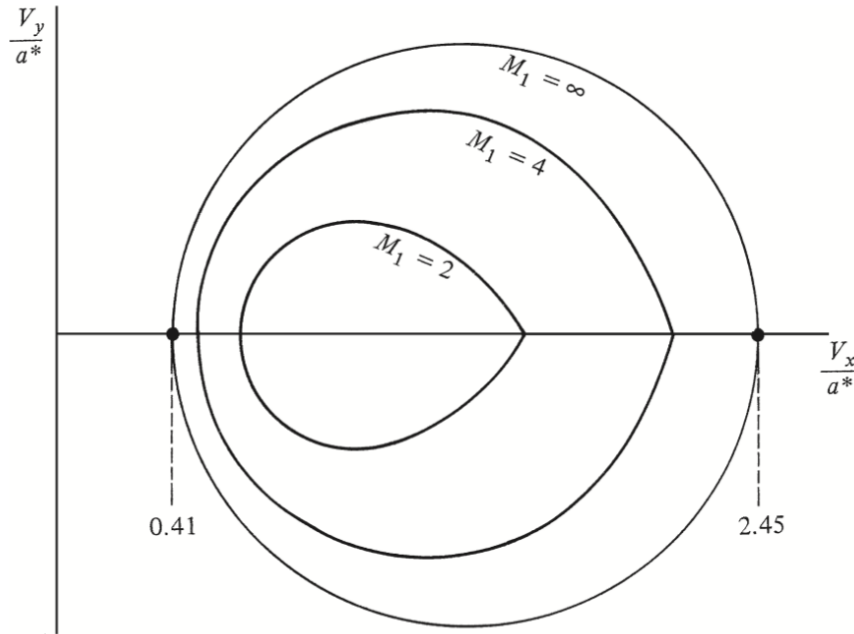


Figura 1.5. Polari d'urto nel piano odografo adimensionalizzato con a^* (calcolo esatto). Ogni punto della curva è un possibile stato a valle dell'urto per il dato M_1 .

La polare si legge così (fig. 1.5):

1. una retta per l'origine inclinata di θ taglia la polare in due punti: quello esterno è la soluzione *debole*, quello interno (dentro o vicino al cerchio sonico) la soluzione *forte*;
2. la retta per l'origine *tangente* alla polare individua $\theta_{\max}$: oltre, nessuna intersezione, nessun urto attaccato;
3. le intersezioni con l'asse V_x sono i casi senza deflessione: il punto interno è l'urto normale, il punto esterno ($V_2 = V_1$) l'onda di Mach;
4. una costruzione geometrica fornisce anche β : tracciata la corda dal punto a monte A al punto soluzione B , la perpendicolare ad essa condotta dall'origine forma con l'asse V_x proprio l'angolo d'onda. La dimostrazione discende dal fatto che il salto di velocità $V_1 - V_2$ è tutto normale all'onda (perché $w_1 = w_2$): la corda AB è quindi perpendicolare al piano dell'urto;
5. al crescere di M_1 le polari si allargano, e per $M_1 \rightarrow \infty$ ($M_1^* \rightarrow 2,45$) la polare tende a una circonferenza.

1.4.2 Il diagramma pressione–deflessione

Per le interazioni fra onde la variabile davvero contesa è la *pressione statica*: due correnti adiacenti possono convivere solo se hanno la stessa p e la stessa direzione. Nasce così il **diagramma p- θ** : il luogo di tutte le pressioni statiche raggiungibili a valle di un urto obliquo, in funzione della deflessione, per assegnate condizioni a monte.

Serve una convenzione di segno. Un urto si dice *sinistrorso* (*left-running*) se, guardando verso valle, l'onda si allontana verso sinistra: essa devia la corrente verso l'alto, e la deflessione si assume positiva. Un urto *destrorso* devia la corrente verso il basso: deflessione negativa. Il diagramma $p-\theta$ è allora una curva a forma di cuore appoggiata sul punto $(0, p_1)$: il lobo destro ($\theta > 0$) raccoglie gli urti sinistrorsi, il lobo sinistro quelli destrorsi, e i due lobi culminano a $\pm\theta_{\max}$.

La forza del diagramma sta nella composizione: quando una corrente attraversa *due* urti in cascata, dal punto raggiunto sul primo diagramma si disegna un *nuovo* diagramma $p-\theta$ (relativo al Mach locale e con vertice nella nuova direzione), e su questo si cerca lo stato successivo. Vedremo il metodo all'opera nella riflessione da parete (par. 1.5.1) e nell'intersezione di urti di famiglie opposte (par. 1.5.3), dove il punto d'incontro di due diagrammi determina simultaneamente pressione e direzione comuni delle correnti a valle.

Il senso di tutto questo

Polare d'urto e diagramma $p-\theta$ sono due proiezioni della stessa relazione $\theta-\beta-M$: la prima nello spazio delle velocità, la seconda nello spazio (θ, p) . La polare eccelle nel visualizzare soluzione debole/forte e angolo d'onda; il diagramma $p-\theta$ è insostituibile quando due flussi devono *accordarsi* su pressione e direzione, cioè in tutte le interazioni del prossimo paragrafo.

1.5 Interazioni fra onde

Dove stiamo andando

Le onde oblique raramente vivono da sole: rimbalzano sulle pareti, si incrociano, si sommano. In questo paragrafo studiamo in sequenza la riflessione regolare da parete, i sistemi a più urti (con una lezione fondamentale di progetto delle prese d'aria), le intersezioni fra urti — con la comparsa delle *linee di scorrimento* — la riflessione di Mach, l'urto staccato davanti a un corpo tozzo e, infine, come estendere i risultati agli urti tridimensionali.

1.5.1 Riflessione regolare da una parete solida

Un urto obliquo generato da uno spigolo a compressione sulla parete inferiore di un condotto raggiunge, nel punto B , la parete superiore piana (fig. 1.6). Che ne è dell'onda? La risposta la impone la condizione al contorno: *alla parete la corrente deve scorrere parallela alla parete*. L'urto incidente ha già deviato la corrente di θ verso l'alto; per riallinearla alla parete superiore serve una seconda deviazione di θ , di nuovo «verso se stessa»: dunque da B parte un secondo urto, l'**urto riflesso**, che si propaga verso valle e verso il basso.

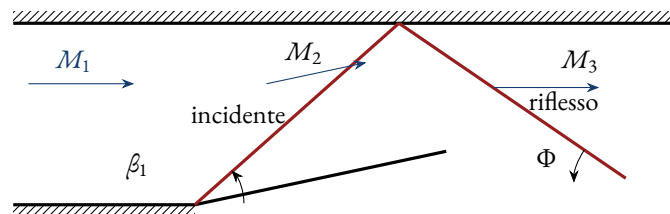


Figura 1.6. Riflessione regolare: l'urto incidente devia la corrente di θ ; l'urto riflesso, generato dalla condizione di parallelismo alla parete superiore, la riporta orizzontale. L'angolo Φ del riflesso con la parete non è uguale a β_1 .

Due proprietà vanno fissate subito.

- L'urto riflesso lavora su una corrente più lenta ($M_2 < M_1$) ma deve produrre la *stessa* deflessione θ : è quindi un urto *più debole* dell'incidente, ma con un angolo d'onda β_2 (misurato rispetto alla corrente locale) in genere *maggiore* di β_1 .

- La riflessione **non è speculare**: l'angolo Φ che il riflesso forma con la parete vale $\Phi = \beta_2 - \theta$ e differisce da β_1 .

Sul diagramma p - θ il processo è limpido: dal punto $(0, p_1)$ si sale lungo il lobo destro fino a (θ, p_2) (urto incidente); da lì si disegna il diagramma relativo a M_2 con vertice in (θ, p_2) e si scende lungo il suo lobo sinistro fino a riportare la deflessione a zero: quel punto è $(0, p_3)$, lo stato dietro il riflesso.

Esercizio svolto 11 — Riflessione regolare completa

Dati. Corrente orizzontale a $M_1 = 2,8$ con $p_1 = 101,3$ kPa e $T_1 = 288,3$ K; spigolo a compressione di $\theta = 16^\circ$; l'urto generato incide su una parete orizzontale (fig. 1.6).

Richieste. Φ , e poi M_3, p_3, T_3 dietro il riflesso.

Fase A — Urto incidente. Per $M_1 = 2,8, \theta = 16^\circ: \beta_1 = 34,92^\circ, M_{n1} = 2,8 \sin 34,92^\circ = 1,603$; quindi

$$\frac{p_2}{p_1} = 2,831, \quad \frac{T_2}{T_1} = 1,390, \quad M_{n2} = 0,6676, \quad M_2 = \frac{0,6676}{\sin 18,92^\circ} = 2,059.$$

Fase B — Urto riflesso. Il flusso in regione 2, a $M_2 = 2,059$, deve deviare di nuovo di $16^\circ: \beta_2 = 45,33^\circ, M_n = 2,059 \sin 45,33^\circ = 1,464$;

$$\frac{p_3}{p_2} = 2,334, \quad \frac{T_3}{T_2} = 1,296, \quad M_3 = \frac{0,7130}{\sin 29,33^\circ} = 1,458.$$

Fase C — Stato finale e angolo del riflesso.

$$p_3 = 2,334 \times 2,831 \times 101,3 \text{ kPa} = 669,5 \text{ kPa} (= 6,61 \text{ atm}),$$

$$T_3 = 1,296 \times 1,390 \times 288,3 = 519,6 \text{ K}, \quad \Phi = \beta_2 - \theta = 45,33^\circ - 16^\circ = 29,33^\circ.$$

Commento. L'incidente formava $34,9^\circ$ con la parete; il riflesso ne forma $29,3^\circ$: la riflessione, come annunciato, non è speculare — il riflesso «si appiattisce» sulla parete. ■

Esercizio svolto 12 — Riflessione su parete a sua volta deviata

Dati. $M_1 = 3, p_1 = 101,3$ kPa, $T_1 = 300$ K. Uno spigolo di $\theta_1 = 14^\circ$ sulla parete inferiore genera un urto che incide sulla parete superiore esattamente in un punto dove questa piega verso il basso di $\theta_2 = 10^\circ$.

Richieste. M_3, p_3, T_3 dietro l'urto riflesso.

Fase A — Urto incidente ($M_1 = 3, \theta_1 = 14^\circ$): $\beta_1 = 31,22^\circ, M_{n1} = 1,555$;

$$\frac{p_2}{p_1} = 2,654, \quad \frac{T_2}{T_1} = 1,357, \quad M_2 = 2,306.$$

Fase B — Deviazione richiesta al riflesso. A valle dell'incidente la corrente sale di 14° ; per diventare parallela alla nuova parete superiore (inclinata di 10° verso il basso) deve ruotare in totale di $\theta_1 + \theta_2 = 24^\circ$ verso il basso. Il riflesso è dunque un urto su $M_2 = 2,306$ con deflessione $24^\circ: \beta_2 = 52,40^\circ, M_n = 2,306 \sin 52,40^\circ = 1,827$;

$$\frac{p_3}{p_2} = 3,727, \quad \frac{T_3}{T_2} = 1,552, \quad M_3 = \frac{0,6109}{\sin 28,40^\circ} = 1,284.$$

Fase C — Stato finale.

$$p_3 = 3,727 \times 2,654 \times 101,3 \text{ kPa} = 1002 \text{ kPa} (= 9,89 \text{ atm}),$$

$$T_3 = 1,552 \times 1,357 \times 300 = 631,7 \text{ K}.$$

La geometria della parete «rinforza» la riflessione: la deviazione totale è la somma dei due angoli. ■

1.5.2 Sistemi a più urti: la lezione delle prese d'aria

Rallentare una corrente supersonica costa: ogni urto distrugge pressione totale. Ma quanto costa dipende, e molto, da *come* lo si fa. Confrontiamo due modi di portare la stessa corrente allo stesso Mach finale: attraverso due urti deboli in cascata oppure attraverso un solo urto più forte.

Esercizio svolto 13 — Due urti battono uno

Dati. (a) La configurazione dell'esercizio 11: $M_1 = 2,8$, $p_1 = 1 \text{ atm}$, due urti da 16° in cascata, Mach finale $M_3 = 1,458$. (b) Un singolo urto obliquo che porti la stessa corrente ($M_1 = 2,8$) direttamente a $M_2 = 1,458$.

Richieste. Le pressioni totali finali nei due casi; l'angolo di deflessione del caso (b); un confronto ragionato.

Fase A — Caso (a), doppio urto. Dai calcoli dell'esercizio 11: $M_n = 1,603$ sull'incidente e $M_n = 1,464$ sul riflesso, quindi

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = 0,8941, \quad \frac{p_{03}}{p_{02}} = 0,9408.$$

Con $p_{01}/p_1 = 27,14$ (isentropica a $M = 2,8$):

$$p_{03} = 0,9408 \times 0,8941 \times 27,14 \times 1 \text{ atm} = 22,83 \text{ atm} = 2313 \text{ kPa}.$$

Fase B — Caso (b), urto singolo. Cerchiamo θ tale che l'urto su $M_1 = 2,8$ dia $M_2 = 1,458$: la soluzione (per via numerica sulla (1.9)) è

$$\theta = 27,34^\circ, \quad \beta = 49,75^\circ, \quad M_{n1} = 2,137,$$

da cui $p_{02}/p_{01} = 0,6572$ e

$$p_{02} = 0,6572 \times 27,14 \times 1 \text{ atm} = 17,83 \text{ atm} = 1807 \text{ kPa}.$$

Fase C — Confronto. Stesso Mach finale, ma 22,83 atm contro 17,83 atm: il sistema a due urti conserva circa il 28% di pressione totale in più. E si noti il paradosso apparente: la deviazione complessiva del doppio urto è $16^\circ + 16^\circ = 32^\circ$, *maggiore* dei $27,3^\circ$ dell'urto singolo; eppure il doppio urto è più efficiente. La spiegazione è la non linearità già incontrata: la perdita di pressione totale cresce in modo più che proporzionale con M_{n1} ; il primo urto debole abbassa il Mach visto dal secondo, e le due piccole perdite sommate restano inferiori all'unica grande perdita. ■

Ricaduta progettuale

È il principio cardine delle prese d'aria supersoniche e dei diffusori delle gallerie: *rallentare per gradi, con una cascata di urti via via più deboli, è sempre più efficiente che con un urto unico*. Le rampe multiple dei velivoli supersonici e la geometria interna dei motori scramjet esistono precisamente per orchestrare questa cascata e massimizzare il recupero di pressione totale — cioè la spinta disponibile.

1.5.3 Intersezione di urti di famiglie opposte e linee di scorrimento

Facciamo incrociare un urto sinistrorso A (deflessione θ_2 verso l'alto, generato dalla parete inferiore) e un urto destrorso B (deflessione θ_3 verso il basso, dalla parete superiore). Nel punto d'incontro E i due urti si attraversano e proseguono come urti *rifratti* C e D . Se $\theta_2 \neq \theta_3$ i due rami hanno intensità diverse: una particella che passa per A e poi C accumula un salto di entropia diverso da una che passa per B e poi D . Le due correnti a valle sono quindi termodinamicamente diverse, e la linea che le separa, uscente da E , è una **linea di scorrimento**

(*slip line*): una superficie di contatto attraverso cui entropia, temperatura, densità e *modulo* della velocità sono discontinui.

Attraverso la linea di scorrimento valgono però due condizioni di compatibilità meccanica:

1. **stessa pressione statica**, $p_4 = p_{4'}$ (altrimenti la linea si incurverebbe istantaneamente);
2. **stessa direzione** della velocità nelle due regioni (altrimenti si aprirebbe un vuoto o una compenetrazione: fisicamente insostenibile).

Queste due condizioni, insieme allo stato a monte e agli angoli θ_2, θ_3 , chiudono il problema. Sul piano $p-\theta$ la soluzione è l'*intersezione* dei due diagrammi tracciati dagli stati 2 e 3: quel punto fissa contemporaneamente la pressione comune e la direzione comune Φ della scia; le deflessioni dei rami rifratti seguono per differenza. Se $\theta_2 = \theta_3$ il quadro è simmetrico e la linea di scorrimento scompare. Un caso numerico completo è svolto nel Problema 9 del par. 1.10.

1.5.4 Intersezione di urti della stessa famiglia

Cosa succede se due spigoli a compressione successivi sulla *stessa* parete generano due urti sinistrorsi? Conviene prima chiedersi come stanno, rispetto all'urto, le onde di Mach delle regioni adiacenti. A monte, la componente normale della velocità è supersonica ($u_1 > a_1$), quindi $\sin \beta = u_1/V_1 > a_1/V_1 = \sin \mu_1$: l'urto è *più ripido* dell'onda di Mach a monte, $\beta > \mu_1$. A valle, $u_2 < a_2$ dà $\beta - \theta < \mu_2$: l'urto è *meno ripido* dell'onda di Mach a valle. Conclusione: le onde della stessa famiglia convergono sull'urto — e a maggior ragione un secondo urto, più ripido di un'onda di Mach, raggiunge il primo.

Nel punto d'incontro i due urti si fondono in un urto unico più forte. Ma di nuovo i conti dell'entropia non tornano da soli: la corrente che ha attraversato i *due* urti in cascata e quella che, più in alto, ha attraversato il solo urto fuso hanno stati diversi, e dal punto di fusione escono una linea di scorrimento e una *onda riflessa debole* (urto o espansione a seconda dei casi), il cui ruolo è esattamente quello di aggiustare pressione e direzione a cavallo della linea di scorrimento. Il campo si risolve per via numerica iterando su intensità dell'urto fuso e dell'onda riflessa.

1.5.5 Riflessione di Mach

Torniamo alla riflessione da parete del par. 1.5.1 e mettiamola in crisi. La riflessione regolare esiste solo se il flusso in regione 2 riesce a farsi deviare di nuovo di θ : serve $\theta < \theta_{\max}(M_2)$. Ma $M_2 < M_1$, e $\theta_{\max}$ cala con il Mach: può benissimo accadere che

$$\theta_{\max}(M_2) < \theta < \theta_{\max}(M_1),$$

cioè che l'urto incidente sia ammissibile ma il riflesso regolare no. In tal caso la natura ripiega su una configurazione diversa: in prossimità della parete superiore si forma un tratto di urto *quasi normale* (che consente alle linee di corrente di restare parallele alla parete), raccordato da un urto curvo al punto d'incontro con l'incidente, da cui parte anche un riflesso curvo. È la **riflessione di Mach**, caratterizzata da estese regioni subsoniche dietro il tratto normale; la sua analisi richiede metodi numerici di campo e non le sole formule algebriche di questa monografia.

1.5.6 L'urto staccato davanti a un corpo tozzo

Se il corpo non è aguzzo — un muso arrotondato, una capsula di rientro — oppure se un cuneo pretende $\theta > \theta_{\max}$, l'urto *si stacca*: davanti al corpo compare un **urto d'arco** (*bow shock*) curvo, a distanza di distacco δ dal naso.

Il fatto notevole è che, muovendosi lungo l'urto d'arco dal piano di simmetria verso l'esterno, l'onda percorre *tutte* le condizioni ammesse dalla relazione $\theta-\beta-M_1$: al centro è un urto normale ($\beta = 90^\circ$); poco sopra è un urto obliquo di soluzione forte; più oltre attraversa il punto di massima deflessione e passa alla famiglia debole; nel punto in cui il Mach a valle torna sonico si chiude la sacca subsonica; e a grande distanza l'urto

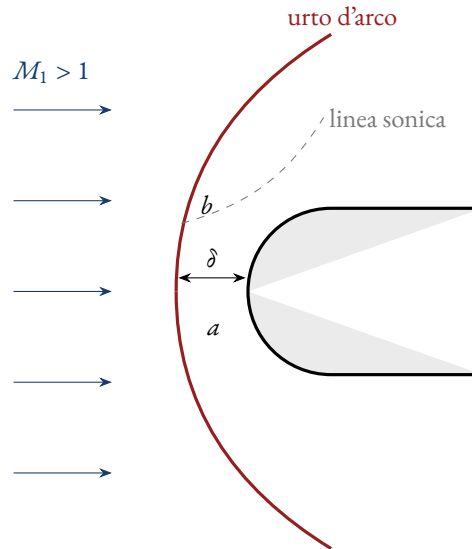


Figura 1.7. Corpo tozzo in corrente supersonica: urto d'arco staccato. Sul piano di simmetria (punto a) l'urto è normale; allontanandosi si incurva, attraversa la condizione di massima deflessione e degenera, lontano, in onda di Mach. La linea sonica separa la sacca subsonica dal resto del campo.

sfuma in onda di Mach. Il campo fra urto e corpo è quindi *misto* subsonico–supersonico, separato dalla *linea sonica*: è questa mescolanza a rendere il problema del corpo tozzo così ostico, tanto che fino agli anni Sessanta la forma dell'urto e la distanza δ non erano prevedibili per via teorica, e solo l'avvento dei metodi numerici (l'attuale CFD) lo ha reso un calcolo di routine. La distanza di distacco e l'intera struttura dipendono da M_1 e dalla forma e dimensione del corpo.

Perché il muso tondo salva le capsule

Dietro il tratto quasi normale dell'urto d'arco la corrente è fortemente compressa e riscaldata, ma la sacca subsonica «cuscinetto» tiene l'urto lontano dalla parete: il corpo tozzo converte l'energia cinetica in calore *nel gas*, non sulla superficie. È il motivo per cui i veicoli di rientro hanno musi arrotondati: un naso aguzzo attaccherebbe l'urto al corpo, concentrando i flussi termici sulla punta.

1.5.7 Urti tridimensionali

Molte onde reali sono superfici curve nello spazio: l'urto attorno a un corpo assialsimmetrico in incidenza, ad esempio. La teoria bidimensionale di questo paragrafo resta preziosa anche lì, con un'avvertenza di *località*: in ogni punto della superficie d'urto si prende la normale locale $\mathbf{n}$ e si calcola la componente normale del Mach a monte,

$$M_{n1} = (M_1 \hat{\mathbf{i}}) \cdot \mathbf{n}, \quad (1.16)$$

con la quale le (1.6)–(1.7) forniscono *le proprietà immediatamente a valle dell'urto in quel punto*. Il seguito — il campo non uniforme fra urto e corpo — richiede tecniche tridimensionali dedicate; ma le condizioni al contorno «dietro l'urto» le fornisce sempre la teoria che abbiamo appena costruito.

Il senso di tutto questo

Tre idee reggono l'intero paragrafo. Prima: ogni interazione è governata dalle condizioni di compatibilità — parallelismo alla parete nelle riflessioni, uguaglianza di pressione e direzione sulle linee di scorrimento. Seconda: l'entropia è la contabilità nascosta — percorsi d'urto diversi producono stati diversi, e le linee di scorrimento esistono per separarli. Terza: la non linearità delle perdite premia la gradualità — i sistemi

a più urti deboli sono la via efficiente per rallentare una corrente supersonica.

1.6 Le onde di espansione di Prandtl–Meyer

Dove stiamo andando

Passiamo all'altra metà della cassetta degli attrezzi: il ventaglio di espansione. Prima ne fissiamo le proprietà qualitative, poi deriviamo passo passo l'equazione differenziale che lo governa e la integriamo introducendo la *funzione di Prandtl–Meyer* $\nu(M)$. Chiuderemo con la procedura operativa in quattro passi che useremo in tutti gli esercizi.

1.6.1 Che cosa succede in un ventaglio di espansione

Quando la corrente supersonica è deviata *via da se stessa* — spigolo convesso di angolo θ_2 , fig. 1.8 — la transizione non avviene per urto ma attraverso un **ventaglio centrato** di infinite onde di Mach, aperte a ventaglio fra la *linea di Mach anteriore* (inclinata di $\mu_1 = \arcsin(1/M_1)$ sulla corrente a monte) e la *linea di Mach posteriore* (inclinata di $\mu_2 = \arcsin(1/M_2)$ sulla corrente a valle). Le proprietà qualitative da memorizzare:

1. $M_2 > M_1$: lo spigolo convesso è un *acceleratore*;
2. $p_2 < p_1, \rho_2 < \rho_1, T_2 < T_1$: tutte le grandezze statiche calano;
3. ogni onda del ventaglio è un'onda di Mach, quindi con salto di entropia nullo: *l'espansione è isentropica* — pressione e temperatura totali si conservano;
4. le linee di corrente attraversano il ventaglio con curvatura dolce e continua (solo la linea di parete gira bruscamente nello spigolo);
5. il ventaglio centrato in uno spigolo vivo è detto *espansione di Prandtl–Meyer*, dai nomi di chi ne costruì la teoria (Prandtl, 1907; Meyer, 1908 — si veda la nota storica del par. 1.8).

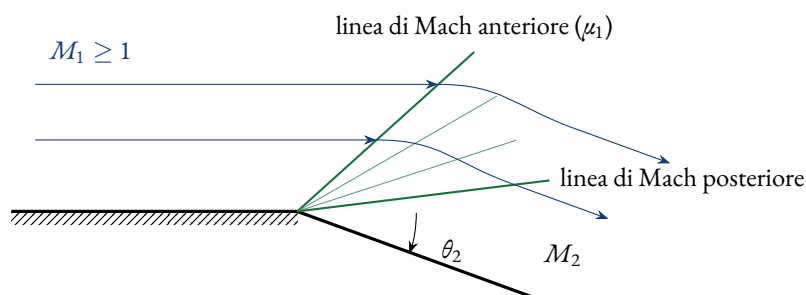


Figura 1.8. Espansione di Prandtl–Meyer a uno spigolo convesso: ventaglio di onde di Mach fra le linee anteriore e posteriore; la corrente accelera con continuità ruotando di θ_2 .

1.6.2 La derivazione: dall'onda di Mach all'equazione differenziale

Il problema quantitativo è: dati M_1, p_1, T_1 e l'angolo θ_2 , trovare M_2, p_2, T_2 . Strategia classica: studiare la rotazione *infinitesima* $d\theta$ attraverso una singola onda di Mach e poi integrare sull'intero ventaglio.

Attraverso un'onda di Mach la velocità passa da V a $V + dV$ ruotando di $d\theta$; la variazione di velocità è normale all'onda (è l'analogo infinitesimo del $w_1 = w_2$ dell'urto). Il triangolo delle velocità, risolto con il teorema dei seni, dà

$$\frac{V + dV}{V} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \mu)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \mu - d\theta)} = \frac{\cos \mu}{\cos \mu \cos d\theta - \sin \mu \sin d\theta}.$$

Per $d\theta$ piccolo ($\cos d\theta \simeq 1$, $\sin d\theta \simeq d\theta$) e sviluppando al prim'ordine la frazione $1/(1 - d\theta \tan \mu) \simeq 1 + d\theta \tan \mu$:

$$1 + \frac{dV}{V} \simeq 1 + d\theta \tan \mu \quad \Rightarrow \quad d\theta = \frac{dV/V}{\tan \mu}.$$

Con $\sin \mu = 1/M$ si ha $\tan \mu = 1/\sqrt{M^2 - 1}$, e quindi:

Equazione differenziale di Prandtl–Meyer

$$d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad (1.17)$$

Tre note importanti. (i) È esatta nel limite $d\theta \rightarrow 0$. (ii) È stata ottenuta con la sola *geometria* dell'onda di Mach: vale dunque per gas perfetti, reali e chimicamente reagenti. (iii) Per il ventaglio finito va integrata da 1 a 2.

Integrazione per gas caloricamente perfetto. Esprimiamo dV/V in funzione di M . Da $V = Ma$, differenziando il logaritmo:

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{da}{a}.$$

L'equazione dell'energia adiabatica dà $a = a_0(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2)^{-1/2}$, da cui

$$\frac{da}{a} = -\frac{\frac{\gamma-1}{2}M}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} dM \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{V} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}.$$

Sostituendo nella (1.17) e integrando fra le regioni 1 e 2 (con corrente a monte allineata, $\theta_1 = 0$):

$$\theta_2 = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M} = \nu(M_2) - \nu(M_1), \quad (1.18)$$

dove la primitiva $\nu(M)$ è la **funzione di Prandtl–Meyer**:

Funzione di Prandtl–Meyer e legge del ventaglio

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)} - \arctan \sqrt{M^2 - 1}, \quad (1.19)$$

$$\theta_2 = \nu(M_2) - \nu(M_1) \quad (1.20)$$

La costante di integrazione è scelta perché $\nu(1) = 0$: $\nu(M)$ è l'angolo di cui bisogna espandere una corrente sonica per portarla a Mach M .

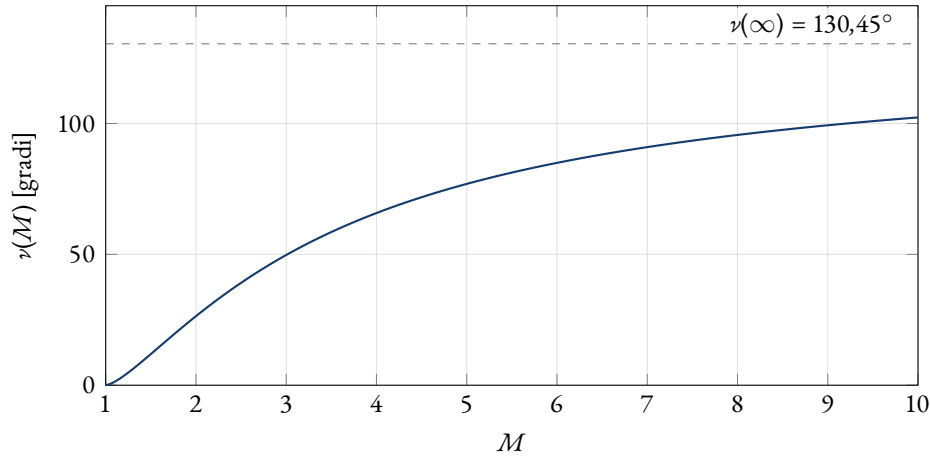


Figura 1.9. La funzione di Prandtl–Meyer per $\gamma = 1,4$: cresce rapidamente vicino a $M = 1$ e satura verso il limite teorico $\nu(\infty)$.

Procedura operativa (i quattro passi).

1. calcolare $\nu(M_1)$ dalla (1.19);
2. calcolare $\nu(M_2) = \nu(M_1) + \theta_2$ dalla (1.20);
3. invertire (numericamente o per tabella) la (1.19) per ottenere M_2 ;
4. sfruttare l'isentropicità (p_0 , T_0 costanti nel ventaglio) per pressioni e temperature:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}, \quad \frac{p_1}{p_2} = \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Quanto può girare una corrente supersonica?

Per $M \rightarrow \infty$ entrambi gli arcotangenti nella (1.19) tendono a $\pi/2$, e

$$\nu(\infty) = \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right) 90^\circ = 130,45^\circ \quad (\gamma = 1,4).$$

Una corrente inizialmente sonica potrebbe quindi, in teoria, girare attorno a uno spigolo di oltre 130° ; a valle, però, pressione e temperatura tenderebbero a zero: un limite matematico, non uno stato fisicamente raggiungibile (il modello di continuo e di gas perfetto decade ben prima). Il messaggio pratico resta: *il ventaglio di espansione è un meccanismo potentissimo di rotazione della corrente*, capace di angoli ben maggiori del $\theta_{\max}$ degli urti. Ce ne ricorderemo parlando di pressione di base (esercizio 18).

1.6.3 Esercizi svolti sulle espansioni

Esercizio svolto 14 — Ventaglio completo, con angoli delle linee di Mach

Dati. Corrente con $M_1 = 1,5$, $p_1 = 81,40$ kPa, $T_1 = 255,6$ K a uno spigolo convesso di $\theta_2 = 20^\circ$.

Richieste. $M_2, p_2, T_2, p_{02}, T_{02}$; gli angoli delle linee di Mach anteriore e posteriore rispetto alla direzione della corrente a monte.

Fase A — Funzione di Prandtl–Meyer. $\nu(1,5) = 11,91^\circ$; quindi, dalla (1.20),

$$\nu(M_2) = 11,91^\circ + 20^\circ = 31,91^\circ \quad \Rightarrow \quad M_2 = 2,207.$$

Fase B — Statiche per via isentropica. Con $p_0/p(1,5) = 3,671$ e $p_0/p(2,207) = 10,80$:

$$p_2 = p_1 \frac{p_0/p(M_1)}{p_0/p(M_2)} = 81,40 \text{ kPa} \times \frac{3,671}{10,80} = 27,66 \text{ kPa};$$

con $T_0/T(1,5) = 1,45$ e $T_0/T(2,207) = 1,974$:

$$T_2 = 255,6 \times \frac{1,45}{1,974} = 187,7 \text{ K}.$$

Fase C — Totali. Nel ventaglio p_0 e T_0 non cambiano:

$$p_{02} = p_{01} = 3,671 \times 81,40 \text{ kPa} = 298,8 \text{ kPa}, \quad T_{02} = T_{01} = 1,45 \times 255,6 = 370,6 \text{ K}.$$

Fase D — Geometria del ventaglio. L'angolo di Mach a monte è $\mu_1 = \arcsin(1/1,5) = 41,81^\circ$: la linea anteriore forma $41,81^\circ$ con la corrente a monte. A valle $\mu_2 = \arcsin(1/2,207) = 26,95^\circ$, ma la linea posteriore è inclinata di μ_2 *sulla corrente a valle*, che è già ruotata di 20° : rispetto alla direzione a monte essa forma

$$\mu_2 - \theta_2 = 26,95^\circ - 20^\circ = 6,95^\circ.$$

Il ventaglio si apre dunque fra $41,8^\circ$ e $6,9^\circ$: quasi 35° di apertura per soli 20° di rotazione della corrente.



Esercizio svolto 15 — Il diamante strumentato: risalire al Mach di volo

Dati. Un profilo a diamante con semiangolo 15° è a incidenza nulla in corrente supersonica. Un tubo di Pitot immerso nella regione a valle dello spigolo di massimo spessore (dove la corrente ha attraversato l'urto di bordo d'attacco e il ventaglio di 30° dello spigolo) misura $263,0 \text{ kPa}$; una presa statica sulla faccia posteriore, nella stessa regione, misura $10,13 \text{ kPa}$.

Richiesta. Il Mach della corrente indisturbata M_1 .

Fase A — Mach locale dal Pitot. Davanti al Pitot, immerso in corrente supersonica, sta un urto normale: la pressione letta è la totale *a valle di quell'urto*, p'_0 . Il rapporto misurato è

$$\frac{p'_0}{p_3} = \frac{263,0}{10,13} = 25,96,$$

e la formula di Rayleigh–Pitot (Appendice A), invertita numericamente, fornisce il Mach locale

$$M_3 = 4,450.$$

Fase B — A ritroso attraverso il ventaglio. Fra la faccia anteriore (regione 2) e quella posteriore (regione 3) la corrente ha girato di $2 \times 15^\circ = 30^\circ$ in espansione:

$$\nu(M_2) = \nu(M_3) - 30^\circ = 71,27^\circ - 30^\circ = 41,27^\circ \implies M_2 = 2,594.$$

Fase C — A ritroso attraverso l'urto di bordo d'attacco. Resta da trovare l' M_1 tale che un urto obliquo con deflessione 15° produca $M_2 = 2,594$. Imponendo $M_{n2} = M_2 \sin(\beta - 15^\circ)$ insieme alla relazione θ – β – M e risolvendo numericamente (in alternativa: per tentativi su M_1 , come si farebbe con le tabelle):

$$M_1 = 3,48 \simeq 3,5, \quad \text{con } \beta = 29,28^\circ, \quad M_{n1} = 1,703.$$

Verifica. Con $M_1 = 3,48$: $M_{n2} = 0,6397$ e $M_2 = 0,6397 / \sin 14,28^\circ = 2,594 \checkmark$. La combinazione urto + espansione + Pitot funziona come un «machmetro» completo del velivolo.



Il senso di tutto questo

L'espansione di Prandtl–Meyer è il gemello virtuoso dell'urto: gira la corrente senza produrre entropia, e la sua matematica si riduce a un'unica funzione, $\nu(M)$, con la legge additiva $\theta = \Delta\nu$. La coppia di strumenti è ora completa: urti per comprimere, ventagli per espandere. Nel prossimo paragrafo li useremo insieme sui profili supersonici.

1.7 La teoria urto–espansione

Dove stiamo andando

È il momento del raccolto: combiniamo urti obliqui e ventagli di Prandtl–Meyer per calcolare *esattamente* le forze aerodinamiche su profili supersonici a facce piane. Analizzeremo il profilo a diamante e la lastra piana incidente, scopriremo l'origine della resistenza d'onda, daremo uno sguardo alla scia (con la sua linea di scorrimento) e chiuderemo con il problema, tuttora aperto, della pressione di base.

1.7.1 Il metodo e il profilo a diamante

Su un profilo composto da segmenti rettilinei ogni spigolo genera un'onda nota: urto obliquo se comprime, ventaglio se espande. Poiché fra uno spigolo e il successivo la corrente è uniforme, la pressione su ogni faccia è *costante* e calcolabile con le formule esatte dei paragrafi precedenti; le forze si ottengono poi per semplice somma dei contributi $p \cdot (\text{area})$. Nessuna linearizzazione: questa è la **teoria urto–espansione**, la soluzione esatta (non viscosa) per i profili a facce piane.

Il caso più istruttivo è il **profilo a diamante simmetrico** di semiangolo ε a incidenza nulla (fig. 1.10):

- al bordo d'attacco la corrente è compressa e deviata di ε da un urto obliquo (facce anteriori: pressione p_2);
- allo spigolo di massimo spessore un ventaglio la espande di 2ε (facce posteriori: pressione $p_3 < p_2$);
- al bordo d'uscita un secondo urto la rimette in asse (per simmetria non serve calcolarlo ai fini delle forze).

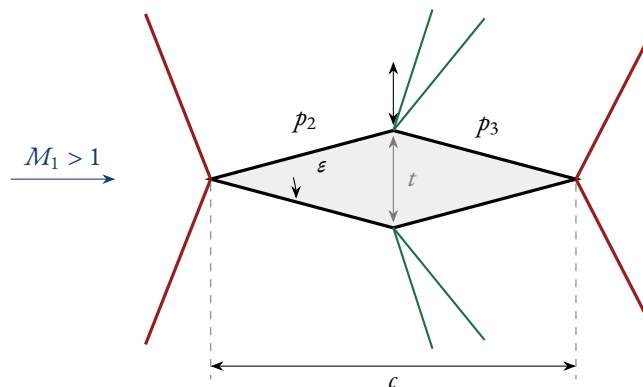


Figura 1.10. Profilo a diamante simmetrico a incidenza nulla: urti ai bordi d'attacco e d'uscita, ventagli allo spigolo di massimo spessore. Sulle facce anteriori agisce p_2 , su quelle posteriori p_3 .

A incidenza nulla la portanza è nulla per simmetria; la componente delle forze di pressione lungo la corrente non lo è. Ciascuna delle quattro facce ha lunghezza l e proiezione frontale $l \sin \varepsilon = t/2$; le facce anteriori spingono all'indietro con p_2 , le posteriori in avanti con p_3 :

$$D' = 2p_2 \frac{t}{2} - 2p_3 \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D' = (p_2 - p_3)t} \quad (1.21)$$

per unità di apertura. Poiché l'urto rende $p_2 > p_1$ e l'espansione $p_3 < p_2$, la resistenza è *positiva e finita* anche in fluido perfetto: è la **resistenza d'onda**, che non ha analogo subsonico (dove vale il paradosso di d'Alembert: resistenza nulla in 2D non viscoso, paradosso che si scioglie solo reintroducendo l'attrito). La sua origine profonda è l'entropia generata negli urti, ossia la perdita di pressione totale che il corpo semina nella corrente.

1.7.2 La lastra piana incidente

Il profilo supersonico più semplice — e aerodinamicamente il più efficiente — è la lastra piana di corda c a incidenza α :

- sul **dorso** il bordo d'attacco è uno spigolo convesso di angolo α : ventaglio di espansione, pressione $p_2 < p_1$ uniforme;
- sul **ventre** è uno spigolo concavo: urto obliquo, pressione $p_3 > p_1$ uniforme.

La risultante delle pressioni è perpendicolare alla lastra e vale $(p_3 - p_2)c$ per unità di apertura; proiettando su portanza e resistenza:

$$L' = (p_3 - p_2)c \cos \alpha, \quad D' = (p_3 - p_2)c \sin \alpha, \quad \frac{L'}{D'} = \cot \alpha. \quad (1.22)$$

Esercizio svolto 16 — Lastra piana a $M = 2,6$

Dati. Lastra piana infinitamente sottile, $\alpha = 5^\circ$, corrente a $M_1 = 2,6$.

Richieste. c_l e c_d .

Fase A — Dorso (espansione). $\nu(2,6) = 41,41^\circ$; $\nu(M_2) = 41,41^\circ + 5^\circ = 46,41^\circ \Rightarrow M_2 = 2,832$. Isentropicamente,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_0/p(2,6)}{p_0/p(2,832)} = \frac{19,95}{28,50} = 0,700.$$

Fase B — Ventre (urto). Per $M_1 = 2,6$, $\theta = 5^\circ$: $\beta = 26,41^\circ$, $M_{n1} = 2,6 \sin 26,41^\circ = 1,157$,

$$\frac{p_3}{p_1} = 1,394.$$

Fase C — Coefficienti. Con $q_1 = \frac{\gamma}{2} p_1 M_1^2$ e le (1.22):

$$c_l = \frac{2}{\gamma M_1^2} \left(\frac{p_3}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} \right) \cos \alpha = \frac{2}{1,4 \times 6,76} (0,694) \cos 5^\circ = 0,146,$$

$$c_d = \frac{2}{\gamma M_1^2} \left(\frac{p_3}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} \right) \sin \alpha = 0,0128, \quad E = \frac{c_l}{c_d} = \cot 5^\circ = 11,4.$$

Commento. L'efficienza $E = \cot \alpha$ è il tetto teorico non viscoso del volo supersonico bidimensionale: qualunque spessore la degrada (via la (1.21)), e nella realtà l'attrito la abbatta ulteriormente, come quantificheremo nel Problema 18. ■

1.7.3 La scia della lastra: dove va la corrente dopo il bordo d'uscita

Il quadro delle onde non si chiude al bordo d'uscita. Lì la corrente del dorso (veloce, espansa) e quella del ventre (lenta, compressa) devono riunirsi: sul dorso serve un urto di ricomprensione, sul ventre un ventaglio, e a valle le due correnti scorrono ai lati di una linea di scorrimento inclinata di un piccolo angolo Φ sulla direzione indisturbata. Le condizioni che fissano Φ sono le solite della linea di scorrimento: pressioni uguali e direzioni uguali (i moduli di velocità e le entropie restano diversi, perché i percorsi urto-espansione dei due filetti sono

diversi). Il motivo per cui la corrente non torna *esattamente* alle condizioni indisturbate è ancora una volta l'entropia: gli urti l'hanno alzata, e non c'è modo di tornare indietro.

Esercizio svolto 17 — Direzione della scia

Dati. Lastra piana a $\alpha = 20^\circ$ in corrente a $M_1 = 3$.

Richiesta. L'angolo Φ della linea di scorrimento a valle del bordo d'uscita.

Fase A — Regioni sul profilo. Dorso (espansione di 20°): $\nu(3) = 49,76^\circ$, $\nu(M_2) = 69,76^\circ \Rightarrow M_2 = 4,318$; $p_2/p_1 = 36,73/230,0 = 0,1597$.

Ventre (urto da 20°): $\beta = 37,76^\circ$, $M_3 = 1,994$, $p_3/p_1 = 3,771$, $p_{03}/p_{01} = 0,7960$.

Fase B — Sistema al bordo d'uscita. Detto Φ l'angolo (positivo verso l'alto) della scia, la corrente del dorso deve ricompimersi deviando di $\alpha + \Phi$ (urto su M_2), quella del ventre espandersi dello stesso angolo $\alpha + \Phi$ (ventaglio su M_3). Imponiamo $p_4 = p_5$.

Primo tentativo, $\Phi = 0$: urto da 20° su $M_2 = 4,318$ dà $p_4/p_2 = 5,75 \Rightarrow p_4/p_1 = 0,918$; espansione di 20° da M_3 dà $M_5 = 2,815$ e $p_5/p_1 = 1,041$. Poiché $p_5 > p_4$, occorre rinforzare entrambe le onde: $\Phi > 0$ (scia inclinata verso l'alto).

Secondo tentativo, $\Phi = 1^\circ$ (deviazioni di 21°): $p_4/p_1 = 0,981$, $p_5/p_1 = 0,966$: ora $p_4 > p_5$, siamo andati appena oltre.

Fase C — Soluzione. La radice di $p_4(\Phi) = p_5(\Phi)$, ottenuta per bisezione fra i due tentativi, è

$$\Phi = 0,89^\circ \text{ (verso l'alto)}, \quad p_4 = p_5 = 0,974 p_1.$$

(Con letture tabellari e interpolazioni lineari si otterrebbe $\Phi \simeq 0,7^\circ$: la differenza è tutta accuratezza di lettura, e conferma quanto detto nella Premessa.)

Commento fisico. Una scia deviata *verso l'alto* dietro un corpo portante sembra violare il terzo principio: la portanza dovrebbe accompagnarsi a un *downwash*. Il paradosso è solo locale: se si allarga lo sguardo all'intero campo, con tutte le interazioni fra le onde nella scia lontana, il bilancio globale di quantità di moto verticale torna con il segno giusto — l'upwash locale è compensato da un downwash distribuito altrove. E si noti: nulla di ciò che accade a valle del bordo d'uscita può influenzare le pressioni sulla lastra, perché in supersonico stazionario i disturbi non risalgono la corrente: portanza e resistenza calcolate nell'esercizio 16 restano valide così come sono. ■

1.7.4 La pressione di base

Nell'esercizio 10 avevamo assunto, sulla base tronca del cuneo, la pressione indisturbata p_1 . La realtà è più severa: agli spigoli della base la corrente supersonica tende a espandersi verso la zona ristagnante retrostante, il flusso separa, e la *pressione di base* p_B scende sotto p_1 , aggiungendo resistenza. Il fenomeno è dominato da effetti viscosi (separazione, ricircolo) e la sua previsione accurata resta, ancora oggi, un problema di frontiera anche per la CFD. Possiamo però toccare con mano la *sensibilità* del risultato con un modello dichiaratamente arbitrario ma istruttivo.

Esercizio svolto 18 — Sensibilità alla pressione di base

Dati. Il cuneo dell'esercizio 10 ($\varepsilon = 15^\circ$, $M_1 = 3$). *Modello assunto* (arbitrario, a solo scopo di sensibilità — i valori reali dipendono dalla fisica viscosa del ricircolo): (1) agli spigoli della base la corrente separa deviando di 15° verso il piano di simmetria; (2) la pressione di base è la media aritmetica $p_B = \frac{1}{2}(p_1 + p_3)$, con p_3 la pressione a valle dei ventagli d'angolo.

Richiesta. Il nuovo c_d e il confronto con il valore 0,155 dell'esercizio 10.

Fase A — Stato sulle facce. Dagli esercizi 9 e 10: $p_2/p_1 = 2,822$, e il Mach sulle facce è $M_2 = M_{n2}/\sin(\beta - \theta) = 0,6684/\sin 17,24^\circ = 2,255$.

Fase B — Espansione agli spigoli della base. La deviazione totale del filetto d'angolo è $15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$:

$$\nu(M_3) = \nu(2,255) + 30^\circ = 33,14^\circ + 30^\circ = 63,14^\circ \Rightarrow M_3 = 3,807,$$

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{p_3}{p_{03}} \frac{p_{03}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{117,0} \times 11,65 \times 2,822 = 0,281.$$

Fase C — Pressione di base e resistenza.

$$\frac{p_B}{p_1} = \frac{1}{2} (1 + 0,281) = 0,640,$$

$$c_d = \frac{4}{\gamma M_1^2} \left(\frac{p_2}{p_1} - \frac{p_B}{p_1} \right) \tan 15^\circ = \frac{4}{12,6} (2,822 - 0,640)(0,2679) = 0,186.$$

Confronto. Una riduzione del 36% della pressione di base ha gonfiato il c_d del 20% (da 0,155 a 0,186): la resistenza di base non è un dettaglio. Ogni corpo a base tronca (proiettili, corpi di coda, ugelli non adattati) paga questo tributo, e la sua stima richiede prove sperimentali o CFD viscosa: il presente calcolo mostra la sensibilità, non pretende di predire il valore vero. ■

Il senso di tutto questo

La teoria urto-espansione è l'anello di congiunzione fra la gasdinamica e l'aerodinamica applicata: con due soli ingredienti esatti calcoliamo portanza, resistenza d'onda ed efficienza di qualunque profilo a facce piane. Ne abbiamo anche visto i confini: la scia (dove l'entropia lascia il suo segno permanente) e la base (dove la viscosità riprende il comando). Nelle monografie sulla teoria linearizzata ritroveremo questi risultati come caso limite per onde deboli.

1.8 Nota storica: Gottinga, Prandtl e la nascita della teoria

Dove stiamo andando

Una pausa di prospettiva: la teoria di questa monografia ha più di un secolo, ed è nata in un contesto sorprendente — quando gli aeroplani esistevano appena e volavano a poche decine di chilometri orari.

All'inizio del Novecento l'università di Gottinga, in Bassa Sassonia, era uno dei grandi centri mondiali della matematica e della fisica: vi lavorarono, in epoche diverse, figure come Gauss, Riemann, Hilbert, Planck, Born e Heisenberg. Nel 1904 vi arrivò come professore di meccanica applicata Ludwig Prandtl (1875–1953), lo stesso anno in cui, al congresso dei matematici di Heidelberg, egli presentava l'idea di strato limite destinata a rifondare la meccanica dei fluidi teorica; negli anni Dieci avrebbe poi elaborato le teorie della linea portante e della superficie portante per l'ala finita, guadagnandosi il titolo, ampiamente riconosciuto, di padre dell'aerodinamica moderna.

Meno noto è che Prandtl fu anche un pioniere del moto comprimibile. Nel 1905 costruì a Gottinga un piccolo ugello supersonico da $M \simeq 1,5$, motivato da problemi di turbine a vapore e — curiosamente — dal trasporto pneumatico della segatura nelle segherie. Per alcuni anni studiò e fotografò con tecniche schlieren i sistemi di onde all'uscita di quegli ugelli: sequenze di urti obliqui ed espansioni, prodotte variando la controcompressione, che oggi riconosciamo come i regimi di ugello sotto- e sovraespanso. Erano gli stessi anni in cui i fratelli Wright muovevano i primi voli a motore, a velocità di poche decine di chilometri orari: la ricerca supersonica precedette di decenni il volo supersonico.

Lo sviluppo teorico arrivò con la tesi di dottorato di Theodor Meyer, allievo di Prandtl, discussa nel 1908 e dedicata ai processi di moto bidimensionale di un gas a velocità supersonica. In quel lavoro compaiono, in forma sostanzialmente moderna, l'angolo di Mach, la funzione che oggi chiamiamo di Prandtl–Meyer (tabulata

allora in funzione del rapporto p/p_0) e le prime relazioni e tabelle per gli urti obliqui. Vale la pena notare che il termine «numero di Mach» non esisteva ancora: lo avrebbe introdotto Jakob Ackeret solo negli anni Venti, in onore di Ernst Mach, il fisico e filosofo austriaco che aveva studiato e fotografato i moti ad alta velocità già negli anni Settanta dell'Ottocento.

I lavori di Prandtl e Meyer sulle onde oblique furono contemporanei degli studi di Rayleigh e Taylor sull'urto normale (1910): ricerca di base su fenomeni che allora parevano puramente accademici, e che avrebbero trovato piena applicazione solo con l'avvento del volo supersonico negli anni Quaranta. Molti allievi di quella scuola — Theodore von Kármán e Adolf Busemann fra tutti — avrebbero poi scritto i capitoli successivi dell'aerodinamica delle alte velocità.

Il senso di tutto questo

La lezione di metodo è limpida: la teoria che oggi usiamo per progettare prese d'aria e profili supersonici nacque quarant'anni prima che servisse, da curiosità scientifica pura. Investire nella comprensione dei fondamenti è raramente tempo perso.

1.9 Sintesi operativa

Dove stiamo andando

Questo paragrafo è il formulario ragionato della monografia: tutte le relazioni operative, raccolte per famiglia, con l'indicazione di quando usarle. È pensato per il ripasso rapido e per l'uso in verifica.

1.9.1 Onde di Mach

$$\mu = \arcsin \frac{1}{M}$$

Inclinazione dei disturbi infinitesimi; l'urto obliquo soddisfa sempre $\mu \leq \beta \leq 90^\circ$.

1.9.2 Urto obliquo: il principio della componente normale

Tutti i salti dipendono *solo* dalla componente normale del Mach a monte:

$$M_{n1} = M_1 \sin \beta.$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1)M_{n1}^2}{2 + (\gamma - 1)M_{n1}^2}, \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_{n1}^2 - 1),$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad M_{n2}^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_{n1}^2}{\gamma M_{n1}^2 - \frac{\gamma-1}{2}},$$

$$M_2 = \frac{M_{n2}}{\sin(\beta - \theta)}.$$

La componente tangenziale si conserva: $w_1 = w_2$.

1.9.3 Relazione θ - β - M

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2(\gamma + \cos 2\beta) + 2}$$

Da ricordare: esiste un $\theta_{\max}(M_1)$; per $\theta < \theta_{\max}$ due soluzioni (debole/forte; in natura quasi sempre la debole); per $\theta > \theta_{\max}$ l'urto si stacca e si incurva. La soluzione esplicita in β è la formula di Emanuel (1.11).

1.9.4 Espansione di Prandtl–Meyer

$$d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}, \quad \theta = \nu(M_2) - \nu(M_1),$$

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2 - 1)} - \arctan \sqrt{M^2 - 1}.$$

Il ventaglio è isentropico: p_0 e T_0 si conservano; statiche dalle isentropiche (Appendice A).

1.9.5 Teoria urto–espansione

$$\text{diamante a } \alpha = 0 : \quad D' = (p_2 - p_3) t;$$

$$\text{lastra piana:} \quad \begin{cases} L' = (p_3 - p_2) c \cos \alpha \\ D' = (p_3 - p_2) c \sin \alpha \end{cases} \quad E = \cot \alpha.$$

$$\text{Coefficienti con } q_1 = \frac{\gamma}{2} p_1 M_1^2 \text{ e } C_p = \frac{2}{\gamma M_1^2} \left(\frac{p}{p_1} - 1 \right).$$

1.9.6 Interazioni: le condizioni di compatibilità

- **Riflessione da parete:** il riflesso impone di nuovo la deflessione θ su M_2 ; $\Phi = \beta_2 - \theta \neq \beta_1$. Se $\theta > \theta_{\max}(M_2)$: riflessione di Mach.
- **Linea di scorrimento:** stessa p , stessa direzione; discontinui s , T , ρ , $|V|$.
- **Sistemi a più urti:** a parità di Mach finale conservano più pressione totale di un urto singolo.

1.9.7 Schema di attacco dei problemi

1. Disegnare il campo: dove comprime (urto) e dove espande (ventaglio)?
2. Per ogni urto: θ noto $\rightarrow \beta$ (relazione θ – β – M o Emanuel) $\rightarrow M_{n1} \rightarrow \text{salti} \rightarrow M_2$.
3. Per ogni ventaglio: $\nu(M_2) = \nu(M_1) + \theta$, poi isentropiche.
4. Concatenare le regioni moltiplicando i rapporti; convertire le unità *alla fine*.
5. Verificare la fisica: p e T crescono negli urti e calano nei ventagli; p_0 cala solo negli urti; M fa l'opposto di p .

1.10 Ventuno problemi svolti

Dove stiamo andando

Questo paragrafo è la palestra conclusiva: ventuno problemi che ripercorrono, in ordine, tutto l'arco della monografia — urti obliqui, riflessioni, intersezioni, ventagli di espansione, teoria urto–espansione e infine il ruolo di γ . Tutti i dati sono in unità SI; ogni valore numerico è verificato per via indipendente. Il consiglio d'uso è sempre lo stesso: prima si tenta da soli, poi si confronta.

Problema 1 — Dall'anemometria all'urto: catena completa

Dati. Una corrente d'aria con $p_1 = 95,76 \text{ kPa}$, $T_1 = 288,9 \text{ K}$ e $V_1 = 1022,6 \text{ m/s}$ attraversa un urto obliquo con angolo d'onda $\beta = 35^\circ$.

Richieste. θ , e a valle p_2 , T_2 , M_2 , V_2 .

Fase A — Mach a monte. $a_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = \sqrt{1,4 \times 287 \times 288,9} = 340,7 \text{ m/s}$, quindi $M_1 = 1022,6/340,7 = 3,00$.

Fase B — Componente normale e salti. $M_{n1} = 3,00 \sin 35^\circ = 1,721$;

$$\frac{p_2}{p_1} = 3,291, \quad \frac{T_2}{T_1} = 1,474, \quad M_{n2} = 0,6355.$$

Fase C — Deflessione. Dalla relazione θ - β - M (1.9) con $M_1 = 3$, $\beta = 35^\circ$: $\theta = 17,59^\circ$.

Fase D — Stato a valle.

$$p_2 = 3,291 \times 95,76 = 315,1 \text{ kPa}, \quad T_2 = 1,474 \times 288,9 = 425,8 \text{ K},$$

$$M_2 = \frac{0,6355}{\sin(35^\circ - 17,59^\circ)} = 2,122, \quad V_2 = M_2 \sqrt{\gamma R T_2} = 2,122 \times 413,6 = 877,9 \text{ m/s}.$$

Si noti la sequenza-tipo: da (p, T, V) ad M , dall'angolo d'onda alla componente normale, e da lì tutto il resto. ■

Problema 2 — Perdita di pressione totale su un semicuneo

Dati. Semicuneo di $\theta = 10^\circ$ in corrente a $M_1 = 2$.

Richiesta. p_{02}/p_{01} attraverso l'urto.

Dalla (1.9): $\beta = 39,31^\circ$, quindi $M_{n1} = 2 \sin 39,31^\circ = 1,267$. La perdita di pressione totale dipende solo da M_{n1} :

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = 0,9846.$$

Un urto con M_{n1} appena sopra l'unità è quasi isentropico: si perde meno del 2%. È il motivo per cui le cascate di urti deboli (par. 1.5.2) sono così efficienti. ■

Problema 3 — La massima pressione con urto attaccato

Dati. Corrente a $M_1 = 3$ con $p_1 = 101 \text{ kPa}$ su un cuneo la cui apertura può crescere.

Richiesta. La massima pressione ottenibile sulle facce del cuneo *finché l'urto resta attaccato e rettilineo*.

L'urto resta attaccato fino a $\theta = \theta_{\max}$. Per $M_1 = 3$:

$$\theta_{\max} = 34,07^\circ, \quad \beta = 65,24^\circ, \quad M_{n1} = 3 \sin 65,24^\circ = 2,724,$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 8,492 \Rightarrow p_2 = 8,492 \times 101 \text{ kPa} = 857,7 \text{ kPa}.$$

Oltre $\theta_{\max}$ l'urto si stacca: la pressione al naso continuerebbe a crescere, ma non più con la teoria dell'urto obliquo rettilineo. ■

Problema 4 — Problema inverso: dal salto di pressione alla deflessione

Dati. $M_1 = 3,5$; si misura $p_2/p_1 = 5,48$.

Richieste. β e θ .

Fase A — Da p_2/p_1 a M_{n1} . Invertendo la (1.6):

$$M_{n1} = \sqrt{1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right)} = \sqrt{1 + \frac{2,4}{2,8} \times 4,48} = 2,200.$$

Fase B — Da M_{n1} agli angoli.

$$\beta = \arcsin \frac{2,200}{3,5} = 38,94^\circ,$$

e dalla (1.9) con $M_1 = 3,5$ e questo β : $\theta = 23,6^\circ$.

Percorso inverso rispetto al Problema 1: la fisica dell'urto è tutta in M_{n1} , che fa da «snodo» in entrambe le direzioni. ■

Problema 5 — Cuneo in condizioni standard al suolo

Dati. Semicuneo di $\theta = 20^\circ$ a $M_1 = 3$ in aria standard al livello del mare ($p_1 = 101,325$ kPa, $T_1 = 288,15$ K).

Richieste. p_2 , T_2 , M_2 .

Dalla (1.9): $\beta = 37,76^\circ$, $M_{n1} = 3 \sin 37,76^\circ = 1,837$;

$$\frac{p_2}{p_1} = 3,771, \quad \frac{T_2}{T_1} = 1,560, \quad M_{n2} = 0,6080,$$

$$p_2 = 382,1 \text{ kPa}, \quad T_2 = 449,4 \text{ K}, \quad M_2 = \frac{0,6080}{\sin 17,76^\circ} = 1,994.$$

È la configurazione «di riferimento» ($M = 3$, $\theta = 20^\circ$) che ritroveremo più volte in questa raccolta. ■

Problema 6 — Angolo del riflesso

Dati. $M_1 = 3,6$; spigolo a compressione di $\theta = 20^\circ$; l'urto incide su una parete piana orizzontale.

Richiesta. L'angolo Φ dell'urto riflesso rispetto alla parete.

Fase A — Incidente. $\beta_1 = 34,11^\circ$; $M_{n1} = 3,6 \sin 34,11^\circ = 2,019$; $M_2 = 2,355$.

Fase B — Riflesso. Deve deviare $M_2 = 2,355$ di 20° : $\beta_2 = 45,05^\circ$.

Fase C — Angolo con la parete.

$$\Phi = \beta_2 - \theta = 45,05^\circ - 20^\circ = 25,05^\circ.$$

Di nuovo, riflessione non speculare: $34,1^\circ$ in ingresso, $25,1^\circ$ in uscita. ■

Problema 7 — Riflessione assegnata tramite l'angolo d'onda

Dati. $M_1 = 2,8$, $p_1 = 101,3$ kPa, $T_1 = 300$ K; l'urto *incidente* forma $\beta_1 = 30^\circ$ con la corrente e si riflette su una parete piana.

Richieste. Nella regione a valle del riflesso: p_3 , T_3 , M_3 , p_{03} .

Fase A — Incidente (da β , non da θ). $M_{n1} = 2,8 \sin 30^\circ = 1,400$; la (1.9) dà la deflessione prodotta: $\theta = 11,14^\circ$. Salti:

$$\frac{p_2}{p_1} = 2,120, \quad \frac{T_2}{T_1} = 1,255, \quad M_2 = 2,288, \quad \frac{p_{02}}{p_{01}} = 0,9582.$$

Fase B — Riflesso. Deviazione di nuovo $11,14^\circ$ su $M_2 = 2,288$: $\beta_2 = 35,64^\circ$, $M_n = 1,333$;

$$\frac{p_3}{p_2} = 1,906, \quad \frac{T_3}{T_2} = 1,212, \quad M_3 = 1,856, \quad \frac{p_{03}}{p_{02}} = 0,9719.$$

Fase C — Stato finale. Con $p_{01}/p_1 = 27,14$:

$$p_3 = 1,906 \times 2,120 \times 101,3 = 409,4 \text{ kPa (4,04 atm)}, \quad T_3 = 1,212 \times 1,255 \times 300 = 456,1 \text{ K},$$

$$p_{03} = 0,9719 \times 0,9582 \times 27,14 \times 101,3 \text{ kPa} = 2564 \text{ kPa (25,31 atm)}.$$

■

Problema 8 — Il Pitot ipersonico ringrazia l'urto obliquo

Dati. Corrente a $M_1 = 4$, $p_1 = 1 \text{ atm}$. Si confrontino le pressioni totali disponibili a valle di: (a) un urto normale; (b) un urto obliquo con $\beta = 40^\circ$ seguito da un urto normale (è ciò che vede un Pitot montato dietro una rampa).

Richieste. p_0 finale nei due casi e loro rapporto.

Fase A — Caso (a). Isentropica: $p_{01}/p_1 = 151,84$. Urto normale a $M = 4$: $p_{02}/p_{01} = 0,1388$;

$$p_{02}^{(a)} = 0,1388 \times 151,84 = 21,07 \text{ atm}.$$

Fase B — Caso (b). Urto obliquo: $M_{n1} = 4 \sin 40^\circ = 2,571$, $\theta = 26,2^\circ$, $M_2 = 2,123$, $p_{02}/p_{01} = 0,4711$. Urto normale a $M_2 = 2,123$: $p_{03}/p_{02} = 0,6635$;

$$p_{03}^{(b)} = 0,6635 \times 0,4711 \times 151,84 = 47,46 \text{ atm}.$$

Fase C — Confronto.

$$\frac{p_0^{(b)}}{p_0^{(a)}} = \frac{47,46}{21,07} = 2,25.$$

La rampa che «prepara» la corrente con un urto obliquo più che raddoppia la pressione totale recuperata: è il Problema 1.5.2 riletto dal punto di vista della strumentazione e delle prese d'aria. ■

Problema 9 — Intersezione di famiglie opposte, con linea di scorrimento

Dati. $M_1 = 3$, $p_1 = 1 \text{ atm}$. Dalla parete inferiore parte un urto sinistrorso con deflessione $\theta_2 = 20^\circ$ (verso l'alto); dalla superiore un urto destrorso con $\theta_3 = 15^\circ$ (verso il basso). I due urti si intersecano e si rifrangono (par. 1.5.3).

Richieste. L'inclinazione Φ della linea di scorrimento, la pressione comune $p_4 = p_{4'}$ e le deflessioni dei rami rifratti.

Fase A — Regioni dietro i due urti primari.

$$\text{regione 2 } (\theta = 20^\circ) : \beta = 37,76^\circ, M_2 = 1,994, p_2/p_1 = 3,771;$$

$$\text{regione 3 } (\theta = 15^\circ) : \beta = 32,24^\circ, M_3 = 2,255, p_3/p_1 = 2,822.$$

Fase B — Condizioni sulla linea di scorrimento. Detta Φ l'inclinazione (positiva verso l'alto) della scia, il ramo rifratto che attraversa la corrente 2 (diretta a $+20^\circ$) la devia di $20^\circ - \Phi$; quello che attraversa la corrente 3 (diretta a -15°) la devia di $\Phi + 15^\circ$. Imponiamo $p_4(\Phi) = p_{4'}(\Phi)$.

Tentativo $\Phi = 0$: $p_{4'}/p_1 = 10,72$ contro $p_4/p_1 = 6,55$ — il ramo che lavora sulla corrente 2 è troppo forte: la scia deve inclinarsi verso l'alto per scaricarla.

Fase C — Soluzione (per bisezione):

$$\Phi = 4,80^\circ, \quad p_4 = p_{4'} = 8,35 \text{ atm} = 846,3 \text{ kPa};$$

le deflessioni rifratte risultano $20^\circ - 4,80^\circ = 15,2^\circ$ (ramo su corrente 2, con $M_{4'} = 1,43$) e $4,80^\circ + 15^\circ = 19,8^\circ$ (ramo su corrente 3, con $M_4 = 1,46$). La scia pende verso il lato dell'urto più debole, come c'era da aspettarsi: comanda l'urto da 20° . ■

Problema 10 — Espansione con tutte le grandezze totali

Dati. $M_1 = 2$, $p_1 = 3 \text{ atm} = 304,0 \text{ kPa}$, $T_1 = 400 \text{ K}$; spigolo convesso di 30° .

Richieste. M_2 , p_2 , T_2 , e le totali p_0 , T_0 .

Fase A — Ventaglio. $\nu(2) = 26,38^\circ$; $\nu(M_2) = 56,38^\circ \Rightarrow M_2 = 3,368$.

Fase B — Statiche.

$$p_2 = p_1 \frac{p_0/p(2)}{p_0/p(3,368)} = 3 \times \frac{7,824}{63,17} = 0,372 \text{ atm} = 37,7 \text{ kPa},$$

$$T_2 = 400 \times \frac{1,8}{3,269} = 220,2 \text{ K}.$$

Fase C — Totali (costanti nel ventaglio):

$$T_0 = 1,8 \times 400 = 720 \text{ K}, \quad p_0 = 7,824 \times 3 = 23,47 \text{ atm} = 2378 \text{ kPa}.$$

Un controllo utile: ricalcolando p_0 e T_0 dallo stato 2 si ottengono gli stessi valori — la firma dell'isentropicità. ■

Problema 11 — Geometria del ventaglio da un rapporto di pressioni

Dati. $M_1 = 3$; a valle di un'espansione si misura $p_2/p_1 = 0,4$.

Richieste. Gli angoli delle linee di Mach anteriore e posteriore rispetto alla corrente a monte.

Fase A — Mach a valle (isentropica invertita):

$$\frac{p_0}{p_2} = \frac{p_0/p_1}{0,4} = \frac{36,73}{0,4} = 91,83 \Rightarrow M_2 = 3,632.$$

Fase B — Deflessione. $\theta = \nu(3,632) - \nu(3) = 60,58^\circ - 49,76^\circ = 10,82^\circ$.

Fase C — Linee di Mach.

$$\mu_1 = \arcsin \frac{1}{3} = 19,47^\circ \quad (\text{anteriore});$$

$$\mu_2 = \arcsin \frac{1}{3,632} = 15,98^\circ \Rightarrow \mu_2 - \theta = 15,98^\circ - 10,82^\circ = 5,17^\circ$$

(posteriore, rispetto alla corrente a monte).

■

Problema 12 — Espandere e comprimere: l'entropia non perdona

Dati. $M_1 = 4$. La corrente incontra prima uno spigolo convesso di 15° , poi uno concavo di 15° che la riporta nella direzione originaria.

Richieste. M_3 e p_3/p_1 finali; commento.

Fase A — Espansione. $\nu(4) = 65,78^\circ$; $\nu(M_2) = 80,78^\circ \Rightarrow M_2 = 5,443$; $p_2/p_1 = 0,1737$ (isentropica).

Fase B — Compressione (urto). Urto da 15° su $M_2 = 5,443$: $\beta = 23,50^\circ$, $M_n = 2,170$;

$$M_3 = 3,730, \quad \frac{p_3}{p_1} = 0,1737 \times 5,329 = 0,926, \quad \frac{p_{03}}{p_{01}} = 0,6418.$$

Commento. La corrente torna parallela a se stessa ma *non* torna in sé: $M_3 = 3,73 < 4$ e $p_3 = 0,93 p_1 < p_1$. Il ventaglio era reversibile, l'urto no: il 36% di pressione totale è andato perduto e lo stato finale ne porta il segno. Espansione e compressione della stessa ampiezza *non* sono operazioni inverse quando la compressione passa per un urto. ■

Problema 13 — (Concettuale) La riflessione sulla polare d'urto

Richiesta. Descrivere come si risolve graficamente la riflessione regolare del par. 1.5.1 con le polari d'urto del par. 1.4.

Soluzione. Si traccia la polare relativa a M_1^* ; il punto di funzionamento dell'urto incidente è l'intersezione della retta a inclinazione θ (dall'origine) con la polare, sul ramo debole: quel punto fornisce M_2^* e quindi M_2 . Si costruisce allora la *seconda* polare, quella di M_2^* , il cui asse è ruotato di θ (la corrente in regione 2 è inclinata di θ). L'urto riflesso deve riportare la deflessione a zero: il suo punto di funzionamento è l'intersezione della seconda polare con l'asse orizzontale originario (deflessione totale nulla), di nuovo sul ramo debole. Da quel punto si leggono M_3^* e, tramite le relazioni della polare, tutti i salti del riflesso. La costruzione rende anche evidente il criterio di esistenza: se la seconda polare è così piccola da non intersecare l'asse originario, la riflessione regolare è impossibile e subentra la riflessione di Mach (par. 1.5.5). ■

Problema 14 — Pitot a valle di un urto obliquo

Dati. $M_1 = 3$, $p_1 = 101,3$ kPa; spigolo a compressione di 20° ; un tubo di Pitot è immerso nella corrente a valle dell'urto.

Richiesta. La pressione letta dal Pitot.

Fase A — Regione a valle dell'urto obliquo. È il caso di riferimento: $M_2 = 1,994$, $p_2 = 3,771 p_1$.

Fase B — Il Pitot vede la sua corrente. Poiché $M_2 > 1$, davanti alla presa si forma un urto normale; la lettura è la Rayleigh–Pitot su M_2 :

$$\frac{p'_0}{p_2} \Big|_{M=1,994} = 5,611.$$

Fase C — Lettura.

$$p_{\text{Pitot}} = 5,611 \times 3,771 \times 101,3 \text{ kPa} = 2144 \text{ kPa} = 21,16 \text{ atm}.$$

Errore classico da evitare: applicare la Rayleigh–Pitot a M_1 e p_1 , dimenticando che il Pitot è immerso nella regione 2. ■

Problema 15 — (Concettuale) Basta la relazione θ – β – M per l'intersezione?

Richiesta. Nel Problema 9, sarebbe stato possibile determinare la configurazione a valle dell'intersezione usando soltanto la relazione θ – β – M e i salti d'urto, senza costruzioni sui diagrammi pressione–deflessione?

Soluzione. No, non direttamente. Il punto è che l'incognita Φ compare *simultaneamente* nelle deflessioni dei due rami rifratti ($20^\circ - \Phi$ e $\Phi + 15^\circ$), accoppiate dalla condizione $p_4 = p_4'$: è un sistema non lineare in cui la relazione θ - β - M è solo uno degli ingredienti. La chiusura richiede o l'intersezione grafica dei due diagrammi p - θ (costruiti dagli stati 2 e 3), o — come nel nostro svolgimento — un'iterazione numerica sulla stessa condizione. In altre parole: le relazioni d'urto forniscono le *mappe* $\theta \mapsto p$ per ciascuna famiglia; la soluzione dell'interazione è il punto in cui le due mappe si incontrano, e per trovarlo serve un procedimento di compatibilità, non una formula singola. ■

Problema 16 — Profilo a diamante in incidenza: forze complete

Dati. Profilo a diamante simmetrico con semiangolo $\varepsilon = 15^\circ$, spessore massimo $t = 0,1524$ m, apertura $b = 0,3048$ m, ad $\alpha = 5^\circ$ in corrente a $M_1 = 2$ con $p_1 = 101,3$ kPa.

Richieste. Portanza e resistenza del pannello alare.

Fase A — Geometria. Corda $c = t/\tan \varepsilon = 0,1524/0,2679 = 0,5688$ m; lunghezza di ciascuna delle quattro facce $l = (c/2)/\cos \varepsilon = 0,2944$ m.

Fase B — Deviazioni locali. Con $\alpha = 5^\circ$ le deflessioni al bordo d'attacco sono $\varepsilon - \alpha = 10^\circ$ (faccia superiore anteriore, a) ed $\varepsilon + \alpha = 20^\circ$ (inferiore anteriore, c); allo spigolo di massimo spessore entrambe le correnti escono di $2\varepsilon = 30^\circ$ verso le facce posteriori b e d .

Fase C — Pressioni sulle quattro facce.

$$a : \text{urto } 10^\circ \text{ su } M = 2 : M_a = 1,641, \quad p_a = 1,707 p_1 = 172,9 \text{ kPa};$$

$$b : \text{espansione } 30^\circ \text{ da } M_a : M_b = 2,815, \quad p_b = 28,1 \text{ kPa};$$

$$c : \text{urto } 20^\circ \text{ su } M = 2 : M_c = 1,210, \quad p_c = 2,843 p_1 = 288,1 \text{ kPa};$$

$$d : \text{espansione } 30^\circ \text{ da } M_c : M_d = 2,281, \quad p_d = 58,3 \text{ kPa}.$$

Fase D — Forze in assi corpo. Con le proiezioni delle normali alle facce:

$$N' = (p_c + p_d - p_a - p_b)l \cos \varepsilon = 41\,326 \text{ N/m}, \quad A' = (p_a - p_b + p_c - p_d)l \sin \varepsilon = 28\,542 \text{ N/m}.$$

Fase E — Rotazione in assi vento e integrazione in apertura.

$$L' = N' \cos \alpha - A' \sin \alpha = 38\,681 \text{ N/m}, \quad D' = N' \sin \alpha + A' \cos \alpha = 32\,035 \text{ N/m};$$

$$L = L'b = 11\,790 \text{ N}, \quad D = D'b = 9764 \text{ N}, \quad \frac{L}{D} = 1,21.$$

Commento. Un'efficienza di appena 1,2: il diamante con $\varepsilon = 15^\circ$ è *molto* spesso ($t/c \simeq 27\%$) e paga una resistenza d'onda enorme. Il confronto con la lastra piana del Problema 17 ($E = 11,4$ ad $\alpha = 5^\circ$) è la dimostrazione numerica di un dogma del progetto supersonico: *i profili devono essere sottili*. ■

Problema 17 — La lastra piana su tutto l'arco di incidenza

Dati. Lastra piana di corda $c = 1$ m (per unità di apertura) a $M_1 = 3$, $p_1 = 101,3$ kPa, $T_1 = 270$ K; incidenze da 0° a 30° a passi di 5° .

Richieste. Tabella di p e T su dorso e ventre, L' , D' , $E = L/D$; grafico di L' e D' .

Fase A — Schema per ogni α . Dorso: espansione di α da $M = 3$ ($\nu_2 = 49,76^\circ + \alpha$, poi isentropiche). Ventre: urto obliquo con $\theta = \alpha$. Forze dalla (1.22).

Fase B — Risultati (verificati numericamente):

α [°]	p_{dorso} [kPa]	p_{ventre} [kPa]	T_{dorso} [K]	T_{ventre} [K]	L' [kN/m]	D' [kN/m]	E
0	101,3	101,3	270,0	270,0	0,0	0,0	—
5	67,6	147,3	240,6	300,9	79,4	6,9	11,43
10	43,7	208,2	212,3	335,3	162,0	28,6	5,67
15	27,2	285,9	185,4	374,8	249,9	67,0	3,73
20	16,2	382,1	159,8	421,1	343,9	125,2	2,75
25	9,2	499,0	135,9	475,5	444,0	207,0	2,14
30	4,9	644,0	113,5	541,8	553,5	319,6	1,73

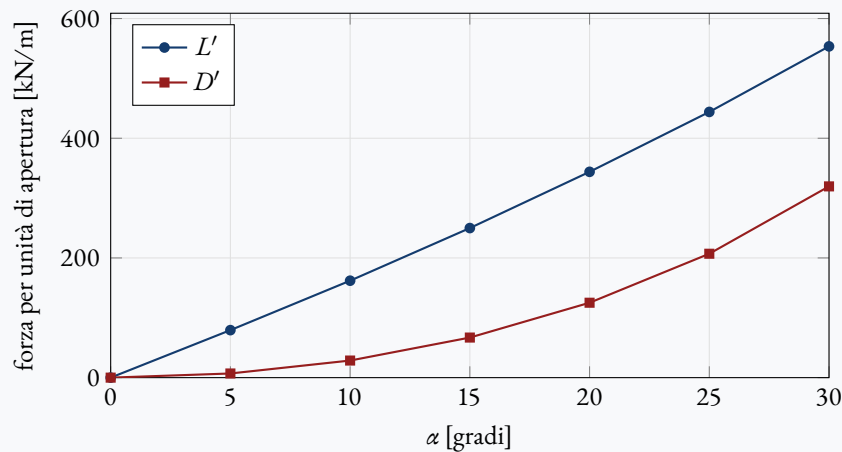


Figura 1.11. Lastra piana a $M = 3$: portanza e resistenza per unità di apertura in funzione dell'incidenza.

Commento. Tre osservazioni. (1) L'asimmetria dei contributi: già ad $\alpha = 20^\circ$ il ventre lavora quasi 4 volte sopra l'ambiente mentre il dorso è sceso a un sesto: in supersonico la portanza è dominata dalla *sovrapressione ventrale* più che dalla depressione dorsale — l'opposto del subsonico. (2) L' cresce quasi linearmente ben oltre i piccoli angoli, senza alcuno stallo: non c'è separazione nel modello non viscoso. (3) L'efficienza $E = \cot \alpha$ crolla con l'incidenza: il volo supersonico efficiente è un volo a piccoli angoli. ■

Problema 18 — Quanto pesa l'attrito? Un confronto dichiarato

Dati. Lastra piana con $c = 1$ m ad $\alpha = 2^\circ$ in volo a $M_1 = 2$ al livello del mare ($p_1 = 101,325$ kPa, $T_1 = 288,15$ K, $\rho_1 = 1,225$ kg/m³, $\mu = 1,789 \times 10^{-5}$ Pa s).

Modello di attrito dichiarato: strato limite interamente turbolento e incomprimibile, coefficiente d'attrito medio per faccia $C_f = 0,074 Re_c^{-1/5}$ — una stima di prima approssimazione che trascura gli effetti di comprimibilità sul C_f (che a $M = 2$ lo ridurrebbero del 10–20%); il confronto d'ordine di grandezza resta valido.

Richieste. L' , resistenza d'onda D'_w , resistenza d'attrito D'_f e peso relativo delle due.

Fase A — Forze di pressione. $V_1 = 2 a_1 = 680,6$ m/s. Dorso (espansione 2°): $p_2 = 90,4$ kPa; ventre (urto 2°): $p_3 = 113,3$ kPa;

$$L' = (p_3 - p_2) c \cos 2^\circ = 22\,880 \text{ N/m}, \quad D'_w = (p_3 - p_2) c \sin 2^\circ = 799 \text{ N/m}.$$

Fase B — Attrito.

$$Re_c = \frac{\rho_1 V_1 c}{\mu} = \frac{1,225 \times 680,6 \times 1}{1,789 \times 10^{-5}} = 4,66 \times 10^7, \quad C_f = \frac{0,074}{(4,66 \times 10^7)^{1/5}} = 0,00217;$$

con $q_1 = \frac{1}{2} \rho_1 V_1^2 = 283,7$ kPa e due facce bagnate:

$$D'_f = 2 q_1 C_f c = 1229 \text{ N/m}.$$

Fase C — Bilancio.

$$D' = D'_w + D'_f = 2028 \text{ N/m}, \quad \frac{D'_f}{D'} = 61\%.$$

Ai piccoli angoli l'attrito *domina* la resistenza (e l'efficienza reale scende da $\cot 2^\circ = 28,6$ a $L'/D' \simeq 11,3$): la teoria non viscosa di questa monografia dà la portanza e la resistenza d'onda, ma il progetto vero deve sempre aggiungere lo strato limite. ■

Problema 19 — Coefficiente di resistenza di un cuneo a $M = 4$

Dati. Cuneo simmetrico con semiangolo 20° a $M_1 = 4$, incidenza nulla, base alla pressione ambiente p_1 .

Richiesta. c_d riferito alla corda.

Urto da 20° su $M = 4$: $\beta = 32,46^\circ$, $M_{n1} = 4 \sin 32,46^\circ = 2,147$, $p_2/p_1 = 5,212$. Con lo stesso bilancio dell'esercizio 10:

$$c_d = \frac{4}{\gamma M_1^2} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \tan 20^\circ = \frac{4}{1,4 \times 16} \times 4,212 \times 0,3640 = 0,274.$$

Quasi il doppio del cuneo da 15° a $M = 3$ ($c_d = 0,155$): la resistenza d'onda cresce ferocemente con l'apertura del cuneo. ■

Problemi 20 e 21 — Il ruolo di γ : gas caldi e atmosfere diverse

Dati. Urto obliquo con $\theta = 20^\circ$ a $M_1 = 3$, calcolato per $\gamma = 1,4$ (aria fredda) e per $\gamma = 1,2$ (rappresentativo di gas ad alta temperatura con modi vibrazionali eccitati, o di atmosfere a molecole complesse).

Richieste. β e p_2/p_1 nei due casi; commento sulla validità del modello.

Fase A — $\gamma = 1,4$ (riferimento): $\beta = 37,76^\circ$, $M_{n1} = 1,837$, $p_2/p_1 = 3,771$.

Fase B — $\gamma = 1,2$. Ripetendo l'intera catena (θ - β - M e salto di pressione, entrambe con $\gamma = 1,2$):

$$\beta = 35,56^\circ, \quad M_{n1} = 3 \sin 35,56^\circ = 1,745, \quad \frac{p_2}{p_1} = 3,230.$$

Commento. Abbassare γ *appiattisce* l'urto ($-2,2^\circ$) e ne riduce il salto di pressione (-14%): un gas con più gradi di libertà interni «assorbe» parte della compressione nei modi interni. *Limite di validità da dichiarare:* trattare γ come costante al valore 1,2 è solo un'approssimazione di comodo — nei gas reali ad alta temperatura γ varia con T attraverso l'urto e servono modelli di gas in equilibrio o in non-equilibrio chimico; questi due problemi mostrano la *tendenza*, non il valore esatto. È comunque il primo assaggio quantitativo del perché l'aerotermodinamica del rientro non possa usare le tabelle dell'aria fredda. ■

Il senso di tutto questo

Ventuno problemi, un solo metodo: identificare le onde, applicare a ciascuna il suo strumento esatto (M_{n1} per gli urti, $\Delta \nu$ per i ventagli), concatenare le regioni, verificare la fisica. Chi ha rifatto questi calcoli in autonomia possiede per intero questo blocco del percorso di aerodinamica comprimibile — e ha in mano gli strumenti per le prese d'aria, i profili supersonici e, più avanti, l'ipersonica.

Richiami: isentropiche, urto normale, Rayleigh–Pitot

Raccogliamo le relazioni della monografia precedente che qui usiamo di continuo. Il gas è perfetto a calori specifici costanti, con $\gamma = 1,4$ per l'aria fredda salvo diverso avviso.

Relazioni isentropiche (grandezze totali)

Valide lungo ogni trasformazione adiabatica reversibile — quindi in tutto il campo *tranne* che attraverso gli urti (dove sopravvive solo la prima, perché l'urto è adiabatico):

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2, \quad \frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Velocità del suono: $a = \sqrt{\gamma R T}$ con $R = 287 \text{ J/(kg K)}$ per l'aria.

Urto normale

Con M_1 il Mach a monte (normale al fronte):

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1), & \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2}, & \frac{T_2}{T_1} &= \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}, \\ M_2^2 &= \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}, & \frac{p_{02}}{p_{01}} &= \left[\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)} \right]^{1/(\gamma-1)}. \end{aligned}$$

La temperatura totale si conserva ($T_{02} = T_{01}$); la pressione totale no. L'urto obliquo usa queste stesse formule con $M_1 \rightarrow M_{n1} = M_1 \sin \beta$.

Formula di Rayleigh–Pitot

Un tubo di Pitot in corrente supersonica legge la pressione totale a valle dell'urto normale che gli si forma davanti:

$$\frac{p'_0}{p_1} = \left[\frac{(\gamma+1)^2 M_1^2}{4\gamma M_1^2 - 2(\gamma-1)} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \frac{1 - \gamma + 2\gamma M_1^2}{\gamma + 1},$$

dove p_1 è la pressione statica della corrente in cui il Pitot è immerso e M_1 il suo Mach *locale* (non necessariamente quello di volo: si vedano l'esercizio 6.2 e il Problema 14). L'inversione $p'_0/p_1 \rightarrow M_1$ si esegue per via numerica o tabellare.