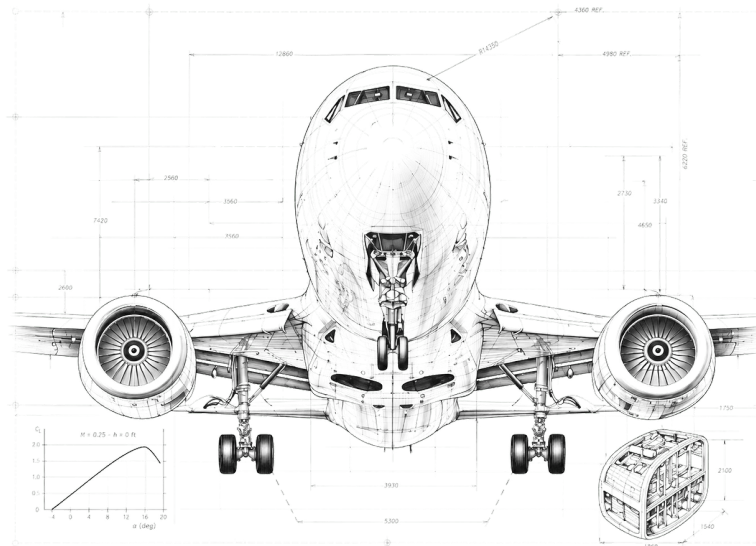


Appunti di Meccanica del Volo

Indirizzo Trasporti e Logistica — Conduzione del Mezzo Aereo

PRESTAZIONI DI SALITA

Il volo in salita uniforme e non uniforme,
quota di tangenza, inviluppo e metodo energetico



Prof. Ing. Biagio Raucci

Monografia didattica — bozza per revisione

Indice

1	Impostazione del problema	I
1.1	Perché studiare la salita	I
1.2	Le due domande fondamentali	I
1.3	Le ipotesi di lavoro	2
1.4	Sistema di forze e sistema di riferimento	2
1.5	Notazione adottata	3
2	Volo in salita uniforme	5
2.1	Equazioni di equilibrio	5
2.2	Relazioni fondamentali e legame con il volo livellato	5
2.2.1	Velocità necessaria alla salita	6
2.2.2	Spinta necessaria alla salita	6
2.2.3	Potenza necessaria alla salita	6
2.3	Angolo di rampa e rateo di salita: l'ipotesi dei piccoli angoli	6
2.3.1	L'angolo dipende dall'eccesso di spinta	7
2.3.2	Il rateo dipende dall'eccesso di potenza	7
2.4	Interpretazione tecnica e ordini di grandezza	8
3	Salita ripida e salita rapida	9
3.1	Le due condizioni di ottimo	9
3.2	Velivoli a turbogetto ($T_d \simeq \text{costante}$)	10
3.2.1	Salita ripida	10
3.2.2	Salita rapida	10
3.3	Velivoli a motoelica ($\Pi_d \simeq \text{costante}$)	11
3.3.1	Salita rapida	11
3.3.2	Salita ripida	11
3.4	Costruzione grafica e regola generale	12
3.5	Sintesi del confronto	13
3.6	La curva odografa del volo in salita	14
4	Quota di tangenza	15
4.1	Definizioni: tangenza teorica e pratica	15
4.2	Tangenza teorica per i turbogetti	16
4.3	Dal rapporto di densità alla quota: il modello di atmosfera standard	16
4.4	Tangenza teorica per le motoeliche	17
4.5	Effetto del peso	17
4.6	Vincoli di certificazione	19
5	Tempo di salita	20
5.1	Dalla velocità verticale al tempo	20
5.2	Comportamento asintotico in prossimità della tangenza	21

6	L'involuppo di volo	22
6.1	I limiti che definiscono il contorno	22
6.1.1	Limite aerodinamico (bassa velocità)	22
6.1.2	Limite strutturale (alta velocità)	22
6.1.3	Limite propulsivo (alta velocità in quota)	23
6.1.4	Tangenza teorica e pratica (limite superiore)	23
6.2	Lettura dell'involuppo	24
7	Volo in salita non uniforme	25
7.1	Equilibrio con il termine inerziale	25
7.2	Il fattore di correzione del rateo di salita	25
7.3	Salita a velocità equivalente costante	26
7.3.1	Troposfera ($0 \leq h \leq 11\,000\text{ m}$)	26
7.3.2	Stratosfera isoterma ($11\,000 \leq h \leq 20\,000\text{ m}$)	27
7.4	Salita a numero di Mach costante	27
7.4.1	Troposfera	27
7.4.2	Stratosfera isoterma	27
8	Il metodo energetico	29
8.1	Energia e quota energetica	29
8.2	Potenza specifica in eccesso (SEP)	29
8.3	Le carte energetiche: curve iso- h_e e iso- Π_s	30
8.4	Salita di minimo tempo	30
8.5	Salita di minimo consumo	31
A	Polare parabolica e parametrizzazione della spinta necessaria	33
A.1	La polare parabolica	33
A.2	Dalla resistenza alla spinta necessaria	33
A.3	Efficienza massima e prodotto $A B$	34
B	Il modello di atmosfera standard	35
B.1	Ipotesi e costanti di riferimento	35
B.2	Troposfera ($0 \leq h \leq 11\,000\text{ m}$)	35
B.3	Stratosfera isoterma ($11\,000 \leq h \leq 20\,000\text{ m}$)	36

Impostazione del problema

1.1 Perché studiare la salita

Ogni volo, dopo il distacco da terra, comincia con una salita. È la fase in cui il velivolo abbandona la quota dell'aeroporto e si porta progressivamente verso la quota di crociera: una manovra che dura pochi minuti per un piccolo monomotore da addestramento e che può estendersi per oltre venti minuti, su centinaia di chilometri, per un velivolo da trasporto di linea. In quei minuti si decidono tre cose importanti.

In primo luogo si decide la *sicurezza* immediata del volo. Subito dopo il decollo il velivolo si trova a bassa quota, a bassa velocità e in prossimità di ostacoli (rilievi, antenne, edifici): la capacità di guadagnare quota con una pendenza sufficiente è ciò che gli consente di scavalcarli. In secondo luogo si decide una quota parte dell'*economia* dell'intera missione, perché la salita è una fase a regime di motore elevato e a consumo specifico sfavorevole rispetto alla crociera: salire troppo lentamente significa bruciare carburante a bassa quota, dove la resistenza è maggiore. In terzo luogo si decide la *conformità normativa*: le norme di certificazione impongono gradienti minimi di salita garantiti, in particolare nelle delicate condizioni di avaria di un motore, e questi requisiti sono spesso dimensionanti per la spinta installata.

Per queste ragioni le prestazioni di salita non sono un capitolo accessorio della meccanica del volo, ma uno dei banchi di prova su cui si misura concretamente la bontà di un progetto. Esse legano in modo diretto tre famiglie di grandezze che lo studente ha già incontrato separatamente: l'*aerodinamica* del velivolo (attraverso la sua polare e la sua efficienza), la *propulsione* installata (attraverso la spinta o la potenza disponibile) e la *geometria di massa* (attraverso il peso e il carico alare). Lo studio della salita è, in un certo senso, il luogo in cui queste tre discipline si parlano.

1.2 Le due domande fondamentali

Tutta la trattazione che segue ruota attorno a due domande, semplici da enunciare e ricche di conseguenze:

- 1) con quale *pendenza* massima il velivolo può guadagnare quota, cioè qual è il massimo angolo della traiettoria γ ? È la condizione di **salita ripida**. La risposta interessa il superamento degli ostacoli, perché a parità di distanza orizzontale percorsa una pendenza maggiore significa più quota guadagnata, e quindi un margine maggiore sull'ostacolo;
- 2) con quale *rapidità* massima il velivolo può guadagnare quota, cioè qual è il massimo rateo di salita v_s (la componente verticale della velocità)? È la condizione di **salita rapida**. La risposta interessa il tempo necessario a raggiungere la quota di crociera, e quindi sia l'economia della missione, sia, per un velivolo militare, la prontezza con cui ci si porta alla quota operativa.

È fondamentale rendersi conto fin da subito che queste due domande *non* hanno la stessa risposta. Salire "ripido" e salire "presto" sono obiettivi diversi, che si raggiungono volando a velocità diverse. L'esperienza di chiunque abbia osservato un decollo lo conferma: l'aereo che si stacca e "punta" verso l'alto con il muso alto sta privilegiando la pendenza, non la rapidità; quello che accelera tenendosi più basso sta privilegiando il rateo. Il motivo profondo di questa distinzione costituisce il cuore concettuale del capitolo seguente, e conviene anticiparlo qui in forma di principio.

Il principio guida: spinta contro potenza

L'angolo di salita γ è governato dall'*eccesso di spinta* rispetto al volo livellato; il rateo di salita v_s è governato dall'*eccesso di potenza*. Poiché potenza e spinta sono legate da $\Pi = T V$, l'eccesso di potenza dipende anche dalla velocità: i due eccessi non sono massimi alla stessa V , e per questo la velocità di salita ripida e quella di salita rapida sono, in generale, diverse.

Questo principio, che dimostreremo rigorosamente nel Capitolo 2, è la chiave di lettura di tutto il resto: ogni volta che ci chiederemo “come si ottiene il massimo angolo?” guarderemo alla spinta; ogni volta che ci chiederemo “come si ottiene il massimo rateo?” guarderemo alla potenza.

1.3 Le ipotesi di lavoro

Affrontiamo dapprima il caso più semplice e più istruttivo, quello del *volo in salita uniforme*, nel quale si assumono costanti, nell'intervallo di analisi, la velocità V sulla traiettoria, il peso W e l'assetto (cioè il coefficiente di portanza C_L , e con esso l'angolo di rampa γ). Sotto queste ipotesi l'accelerazione è nulla e il problema si riduce a un equilibrio statico di forze: è la situazione più trasparente per mettere a fuoco la fisica del fenomeno, prima di complicarla.

Validità delle ipotesi “a tratti”

Nessuna delle tre grandezze può restare rigorosamente costante durante una salita reale: la quota varia con continuità e con essa la densità ρ dell'aria; il peso diminuisce per il consumo di combustibile; l'assetto viene modulato dal pilota o dal sistema di controllo. Tuttavia, se si suddivide la salita in intervalli di quota sufficientemente piccoli, all'interno di ciascun intervallo le ipotesi possono ritenersi valide con buona approssimazione: densità, peso e assetto cambiano poco da un estremo all'altro dell'intervallo. È questo il significato dell'analisi *a tratti*: le relazioni del volo uniforme vengono applicate localmente, su ciascun intervallo, e la salita complessiva si ricostruisce sommando i contributi dei singoli tratti. Vedremo questa logica all'opera nel calcolo del tempo di salita (Capitolo 5), dove l'integrale lungo la quota si trasforma in una somma su intervalli successivi.

Nel Capitolo 7 rimuoveremo l'ipotesi di velocità costante e introdurremo il *volo in salita non uniforme*, in cui compare un termine inerziale legato all'accelerazione. È il caso necessario quando, come nei velivoli ad alto rapporto spinta-peso o quando si segue una legge di velocità prefissata (a velocità equivalente o a numero di Mach costante), una parte non trascurabile della spinta in eccesso viene spesa per accelerare anziché per salire. Il volo uniforme resta comunque il riferimento concettuale: il caso non uniforme si presenterà come una sua correzione.

1.4 Sistema di forze e sistema di riferimento

Consideriamo il velivolo come un punto materiale in moto rettilineo lungo una traiettoria inclinata di un angolo γ sull'orizzonte. Questo angolo prende il nome di *angolo della traiettoria* o *angolo di rampa* (*flight path angle*). Sul punto agiscono quattro forze, le stesse del volo livellato ma ora orientate rispetto a una traiettoria inclinata:

- il **peso** W , sempre verticale e diretto verso il basso, indipendente dall'assetto;
- la **portanza** L , ortogonale alla velocità (e quindi ortogonale alla traiettoria);
- la **resistenza** D , parallela alla velocità e di verso opposto al moto;
- la **spinta** T , che assumiamo allineata con la traiettoria (ipotesi accettabile finché l'angolo tra asse motore e traiettoria è piccolo).

La differenza essenziale rispetto al volo livellato è che il peso, unica forza non legata alla direzione del moto, si proietta ora *sia* sulla direzione ortogonale alla traiettoria (componente $W \cos \gamma$, che la portanza deve equilibrare) *sia* sulla direzione tangente (componente $W \sin \gamma$, che si oppone all'avanzamento e che la spinta deve vincere). È proprio quest'ultima componente, assente quando $\gamma = 0$, a rendere “costosa” la salita.

Angolo di traiettoria $\neq$ angolo di assetto

L'angolo γ è l'inclinazione della *traiettoria* (cioè della velocità) sull'orizzonte, non l'angolo di assetto del velivolo. L'assetto longitudinale è dato dalla somma dell'angolo di rampa e dell'angolo di attacco, $\theta = \gamma + \alpha$. Quando da terra si osserva un velivolo salire dopo il decollo, l'angolo che si percepisce è quello dell'asse longitudinale θ : per questo un velivolo da trasporto che sale con γ dell'ordine di $8^\circ - 10^\circ$ può apparire “cabrato” di $15^\circ - 20^\circ$, perché a quei valori si somma l'angolo di attacco necessario a generare la portanza alla velocità di salita. Nel testo γ indicherà sempre, senza eccezioni, l'inclinazione della velocità sull'orizzonte.

Per scrivere l'equilibrio nel modo più leggibile conviene proiettare l'equazione del moto non lungo gli assi orizzontale e verticale, ma lungo due direzioni “natural” per il problema: la direzione *tangente* alla traiettoria (quella della velocità) e la direzione a essa *ortogonale*. Con questa scelta la spinta e la resistenza cadono interamente sull'asse tangente, la portanza interamente su quello ortogonale, e solo il peso si distribuisce sui due assi. Ne risultano due equazioni di equilibrio particolarmente semplici, che ricaveremo all'inizio del capitolo seguente.

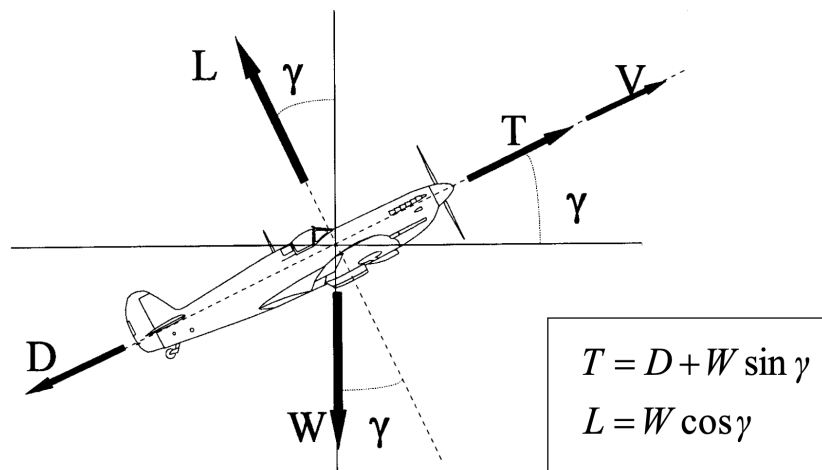


Figura 1.1. Sistema delle forze nel volo in salita: portanza L ortogonale alla velocità V , resistenza D allineata e opposta a V , spinta T lungo la traiettoria, peso W verticale. L'angolo γ è l'inclinazione della traiettoria sull'orizzonte; il peso si proietta in $W \cos \gamma$ (ortogonale alla traiettoria) e $W \sin \gamma$ (lungo la traiettoria, opposta al moto).

1.5 Notazione adottata

Per tutta la monografia si adottano le convenzioni di seguito riassunte, coerenti con il resto degli appunti del corso. Vale la pena soffermarsi su due distinzioni notazionali che saranno costantemente in gioco: quella tra grandezze *necessarie* e *disponibili*, e quella tra grandezze riferite al volo livellato (pedice “no”) e alla salita (pedice “ns”).

Simbolo	Significato
γ	angolo della traiettoria (rampa) di salita
V	velocità sulla traiettoria (vera, TAS)
$v_s = V \sin \gamma$	rateo di salita (componente verticale, R/C)
W, L, D, T	peso, portanza, resistenza, spinta
C_L, C_D	coefficienti di portanza e resistenza (velivolo completo)
$E = L/D = C_L/C_D$	efficienza aerodinamica
S, AR, e	superficie alare, allungamento, fattore di Oswald
$\rho, \sigma = \rho/\rho_0$	densità dell'aria e rapporto di densità
$\Pi = T V$	potenza (si evita il simbolo P)
T_{no}, Π_{no}, V_{no}	spinta, potenza e velocità <i>necessarie al volo livellato</i>
T_{ns}, Π_{ns}, V_{ns}	spinta, potenza e velocità <i>necessarie alla salita</i>
T_d, Π_d	spinta e potenza <i>disponibili</i>

I pedici “no” (*necessario orizzontale*) individuano le grandezze relative al volo rettilineo uniforme orizzontale di riferimento, valutate a parità di assetto e di quota; esse fungeranno costantemente da termine di paragone, perché è rispetto a esse che si misura l'*eccesso* di spinta e di potenza che rende possibile la salita. I pedici “ns” (*necessario in salita*) individuano le corrispondenti grandezze richieste dalla salita vera e propria. Le grandezze “d” (*disponibili*) sono invece ciò che il propulsore può effettivamente erogare: la salita è possibile quando il disponibile supera il necessario livellato, e il margine tra i due è esattamente l'eccesso. Le costanti aerodinamiche A e B della polare parabolica, che compariranno in tutte le derivazioni, sono introdotte e discusse nell'Appendice A; conviene leggerla prima di affrontare il Capitolo 3.

Volo in salita uniforme

2.1 Equazioni di equilibrio

Nel volo in salita uniforme la velocità sulla traiettoria è costante: l'accelerazione è nulla e, per il secondo principio della dinamica, la risultante delle forze deve annullarsi in ogni direzione. Il problema si riduce dunque a un equilibrio statico, ed è proprio questa la ragione per cui lo affrontiamo per primo: tutta la fisica della salita è già contenuta in due semplici equazioni, senza la complicazione dei termini inerziali.

Proiettiamo allora la risultante delle quattro forze (peso, portanza, resistenza, spinta) lungo le due direzioni naturali introdotte nel capitolo precedente. Lungo la direzione *ortogonale* alla traiettoria agiscono la portanza L , diretta “verso l’alto” rispetto alla traiettoria, e la componente del peso $W \cos \gamma$, diretta “verso il basso”; l'equilibrio richiede che si bilancino. Lungo la direzione *tangente* agiscono la spinta T (nel verso del moto), la resistenza D (opposta al moto) e la componente del peso $W \sin \gamma$ (anch'essa opposta al moto, perché in salita il peso “tira indietro”); anche queste devono bilanciarsi. Si ottengono così le due equazioni cardine della salita uniforme:

$$L = W \cos \gamma, \quad (2.1)$$

$$T = D + W \sin \gamma. \quad (2.2)$$

Il significato fisico è immediato e merita di essere sottolineato, perché è da qui che discende tutto il resto. La (2.1) dice che in salita la portanza non deve più equilibrare l'intero peso, come nel volo livellato, ma soltanto la sua componente ortogonale alla traiettoria, $W \cos \gamma$: poiché $\cos \gamma < 1$, il sostentamento richiesto è leggermente *minore*. È come se, salendo, una piccola parte del peso fosse “presa in carico” dalla geometria della traiettoria anziché dalle ali. La (2.2) dice invece che la spinta deve vincere non solo la resistenza aerodinamica D , ma anche la componente del peso lungo la traiettoria, $W \sin \gamma$: è questo termine aggiuntivo, del tutto assente nel volo orizzontale, a richiedere quel *surplus* di spinta che è il prezzo da pagare per guadagnare quota.

Osservazione

Per $\gamma = 0$ le (2.1)–(2.2) restituiscono esattamente le condizioni del volo rettilineo uniforme orizzontale, $L = W$ e $T = D$. La salita appare così come una “perturbazione” controllata del volo livellato, governata dall'unico parametro γ : tanto più grande è l'angolo, tanto più la portanza richiesta si riduce e tanto più cresce la spinta necessaria. Questa lettura — la salita come deformazione continua del volo orizzontale — è la stessa che useremo per esprimere le grandezze di salita in funzione di quelle, già note, del volo livellato.

2.2 Relazioni fondamentali e legame con il volo livellato

Conviene esprimere le grandezze necessarie alla salita (V_{ns} , T_{ns} , Π_{ns}) in funzione di quelle, già note dallo studio del volo livellato, del volo orizzontale di riferimento (V_{no} , T_{no} , Π_{no}), valutate a parità di assetto e di quota. Il vantaggio è duplice: da un lato si riutilizzano risultati acquisiti, dall'altro si rende esplicito quanto la salita “costi” in più rispetto al volo livellato.

2.2.1 Velocità necessaria alla salita

Dalla (2.1), esprimendo la portanza nella consueta forma $L = \frac{1}{2}\rho V_{ns}^2 S C_L$ e ricordando che a parità di assetto C_L è lo stesso del volo livellato, si ricava

$$V_{ns} = \sqrt{\frac{2 W \cos \gamma}{\rho S C_L}} = \underbrace{\sqrt{\frac{2 W}{\rho S C_L}}}_{V_{no}} \sqrt{\cos \gamma} = V_{no} \sqrt{\cos \gamma}. \quad (2.3)$$

A parità di assetto, dunque, la velocità necessaria alla salita è leggermente *minore* di quella del volo livellato, perché minore è la portanza da generare. La riduzione è tuttavia modesta: per $\gamma = 10^\circ$ si ha $\sqrt{\cos \gamma} \approx 0,992$, cioè una diminuzione di velocità inferiore all'1%. Per gli angoli tipici dei velivoli da trasporto la differenza è dunque trascurabile, e si può confondere V_{ns} con V_{no} ; la distinzione resta però importante concettualmente, perché ci ricorda che salita e volo livellato non sono la stessa condizione anche a parità di assetto.

2.2.2 Spinta necessaria alla salita

Sostituendo la resistenza $D = \frac{1}{2}\rho V_{ns}^2 S C_D$ nella (2.2) e usando la (2.3) per esprimere $V_{ns}^2 = V_{no}^2 \cos \gamma$:

$$T_{ns} = \frac{1}{2}\rho V_{ns}^2 S C_D + W \sin \gamma = \underbrace{\frac{1}{2}\rho V_{no}^2 S C_D \cos \gamma}_{T_{no}} + W \sin \gamma = T_{no} \cos \gamma + W \sin \gamma. \quad (2.4)$$

La struttura della (2.4) è trasparente: il primo termine, $T_{no} \cos \gamma$, è la resistenza aerodinamica riportata in salita (scalata di $\cos \gamma$ perché la velocità, e quindi la pressione dinamica, sono leggermente ridotte); il secondo termine, $W \sin \gamma$, è il “costo” della salita vera e propria, cioè la spinta che serve a sollevare il peso lungo la traiettoria. All'equilibrio questa spinta necessaria deve essere effettivamente erogata dal propulsore: deve cioè eguagliare la spinta disponibile T_d . Scriviamo perciò

$$T_{ns} \equiv T_d = T_{no} \cos \gamma + W \sin \gamma. \quad (2.5)$$

È bene fissare il senso di questa identità: T_{ns} è quanto serve, T_d è quanto si ha; la salita uniforme è possibile solo se il propulsore riesce a fornire esattamente T_{ns} , e l'angolo γ si “assesta” sul valore che rende vera l'uguaglianza.

2.2.3 Potenza necessaria alla salita

Moltiplicando la (2.4) per la velocità $V_{ns} = V_{no} \sqrt{\cos \gamma}$ si ottiene la potenza necessaria. Conviene seguire i due termini separatamente. Il primo dà $T_{no} \cos \gamma \cdot V_{no} \sqrt{\cos \gamma} = \Pi_{no} \cos^{3/2} \gamma$, avendo posto $\Pi_{no} = T_{no} V_{no}$; il secondo dà $W \sin \gamma \cdot V_{ns} = W V_{ns} \sin \gamma$. In totale:

$$\Pi_{ns} = T_{ns} V_{ns} = \underbrace{T_{no} V_{no}}_{\Pi_{no}} \cos^{3/2} \gamma + W V_{ns} \sin \gamma = \Pi_{no} \cos^{3/2} \gamma + W V_{ns} \sin \gamma \equiv \Pi_d. \quad (2.6)$$

Anche qui la lettura fisica è netta. Il termine $\Pi_{no} \cos^{3/2} \gamma$ è la potenza spesa per vincere la resistenza; il termine $W V_{ns} \sin \gamma$ è la potenza spesa per innalzare il peso, e non è altro che $W v_s$, cioè il prodotto del peso per il rateo di salita $v_s = V_{ns} \sin \gamma$. Quest'ultima osservazione è importante: la potenza “in più” rispetto al volo livellato è esattamente la potenza meccanica necessaria a sollevare il peso W alla velocità verticale v_s , in perfetta analogia con il sollevamento di un corpo in un campo gravitazionale. All'equilibrio, infine, la potenza necessaria coincide con quella disponibile Π_d .

2.3 Angolo di rampa e rateo di salita: l'ipotesi dei piccoli angoli

Le relazioni (2.5) e (2.6) sono esatte, ma la presenza delle funzioni trigonometriche ne nasconde un poco la struttura. Per la maggior parte dei velivoli civili l'angolo di salita è modesto (raramente supera i 10° – 12°), e si

possono allora adottare le approssimazioni dei piccoli angoli, $\cos \gamma \simeq 1$ e $\sin \gamma \simeq \gamma$ (con γ espresso in radianti). Sotto queste ipotesi le relazioni si semplificano notevolmente e — ciò che più conta — mettono in piena luce la fisica del problema, separando nettamente ciò che governa l'angolo da ciò che governa il rateo.

2.3.1 L'angolo dipende dall'eccesso di spinta

Partiamo dalla (2.5). Ponendo $\cos \gamma \simeq 1$ e isolando $\sin \gamma \simeq \gamma$:

$$\sin \gamma = \frac{T_d - T_{no} \cos \gamma}{W} \simeq \gamma = \frac{T_d - T_{no}}{W} = \frac{T_d}{W} - \frac{1}{E}. \quad (2.7)$$

Nell'ultimo passaggio si è usato un fatto noto dallo studio del volo livellato: poiché nel volo orizzontale di riferimento $T_{no} = D = W/E$ (la spinta necessaria eguaglia la resistenza, che è il peso diviso l'efficienza), si ha $T_{no}/W = 1/E$. La (2.7) è una delle relazioni più importanti di tutta la meccanica del volo, e vale la pena enunciarla come principio.

Angolo di salita ed eccesso di spinta

L'angolo della traiettoria di salita è proporzionale all'eccesso di spinta ($T_d - T_{no}$) rispetto al volo livellato, diviso per il peso:

$$\gamma \simeq \frac{T_d - T_{no}}{W} = \frac{T_d}{W} - \frac{1}{E}.$$

La salita ripida (massimo γ) si ottiene quindi massimizzando l'eccesso di spinta. Per un dato propulsore questo significa, da un lato, disporre del massimo T_d/W possibile e, dall'altro, volare all'assetto che rende minima la spinta necessaria T_{no} , cioè massima l'efficienza E .

2.3.2 Il rateo dipende dall'eccesso di potenza

Per ottenere il rateo di salita basta moltiplicare la (2.7) per la velocità V (ricordando $v_s = V \sin \gamma$), oppure, equivalentemente, partire dalla (2.6) con $\cos^{3/2} \gamma \simeq 1$ e isolare $W v_s$. In entrambi i modi si trova:

$$v_s = V \sin \gamma = \frac{V(T_d - T_{no})}{W} = \frac{\Pi_d - \Pi_{no}}{W}. \quad (2.8)$$

Rateo di salita ed eccesso di potenza

Il rateo di salita è pari all'eccesso di potenza ($\Pi_d - \Pi_{no}$) rispetto al volo livellato, diviso per il peso:

$$v_s = \frac{\Pi_d - \Pi_{no}}{W}.$$

La salita rapida (massimo v_s) si ottiene quindi massimizzando l'eccesso di potenza.

Attenzione

Le due condizioni di ottimo — massimo eccesso di spinta per γ , massimo eccesso di potenza per v_s — non coincidono, ed è essenziale capire perché. L'eccesso di spinta ($T_d - T_{no}$) dipende solo dalla differenza tra due forze; l'eccesso di potenza ($\Pi_d - \Pi_{no}$) = $V(T_d - T_{no})$ è quella stessa differenza *moltiplicata per la velocità*. Anche se l'eccesso di spinta fosse massimo a una certa V , l'eccesso di potenza — pesando di più le velocità maggiori — raggiunge il suo massimo a una velocità superiore. Di qui il risultato generale, che ritroveremo in tutte le sue forme nel capitolo seguente: *la velocità di salita rapida è sempre maggiore di quella di salita ripida*.

2.4 Interpretazione tecnica e ordini di grandezza

Le relazioni ottenute consentono alcune letture immediate, utili a fissare l'intuizione fisica e a collegare la teoria a situazioni operative concrete.

Perché l'efficienza conta

La (2.7) mostra che, a parità di rapporto spinta-peso T_d/W , l'angolo di salita cresce al crescere dell'efficienza E : un velivolo aerodinamicamente “pulito” (alta E) ha un termine $1/E$ piccolo, spreca meno spinta per vincere la resistenza e ne destina di più alla salita. Si vede qui in modo diretto perché la cura aerodinamica — carenature, profili efficienti, superfici lisce — si traduca non solo in minori consumi in crociera, ma anche in migliori prestazioni di salita.

L'aliante: la salita “al contrario”

Un aliante non ha spinta, $T_d = 0$. La (2.7) restituisce allora un angolo *negativo*, $\gamma = -1/E$: l'aliante non sale, ma scende lungo una traiettoria la cui pendenza è governata dall'efficienza. L'angolo di planata è tanto più piccolo (la planata tanto più “radente”) quanto più alta è l'efficienza, e il valore minimo si ottiene proprio all'assetto di $E_{\max}$. La conseguenza operativa è notevole: la distanza orizzontale percorribile partendo da una quota h , in aria calma, vale $L_{\text{plan}} = E h$. Un aliante da prestazione con efficienza pari a 40, lasciato planare da 1000 m, percorre dunque circa 40 km prima di toccare terra. La stessa formula, letta “al contrario”, spiega perché in caso di avaria totale dei motori un velivolo da trasporto (con efficienza dell'ordine di 15–18) conservi comunque un'autonomia di planata di parecchie decine di chilometri.

La salita “in candela”

Quando il rapporto spinta-peso supera l'unità, $T_d/W > 1$, la (2.7) può restituire valori di $\sin \gamma$ prossimi a 1: l'ipotesi dei piccoli angoli cade e il velivolo può salire quasi verticalmente. È il caso dei caccia moderni, capaci di salita “in candela” ($\gamma \simeq 90^\circ$), nei quali la spinta da sola è in grado di sostenere e accelerare il velivolo anche in assenza di portanza. Per essi le approssimazioni di questo capitolo non bastano più e occorre la trattazione ad angoli grandi — con il termine inerziale — che svilupperemo nel Capitolo 7. All'estremo opposto, per un tipico velivolo da trasporto l'angolo massimo al livello del mare è dell'ordine di 7° – 9° e il rateo massimo è dell'ordine di da 15 m/s–20 m/s: numeri molto più modesti, ma sufficienti a garantire il superamento degli ostacoli e una salita in crociera in tempi accettabili.

Unità di misura del rateo

Nella pratica operativa e nelle normative il rateo di salita si esprime quasi sempre in piedi al minuto (ft/min), unità riportata dal variometro di bordo. Vale la corrispondenza approssimata

$$1 \text{ m/s} \approx 197 \text{ ft/min} \approx 200 \text{ ft/min},$$

per cui, ad esempio, un rateo di 10 m/s corrisponde a circa 2000 ft/min. Tenere a mente questa equivalenza è utile per tradurre rapidamente i risultati teorici, espressi in unità SI, nei valori che compaiono sui manuali di volo e sugli strumenti.

Salita ripida e salita rapida

3.1 Le due condizioni di ottimo

Riprendiamo le due relazioni cardine ricavate nel capitolo precedente, valide nell'ipotesi dei piccoli angoli:

$$\gamma \simeq \frac{T_d - T_{no}}{W}, \quad v_s = \frac{\Pi_d - \Pi_{no}}{W}.$$

Esse ci dicono che cosa massimizzare in ciascuno dei due casi: la *salita ripida* (massimo angolo $\gamma_{\max}$) corrisponde al massimo eccesso di spinta, la *salita rapida* (massimo rateo $v_{s,\max}$) al massimo eccesso di potenza. Resta da scoprire a quale velocità ciascun massimo si realizza, e quanto valgono i due valori ottimi.

V_x e V_y : la traduzione operativa

Nei manuali di volo e nella prassi di pilotaggio le velocità di salita ottima hanno un nome consacrato: V_x è la velocità di **salita ripida** (massimo angolo, *best angle of climb*), V_y è la velocità di **salita rapida** (massimo rateo, *best rate of climb*). La regola pratica che ogni pilota conosce — “ V_x per superare l'ostacolo in fondo alla pista, V_y per guadagnare quota nel minor tempo” — è esattamente la traduzione operativa delle due condizioni di ottimo, e si ha sempre $V_y > V_x$. Le due velocità, inoltre, si avvicinano al crescere della quota: si incontrano nel punto in cui le prestazioni di salita si annullano, cioè alla quota di tangenza (Capitolo 4).

Per individuare analiticamente queste velocità occorre scrivere l'eccesso (di spinta o di potenza) in funzione di V , derivarlo rispetto a V e annullare la derivata. La forma dell'eccesso, però, dipende in modo essenziale dal *tipo di propulsione*, perché è diverso il modo in cui spinta e potenza disponibili variano con la velocità. Conviene perciò separare nettamente i due casi limite di maggiore interesse pratico:

- il **turbogetto**, per cui la spinta disponibile T_d è, con buona approssimazione, pressoché *costante* con la velocità nel campo di interesse;
- la **motoelica**, per cui è invece la potenza disponibile Π_d a essere pressoché costante, mentre la spinta $T_d = \Pi_d/V$ decresce all'aumentare della velocità.

Queste due idealizzazioni non sono arbitrarie: riflettono il funzionamento fisico dei due gruppi propulsivi e consentono di ottenere formule chiuse istruttive. I casi reali (turboelica, turbofan ad alto rapporto di diluizione) si collocano fra questi due estremi.

Spinta e potenza necessarie: la parametrizzazione A, B

Con polare parabolica, la spinta e la potenza necessarie al volo livellato si scrivono (Appendice A)

$$T_{no}(V) = A V^2 + \frac{B}{V^2}, \quad \Pi_{no}(V) = T_{no} V = A V^3 + \frac{B}{V},$$

con

$$A = \frac{1}{2} \rho S C_{D0}, \quad B = \frac{2 W^2}{\rho S \pi e A R}.$$

Il termine in A rappresenta la resistenza parassita (cresce con V^2 , domina alle alte velocità), il termine in B la resistenza indotta (decresce con V^2 , domina alle basse velocità). Queste due espressioni sono lo strumento di lavoro di tutte le derivazioni che seguono: conviene tenerle sotto gli occhi.

3.2 Velivoli a turbogetto ($T_d \simeq \text{costante}$)

3.2.1 Salita ripida

Con T_d indipendente dalla velocità, l'eccesso di spinta $T_d - T_{no}(V)$ è massimo dove $T_{no}(V)$ è *minima*: poiché T_d è una costante, sottrarre da essa una curva significa che il massimo della differenza cade dove la curva sottratta tocca il suo minimo. Annuliamo dunque la derivata della spinta necessaria:

$$\frac{dT_{no}}{dV} = 0 \implies 2A V - \frac{2B}{V^3} = 0 \implies V_{\gamma_{\max}} = \sqrt[4]{\frac{B}{A}}. \quad (3.1)$$

La condizione $2AV = 2B/V^3$ ha un significato fisico preciso: nel punto di minimo i due contributi di resistenza — parassita (AV^2) e indotta (B/V^2) — si eguagliano. Ma il punto in cui resistenza parassita e indotta sono uguali è, per definizione, il punto di minima resistenza totale, cioè di *massima efficienza* $E_{\max}$ (perché $T_{no} = D = W/E$, e minimizzare D equivale a massimizzare E). Ne segue un risultato di grande valore pratico:

Osservazione

Per un velivolo a getto la velocità di salita ripida coincide con la velocità di massima efficienza: $V_x = V_{E_{\max}} = (B/A)^{1/4}$. In altre parole, il massimo angolo di salita si ottiene volando all'assetto di minima resistenza, lo stesso che massimizza l'autonomia chilometrica in crociera. È un'utile coincidenza da ricordare: “salire ripido col getto” e “volare efficiente” richiedono lo stesso assetto.

3.2.2 Salita rapida

L'eccesso di potenza è $\Pi_d - \Pi_{no} = T_d V - \Pi_{no}(V)$. Per massimizzarlo ne annulliamo la derivata rispetto a V . Ricordando che per il getto $d\Pi_d/dV = d(T_d V)/dV = T_d$ (la spinta è costante, quindi la potenza disponibile cresce linearmente con V):

$$\frac{d\Pi_d}{dV} = \frac{d\Pi_{no}}{dV} \implies T_d = 3A V^2 - \frac{B}{V^2} \implies 3A V^4 - T_d V^2 - B = 0. \quad (3.2)$$

La (3.2) è un'equazione biquadratica in V : ponendo $x = V^2$ diventa $3A x^2 - T_d x - B = 0$, di secondo grado in x . Risolvendo e scartando la radice negativa (priva di significato fisico, perché $x = V^2 > 0$):

$$V_{v_s, \max} = \sqrt{\frac{T_d}{6A} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{12AB}{T_d^2}} \right)}. \quad (3.3)$$

Esprimendo A e B in funzione dei parametri di progetto del velivolo (in Appendice A si mostra che $AB = W^2/4E_{\max}^2$) si ottiene la forma equivalente, fisicamente più leggibile:

$$V_{v_s, \max} = \sqrt{\frac{(T_d/W)(W/S)}{3\rho C_{D_0}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{3}{E_{\max}^2 (T_d/W)^2}} \right)}. \quad (3.4)$$

In quest'ultima forma compaiono soltanto grandezze di immediato significato ingegneristico — rapporto spinta-peso T_d/W , carico alare W/S , coefficiente di resistenza parassita C_{D_0} , efficienza massima $E_{\max}$, densità ρ — e si legge a colpo d'occhio come la velocità di salita rapida cresca con il carico alare e con il rapporto spinta-peso.

Osservazione

Confrontando la (3.3) con la (3.1) si verifica che $V_{v,\max} > V_{\gamma,\max}$, in accordo con il principio generale $V_y > V_x$: il radicando della prima è maggiore di B/A . Per il getto, però, lo scarto fra le due velocità è contenuto: poiché la spinta disponibile è quasi piatta con V , il massimo dell'eccesso di potenza cade ad assetti di poco superiori a quello di $E_{\max}$. Questo giustifica una prassi di calcolo molto diffusa: per una stima rapida del rateo massimo di un getto si assume spesso l'assetto di massima efficienza, commettendo un errore modesto. Per le motoeliche, come vedremo, la separazione fra V_x e V_y è invece molto più marcata.

3.3 Velivoli a motoelica ($\Pi_d \simeq \text{costante}$)**3.3.1 Salita rapida**

Per la motoelica è la potenza disponibile a essere pressoché costante con la velocità: il motore (alternativo o turboelica) eroga una potenza all'albero sostanzialmente fissa, e l'elica la converte in potenza propulsiva con un rendimento che, nel campo di interesse, varia poco. L'eccesso di potenza $\Pi_d - \Pi_{no}(V)$ è quindi massimo dove $\Pi_{no}(V)$ è minima:

$$\frac{d\Pi_{no}}{dV} = 0 \implies 3A V^2 - \frac{B}{V^2} = 0 \implies V_{v,\max} = \sqrt[4]{\frac{1}{3} \frac{B}{A}}. \quad (3.5)$$

La velocità di salita rapida coincide dunque con la velocità di *potenza necessaria minima* $\Pi_{no,\min}$, che corrisponde all'assetto di massimo $C_L^{3/2}/C_D$, ossia di massimo (E/V) , ossia ancora di minima velocità di discesa di un aliante. Si noti il confronto con il getto: la velocità di minima potenza è inferiore a quella di minima resistenza, precisamente $V_{v,\max}^{(\text{elica})} = V_{E_{\max}}/\sqrt[4]{3} \approx 0,76 V_{E_{\max}}$. La salita rapida di una motoelica avviene quindi a una velocità sensibilmente più bassa di quella di massima efficienza.

3.3.2 Salita ripida

Per la salita ripida si massimizza l'eccesso di spinta. Con Π_d costante si ha $T_d = \Pi_d/V$, quindi la spinta disponibile decresce con la velocità e la sua derivata vale $dT_d/dV = -\Pi_d/V^2$. Imponendo la condizione di tangenza $dT_d/dV = dT_{no}/dV$:

$$-\frac{\Pi_d}{V^2} = 2A V - \frac{2B}{V^3} \implies 2A V^4 + \Pi_d V - 2B = 0. \quad (3.6)$$

La (3.6) è un'equazione di quarto grado in V che, a differenza del caso del getto, non si riduce a una biquadratica (compare il termine lineare $\Pi_d V$) e non ammette in generale una soluzione in forma chiusa semplice: la velocità di salita ripida della motoelica si determina per via numerica.

Osservazione

Per le motoeliche la velocità di salita ripida risulta sensibilmente *minore* di quella di massima efficienza, e cade spesso in prossimità della velocità di stallo. La ragione si comprende guardando la forma della spinta disponibile: poiché $T_d = \Pi_d/V$ cresce rapidamente al diminuire della velocità, l'eccesso di spinta è massimo proprio alle basse velocità, dove la spinta dell'elica è più abbondante. Questo spiega l'esperienza di pilotaggio di un velivolo a elica, che per "cabrare" al massimo angolo deve volare lento, a muso alto. Occorre però cautela operativa: in quella zona la polare reale si discosta da quella parabolica (l'ipotesi alla base delle nostre formule perde validità) e, soprattutto, i margini rispetto allo stallo si riducono. La V_x di manuale è perciò sempre fissata a una velocità prudenzialmente superiore allo stallo.

3.4 Costruzione grafica e regola generale

In entrambi i casi le condizioni di ottimo ammettono una lettura grafica elegante e di grande utilità pratica, nei piani $T-V$ (spinta contro velocità) e $\Pi-V$ (potenza contro velocità), dove si tracciano contemporaneamente le curve di spinta (o potenza) *necessaria* e *disponibile*.

- **Salita ripida:** si cerca il punto di massimo *eccesso di spinta*, cioè la massima distanza verticale $\Delta T_{\max}$ fra la curva disponibile T_d e quella necessaria T_{no} nel piano $T-V$. In termini differenziali, ciò accade dove le due curve hanno la stessa pendenza, $\frac{dT_d}{dV} = \frac{dT_{no}}{dV}$: è la condizione di tangenza fra le pendenze.
- **Salita rapida:** si cerca il punto di massimo *eccesso di potenza*, cioè la massima distanza verticale $\Delta \Pi_{\max}$ fra Π_d e Π_{no} nel piano $\Pi-V$, ovvero $\frac{d\Pi_d}{dV} = \frac{d\Pi_{no}}{dV}$.

Questa lettura grafica ha il pregio di rendere visibile, senza bisogno di formule, perché getto ed elica si comportano diversamente: cambia la forma della curva disponibile (orizzontale per il getto nel piano $T-V$, orizzontale per l'elica nel piano $\Pi-V$), e con essa cambia la posizione del punto di massima distanza.

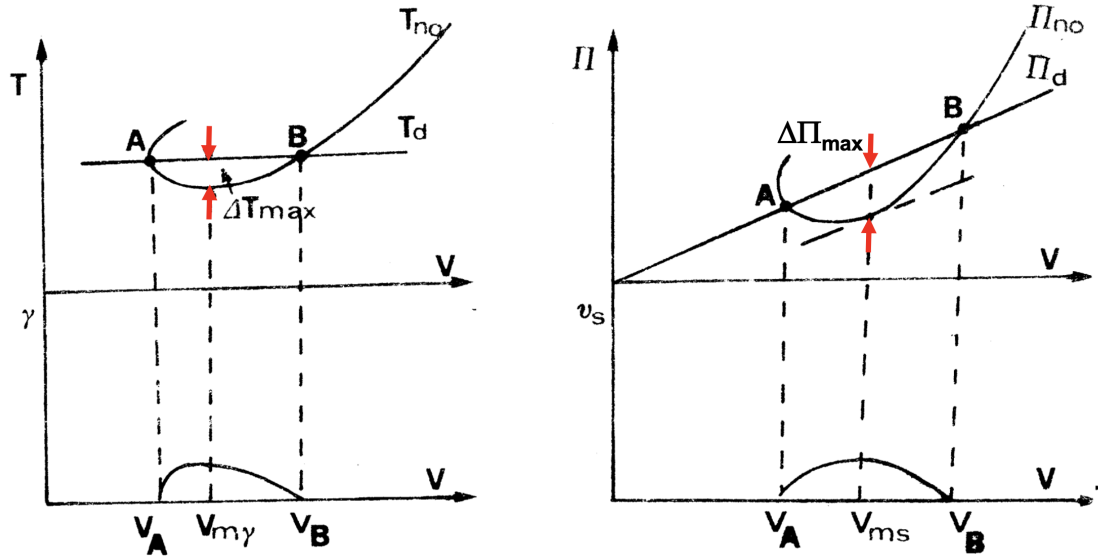


Figura 3.1. Velivolo a turbogetto. A sinistra, piano $T-V$: la massima distanza $\Delta T_{\max}$ tra la spinta disponibile T_d (quasi orizzontale) e quella necessaria T_{no} individua la velocità di salita ripida $V_{\gamma_{\max}}$, prossima al minimo di T_{no} (assetto di $E_{\max}$). A destra, piano $\Pi-V$: la massima distanza $\Delta \Pi_{\max}$ tra Π_d e Π_{no} individua la velocità di salita rapida V_{ms} , poco oltre la precedente. In basso, gli andamenti di γ e v_s con la velocità.

Regola generale

Qualunque sia il propulsore, le velocità di salita ottima si individuano dalle condizioni di tangenza fra le curve disponibile e necessaria:

$$V_{\gamma_{\max}} : \quad \frac{dT_d}{dV} = \frac{dT_{no}}{dV}, \quad V_{v_s, \max} : \quad \frac{d\Pi_d}{dV} = \frac{d\Pi_{no}}{dV}.$$

I casi del getto ($T_d \simeq \text{costante}$, da cui $dT_d/dV = 0$ e quindi $dT_{no}/dV = 0$) e della motoelica ($\Pi_d \simeq \text{costante}$, da cui $d\Pi_d/dV = 0$ e quindi $d\Pi_{no}/dV = 0$) sono le due specializzazioni notevoli di questa regola unica.

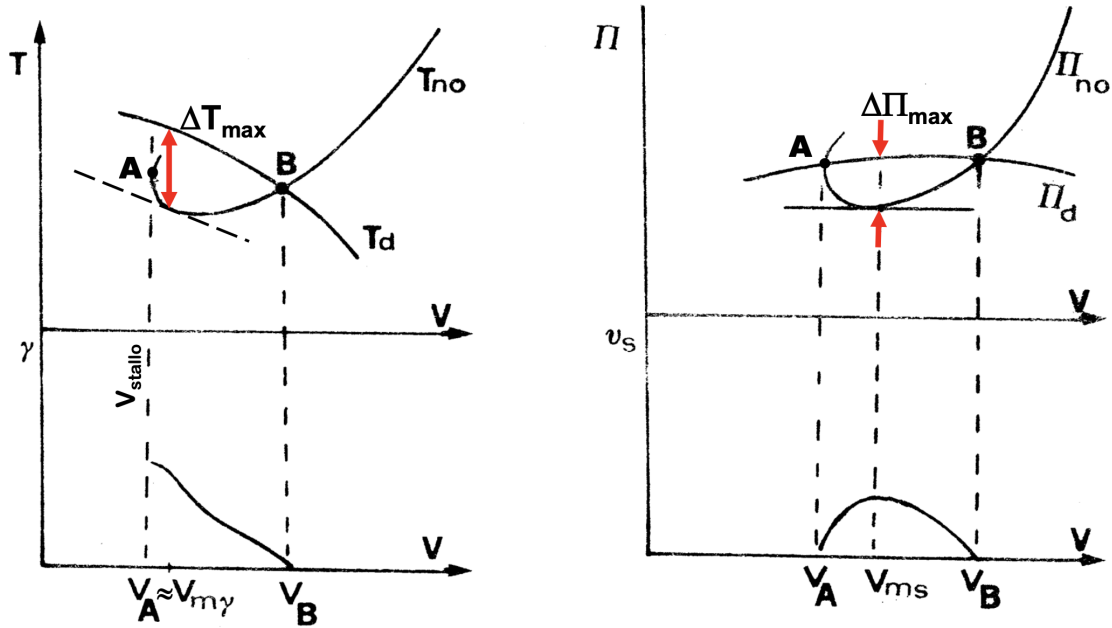


Figura 3.2. Velivolo a motoelica. A sinistra, piano T - V : la spinta disponibile $T_d = \Pi_d/V$ cresce alle basse velocità e la salita ripida $V_{m\gamma}$ cade in prossimità dello stallo. A destra, piano Π - V : la potenza disponibile è quasi costante e la salita rapida V_{ms} cade al minimo di Π_{no} , nettamente separata dalla $V_{m\gamma}$.

3.5 Sintesi del confronto

La tabella seguente riassume i quattro risultati, ed evidenzia la simmetria fra i due casi: ciò che per il getto è la salita ripida (minimo di T_{no} , soluzione chiusa) per l'elica è la salita rapida (minimo di Π_{no} , soluzione chiusa), e viceversa il caso “difficile” (soluzione numerica) è la salita rapida per il getto e quella ripida per l'elica.

	Turbogetto ($T_d \simeq \text{cost}$)	Motoelica ($\Pi_d \simeq \text{cost}$)
Salita ripida $V_{\gamma, \max}$	$\sqrt[4]{B/A}$ (assetto di $E_{\max}$)	soluzione di $2AV^4 + \Pi_d V - 2B = 0$
	velocità di $T_{no, \min}$	spesso prossima allo stallo
Salita rapida $V_{v, \max}$	$\sqrt{\frac{T_d}{6A} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{12AB}{T_d^2}} \right)}$	$\sqrt[4]{\frac{1}{3} B/A}$
	poco oltre l'assetto di $E_{\max}$	velocità di $\Pi_{no, \min}$, cioè di $(E/V)_{\max}$

Regolazione delle prestazioni: il ruolo della manetta

In ogni caso le prestazioni di salita (γ e v_s) sono governate dal livello di spinta o di potenza disponibile, cioè dalla posizione della manetta motore. Ridurre la manetta abbassa T_d (o Π_d), riduce gli eccessi e quindi diminuisce sia l'angolo sia il rateo di salita; portare la manetta al massimo continuo fornisce le prestazioni di salita massime compatibili con i limiti termici e meccanici del motore. Le velocità ottime V_x e V_γ , invece, dipendono soprattutto dall'aerodinamica e dal peso, e variano poco con la manetta: per questo sono pubblicate come valori fissi (a un dato peso e quota) nei manuali di volo.

3.6 La curva odografa del volo in salita

Un modo particolarmente efficace per sintetizzare *tutte* le condizioni di salita possibili a una data quota — e non solo le due ottime — è la curva *odografa*. Essa è il luogo descritto, nel piano (V_o, v_s) , dall'estremo del vettore velocità al variare dell'assetto (cioè della velocità di volo), dove $V_o = V \cos \gamma$ è la componente orizzontale della velocità e $v_s = V \sin \gamma$ la componente verticale. Ogni punto dell'odografa rappresenta dunque una possibile condizione di volo equilibrato, individuata dalla coppia (velocità orizzontale, rateo di salita).

La forza dell'odografa sta nella sua interpretazione puramente geometrica. Dato un punto della curva, il segmento che lo congiunge all'origine ha lunghezza pari alla velocità V (perché $V_o^2 + v_s^2 = V^2$) e forma con l'asse orizzontale un angolo pari proprio all'angolo di rampa γ , poiché la sua pendenza vale $v_s/V_o = \tan \gamma$. Da queste due proprietà discendono immediatamente le due letture fondamentali:

- il **massimo rateo di salita** $v_{s,\max}$ (salita rapida) corrisponde al *punto più alto* dell'odografa, cioè al punto di massima ordinata: lì la componente verticale della velocità è massima;
- il **massimo angolo di salita** $\gamma_{\max}$ (salita ripida) corrisponde al punto in cui la retta uscente dall'origine è *tangente* all'odografa: fra tutte le rette per l'origine che intersecano la curva, quella tangente è infatti quella di pendenza massima, cioè di massimo $\tan \gamma$.

Poiché il punto di tangenza precede, in velocità, il punto di massima ordinata, si ritrova per via puramente geometrica — senza alcun calcolo — il risultato già noto: $V_{\gamma_{\max}} < V_{v_{s,\max}}$, cioè $V_x < V_\gamma$. L'odografa offre così una conferma visiva e immediata di ciò che le derivate avevano stabilito analiticamente, ed è uno strumento prezioso perché racchiude in un'unica curva l'intero ventaglio delle prestazioni di salita a quota fissata.

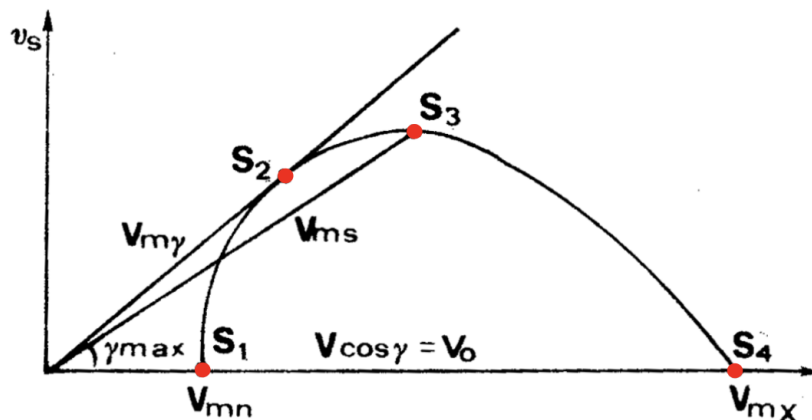


Figura 3.3. Curva odografa del volo in salita nel piano (V_o, v_s) . Il punto S_2 (tangenza della retta per l'origine) è la condizione di salita ripida ($\gamma = \gamma_{\max}$); il punto S_3 (massima ordinata) è la condizione di salita rapida ($v_s = v_{s,\max}$). I punti S_1 e S_4 , dove l'odografa interseca l'asse orizzontale, corrispondono al volo livellato ($\gamma = 0$, $v_s = 0$) alle velocità minima e massima.

Osservazione

I punti S_1 e S_4 in cui l'odografa taglia l'asse orizzontale meritano attenzione: lì $v_s = 0$ e dunque $\gamma = 0$, cioè rappresentano le due condizioni di volo *livellato* possibili a quella quota e a quel livello di potenza — una a bassa velocità (S_1) e una ad alta velocità (S_4). Tutto ciò che sta “dentro” la curva, fra S_1 e S_4 , è salita; al crescere della quota la potenza disponibile cala, l'odografa si abbassa e si restringe, e i punti S_1 e S_4 si avvicinano fino a coincidere: in quel momento l'odografa si è ridotta a un solo punto sull'asse, l'eccesso di potenza si è annullato e si è raggiunta la quota di tangenza. È la stessa idea che ritroveremo, da un'altra angolazione, nel Capitolo 6 parlando dell'involuppo di volo.

Quota di tangenza

4.1 Definizioni: tangenza teorica e pratica

Le prestazioni di salita peggiorano sistematicamente con la quota, e prima o poi si annullano: esiste cioè un “soffitto” al di sopra del quale il velivolo non riesce più a salire. Comprimerne il meccanismo è essenziale, perché la quota di tangenza è uno dei parametri di prestazione dichiarati per ogni velivolo e, insieme alla quota di crociera, ne definisce il dominio operativo verticale.

Il motivo fisico è il seguente. All'aumentare della quota la densità dell'aria ρ diminuisce: ne risente direttamente la propulsione, perché sia la spinta del getto sia la potenza dell'elica calano (entrambe dipendono dalla portata d'aria elaborata, che a sua volta scala con la densità). Nel contempo, a parità di assetto, le velocità di volo aumentano (occorre più velocità per generare la stessa portanza in aria rarefatta) e con esse, alle alte velocità, cresce la potenza necessaria. L'eccesso di potenza disponibile $\Delta\Pi = \Pi_d - \Pi_{no}$ è dunque “compresso” da due parti — il disponibile che cala, il necessario che alle velocità rilevanti aumenta — e si riduce progressivamente. Con esso si riduce il rateo massimo di salita $v_{s,max} = \Delta\Pi_{max}/W$, fino ad annullarsi.

Quota di tangenza teorica e pratica

La **quota di tangenza teorica** (*absolute ceiling*) h_{tt} è la quota alla quale l'eccesso di potenza si annulla e il rateo massimo di salita diventa nullo:

$$v_{s,max}(h_{tt}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta\Pi_{max}(h_{tt}) = 0.$$

La **quota di tangenza pratica** (o operativa, *service ceiling*) è la quota alla quale il rateo massimo residuo scende a un valore convenzionale minimo, tipicamente 0,5 m/s (100 ft/min) per l'aviazione generale e 1,5 m/s (300 ft/min) per i velivoli da trasporto con tutti i motori operativi.

La distinzione fra le due quote non è una sottigliezza formale, ma risponde a una necessità operativa concreta: la tangenza teorica, come ora vedremo, è una condizione *limite* che non ha senso pratico, mentre la tangenza pratica individua la massima quota a cui il velivolo conserva una capacità di salita ancora utile (per esempio per riprendere quota dopo una turbolenza o per scavalcare un sistema nuvoloso).

La tangenza teorica è irraggiungibile

Alla quota di tangenza teorica il rateo di salita è nullo: il tempo necessario a raggiungerla sarebbe quindi *infinito*, come dimostreremo quantitativamente nel Capitolo 5. C'è di più: la condizione di volo a h_{tt} è *instabile*. A quella quota le curve di potenza disponibile e necessaria sono tangenti in un solo punto, cui corrisponde un'unica velocità di volo livellato possibile; qualunque piccolo scostamento da quella velocità porta $\Pi_{no} > \Pi_d$, cioè un difetto di potenza, con conseguente perdita di quota da cui il velivolo non riesce a recuperare. Per questo la quota operativamente significativa è quella di tangenza *pratica*, dove un margine di potenza, per quanto esiguo, è ancora disponibile.

A h_{tt} , dunque, le curve di potenza disponibile e necessaria si toccano in un unico punto, e l'assetto corrispondente è quello che minimizza il necessario:

- per le **motoeliche**, l'assetto di $\Pi_{no,min}$, ossia di massimo $(E\sqrt{C_L})$;

- per i **turbogetti**, l'assetto di $T_{no,min}$, ossia di massima efficienza E_{max} .

Ritroviamo qui, nel punto di tangenza, gli stessi assetti che governavano la salita rapida (per l'elica) e ripida (per il getto): alla quota di tangenza l'unica salita possibile è quella ottima, e tutte le condizioni di salita si sono “fuse” in un solo punto.

4.2 Tangenza teorica per i turbogetti

Per il getto la condizione di tangenza si scrive imponendo che la massima spinta disponibile, ormai ridotta dalla quota, eguagli appena la minima spinta necessaria:

$$T_{d,max} = T_{no,min} = \frac{W}{E_{max}}.$$

Per legare questa condizione alla quota occorre un modello di come la spinta disponibile decada con la densità. Adottiamo l'ipotesi, semplice e largamente usata in prima approssimazione, che la spinta disponibile scali linearmente con il rapporto di densità, $T_{d,max} = T_{d0,max} \sigma_{tt}$, dove $T_{d0,max}$ è la spinta massima al livello del mare. Sostituendo e isolando il rapporto di densità alla quota di tangenza:

$$\sigma_{tt} = \frac{W}{T_{d0,max} E_{max}}. \quad (4.1)$$

La velocità a cui si realizza la tangenza è, coerentemente, quella di massima efficienza:

$$V_{h_{tt}} = \sqrt{\frac{T_{d,max}}{2A}} = \sqrt{\frac{(T_{d0,max}/W)(W/S)}{\rho_0 C_{D_0}}}. \quad (4.2)$$

Osservazione

La (4.1) è ricca di indicazioni progettuali. Il rapporto σ_{tt} è tanto più *piccolo* — e quindi la quota di tangenza tanto più *alta*, perché σ decresce con la quota — quanto maggiori sono l'efficienza aerodinamica E_{max} e il rapporto spinta-peso $T_{d0,max}/W$. Sono esattamente i due parametri su cui la progettazione interviene per innalzare il soffitto: un'ala efficiente e un motore generoso rispetto al peso. Si noti che il carico alare W/S non compare nella (4.1): per il getto, la quota di tangenza dipende dal rapporto spinta-peso e dall'efficienza, ma non (in questa approssimazione) da quanto il velivolo è “caricato” sull'ala. È una differenza notevole rispetto alla motoelica, come vedremo.

4.3 Dal rapporto di densità alla quota: il modello di atmosfera standard

Le relazioni precedenti forniscono σ_{tt} , cioè il rapporto di densità alla quota di tangenza; per ottenere la quota h_{tt} in metri occorre invertire il modello di atmosfera standard (ISA), che lega densità e quota e che è richiamato per esteso nell'Appendice B. Riportiamo qui le sole formule di inversione necessarie.

Doppio uso del simbolo T

Nelle relazioni del modello atmosferico il simbolo T (con i pedici 0, TP, ...) indica la *temperatura assoluta*, non la spinta. La spinta resta sempre indicata con T_d , T_{no} , T_{ns} . Indicheremo inoltre con a il gradiente termico verticale e con R la costante specifica dell'aria. Questa convivenza di significati per la lettera T è inevitabile nella letteratura aeronautica: la si gestisce prestando attenzione ai pedici e al contesto.

Nella **troposfera** ($0 \leq h \leq 11\,000$ m), dove la temperatura decresce linearmente, $T(h) = T_0 - a h$ con gradiente $a \approx 0,0065$ K/m, il rapporto di densità vale

$$\sigma = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{g}{aR} - 1},$$

e invertendo per la quota di tangenza si ottiene:

$$h_{tt} = \frac{T_0}{a} \left(1 - \sigma_{tt}^{\frac{aR}{g-aR}} \right) \quad (\text{troposfera}). \quad (4.3)$$

Nella **stratosfera isoterma** ($11\,000\text{ m} \leq b \leq 20\,000\text{ m}$, $T = T_{TP} = 216,65\text{ K}$), dove la densità decade esponenzialmente:

$$\sigma = \sigma_{TP} e^{-\frac{g}{R T_{TP}} (b - b_{TP})} \implies h_{tt} = b_{TP} - \frac{R T_{TP}}{g} \ln \left(\frac{\sigma_{tt}}{\sigma_{TP}} \right) \quad (\text{stratosfera}). \quad (4.4)$$

Si sceglie l'una o l'altra relazione a seconda che σ_{tt} corrisponda a una quota minore o maggiore di $11\,000\text{ m}$: in pratica si applica prima la (4.3) e, se il risultato supera la quota della tropopausa, si ripete il calcolo con la (4.4). Per molti velivoli da trasporto la quota di tangenza cade proprio nei pressi della tropopausa o poco al di sopra, il che rende necessario disporre di entrambe le formule.

4.4 Tangenza teorica per le motoeliche

Per la motoelica la condizione di tangenza impone l'uguaglianza fra massima potenza disponibile e minima potenza necessaria, $\Pi_{d,\max} = \Pi_{no,\min}$. Procediamo come per il getto, ma ragionando in termini di potenza. Assumiamo che la potenza disponibile scali con il rapporto di densità, $\Pi_{d,\max} = \Pi_{d0,\max} \sigma_{tt} = \eta_p \Pi_{a0,\max} \sigma_{tt}$ (con η_p rendimento dell'elica e $\Pi_{a0,\max}$ potenza all'albero al livello del mare), e scriviamo la potenza necessaria minima nella forma

$$\Pi_{no,\min} = \frac{W}{(E)_{\Pi \min}} V_{\Pi \min}, \quad V_{\Pi \min} = \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho_0 \sigma_{tt} C_L|_{\Pi \min}}},$$

dove $(E)_{\Pi \min}$ e $C_L|_{\Pi \min}$ sono efficienza e coefficiente di portanza all'assetto di potenza minima. Uguagliando e isolando σ_{tt} (la dipendenza da σ_{tt} compare anche dentro $V_{\Pi \min}$, da cui l'esponente $2/3$):

$$\sigma_{tt} = \left[\frac{W}{\eta_p \Pi_{a0,\max}} \frac{1}{(E)_{\Pi \min} \sqrt{C_L|_{\Pi \min}}} \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho_0}} \right]^{2/3}. \quad (4.5)$$

Noto σ_{tt} , la quota si ricava come per il getto tramite le (4.3)–(4.4).

Osservazione

La (4.5) indica che, per le motoeliche, la quota di tangenza aumenta al crescere dell'efficienza aerodinamica e del rapporto potenza–peso Π_d/W — in analogia con il getto — ma *diminuisce* al crescere del carico alare W/S . Qui sta la differenza essenziale rispetto al getto: per la motoelica il carico alare entra esplicitamente e con segno penalizzante. La ragione è che un carico alare elevato comporta velocità di volo maggiori, e quindi una potenza necessaria più alta proprio dove la potenza disponibile è già scarsa. Un velivolo a elica progettato per quote elevate tende perciò ad avere ali ampie (basso carico alare): è il caso, all'estremo, dei velivoli per alta quota a lunga autonomia, riconoscibili per l'apertura alare sproporzionata.

4.5 Effetto del peso

Il peso del velivolo non è costante — diminuisce con il consumo di combustibile — e può variare molto da una missione all'altra a seconda del carico pagante e del carburante imbarcato. È quindi importante capire come il peso influenzi le prestazioni di salita e il soffitto.

La chiave sta nella parametrizzazione $T_{no} = AV^2 + B/V^2$ (Appendice A): il peso compare *solo* nella costante $B = 2W^2/(\rho S \pi e AR)$, legata alla resistenza indotta, e *non* nella costante $A = \frac{1}{2} \rho S C_{D_0}$, legata alla resistenza

parassita. Questa osservazione, apparentemente tecnica, ha conseguenze fisiche precise. Poiché B cresce con il quadrato del peso, un aumento di W innalza la curva di spinta necessaria, ma in modo non uniforme: l'innalzamento è marcato alle basse velocità (dove domina il termine indotto B/V^2) e quasi impercettibile alle alte velocità (dove domina il termine parassita AV^2 , indipendente dal peso). Ne discendono due conseguenze operative:

- 1) a parità di spinta disponibile, l'aumento di peso riduce le velocità di volo a ogni quota e, soprattutto, riduce l'eccesso di spinta e di potenza, peggiorando angolo e rateo di salita;
- 2) l'aumento di peso *abbassa* la quota di tangenza teorica: $h_{tt}(W_2) < h_{tt}(W_1)$ per $W_2 > W_1$. È esperienza comune che un velivolo pesantemente caricato “faticchi” a salire e raggiunga quote di crociera inferiori; qui ne abbiamo la spiegazione quantitativa.

Nota

Poiché il peso interviene solo nel termine indotto (costante B), il suo effetto sulla spinta necessaria è più marcato ai regimi di volo lenti — dove la resistenza indotta è dominante — e meno sensibile alle alte velocità, dove prevale la resistenza parassita. È la stessa ragione per cui, in salita, conviene alleggerire il velivolo (per esempio scaricando il carburante in un'emergenza): si agisce direttamente sul termine che governa le prestazioni alle basse velocità tipiche della salita.

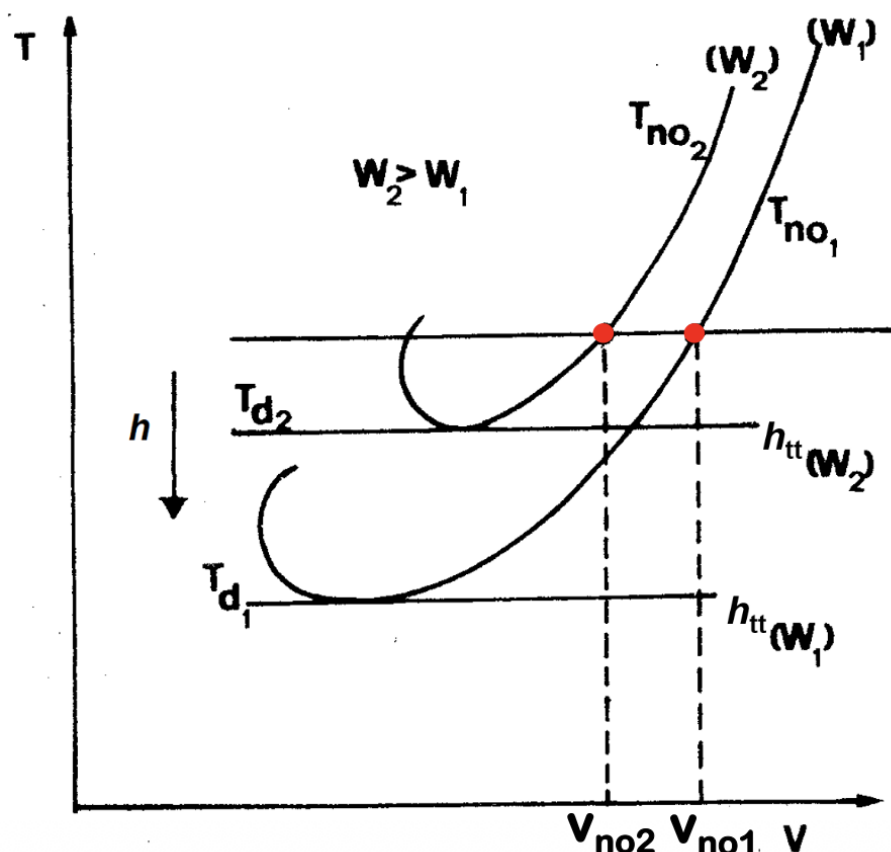


Figura 4.1. Effetto del peso sulle curve di spinta necessaria e sulla quota di tangenza. All'aumentare del peso ($W_2 > W_1$) la curva T_{no} si sposta verso l'alto alle basse velocità (dove domina la resistenza indotta), mentre resta pressoché invariata alle alte velocità; le velocità di volo si riducono e la quota di tangenza teorica si abbassa.

4.6 Vincoli di certificazione

I requisiti di salita non sono soltanto prestazionali, ma anche *normativi*: la certificazione impone gradienti minimi garantiti in determinate configurazioni e fasi di volo, in particolare in caso di avaria motore. Per molti velivoli da trasporto questi requisiti sono dimensionanti, nel senso che fissano la spinta minima da installare più ancora delle prestazioni in condizioni normali: un velivolo deve poter salire con un gradiente sicuro anche dopo aver perso un motore al decollo, e questo determina quanta spinta “di riserva” debba avere a piena efficienza.

CS-25.123 — Traiettorie di salita di rotta (en-route)

Per i velivoli da trasporto, le norme di certificazione prescrivono, in caso di avaria di un motore, un valore minimo garantito della pendenza della traiettoria $\gamma_{\min}$ pari a circa 1,1 % (bimotore), 1,4 % (trimotore) e 1,6 % (quadrimotore), a una velocità $V \geq V_{\text{FTO}} = 1,18 V_{\text{SR}}$. In caso di avaria di due motori (velivoli tri- e quadrimotore) i minimi scendono rispettivamente a circa 0,3 % e 0,5 %. Questi vincoli, insieme alla quota di tangenza pratica, definiscono il limite superiore operativo del velivolo e ne condizionano la spinta installata. La logica della norma è prudenziale: garantire che, anche nella peggiore avaria credibile, il velivolo conservi una capacità di salita positiva sufficiente a scavalcare il terreno lungo la rotta.

Tempo di salita

Conoscere il rateo massimo di salita a ogni quota non basta a rispondere a una domanda che in volo è quotidiana: *quanto tempo* occorre per portarsi da una quota all'altra? È un dato di immediata rilevanza operativa, perché il tempo di salita determina il carburante speso in questa fase, incide sulla separazione del traffico nelle procedure di partenza e, per un velivolo da intercettazione, misura la prontezza con cui ci si porta alla quota di ingaggio. In questo capitolo trasformiamo l'informazione "puntuale" sul rateo — quanto si sale al secondo a una data quota — nell'informazione "integrale" sul tempo — quanto si impiega a percorrere un intervallo di quote.

5.1 Dalla velocità verticale al tempo

Il punto di partenza è la definizione stessa di rateo di salita come derivata della quota rispetto al tempo, $v_s = dh/dt$. Da essa, separando le variabili, $dt = dh/v_s$: il tempo infinitesimo speso per guadagnare la quota infinitesima dh è il rapporto fra dh e il rateo a quella quota. Integrando fra il livello del mare e una quota generica h_1 si ottiene il tempo di salita. Se in ogni istante il pilota vola alla condizione di salita rapida — sfruttando cioè il massimo rateo disponibile a quella quota, $v_{s,\max}(h)$ — il tempo risulta il *minimo* possibile:

$$t_{1,\min} = \int_0^{h_1} \frac{dh}{v_{s,\max}(h)}. \quad (5.1)$$

Il rateo massimo $v_{s,\max}(h)$ non è però noto in forma analitica semplice: come abbiamo visto, dipende dalle curve di potenza disponibile e necessaria a ciascuna quota, che cambiano con la densità e con il peso (anch'esso variabile per il consumo). L'integrale (5.1) si valuta perciò quasi sempre *per via numerica*, suddividendo la salita in n intervalli (o "strati") di ampiezza Δh e assumendo costante in ciascuno il rateo massimo, valutato a una quota rappresentativa dello strato (per esempio quella media):

$$t_{1,\min} \simeq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta h}{v_{s,\max,i}} \right). \quad (5.2)$$

Si riconosce qui all'opera la stessa logica di discretizzazione "a tratti" introdotta nel Capitolo 1: su ciascun intervallo si ritengono valide le ipotesi del volo uniforme (densità, peso e assetto praticamente costanti), mentre da un intervallo al successivo si aggiornano la densità, le curve necessarie e il rateo massimo. Più fitta è la suddivisione (cioè più piccolo è Δh), più accurata è la stima; in pratica strati di mille metri o meno forniscono già una buona approssimazione.

Osservazione

Il termine $1/v_{s,\max}$ che compare nell'integrale ha un significato fisico diretto: è il tempo speso per guadagnare l'unità di quota a quella quota. Tracciando il diagramma di $1/v_{s,\max}$ in funzione di h , il tempo di salita fino a h_1 non è altro che l'area sottesa alla curva fra 0 e h_1 . È una lettura grafica preziosa, perché rende immediatamente evidente come ogni metro di quota "costi" sempre di più, in termini di tempo, man mano che si sale: la curva $1/v_{s,\max}$ parte bassa (rateo elevato, tempo per metro piccolo) e cresce verso l'alto avvicinandosi alla quota di tangenza, dove il rateo si annulla e il tempo per metro diverge.

5.2 Comportamento asintotico in prossimità della tangenza

L'osservazione precedente anticipa il fatto più importante di questo capitolo. All'avvicinarsi della quota di tangenza teorica, il rateo massimo tende a zero, $v_{s,\max}(h) \rightarrow 0$ per $h \rightarrow h_{tt}$; di conseguenza l'integrando $1/v_{s,\max}$ diverge e il tempo di salita cresce senza limite:

$$\lim_{h_1 \rightarrow h_{tt}} t_{1,\min} = +\infty.$$

È la traduzione quantitativa di quanto anticipato nel Capitolo 4: la tangenza teorica è *irraggiungibile in tempo finito*. Per quanto si possa attendere, il velivolo non raggiungerà mai esattamente h_{tt} , perché negli ultimi metri il rateo è talmente piccolo da rendere il tempo praticamente infinito. È esattamente questo il motivo per cui le quote operativamente significative sono quelle di tangenza *pratica*: lì il rateo residuo (tipicamente 0,5 m/s o 1,5 m/s) è ancora abbastanza grande da mantenere finito — e ragionevole — il tempo di salita.

Esempio

Si consideri il diagramma del tempo di salita $t_{1,\min}(h)$, cioè della quota raggiunta in funzione del tempo trascorso. Esso parte dall'origine con pendenza finita e ripida (a bassa quota il rateo massimo è elevato, quindi si guadagna quota in fretta) e si incurva progressivamente, “appiattendosi” man mano che si sale, fino ad avvicinarsi asintoticamente alla retta orizzontale $h = h_{tt}$. La curva non interseca mai tale asintoto: ci si può avvicinare quanto si vuole, ma soltanto a prezzo di un tempo che cresce indefinitamente. La conseguenza pratica è sorprendente ma reale: gli ultimi mille metri di quota sotto il soffitto possono richiedere più tempo di tutta la salita precedente. È la ragione per cui nessun pilota tenta di raggiungere la tangenza teorica, e per cui i manuali riportano tempi di salita solo fino a quote ben al di sotto di essa.

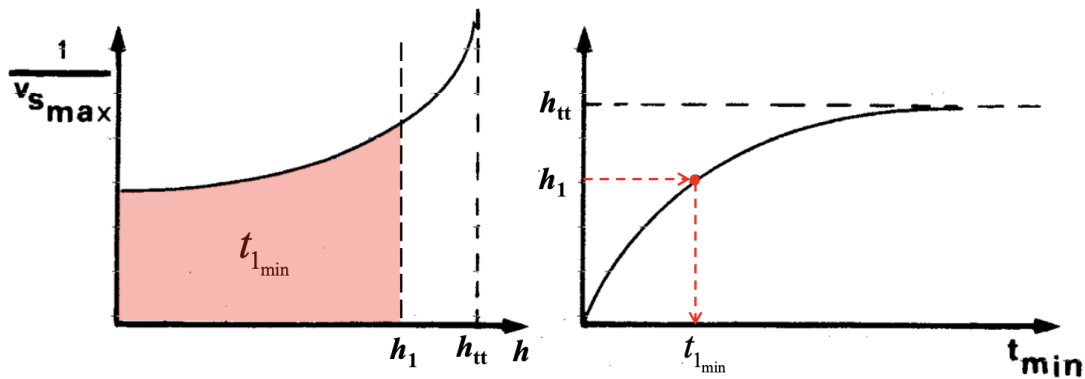


Figura 5.1. A sinistra: l'inverso del rateo massimo di salita $1/v_{s,\max}$ in funzione della quota; l'area sottesa fino a h_1 (in evidenza) misura il tempo minimo di salita $t_{1,\min}$, e diverge avvicinandosi a h_{tt} . A destra: il tempo di salita, ossia la quota raggiunta in funzione del tempo, con l'andamento asintotico verso la quota di tangenza teorica h_{tt} .

Nota

La (5.1) fornisce il tempo *minimo* perché in ogni tratto si sfrutta il massimo rateo disponibile, cioè si vola sempre a V_y . Se invece il profilo di salita è vincolato da altre esigenze — una legge di velocità imposta dal controllo del traffico, o un assetto scelto per il minimo consumo anziché per il minimo tempo — il tempo effettivo risulta maggiore di $t_{1,\min}$. La distinzione fra salita di minimo tempo e salita di minimo consumo, qui solo accennata, sarà ripresa e formalizzata in chiave energetica nel Capitolo 8, dove si vedrà che i due obiettivi conducono in generale a profili di volo diversi.

L'involuppo di volo

Le prestazioni di salita, insieme ai limiti aerodinamici, strutturali e propulsivi, concorrono a definire la regione del piano quota-velocità entro cui il velivolo può effettivamente volare in modo equilibrato e sicuro. Questa regione prende il nome di **involuppo di volo** (*flight envelope*) ed è, in un certo senso, la sintesi grafica di tutto ciò che abbiamo costruito finora: ogni curva che ne delimita il contorno è la manifestazione di un limite fisico discusso nei capitoli precedenti.

Involuppo di volo

L'involuppo di volo è il luogo dei punti del piano (V, h) — con V velocità vera (TAS) e h quota — in corrispondenza dei quali esiste una condizione di volo equilibrato compatibile con tutti i limiti operativi del velivolo. Il suo contorno è definito dall'intersezione di più vincoli, ciascuno dominante in una diversa porzione del dominio. Volare “dentro” l'involuppo è possibile e sicuro; il bordo rappresenta il limite estremo; l'esterno è precluso.

6.1 I limiti che definiscono il contorno

Percorrendo il contorno dell'involuppo si incontrano quattro famiglie di vincoli, che conviene esaminare uno alla volta perché ciascuno racconta un aspetto diverso della fisica del velivolo.

6.1.1 Limite aerodinamico (bassa velocità)

A sinistra il dominio è chiuso dalla **velocità di stallo** V_{stallo} : al di sotto di essa l'ala, pur portata all'incidenza massima, non genera portanza sufficiente a sostenere il peso, e il volo livellato diventa impossibile. La velocità di stallo si ottiene imponendo $L = W$ con $C_L = C_{L,\text{max}}$:

$$V_{\text{stallo}} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{C_{L,\text{max}}}}.$$

Da questa espressione si legge un comportamento importante: poiché la densità ρ diminuisce con la quota, la velocità di stallo *vera* (TAS) cresce salendo. Il limite aerodinamico si inclina perciò verso destra all'aumentare di h : in alta quota bisogna volare più veloci anche solo per non stallare. (La velocità di stallo *equivalente*, $V_{\text{stallo}} \sqrt{\sigma}$, resta invece costante: è il motivo per cui lo strumento di bordo, che misura la velocità equivalente, segnala lo stallo sempre alla stessa lettura.)

6.1.2 Limite strutturale (alta velocità)

A destra, alle quote più basse, il dominio è chiuso dalla **massima velocità operativa** V_{MO} (e dal corrispondente M_{MO} in quota), fissata da considerazioni di resistenza strutturale e di carichi aeroelastici: pressione dinamica massima ammissibile, insorgenza del *flutter*, carichi da raffica. È un limite imposto dalla *struttura*, non dall'aerodinamica né dalla propulsione: superarlo non rende il volo impossibile, ma espone il velivolo a sollecitazioni che ne comprometterebbero l'integrità. Per questo è un limite “rigido”, da non oltrepassare in nessuna condizione.

6.1.3 Limite propulsivo (alta velocità in quota)

Alle quote elevate, dove la spinta disponibile cala, il bordo destro non è più governato dalla struttura ma dalla **disponibilità di spinta o potenza**. La massima velocità raggiungibile è quella per cui la spinta disponibile, ormai ridotta dalla rarefazione dell'aria, eguaglia appena la spinta necessaria al volo livellato: oltre quella velocità il velivolo non ha più potenza per accelerare. È, nel linguaggio dell'odografa introdotta nel Capitolo 3, il punto S_4 , l'intersezione ad alta velocità della curva con l'asse del volo livellato.

6.1.4 Tangenza teorica e pratica (limite superiore)

In alto il dominio è chiuso dalle quote di tangenza:

- la **tangenza teorica** (*absolute ceiling*), quota alla quale l'eccesso di potenza si annulla e il dominio degenera in un singolo punto — l'apice dell'involuppo;
- la **tangenza pratica** (*service ceiling*), quota alla quale il rateo residuo scende al valore convenzionale, e che rappresenta il limite superiore operativamente significativo, quello effettivamente dichiarato e utilizzato.

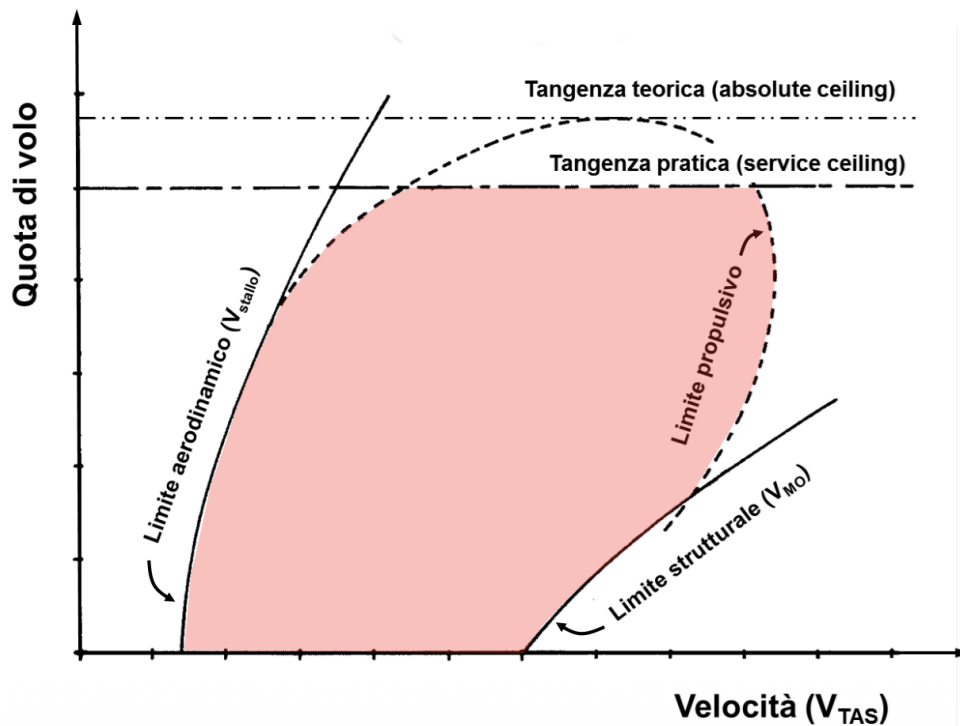


Figura 6.1. Involuppo di volo tipico di un velivolo turbogetto nel piano quota-velocità vera. Il contorno è definito, partendo dal basso a sinistra e procedendo in senso orario, dal limite aerodinamico (V_{stallo}), dalla tangenza pratica e teorica, dal limite propulsivo in quota e dal limite strutturale (V_{MO}) alle basse quote. La regione interna è il dominio di volo equilibrato e sicuro.

6.2 Lettura dell'inviluppo

Osservazione

L'inviluppo ha una caratteristica forma “a punta” verso l'alto. Salendo, il margine tra la velocità minima (stallo) e quella massima (limite propulsivo) si restringe progressivamente, fino ad annullarsi alla tangenza teorica, dove esiste un'unica velocità di volo possibile — quella di $E_{\max}$ per il getto, di $\Pi_{no,\min}$ per la motoelica. È esattamente lo stesso restringimento che, nell'odografa, vede i punti S_1 e S_4 avvicinarsi al crescere della quota fino a coincidere quando la curva collassa nell'origine. Inviluppo e odografa raccontano dunque, in due linguaggi diversi, la medesima storia: l'esaurirsi progressivo dell'eccesso di potenza con la quota.

Il “coffin corner”

Per i turbogetti da trasporto, alle quote più elevate il vertice dell'inviluppo assume un significato operativo critico, noto come *coffin corner* (“angolo della bara”). In quella regione la velocità minima (stallo a bassa velocità) e la velocità massima (insorgenza del *buffet* di comprimibilità ad alto numero di Mach) si avvicinano fino a lasciare un margine di pochi nodi: rallentare porta allo stallò, accelerare porta al buffet di Mach, e in entrambi i casi si perde il controllo. È la traduzione più drammatica della forma “a punta” dell'inviluppo, e la ragione per cui le quote di crociera vengono scelte con un margine prudenziale rispetto al vertice. Si noti che qui il limite superiore di velocità non è quello propulsivo né quello strutturale “classico”, ma un limite aerodinamico di alta velocità legato alla comprimibilità.

Nota

La forma dell'inviluppo cambia con la categoria del velivolo. Per un turbogetto da trasporto il bordo superiore è dominato dal numero di Mach (effetti di comprimibilità, *buffet*, divergenza della resistenza d'onda), mentre per una motoelica il limite propulsivo si manifesta già a quote e velocità inferiori, e la regione di alta velocità non è interessata dalla comprimibilità. In ogni caso l'inviluppo è il diagramma che il progettista e l'operatore consultano per sapere *dove* il velivolo può volare — in quale combinazione di quota e velocità — prima ancora di chiedersi *come* portarvisi, domanda a cui rispondono invece le prestazioni di salita studiate nei capitoli precedenti.

Volo in salita non uniforme

Finora la salita è stata trattata “a tratti” come uniforme, assumendo cioè velocità vera costante in ciascun intervallo di quota. È un’ipotesi eccellente per impostare la fisica del problema, ma che la pratica spesso smentisce: nei velivoli ad elevato rapporto spinta–peso, e più in generale ogni volta che la salita avviene secondo leggi di velocità realistiche (a velocità calibrata o a numero di Mach costante), la velocità vera *varia* con la quota. Quando ciò accade, una parte della spinta in eccesso non si traduce in guadagno di quota, ma viene spesa per *accelerare* il velivolo. Trascurare questo effetto porterebbe a sovrastimare il rateo di salita. Occorre dunque reintrodurre il termine inerziale che nel volo uniforme avevamo posto pari a zero.

7.1 Equilibrio con il termine inerziale

Riscriviamo il bilancio delle forze lungo la traiettoria, questa volta con accelerazione dV/dt non nulla. Lungo la traiettoria, il secondo principio della dinamica impone che la risultante delle forze eguagli la massa per l’accelerazione, $(W/g) dV/dt$:

$$T = D + W \sin \gamma + \frac{W}{g} \frac{dV}{dt}, \quad L = W \cos \gamma. \quad (7.1)$$

Rispetto al caso uniforme (2.2) compare il termine aggiuntivo $\frac{W}{g} \frac{dV}{dt}$: è la forza d’inerzia associata alla variazione di velocità, che si comporta come una resistenza supplementare quando il velivolo accelera (e come una spinta supplementare quando decelera). Dividendo la prima delle (7.1) per il peso W e isolando l’eccesso specifico di spinta:

$$\frac{T - D}{W} = \sin \gamma + \frac{1}{g} \frac{dV}{dt}.$$

L’eccesso di spinta, che nel volo uniforme era integralmente disponibile per la salita ($\sin \gamma$), si ripartisce ora fra salita e accelerazione. Per rendere esplicita questa ripartizione conviene esprimere l’accelerazione in funzione della quota anziché del tempo, mediante la regola della catena: poiché $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt}$ e $\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma$ (è il rateo di salita), si ha $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} V \sin \gamma$. Sostituendo e raccogliendo $\sin \gamma$:

$$\frac{T - D}{W} = \sin \gamma \left(1 + \frac{V}{g} \frac{dV}{dh} \right). \quad (7.2)$$

Tutta la fisica del moto non uniforme è racchiusa in questo fattore fra parentesi: esso “corregge” la relazione del volo uniforme tenendo conto di quanto la velocità varia con la quota.

7.2 Il fattore di correzione del rateo di salita

Indichiamo con $v_s = V \left(\frac{T - D}{W} \right)$ il rateo di salita che si avrebbe a velocità vera costante (il valore del moto uniforme, dato dall’eccesso di potenza specifico). Il rateo *effettivo* nel moto non uniforme è $v_s^* = V \sin \gamma$, e

dalla (7.2) si ricava il legame fra i due:

$$v_s^* = \frac{v_s}{1 + \frac{V}{g} \frac{dV}{dh}} \quad (7.3)$$

Osservazione

Il fattore $\left(1 + \frac{V}{g} \frac{dV}{dh}\right)$ è il “prezzo” dell’accelerazione, e il suo effetto dipende dal segno di dV/dh :

- in salita a velocità vera *crescente* ($dV/dh > 0$) il fattore è maggiore di uno: parte dell’eccesso di potenza alimenta l’accelerazione, e il rateo effettivo v_s^* è *minore* di quello uniforme v_s ;
- in salita a velocità vera *decrescente* ($dV/dh < 0$) il fattore è minore di uno e $v_s^* > v_s$: la decelerazione “restituisce” energia cinetica che si converte in quota.

Il segno e l’entità della correzione dipendono dunque interamente dalla legge $V(h)$ con cui il pilota (o l’autopilota) imposta la salita. Lo stesso velivolo, alla stessa quota e con la stessa potenza, può avere ratei effettivi diversi a seconda di come si fa variare la velocità.

Poiché tutto dipende da dV/dh , e questa a sua volta dalla legge di velocità scelta, dobbiamo specificare *come* si sale. Per i velivoli da trasporto la procedura tipica — la cosiddetta *climb schedule* — prevede una salita a velocità equivalente (o calibrata) costante fino a una quota di transizione, e successivamente a numero di Mach costante. La ragione è duplice: a bassa quota mantenere costante la velocità calibrata limita i carichi strutturali (legati alla pressione dinamica), mentre ad alta quota mantenere costante il Mach controlla gli effetti di comprimibilità. Esaminiamo separatamente i due regimi, perché producono correzioni di segno opposto.

Simboli del modello atmosferico

In questo capitolo T con pedice atmosferico (T_0 , T_{TP}) indica la *temperatura assoluta*; a è il gradiente termico verticale, R la costante specifica dell’aria e k il rapporto dei calori specifici (denotato k , e non γ , per non confonderlo con l’angolo di traiettoria γ). La spinta resta indicata con T , T_d , ecc. nelle sole relazioni meccaniche.

7.3 Salita a velocità equivalente costante

A velocità equivalente V_{EAS} costante, la velocità vera cresce con la quota secondo $V_{TAS} = V_{EAS} \sigma^{-1/2}$: poiché σ diminuisce salendo, V_{TAS} aumenta e dunque $dV/dh > 0$. Ci attendiamo perciò un fattore maggiore di uno, cioè una penalizzazione del rateo.

7.3.1 Troposfera ($0 \leq h \leq 11\,000$ m)

Con $T(h) = T_0 - ah$ e $\sigma = (T/T_0)^{\frac{g-aR}{aR}}$, derivando $V_{TAS} = V_{EAS} \sigma^{-1/2}$ rispetto alla quota e sostituendo nel fattore di correzione si ottiene:

$$1 + \frac{V}{g} \frac{dV}{dh} = 1 + \frac{V_{EAS}^2}{2g} \frac{a}{T_0} \left(\frac{g-aR}{aR} \right) \sigma^{-\frac{g}{g-aR}} \quad (\text{troposfera}). \quad (7.4)$$

Il termine correttivo è positivo, e cresce salendo (per via del fattore $\sigma^{-g/(g-aR)}$): la penalizzazione del rateo si accentua con la quota.

7.3.2 Stratosfera isoterma ($11\,000 \leq b \leq 20\,000$ m)

Nella stratosfera isoterma $T = T_{TP}$ è costante e $\sigma = \sigma_{TP} e^{-\frac{g}{RT_{TP}}(b-b_{TP})}$; risulta $d\sigma/db = -\frac{g}{RT_{TP}}\sigma$, e il fattore assume una forma particolarmente compatta:

$$1 + \frac{V}{g} \frac{dV}{db} = 1 + \frac{1}{2R T_{TP}} \frac{V_{EAS}^2}{\sigma} = 1 + \frac{V_{TAS}^2}{2R T_{TP}} \quad (\text{stratosfera}). \quad (7.5)$$

7.4 Salita a numero di Mach costante

A numero di Mach costante la velocità vale $V = M a_{\text{son}} = M \sqrt{k R T} = M \sqrt{k R (T_0 - a b)}$, dove a_{son} è la velocità del suono. Qui il comportamento è opposto al precedente: salendo, la temperatura cala, la velocità del suono diminuisce e — a Mach fissato — la velocità vera *diminuisce*. Ci attendiamo dunque $dV/db < 0$ e un fattore minore di uno, cioè un beneficio sul rateo.

7.4.1 Troposfera

Derivando $V = M \sqrt{k R (T_0 - a b)}$ rispetto alla quota si trova $\frac{dV}{db} = -\frac{\sqrt{k R}}{2} \frac{a M}{\sqrt{T}}$, da cui

$$1 + \frac{V}{g} \frac{dV}{db} = 1 - \frac{k R}{2g} a M^2 \simeq 1 - 0,1332 M^2 \quad (\text{troposfera}). \quad (7.6)$$

Il valore numerico 0,1332 discende dalle costanti ISA ($k = 1,4$, $R = 287 \text{ J/(kg K)}$, $a = 0,0065 \text{ K/m}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$), ed è una costante comoda da ricordare.

7.4.2 Stratosfera isoterma

Nella stratosfera la temperatura è costante: la velocità del suono non varia, dunque a M costante anche la velocità vera è costante, $dV/db = 0$, e il fattore si riduce all'unità:

$$1 + \frac{V}{g} \frac{dV}{db} = 1 \quad (\text{stratosfera}). \quad (7.7)$$

In questo caso la salita a Mach costante è, di fatto, una salita a velocità vera costante, e il rateo effettivo coincide con quello uniforme: il termine inerziale scompare.

Esempio

Consideriamo una salita a $M = 0,7$ in troposfera. Il fattore di correzione vale

$$1 - 0,1332 \cdot (0,7)^2 = 1 - 0,1332 \cdot 0,49 \approx 0,935.$$

Essendo minore di uno, il rateo effettivo risulta *maggiore* di quello uniforme di circa il 7%: il termine inerziale è negativo perché, a Mach costante, la velocità vera diminuisce salendo (la temperatura cala) e la conseguente decelerazione restituisce energia cinetica. A velocità equivalente costante, invece, accade il contrario: la velocità vera cresce, il fattore è maggiore di uno e il rateo viene penalizzato. È proprio questa differenza di segno a spiegare perché le procedure operative combinino i due regimi: a bassa quota la salita a velocità calibrata costante è imposta dai limiti di carico, e si accetta la penalizzazione; ad alta quota si passa al Mach costante, che oltre a controllare la comprimibilità giova anche al rateo.

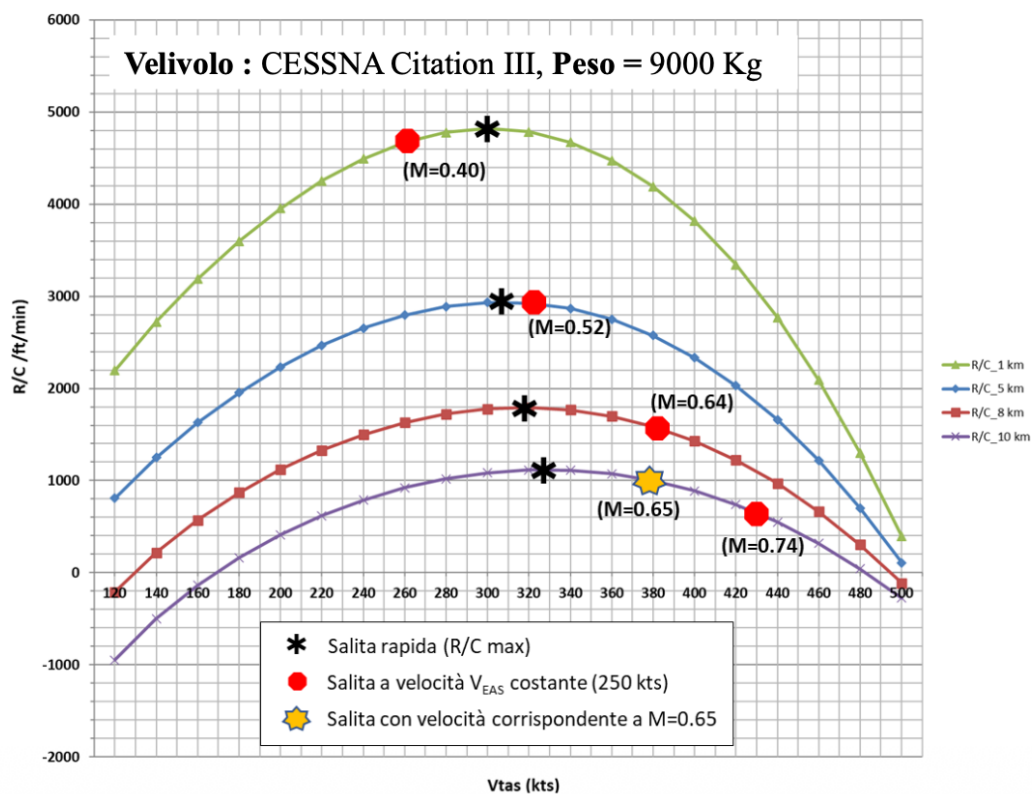


Figura 7.1. Confronto del rateo di salita al variare della legge di velocità per un turbogetto: salita rapida (rateo massimo uniforme), salita a velocità equivalente V_{EAS} costante (penalizzata) e salita a numero di Mach costante (favorita), in funzione della quota. A parità di velivolo e quota, le diverse impostazioni della velocità producono ratei effettivi sensibilmente diversi.

Il metodo energetico

Quando la salita comporta variazioni rilevanti sia di quota sia di velocità — come accade tipicamente nei velivoli militari ad alte prestazioni, che possono dover guadagnare quota e numero di Mach contemporaneamente — la separazione fra “salita” e “accelerazione” perde di significato. Domandarsi se la spinta in eccesso stia facendo salire o accelerare il velivolo diventa una distinzione artificiosa, perché le due cose avvengono insieme e si scambiano di continuo. Conviene allora cambiare punto di vista e adottare un approccio *energetico*, che tratta quota e velocità non come grandezze separate ma come due forme della stessa grandezza: l'energia meccanica totale. È un'idea potente, sviluppata negli anni Cinquanta proprio per l'ottimizzazione delle salite dei caccia, e tuttora alla base della pianificazione delle traiettorie ad alte prestazioni.

8.1 Energia e quota energetica

L'energia meccanica di manovra di un velivolo di peso W è la somma dell'energia potenziale e di quella cinetica:

$$H_e = W h + \frac{1}{2} \frac{W}{g} V^2, \quad (8.1)$$

dove W/g è la massa del velivolo. Dividendo per il peso si ottiene una grandezza dalle dimensioni di una lunghezza, la **quota energetica** (*energy height*):

$$h_e = \frac{H_e}{W} = h + \frac{V^2}{2g}. \quad (8.2)$$

Quota energetica

La quota energetica h_e è la quota che il velivolo raggiungerebbe se convertisse *tutta* la propria energia cinetica in energia potenziale, salendo fino a fermarsi (idealmente, e senza perdite). Rappresenta il “serbatoio” di energia meccanica specifica di cui il velivolo dispone: due stati di volo con la stessa h_e — per esempio uno lento e alto, l'altro veloce e basso — sono energeticamente equivalenti e, in assenza di perdite, intercambiabili mediante un puro scambio fra quota e velocità (una cabrata che converte velocità in quota, o una picchiata che fa l'opposto).

Il vantaggio concettuale è notevole: invece di seguire separatamente h e V , si segue un'unica variabile h_e che le riassume entrambe. Una manovra che aumenta h_e è una manovra che “arricchisce” il velivolo di energia, indipendentemente da come quell'energia si ripartisca fra quota e velocità.

8.2 Potenza specifica in eccesso (SEP)

Per sapere quanto rapidamente il velivolo può accumulare energia, deriviamo la (8.2) rispetto al tempo. Si ottiene la **potenza specifica in eccesso**:

$$\Pi_s = \frac{dh_e}{dt} = \frac{dh}{dt} + \frac{V}{g} \frac{dV}{dt} = \frac{V(T - D)}{W}. \quad (8.3)$$

L'ultima uguaglianza si ottiene sostituendo, dalla dinamica lungo la traiettoria, $W \sin \gamma + (W/g) dV/dt = T - D$, e ricordando che $dh/dt = V \sin \gamma$: i due termini si ricompongono esattamente in $V(T - D)/W$.

Unità di Π_s

Pur essendo chiamata “potenza specifica in eccesso” (*Specific Excess Power*, SEP), la grandezza $\Pi_s = dh_e/dt$ ha le dimensioni di una *velocità* (m/s): è infatti una potenza per unità di peso, Π/W , e misura quanti metri di quota energetica il velivolo guadagna al secondo. Non va confusa con una potenza in watt. Il rateo di salita uniforme v_s ne è il caso particolare a velocità vera costante ($dV/dt = 0$), in cui tutta la SEP si traduce in guadagno di quota.

Confrontando la (8.3) con il rateo di salita uniforme $v_s = V(T - D)/W$, si vede che Π_s coincide con quest’ultimo quando non c’è accelerazione, mentre in generale ingloba anche l’energia spesa per variare la velocità. La SEP è dunque l’estensione naturale del concetto di eccesso di potenza al moto non uniforme: è “quanto eccesso” ha il velivolo, misurato in modo che non importi se lo usa per salire o per accelerare.

Il tempo per passare da un livello energetico h_{e1} a un livello h_{e2} si ottiene allora integrando, in perfetta analogia con il tempo di salita del Capitolo 5 ma sostituendo alla quota la quota energetica e al rateo la SEP:

$$dt = \frac{dh_e}{\Pi_s} \Rightarrow t_{1-2} = \int_{h_{e1}}^{h_{e2}} \frac{dh_e}{\Pi_s}. \quad (8.4)$$

8.3 Le carte energetiche: curve iso- h_e e iso- Π_s

Il metodo si presta a una costruzione grafica di grande efficacia nel piano (M, h) — o equivalentemente (V, h) . Vi si tracciano due famiglie di curve, che insieme costituiscono la “carta energetica” del velivolo:

- le **curve iso- h_e** , luoghi a quota energetica costante: dalla (8.2), $h = h_e - V^2/2g$, sono archi decrescenti (al crescere della velocità diminuisce la quota a parità di energia). Spostarsi lungo una di queste curve significa scambiare quota con velocità senza variare l’energia totale;
- le **curve iso- Π_s** , luoghi a potenza specifica in eccesso costante, calcolate dalla (8.3) note le curve di spinta e di resistenza a ogni quota. Esse indicano, in ogni punto del piano, con quale rapidità il velivolo può guadagnare energia.

8.4 Salita di minimo tempo

Dalla (8.4) si vede che il tempo è minimo se, lungo tutto il percorso, si massimizza Π_s a parità di livello energetico raggiunto: conviene cioè “passare” attraverso i punti in cui il velivolo guadagna energia più in fretta. Si dimostra che la condizione di massimo di Π_s lungo una fissata curva iso- h_e corrisponde al punto in cui quella curva iso- h_e è **tangente** a una curva iso- Π_s .

Osservazione

Il profilo di salita di minimo tempo si costruisce dunque congiungendo i punti di tangenza fra le due famiglie di curve, dal livello energetico di partenza a quello di arrivo. Poiché gli stati iniziale e finale non cadono in generale su punti di tangenza, il profilo si completa con tratti di raccordo a quota energetica costante (lungo le iso- h_e): idealmente uno scambio quota-velocità a energia invariata, cioè una cabrata o una picchiata eseguita “a costo energetico nullo”. La traiettoria ottima non è quindi una salita monotona, ma una successione di tratti di accumulo di energia (lungo i punti di tangenza) e di tratti di conversione fra quota e velocità (lungo le iso- h_e).

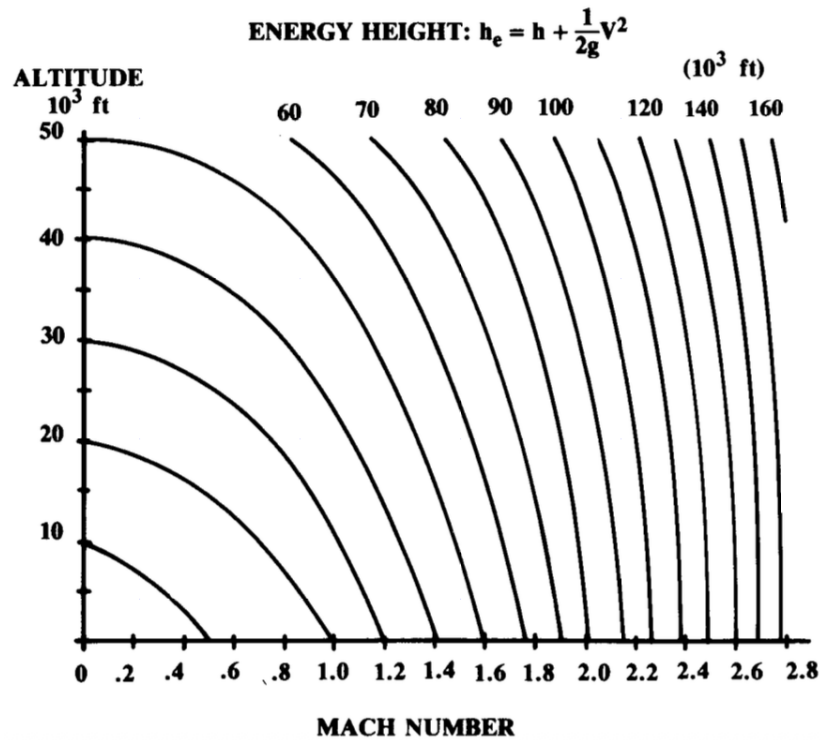


Figura 8.1. Famiglia di curve a quota energetica costante (iso- h_e) nel piano numero di Mach – quota. A parità di h_e , quota e velocità si scambiano lungo ciascuna curva: salendo lungo una curva si rallenta, scendendo si accelera.

Esempio

Per un velivolo supersonico il profilo di minimo tempo può richiedere, in corrispondenza della regione transonica, una *picchiata* a quota energetica costante. Attorno a $M = 1$ la resistenza d'onda fa crollare la SEP: restare a salire in quella regione significherebbe accumulare energia lentissimamente. Conviene allora scambiare quota con velocità — scendere accelerando lungo una iso- h_e — per attraversare rapidamente la “barriera” transonica, e riprendere poi la salita energetica sul lato supersonico, dove la SEP torna elevata. È un comportamento profondamente contro-intuitivo — “scendere per salire prima” — che la sola intuizione non suggerirebbe mai, e che solo l'analisi energetica rende evidente. Le carte iso- Π_s dei caccia degli anni Sessanta mostravano già chiaramente questa “sella” transonica, e i profili di salita ottimizzati la aggiravano esattamente in questo modo.

8.5 Salita di minimo consumo

Se l'obiettivo non è il minimo tempo ma il minimo *consumo* di carburante, si procede in modo del tutto analogo, sostituendo al tempo la massa di combustibile. Si introduce la grandezza energia-carburante

$$f_s = \frac{dh_e}{dW_f} = \frac{dh_e/dt}{dW_f/dt} = \frac{\Pi_s}{c_{sj} T}, \quad (8.5)$$

dove c_{sj} è il consumo specifico (massa di carburante per unità di spinta e di tempo) e T la spinta. La f_s misura quanti metri di quota energetica si guadagnano per unità di carburante bruciato. Il carburante speso per passare fra due livelli energetici è allora

$$W_{f1-2} = \int_{h_{e1}}^{h_{e2}} \frac{dh_e}{f_s}, \quad (8.6)$$

e il profilo di minimo consumo si ottiene, con la stessa logica del minimo tempo, congiungendo i punti di tangenza fra le curve iso- h_e e le curve iso- f_s (anziché iso- Π_s).

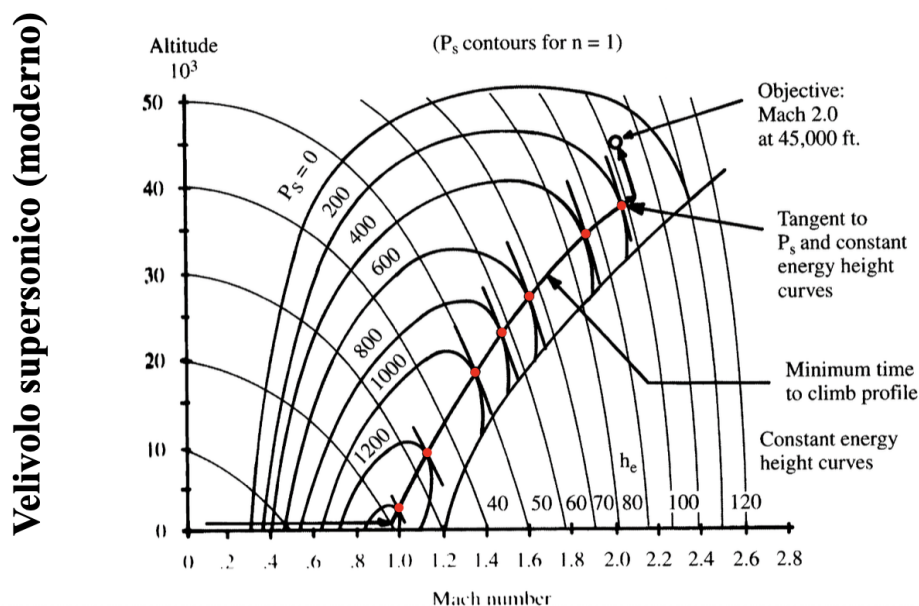


Figura 8.2. Profilo di salita ottima (minimo tempo) per un velivolo supersonico nel piano Mach – quota: il percorso segue i punti di tangenza fra le curve iso- h_e e iso- Π_s , con il caratteristico tratto di picchiata a quota energetica costante nell'attraversamento transonico.

Nota

Minimo tempo e minimo consumo conducono in generale a profili *diversi*: il primo privilegia i punti di massima Π_s (massima energia guadagnata per unità di tempo), il secondo quelli di massima f_s (massima energia guadagnata per unità di carburante). La scelta del criterio dipende dalla missione — intercettazione rapida contro crociera economica — e costituisce il punto di contatto fra le prestazioni di salita e la pianificazione operativa del volo. È significativo che un unico formalismo — quota energetica, SEP, tangenza fra famiglie di curve — consenta di trattare obiettivi tanto diversi semplicemente cambiando la grandezza da massimizzare: è questa generalità a fare del metodo energetico lo strumento d'elezione per l'ottimizzazione delle traiettorie.

Polare parabolica e parametrizzazione della spinta necessaria

Molte relazioni dei capitoli precedenti si appoggiano alla *parametrizzazione* della spinta necessaria al volo livellato nella forma compatta $T_{no} = A V^2 + B/V^2$. Questa appendice ne richiama l'origine a partire dalla polare parabolica, fissando il significato fisico delle costanti A e B e le relazioni ausiliarie che ricorrono nelle derivazioni delle velocità di salita ottima. Vale la pena padroneggiarla, perché è lo strumento algebrico che rende trattabili in forma chiusa quasi tutti i problemi affrontati nel testo.

A.1 La polare parabolica

Si assume per il velivolo una polare del tipo

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi e AR}, \quad (\text{A.1})$$

dove C_{D_0} è il coefficiente di resistenza a portanza nulla (resistenza parassita), AR l'allungamento alare ed e il fattore di Oswald, che tiene conto dello scostamento della distribuzione di portanza reale da quella ellittica ideale. Il primo termine è indipendente dalla portanza e raccoglie la resistenza di attrito e di forma; il secondo, la resistenza indotta, è il prezzo aerodinamico della portanza e cresce con il quadrato di C_L . È un modello idealizzato — la polare reale se ne discosta soprattutto alle alte incidenze, in prossimità dello stallo — ma sufficientemente accurato nel campo di assetti di crociera e di salita, ed è proprio la sua forma parabolica a consentire le derivazioni analitiche dei capitoli precedenti.

A.2 Dalla resistenza alla spinta necessaria

In volo livellato uniforme valgono $L = W$ e $T_{no} = D$. Esprimendo portanza e resistenza in termini di pressione dinamica $q = \frac{1}{2}\rho V^2$ e di superficie alare S :

$$W = q S C_L \Rightarrow C_L = \frac{W}{q S}, \quad T_{no} = D = q S C_D = q S \left(C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi e AR} \right).$$

Sostituendo l'espressione di C_L ricavata dalla prima nella seconda, ed esplicitando $q = \frac{1}{2}\rho V^2$, i due termini di resistenza assumono dipendenze opposte dalla velocità:

$$T_{no} = \underbrace{\frac{1}{2}\rho S C_{D_0}}_A V^2 + \underbrace{\frac{2W^2}{\rho S \pi e AR}}_B \frac{1}{V^2}.$$

Si ottiene così la parametrizzazione cercata:

$$T_{no} = A V^2 + \frac{B}{V^2}, \quad A = \frac{1}{2}\rho S C_{D_0}, \quad B = \frac{2W^2}{\rho S \pi e AR}. \quad (\text{A.2})$$

Il termine $A V^2$ rappresenta la resistenza parassita (cresce con la velocità), il termine B/V^2 la resistenza indotta (domina alle basse velocità). Due osservazioni meritano di essere fissate, perché tornano più volte nel testo. La prima: il *peso* compare solo in B e non in A , ed è questa la ragione — richiamata nel Capitolo 4 — per cui l'effetto del peso sulla spinta necessaria è marcato alle basse velocità e modesto alle alte. La seconda: anche la *densità* entra in modo opposto nei due termini ($A \propto \rho$, $B \propto 1/\rho$), il che spiega come le curve di spinta necessaria si deformino con la quota.

A.3 Efficienza massima e prodotto AB

La spinta necessaria è minima dove $dT_{no}/dV = 0$, cioè dove $2AV - 2B/V^3 = 0$, da cui la velocità di minima resistenza

$$V_{E_{\max}} = \left(\frac{B}{A}\right)^{1/4}.$$

In tale punto i due contributi di resistenza si eguagliano ($AV^2 = B/V^2$): la resistenza totale è minima e, poiché $T_{no} = D = W/E$, l'efficienza è massima. Sostituendo $V_{E_{\max}}$ nell'espressione della resistenza si ricava la nota formula dell'efficienza massima in funzione dei soli parametri aerodinamici:

$$E_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi e AR}{C_{D_0}}}. \quad (\text{A.3})$$

Essa mostra con chiarezza i due ingredienti dell'efficienza: un allungamento alare elevato (che riduce la resistenza indotta) e una bassa resistenza parassita. Particolarmente utile, nelle formule delle velocità di salita rapida (Capitolo 3), è il *prodotto* delle due costanti, che ha un'espressione notevolmente semplice:

$$AB = \frac{1}{2} \rho S C_{D_0} \cdot \frac{2W^2}{\rho S \pi e AR} = \frac{W^2 C_{D_0}}{\pi e AR} = \frac{W^2}{4 E_{\max}^2}. \quad (\text{A.4})$$

L'ultima uguaglianza segue direttamente dalla (A.3), essendo $1/(4E_{\max}^2) = C_{D_0}/(\pi e AR)$. Si noti che nel prodotto AB la densità e la superficie alare si cancellano: il risultato dipende solo dal peso e dall'efficienza massima.

Osservazione

La relazione $AB = W^2/(4E_{\max}^2)$ è ciò che consente di riscrivere le velocità di salita in funzione di parametri “di progetto” immediatamente leggibili — efficienza massima, carico alare, rapporto spinta-peso — anziché delle costanti dimensionali A e B , il cui valore numerico dice poco all'intuizione. È un buon esempio di come una scelta accorta di parametrizzazione renda trasparenti relazioni altrimenti opache: la stessa formula della velocità di salita rapida del getto, illeggibile nella forma con A e B , diventa interpretabile non appena vi si riconoscono T_d/W , W/S ed $E_{\max}$.

Il modello di atmosfera standard

Le relazioni che legano il rapporto di densità $\sigma = \rho/\rho_0$ alla quota — usate per la quota di tangenza (Capitolo 4) e per il fattore di correzione del rateo di salita (Capitolo 7) — si fondano sul modello di atmosfera standard internazionale (ISA). Se ne richiamano qui le ipotesi e le formule essenziali, limitatamente ai primi due strati, che coprono l'intero campo di quote di interesse per le prestazioni di salita dei velivoli convenzionali.

Significato del simbolo T

In tutta questa appendice T indica la *temperatura assoluta* (K), mai la spinta. Il gradiente termico verticale è indicato con a , la costante specifica dell'aria con R .

B.1 Ipotesi e costanti di riferimento

Il modello ISA si fonda su tre ipotesi: l'aria è un gas perfetto ($p = \rho R T$); è in equilibrio idrostatico (la pressione a ogni quota equilibra il peso della colonna d'aria sovrastante, $dp = -\rho g dh$); e segue un profilo di temperatura assegnato, lineare a tratti. È un'atmosfera convenzionale — non la situazione reale di un dato giorno, che può scostarsene anche sensibilmente — ma è il riferimento universale rispetto al quale si dichiarano e si confrontano le prestazioni dei velivoli. Le costanti al livello del mare e i parametri dei due strati di interesse sono raccolti nella Tabella B.1.

Tabella B.1. Costanti del modello di atmosfera standard (ISA) per i primi due strati.

Grandezza	Simbolo	Valore
Temperatura al livello del mare	T_0	288,15 K
Pressione al livello del mare	p_0	101 325 Pa
Densità al livello del mare	ρ_0	1,225 kg/m ³
Gradiente termico (troposfera)	a	0,0065 K/m
Costante specifica dell'aria	R	287,05 J/(kg K)
Accelerazione di gravità	g	9,81 m/s ²
Quota della tropopausa	h_{TP}	11 000 m
Temperatura della tropopausa	T_{TP}	216,65 K

B.2 Troposfera ($0 \leq h \leq 11\,000$ m)

Nella troposfera la temperatura decresce linearmente con la quota:

$$T(h) = T_0 - a h.$$

Combinando l'equazione idrostatica $dp = -\rho g dh$ con la legge dei gas perfetti $p = \rho R T$ e integrando lungo il profilo lineare di temperatura, si ottengono i rapporti di pressione e di densità in funzione del rapporto di temperatura:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{g}{aR}}, \quad \sigma = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{g}{aR} - 1} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{g - aR}{aR}}. \quad (\text{B.1})$$

La differenza di esponente fra pressione e densità (un'unità) discende dalla legge dei gas perfetti: a parità di rapporto di temperatura, densità e pressione non scalano allo stesso modo. Invertendo la (B.1) per ricavare la quota a partire dal rapporto di densità:

$$h = \frac{T_0}{a} \left(1 - \sigma^{\frac{aR}{g-aR}} \right). \quad (\text{B.2})$$

B.3 Stratosfera isoterma ($11\,000 \leq h \leq 20\,000$ m)

Nella bassa stratosfera la temperatura è costante, $T = T_{\text{TP}}$. Venendo a mancare la variazione di temperatura, l'integrazione dell'equazione idrostatica con temperatura uniforme fornisce un andamento *esponenziale* di pressione e densità (anziché a potenza):

$$\frac{p}{p_{\text{TP}}} = \frac{\rho}{\rho_{\text{TP}}} = e^{-\frac{g}{R T_{\text{TP}}} (h - h_{\text{TP}})}, \quad (\text{B.3})$$

dove ora, a temperatura costante, pressione e densità scalano nello stesso modo. Esplicitando la quota:

$$h = h_{\text{TP}} - \frac{R T_{\text{TP}}}{g} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_{\text{TP}}} \right) = h_{\text{TP}} - \frac{R T_{\text{TP}}}{g} \ln \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\text{TP}}} \right). \quad (\text{B.4})$$

Nota

Le (B.2) e (B.4) sono esattamente le relazioni usate per convertire il rapporto di densità alla quota di tangenza σ_{tt} nella quota di tangenza teorica h_{tt} (Capitolo 4). La scelta fra le due dipende dal fatto che σ_{tt} corrisponda a una quota minore o maggiore della tropopausa: in pratica si valuta prima la (B.2) e, se il risultato supera 11 000 m, si ricorre alla (B.4), calcolando σ_{TP} dalla (B.1) al confine dei due strati. La continuità del modello al passaggio fra troposfera e stratosfera garantisce che le due formule si raccordino senza salti.