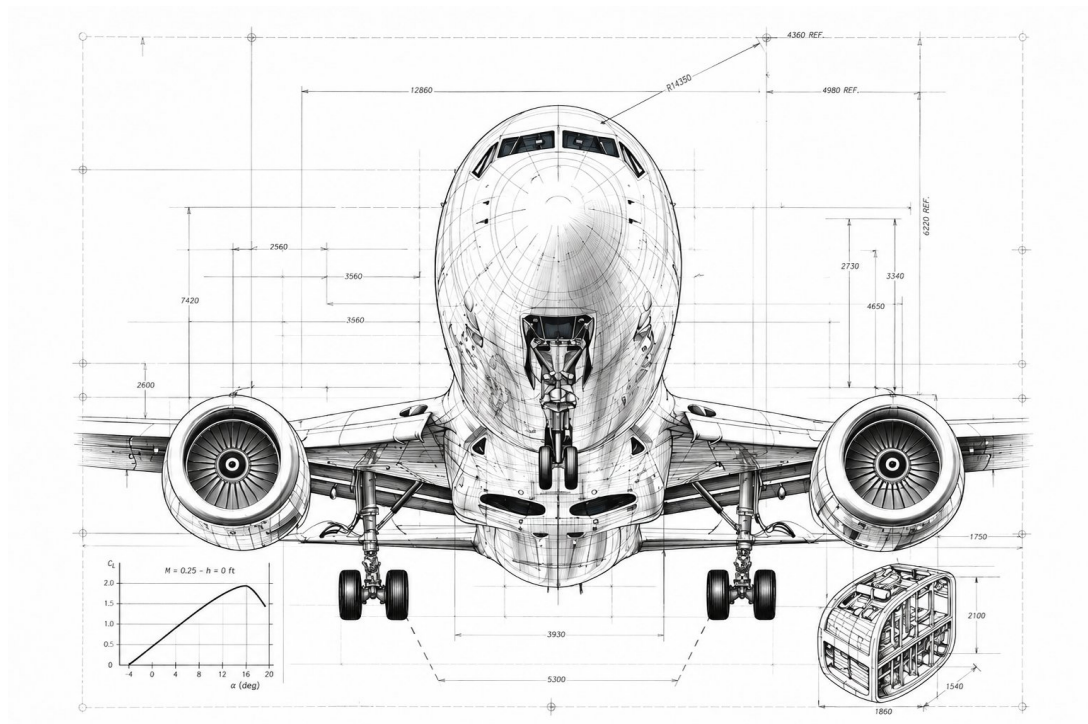

Sistemi propulsivi aeronautici

Spinta, potenza e consumo specifico dei propulsori di volo



Prof. Biagio Raucci

Indirizzo Trasporti e Logistica — Articolazione Conduzione del Mezzo Aereo

Monografia didattica — Serie di appunti di Costruzioni e Propulsione aeronautica

29 giugno 2026

Indice

1	Introduzione: perché esistono propulsori diversi	4
1.1	Il principio comune: variazione di quantità di moto	4
2	Spinta ed efficienza: lo scambio fondamentale	5
2.1	L'equazione della spinta	5
2.2	Il rendimento propulsivo (efficienza di Froude)	6
2.3	La natura del compromesso	8
2.4	Spinta specifica e coefficiente di getto	9
3	La combinazione motore alternativo/elica (motoelica)	10
3.1	Il motore a quattro tempi (ciclo Otto)	10
3.2	Potenza all'albero e consumo specifico	11
3.3	Variazione di potenza e consumo con velocità e quota	12
3.4	La sovralimentazione: compressore e turbocompressore	13
3.5	L'elica: teoria del disco attuatore	14
3.6	Teoria dell'elemento di pala	16
3.7	Curve di prestazione e formule di Renard	18
3.8	Stadi di funzionamento dell'elica a passo fisso	19
3.9	Eliche a passo fisso e a passo variabile	19
3.10	Il regolatore centrifugo	20
3.11	Le posizioni <i>reverse</i> e <i>feathered</i>	21
3.12	Potenza disponibile e consumo specifico della motoelica	22
4	L'elica come organo costruttivo	23
4.1	Definizione e principio di funzionamento	23
4.2	Architettura della pala	24
4.3	Classificazione delle eliche per funzione	24
4.4	I comandi della motoelica a giri costanti	25
4.5	Le posizioni in bandiera e reversibile (approfondimento costruttivo)	26
4.6	Materiali, costruzione e bilanciamento	26
4.7	Mutua influenza tra elica e velivolo	27
4.7.1	Flusso elicoidale	27
4.7.2	Effetto P	27
4.7.3	Coppia di reazione	28
4.7.4	Effetto giroscopico	28
5	Teorie aerodinamiche dell'elica	29
5.1	Cinematica dell'elemento di pala	29
5.2	Genesi della spinta e coefficienti di Renard	30
5.3	Considerazioni sul passo e curve caratteristiche	31
5.3.1	Metodo dell'elemento di pala rappresentativo	32
5.4	Stadi di funzionamento	32
5.5	Teoria impulsiva semplice (Rankine-Froude)	32
5.5.1	Fattore di interferenza assiale e rendimento ideale	33
5.6	Teoria impulsiva generale (con scia rotazionale)	34
5.6.1	Spinta, coppia e fattore correttivo della scia rotante	36
5.7	Calcolo dei rendimenti reali dell'elica	37
5.7.1	Procedimento iterativo	37
5.7.2	Resistenza del mozzo	38
5.8	Teoria dell'elemento di pala: risultati e limiti	38

5.9	Teoria vorticosa dell'elica	39
5.10	Perfezionamento della teoria dell'elemento di pala	39
5.11	Ottimo di Betz, perdite viscosive e numero finito di pale	40
5.12	Effetti della comprimibilità in campo subsonico	41
5.13	Un esempio completo: dal punto di volo al passo dell'elica	42
6	Gasdinamica dei flussi compressibili	45
6.1	Perché serve la gasdinamica	45
6.2	Il gas di lavoro: relazioni di stato	45
6.3	La velocità del suono: la "velocità dell'informazione"	46
6.4	Le tre leggi di conservazione, lette con intuizione	47
6.5	Grandezze totali: fotografare il gas "fermandolo"	47
6.6	Cosa fa cambiare il flusso: i tre "termini forzanti"	48
6.7	La leva dell'area: il flusso isentropico nell'ugello	49
6.8	Le altre due leve: attrito (Fanno) e calore (Rayleigh)	50
6.9	La legge delle aree: quanto deve aprirsi l'ugello	51
6.10	Grandezze critiche e strozzamento	51
6.11	I regimi dell'ugello al variare della contropressione	52
6.12	L'onda d'urto normale: quando il flusso "sbatte contro se stesso"	53
6.12.1	Le relazioni dell'urto normale	53
6.13	L'onda d'urto obliqua: rallentare senza sprecare tutto	55
6.14	Localizzazione dell'urto nell'ugello	57
6.15	Sintesi: la gasdinamica al servizio del getto	57
7	Il ciclo Brayton: il cuore termodinamico dei motori a getto	58
7.1	I quattro tempi di una turbina a gas	58
7.2	Il segreto del ciclo: la divergenza delle isobare	58
7.3	Il ciclo ideale: ipotesi e prestazioni	59
7.4	Il lavoro utile: quando si annulla e quando è massimo	61
7.5	Confronto con Carnot: quanto siamo lontani dall'ideale assoluto	63
7.6	Il ciclo reale: dove si perde, e quanto	63
7.7	Dal ciclo alla macchina: portate e potenza	65
7.8	Sintesi: due indici, un compromesso	66
8	Il motore turbogetto (turbojet)	66
8.1	Componenti e costruzione della spinta	66
8.2	Equazione della spinta e consumo specifico	68
8.3	Il ciclo del turbogetto, stazione per stazione	69
8.4	Prestazioni: spinta specifica, rendimenti, consumo	70
8.5	Effetto dei parametri di progetto	71
8.6	Prestazioni a punto fisso	71
8.7	Perché l'ugello è (quasi sempre) solo convergente	72
8.8	Variazione di spinta e consumo con velocità e quota — regime subsonico	72
8.9	Regime supersonico	74
9	Il motore turbofan (turboventola)	74
9.1	Il rapporto di diluizione (BPR)	75
9.2	Variazione di spinta e consumo — turbofan ad alto BPR	77
9.3	Modello semplificato del turbofan ad alto BPR	79
9.4	Consumo specifico del turbofan	79
9.5	Gli inversori di spinta (thrust reverser)	80

10	Il motore turboelica (turboprop)	81
10.1	Architettura e caratteristiche generali	81
10.2	Potenza disponibile, potenza equivalente e spinta	81
10.3	Variazione di potenza e consumo con velocità e quota	82
11	I componenti dei motori a getto	83
11.1	La presa d'aria (presa dinamica, diffusore)	84
11.1.1	Prese subsoniche: un divergente delicato	84
11.1.2	Prese supersoniche: governare gli urti	84
11.2	Le turbomacchine: come si scambia lavoro col flusso	86
11.3	Il compressore	87
11.3.1	Compressore centrifugo	87
11.3.2	Compressore assiale	87
11.3.3	Il fan	88
11.4	La camera di combustione	89
11.5	La turbina	90
11.6	L'ugello propulsivo	92
11.7	Sintesi: il motore come catena di componenti	93
12	Riepilogo dei modelli propulsivi	93
12.1	Pistoni / elica (motoelica)	94
12.2	Turboelica / elica	94
12.3	Turbogetto puro	94
12.4	Turbofan ad alto BPR (modello semplificato)	94
12.5	Quadro qualitativo finale	95
A	Come si leggono i cicli nei piani termodinamici	95
A.1	Lo stato di un fluido: due numeri bastano	96
A.2	I tre piani termodinamici fondamentali	96
A.3	Il calore è un'area: la chiave del piano $T-s$	97
A.4	La forma delle trasformazioni notevoli	98
A.5	Perché le isobare divergono (e perché è così importante)	98
A.6	Il lavoro utile è l'area racchiusa dal ciclo	99
A.7	Leggere il rendimento sul diagramma	100
A.8	Come si legge l'irreversibilità: l'inclinazione a destra	100
A.9	Guida pratica: leggere un ciclo in cinque passi	101
B	Tabelle di riferimento dei motori	102

I Introduzione: perché esistono propulsori diversi

La spinta, e il modo con cui essa viene prodotta, sono il filo conduttore di questa monografia. Coerentemente con lo studio dell'aerodinamica e delle caratteristiche necessarie al volo, qui mettiamo in evidenza soltanto quegli aspetti della propulsione che servono per affrontare, in seguito, lo studio delle prestazioni e del progetto del velivolo. Esaminiamo quattro famiglie di propulsori aeronautici:

1. motore alternativo accoppiato a elica (*motoelica*);
2. turbogetto (*turbojet*);
3. turboventola (*turbofan*);
4. turboelica (*turboprop*).

In ciascun caso ci interessano principalmente due grandezze: la *spinta* (o la *potenza*, nel caso dei velivoli a elica) e il *consumo di carburante*. Sono queste due quantità a determinare direttamente le prestazioni dell'aeroplano: quanto velocemente vola, quanto in alto sale, quanto lontano arriva, quanto carico trasporta.

Dall'elenco manca volutamente il motore a razzo (endoreattore). L'impiego del razzo come propulsore principale di un aeroplano è molto specifico: il Bell X-1, primo velivolo a superare la velocità del suono, e il North American X-15, primo a raggiungere velocità ipersoniche, ne sono esempi storici. I razzi sono talvolta usati per il decollo assistito (sistemi JATO), ma non costituiscono oggetto di questa trattazione se non come termine di confronto concettuale.

Nota

Perché esistono dispositivi propulsivi così diversi? La risposta non è soltanto storica. È vero che i primi aeroplani — dai velivoli dei fratelli Wright in poi — erano spinti da eliche collegate a motori alternativi, e che l'invenzione del motore a reazione alla fine degli anni Trenta rivoluzionò l'aeronautica rendendo possibile il volo transonico e supersonico. Tuttavia, a più di mezzo secolo da quella rivoluzione, moltissimi aeroplani montano ancora la classica combinazione elica/motore alternativo. La ragione profonda sta in un *compromesso* fondamentale tra spinta ed efficienza, che è il tema del prossimo paragrafo.

I.1 Il principio comune: variazione di quantità di moto

Tutti i propulsori aeronautici, nessuno escluso, generano spinta secondo lo stesso principio fisico: *accelerano una certa massa d'aria*. In virtù del terzo principio della dinamica, se il dispositivo imprime al fluido una variazione di quantità di moto, riceve dal fluido una forza uguale e contraria, che è proprio la spinta sviluppata. Cambiano i *modi* con cui questa accelerazione viene realizzata, ma non il principio.

- L'**endoreattore** (*rocket*) espelle ad alta velocità una massa costituita dai prodotti della combustione di propellente e comburente trasportati a bordo. È fondamentale la forma dell'ugello di scarico, che converte l'energia di pressione in energia cinetica del getto. Si usa per i lanciatori spaziali e per velivoli sperimentali.
- Il **ramjet** (*autoreattore*) è simile, ma preleva l'aria da una presa anteriore: sfrutta l'energia rilasciata dalla combustione per ottenere alta pressione, poi convertita in velocità all'uscita. Non dispone di organi rotanti e funziona solo a velocità già elevate.
- Il **motore a pistoncini** (*piston engine*) è l'evoluzione aeronautica del motore d'automobile: il ciclo Otto a quattro tempi produce coppia all'albero, che attraverso un riduttore aziona l'elica.
- I **motori a turbina a gas** (basati sul ciclo Brayton) si articolano in turbogetto, turbofan e turboelica, secondo il modo in cui l'energia del flusso caldo viene utilizzata per generare spinta.

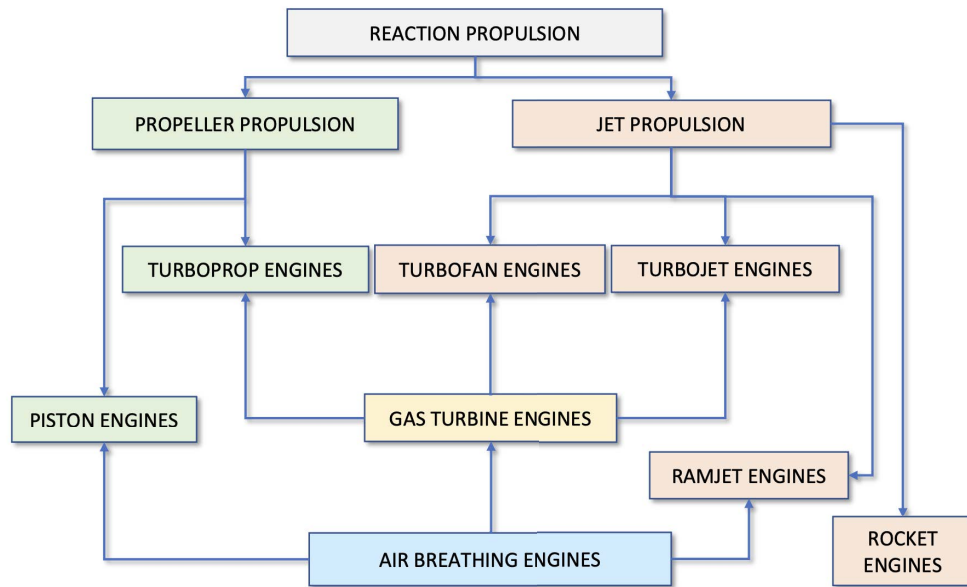


Figura 1. Classificazione dei motori aeronautici. La propulsione a reazione (*reaction propulsion*) si articola in propulsione a elica (*propeller*) e propulsione a getto (*jet*); i motori *air breathing* comprendono motori a pistoni, turbine a gas e ramjet, mentre gli endoreattori (*rocket*) costituiscono una categoria a parte.

2 Spinta ed efficienza: lo scambio fondamentale

In modo elementare possiamo affermare che la combinazione elica/motore alternativo produce una spinta relativamente bassa con grande efficienza; un turbogetto produce spinta molto alta con efficienza minore; un endoreattore produce spinta enorme con efficienza scarsa. Esiste cioè uno *scambio*: in questo scenario, più spinta significa meno efficienza. È proprio questo scambio la ragione per cui tutti i meccanismi propulsivi elencati sono tuttora in uso: la scelta dell'impianto di potenza dipende da *che cosa deve fare* l'aeroplano.

Per comprendere il motivo tecnico dello scambio, analizziamo il meccanismo principale con cui la spinta viene prodotta.

2.1 L'equazione della spinta

Si consideri un tubo di flusso d'aria che attraversa, da sinistra a destra, un generico dispositivo propulsivo (un'elica, un motore a reazione, e così via). Qualunque sia il dispositivo, la spinta nasce dalla risultante netta delle distribuzioni di pressione e di sforzo di taglio agenti su tutte le superfici, interne ed esterne, lambite dall'aria. Sono, per così dire, le “due mani della natura” — pressione e attrito — che afferrano ogni corpo immerso in una corrente fluida ed esercitano su di esso una forza: la spinta T .

L'aria esercita la spinta T sul dispositivo; per il terzo principio della dinamica, il dispositivo esercita sull'aria una forza uguale e contraria, diretta verso valle. Sotto questa forza l'aria accelera: se la sua velocità iniziale, lontano a monte, è $V_0 = V_\infty$, a valle del dispositivo essa raggiunge la velocità maggiore $V_e = V_8$, che chiamiamo *velocità del getto*.

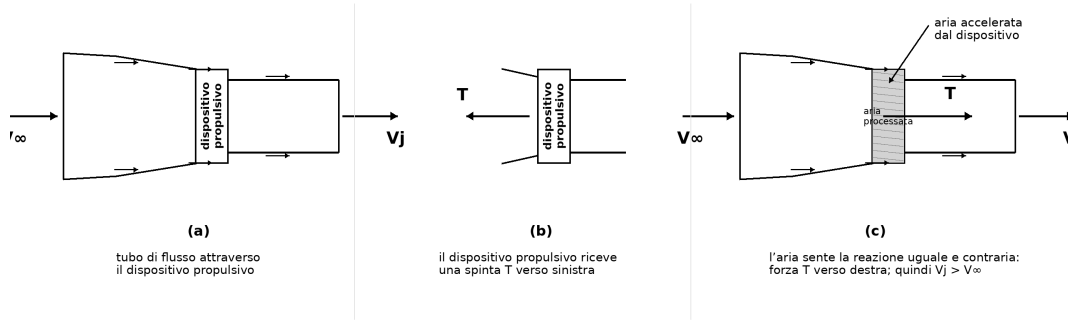


Figura 2. Tubo di flusso attraverso un generico dispositivo propulsivo. (a) campo di moto; (b) spinta T esercitata dall'aria sul dispositivo; (c) reazione uguale e contraria esercitata sull'aria, che accelera da V_0 a V_e .

La variazione di velocità $V_e - V_0$ è legata a T dalla seconda legge di Newton, secondo cui la forza su un corpo eguaglia la variazione nel tempo della sua quantità di moto. Qui il “corpo” è l'aria che attraversa il dispositivo. Sia $\dot{m}$ la portata massica (in kg/s) attraverso il tubo di flusso; nell'ipotesi di flusso stazionario, $\dot{m}$ è la stessa attraverso ogni sezione. La quantità di moto che entra a monte nell'unità di tempo è $\dot{m} V_0$, quella che esce a valle è $\dot{m} V_e$; la loro differenza eguaglia la spinta:

Spinta di un propulsore — forma elementare

$$T = \dot{m} (V_e - V_0). \quad (1)$$

Dove $\dot{m}$ è la portata massica d'aria trattata, $V_0 = V_\infty$ è la velocità di volo (corrente indisturbata) e $V_e = V_g$ è la velocità di efflusso del getto. La (1) assume trascurabili sia il contributo della pressione sulle pareti del tubo di flusso, sia la massa di carburante aggiunta.

Una derivazione più dettagliata tiene conto del contributo di pressione all'uscita dell'ugello e della portata di carburante immessa in camera di combustione. In tal caso la spinta disponibile si scrive:

$$T = (\dot{m}_a + \dot{m}_f) V_e - \dot{m}_a V_0 + (p_e - p_0) A_e, \quad (2)$$

dove $\dot{m}_a$ e $\dot{m}_f$ sono le portate di aria e di carburante, p_e la pressione del gas all'uscita dell'ugello, $p_0 = p_\infty$ la pressione ambiente e A_e l'area di efflusso. Il termine di pressione $(p_e - p_0) A_e$ è di solito piccolo rispetto ai termini di quantità di moto; assumendo inoltre $\dot{m}_a \gg \dot{m}_f$, la (2) si riduce alla forma semplificata (1) con $\dot{m} \simeq \dot{m}_a$.

2.2 Il rendimento propulsivo (efficienza di Froude)

Veniamo all'efficienza. Essa ha a che fare con l'energia cinetica *dissipata* nel getto di scarico. Conviene cambiare punto di vista e immaginare la situazione reale: il dispositivo è montato su un aeroplano che vola con velocità V_0 nell'aria in quiete. Rispetto al dispositivo, il campo di moto è identico a quello visto prima; ma un osservatore fermo a terra non vede V_0 e V_e relative al dispositivo: vede l'aria ferma davanti, il dispositivo che la attraversa a velocità V_0 e, dietro di esso, una massa d'aria che si muove con velocità (assoluta) $V_e - V_0$.

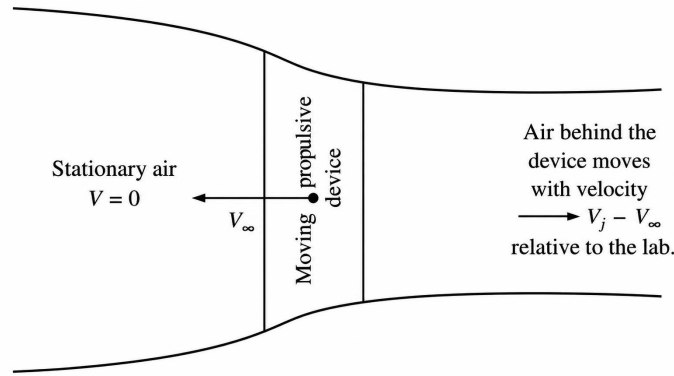


Figura 3. Dispositivo propulsivo in moto a velocità V_0 nell'aria in quiete. Dietro il dispositivo l'aria resta in movimento con velocità assoluta $V_e - V_0$: è energia cinetica dissipata, persa per la propulsione.

Prima del passaggio del dispositivo l'aria nella camera è ferma e non possiede energia cinetica; dopo il passaggio si muove con velocità $V_e - V_0$. A quest'aria è quindi associata un'energia cinetica per unità di massa pari a $\frac{1}{2}(V_e - V_0)^2$. Tale energia è interamente *dissipata*: non svolge alcuna funzione utile, è una perdita intrinseca al meccanismo di generazione della spinta ed è causa di inefficienza.

Nota

La quantità $(V_e - V_0)$ è la velocità *assoluta* del fluido di scarico rispetto a un osservatore fisso esterno al propulsore. Le velocità V_e e V_0 sono invece le velocità *relative* del fluido (in uscita e in ingresso) rispetto a un osservatore solidale con il propulsore. È la distinzione tra questi due punti di vista a chiarire l'origine della perdita.

Ricordando dalla meccanica che la potenza di una forza applicata a un corpo in moto è il prodotto della forza per la velocità, la *potenza utile* (o *potenza propulsiva*, anche detta potenza disponibile Π_d) fornita dal dispositivo è:

$$\Pi_p = T V_0. \quad (3)$$

Tuttavia il dispositivo sta producendo *più* potenza di questa, perché genera anche l'energia cinetica dissipata nella scia. Poiché $\dot{m}$ è la portata massica e $\frac{1}{2}(V_e - V_0)^2$ l'energia cinetica dissipata per unità di massa, la potenza dissipata è $\frac{1}{2}\dot{m}(V_e - V_0)^2$. La potenza totale prodotta è quindi:

$$\Pi_{\text{tot}} = T V_0 + \frac{1}{2} \dot{m} (V_e - V_0)^2. \quad (4)$$

Rendimento propulsivo (efficienza di Froude)

Il rendimento propulsivo η_p è il rapporto tra potenza utile e potenza totale prodotta:

$$\eta_p = \frac{\Pi_p}{\Pi_{\text{tot}}} = \frac{T V_0}{T V_0 + \frac{1}{2} \dot{m} (V_e - V_0)^2}. \quad (5)$$

Dimostrazione

Sostituiamo nella (5) l'equazione della spinta $T = \dot{m}(V_e - V_0)$. Il numeratore diventa $\dot{m}(V_e - V_0)V_0$ e il denominatore $\dot{m}(V_e - V_0)V_0 + \frac{1}{2}\dot{m}(V_e - V_0)^2$:

$$\eta_p = \frac{\dot{m}(V_e - V_0)V_0}{\dot{m}(V_e - V_0)V_0 + \frac{1}{2}\dot{m}(V_e - V_0)^2}.$$

Dividendo numeratore e denominatore per il fattore comune $\dot{m}(V_e - V_0) V_0$ si ottiene:

$$\eta_p = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{V_e - V_0}{V_0}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{V_e}{V_0} - 1 \right)} = \frac{2}{1 + \frac{V_e}{V_0}}.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per V_0 si arriva alla forma compatta. $\square$

Forma compatta del rendimento propulsivo

$$\eta_p = \frac{\Pi_p}{\Pi_j} = \frac{2 V_0}{V_e + V_0} = \frac{2}{1 + \frac{V_e}{V_0}}. \quad (6)$$

dove $\Pi_j = \frac{1}{2} \dot{m}(V_e^2 - V_0^2)$ rappresenta la potenza associata alla variazione di energia cinetica del getto.

Nota

La potenza del getto può essere scritta in modo equivalente come $\Pi_j = \frac{1}{2} \dot{m}(V_e^2 - V_0^2)$. Osservando che $V_e^2 - V_0^2 = (V_e - V_0)(V_e + V_0)$ e ricordando $T = \dot{m}(V_e - V_0)$, si ha $\Pi_j = \frac{1}{2} T(V_e + V_0)$, da cui immediatamente $\eta_p = \Pi_p/\Pi_j = 2V_0/(V_e + V_0)$, in pieno accordo con la (6).

2.3 La natura del compromesso

La (6) mostra che il rendimento propulsivo è tanto maggiore quanto più V_e è prossima a V_0 . Il valore massimo, $\eta_p = 1$ (100%), si ottiene per $V_e = V_0$: in tal caso l'aria, rispetto al laboratorio, "cade" dietro il dispositivo con velocità nulla, e non resta alcuna energia cinetica dissipata.

Attenzione

Il caso $V_e = V_0$ è però paradossale: dall'equazione della spinta (1), se $V_e = V_0$ allora $T = 0$. È questo il **compromesso fondamentale**: possiamo avvicinarci a un rendimento del 100%, ma a costo di una spinta che tende a zero. Viceversa, una grande spinta richiede $V_e \gg V_0$, e quindi un rendimento basso.

In questo compromesso troviamo la ragione d'essere dei diversi propulsori:

- Un'**elica**, per via del grande diametro, tratta una grande massa d'aria $\dot{m}$ imprimendole un piccolo incremento di velocità ($V_e - V_0$). Dalla (1) la spinta nasce da una $\dot{m}$ grande con $(V_e - V_0)$ piccolo, e dalla (6) η_p risulta alto. L'elica è intrinsecamente il più efficiente dei propulsori comuni.
- Un **motore a getto** produce la stessa spinta dando a una massa d'aria più piccola un incremento di velocità molto maggiore. $\dot{m}$ può essere minore, ma $(V_e - V_0)$ è molto più grande; la spinta basta per il volo transonico e supersonico, ma poiché $V_e \gg V_0$ il rendimento è inferiore a quello dell'elica.

Attenzione

La spinta dell'elica è limitata dalla *velocità di estremità* delle pale: se questa si avvicina o supera la velocità del suono, sulle pale si formano onde d'urto. Ne conseguono un forte aumento di resistenza (e quindi di coppia resistente sul motore), una caduta dei giri e della potenza, e una riduzione del coefficiente di portanza dei profili palari. L'effetto netto è che, alle alte velocità, l'elica diventa un generatore di spinta inefficace: ecco perché non esistono aeroplani transonici o supersonici a elica.

Da questo scambio discende il panorama dei propulsori moderni: velivoli lenti con motore alternativo/elica (alto η_p); velivoli veloci con motori a getto (grande spinta a velocità transoniche e supersoniche); e, nel mezzo, due soluzioni di compromesso — il **turbofan** (una grande ventola spinta da un nucleo turbogetto, che cerca la spinta del getto con un rendimento più vicino a quello dell'elica) e la **turboelica** (un'elica mossa da una turbina a gas, valida per velocità di da 400 km/h a 600 km/h).

2.4 Spinta specifica e coefficiente di getto

È utile introdurre due grandezze che sintetizzano il comportamento di un propulsore. La *spinta specifica* è la spinta per unità di portata massica d'aria in ingresso:

$$\frac{T}{\dot{m}} = V_e - V_0, \quad (7)$$

e misura, in sostanza, l'incremento di velocità impresso al flusso (in m/s). Il *coefficiente di getto* (*jet velocity coefficient*) C_j è la spinta specifica divisa per la velocità di volo:

$$C_j = \frac{T}{\dot{m} V_0} = \frac{V_e - V_0}{V_0} = \frac{V_e}{V_0} - 1. \quad (8)$$

Il coefficiente C_j esprime di *quanto* acceleriamo il flusso in termini percentuali: $C_j = 0$ significa stessa velocità in uscita e in ingresso (e quindi spinta nulla); $C_j = 1$ significa velocità del getto doppia rispetto a quella di volo, cioè un'accelerazione del 100%.

Esiste un legame diretto tra il rendimento propulsivo e C_j . Poiché $V_e/V_0 = 1 + C_j$, sostituendo nella (6):

$$\eta_p = \frac{2}{1 + \frac{V_e}{V_0}} = \frac{2}{2 + C_j}. \quad (9)$$

Lettura dei valori tipici

I diversi propulsori si collocano lungo la curva (9) in funzione di quanto accelerano il flusso. Per l'elica la velocità a valle è incrementata solo del 7% circa: $C_j \approx 0,067$, quindi $\eta_p \approx 0,97$, prossimo a 1. Il turbogetto puro, in campo subsonico, può triplicare la velocità all'uscita: $V_e/V_0 \approx 3$, da cui $C_j \approx 2$ e $\eta_p \approx 0,50$. Il turbofan fornisce valori intermedi, con η_p tra 0,60 e 0,75 a seconda del rapporto di diluizione.

Tabella 1. Valori tipici di velocità, spinta specifica, coefficiente di getto e rendimento propulsivo per alcune classi di propulsori. I valori sono dati pubblicati di riferimento, non grandezze calcolate.

Propulsore	b [km]	V_0 [m/s] (Mach)	V_e [m/s]	V_e/V_0	$T/\dot{m}_a$ [m/s]	η_p
Elica	6	150 (0,47)	160	1,07	10	0,97
Turbogetto sub.	9	250 (0,82)	750	3,00	500	0,50
Turbofan BPR basso	9	250 (0,82)	582*	2,33	332	0,60
Turbofan BPR alto	9	250 (0,82)	418*	1,67	168	0,75
Turbogetto sup.	16	600 (2,03)	1000	1,67	400	0,75

* media pesata tra flusso primario e flusso secondario.

La filosofia di fondo è quindi chiara: l'elica ottiene spinta da una grande area di flusso con basso incremento di velocità; il motore a getto ottiene spinta da un'area modesta con grande incremento di velocità.

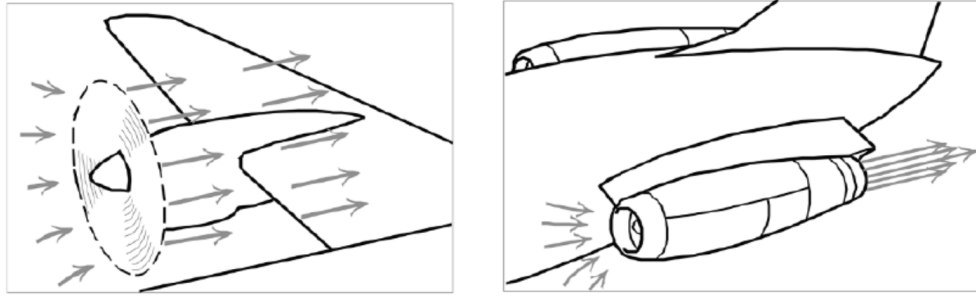


Figura 4. Confronto qualitativo: l'elica imprime un piccolo incremento di velocità a una grande massa d'aria; il turbogetto imprime un grande incremento di velocità a una massa d'aria relativamente piccola.

3 La combinazione motore alternativo/elica (motoelica)

La motoelica è l'unione di un *motore alternativo* (che produce coppia all'albero) e di un'*elica* (che converte la coppia in spinta). Per caratterizzarne completamente le prestazioni in termini di *potenza disponibile* Π_d — la grandezza che serve al calcolo delle prestazioni del velivolo — dobbiamo descrivere separatamente le prestazioni del motore (in termini di potenza all'albero Π_a) e quelle dell'elica (in termini di rendimento η_p).

3.1 Il motore a quattro tempi (ciclo Otto)

Il funzionamento di un motore a quattro tempi ad accensione comandata si basa su un accoppiamento pistone-cilindro, in cui il moto traslatorio del pistone è trasformato in moto rotatorio dell'albero a gomiti tramite una biella. Le quattro fasi sono:

1. **Aspirazione:** la valvola di aspirazione è aperta, il pistone scende e la miscela aria-carburante è richiamata nel cilindro.
2. **Compressione:** valvole chiuse, il pistone sale e comprime la carica ad alta pressione e temperatura. Verso la fine si innesca la combustione, così rapida da potersi assumere a volume costante.
3. **Espansione (corsa utile):** l'alta pressione dei gas combusti spinge il pistone verso il basso. È la fase che produce lavoro.
4. **Scarico:** la valvola di scarico si apre e il pistone, salendo, espelle i gas combusti. Poi il ciclo si ripete.

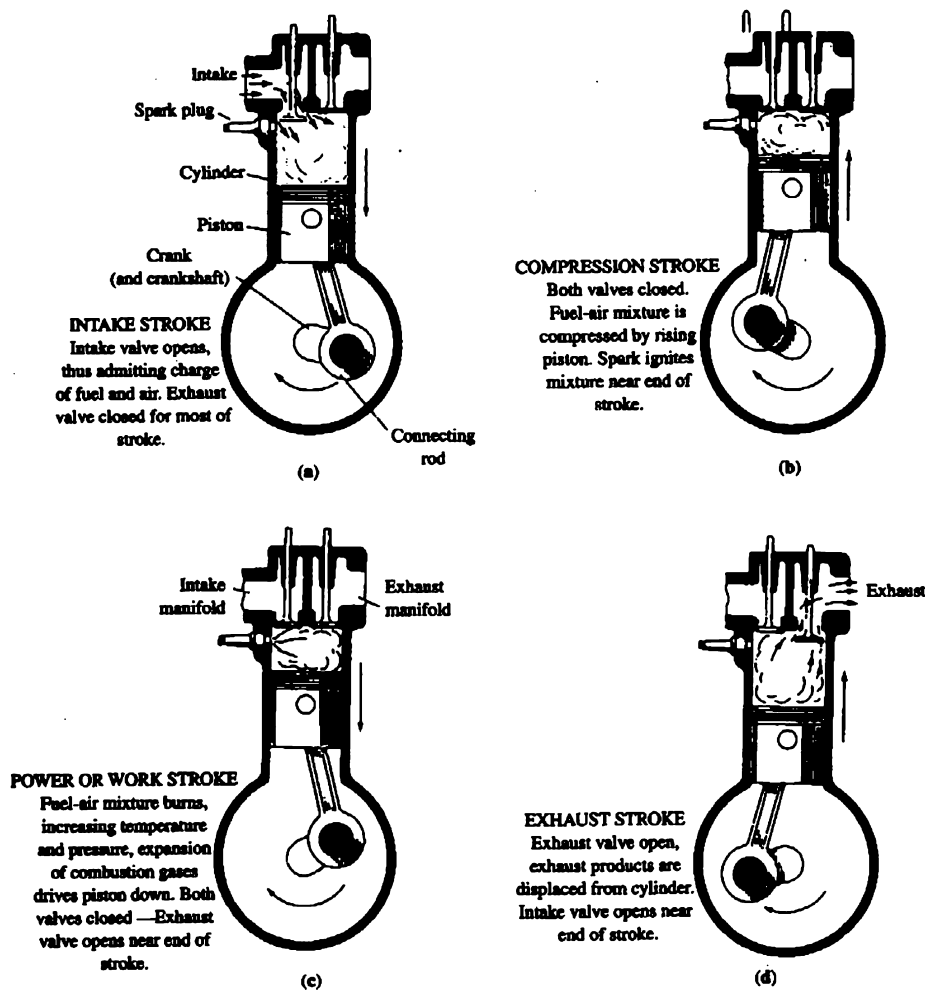


Figura 5. Le quattro fasi del ciclo Otto: aspirazione, compressione, espansione (corsa utile) e scarico. Il moto alterno del pistone diventa moto rotatorio all'albero a gomiti.

Nota

Il ciclo a quattro tempi a combustione interna fu sviluppato da Nikolaus Otto in Germania nel 1876 (brevetto 1877) ed è per questo chiamato *ciclo Otto*. L'“estremità utile” del motore è l'albero a gomiti, attraverso cui la potenza è trasmessa all'esterno: una ruota nell'automobile, un'elica nell'aeroplano.

3.2 Potenza all'albero e consumo specifico

Da quali caratteristiche del motore dipende la potenza erogata all'albero? Da tre fattori fondamentali:

1. la **cilindrata d (displacement)**: il volume spazzato dal pistone tra punto morto superiore e inferiore, moltiplicato per il numero di cilindri. A parità d'altro, più cilindrata, più potenza.
2. il **numero di giri (rpm)**: più corse utili al minuto, più potenza. L'albero compie due giri per ogni ciclo a quattro tempi.
3. la **pressione media effettiva p_e** : indicativa del livello di pressione nel cilindro durante la corsa utile. Più alta è, più lavoro si compie a ogni corsa.

Potenza all'albero

$$\Pi_a \propto d \cdot p_e \cdot \text{RPM.} \quad (10)$$

Il *consumo specifico* è il parametro che misura con quanta efficienza il motore converte il carburante in potenza. Per un motore alternativo è definito come peso di carburante consumato per unità di potenza per unità di tempo:

$$c = \frac{\text{peso di combustibile consumato in un dato tempo}}{(\text{potenza sviluppata}) \cdot (\text{intervallo di tempo})}. \quad (11)$$

Attenzione

Dimensionalmente c andrebbe espresso in unità coerenti (N/(W s) nel SI). La consuetudine ingegneristica usa però l'unità *inconsistente* SFC = lb/(hp h) (libbre di carburante per cavallo all'ora). Prima di ogni calcolo è indispensabile convertire SFC nelle unità coerenti di c . Per un motore a pistoni i valori tipici sono SFC = da 0,40 lb/(hp h) a 0,50 lb/(hp h).

Ordine di grandezza del consumo

Un motore da 100 hp che funzioni per un'ora al massimo della potenza, con SFC = 0,50 lb/(hp h), consuma circa 50 lb di combustibile, cioè circa 25 kg. Tenendo conto che il peso specifico del carburante avio è circa 0,70 kg/L, ciò corrisponde a circa 36 L. Un serbatoio da 100 L trasporta quindi circa 70 kg di combustibile.

3.3 Variazione di potenza e consumo con velocità e quota

Effetto della velocità. Quando la velocità V_0 cambia, l'unica variabile della (10) a esserne toccata è la pressione nel collettore, per via del ristagno dinamico dell'aria nella presa (effetto RAM): al crescere di V_0 aumenta la "pressione di ristagno", quindi p_e e Π_a . Per i caccia a elica della Seconda Guerra Mondiale l'effetto era rilevante. Oggi i motori alternativi equipaggiano solo velivoli lenti dell'aviazione generale, e l'effetto RAM si può trascurare. Assumiamo dunque:

$$\Pi_a \text{ ragionevolmente costante con } V_0, \quad \text{SFC costante con } V_0.$$

Effetto della quota. Al crescere della quota la densità (e la pressione) dell'aria diminuisce, riducendo p_e e quindi Π_a . In prima approssimazione:

$$\frac{\Pi_a}{\Pi_{a0}} = \frac{\rho}{\rho_0} = \sigma, \quad (12)$$

dove $\sigma = \rho/\rho_0$ è la densità relativa. Una correlazione empirica più accurata, dovuta a Torenbeek, è:

$$\frac{\Pi_a}{\Pi_{a0}} = \frac{\rho}{\rho_0} - \frac{1 - \rho/\rho_0}{7,55} = 1,132 \frac{\rho}{\rho_0} - 0,132. \quad (13)$$

Le due leggi sono molto vicine fra loro, almeno fino a da 3.000 m a 4.000 m, dove il legame quota-densità relativa è quasi lineare. Per semplicità applicativa adotteremo la (12). Il consumo specifico, invece, è poco sensibile alla quota e si assume costante.

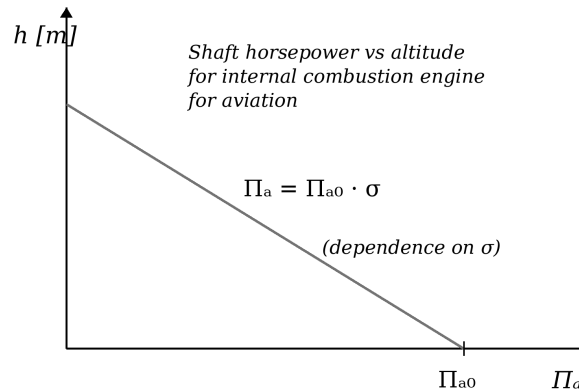


Figura 6. Andamento della potenza all'albero Π_a con la quota per un motore alternativo aspirato. La riduzione è regolata dalla densità relativa σ secondo la (12).

3.4 La sovralimentazione: compressore e turbocompressore

La caduta di potenza con la quota descritta dalle (12) e (13) riguarda i motori *aspirati*. Fin dalla Prima Guerra Mondiale si comprese che tale caduta poteva essere ritardata aumentando la pressione nel collettore al di sopra di quella ambiente, comprimendo l'aria in ingresso. Si distinguono due soluzioni:

- **Compressore volumetrico/centrifugo (*supercharger*):** azionato meccanicamente dall'albero motore, attraverso un moltiplicatore di giri (anche da 8.000 rpm a 10.000 rpm).
- **Turbocompressore (*turbocharger*):** azionato da una piccola turbina che sfrutta i gas di scarico. È la soluzione più diffusa, perché recupera energia altrimenti dissipata.

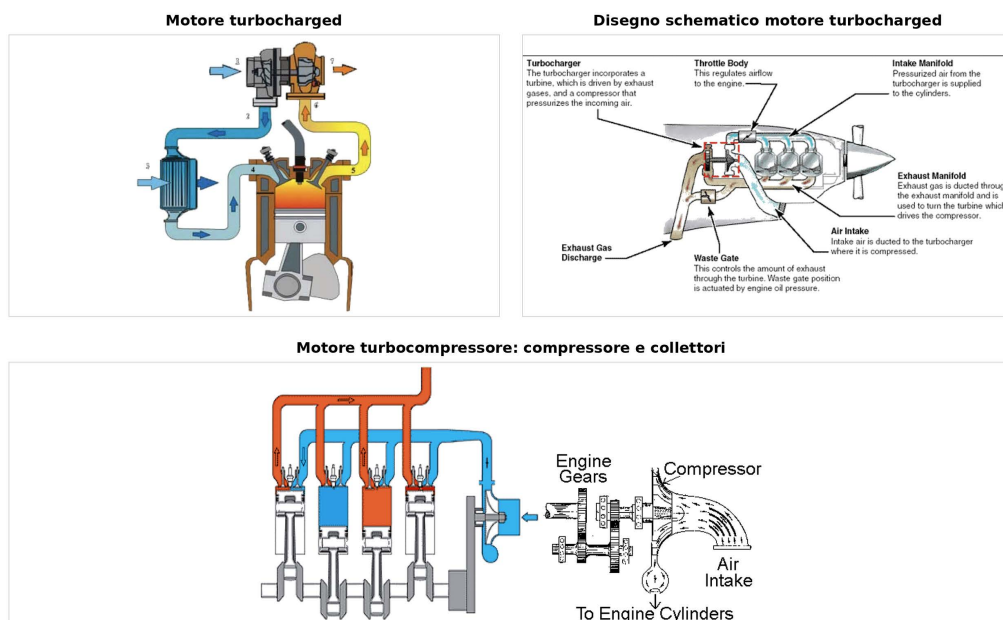


Figura 7. Schema di un motore turbocompressore: la turbina aziona il compressore che sovralimenta i cilindri; le valvole, comandate da un trasduttore barometrico, regolano la sovralimentazione in funzione della quota.

Il sistema mantiene p_e pressoché costante al crescere della quota: le valvole, inizialmente chiuse al livello del mare, si aprono gradualmente per compensare con la compressione la riduzione di pressione esterna. La potenza all'albero resta quindi *costante con la quota* fino alla **quota di ristabilimento** (*critical altitude*), in corrispondenza della quale le valvole sono completamente aperte e l'effetto del compressore è massimo. Oltre tale quota la potenza ricomincia a diminuire con un andamento analogo a quello del motore aspirato (riduzione del 9% circa per ogni 1.000 m).

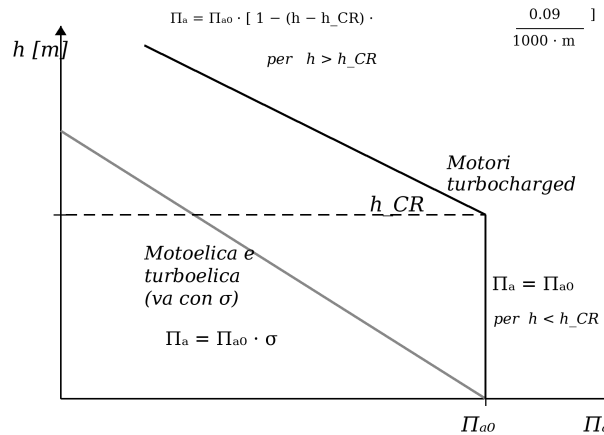


Figura 8. Andamento della potenza all'albero con la quota per un motore turbocompresso: costante fino alla quota di ristabilimento h_{cr} , poi decrescente.

Nota

Un motore aspirato non eroga potenza sufficiente oltre i da 4.000 m a 5.000 m; il turbocompressore estende l'operatività a da 7.000 m a 8.000 m. La quota di ristabilimento dei motori comuni è circa da 18.000 ft a 23.000 ft (cioè da 6.000 m a 7.000 m). Esempi: Cessna 400 (Continental TSIO-550-C, 310 hp), Piper PA-32-301T Saratoga II (Lycoming TIO-540, 400 hp), Cessna 182 Skylane (Lycoming TIO-540-AK1A, 235 hp).

Potenza all'albero della motoelica

La potenza all'albero dipende dalla potenza di targa Π_{a0} (massima a quota zero e piena ammissione), dall'effetto quota e dal grado di ammissione φ (percentuale di utilizzo, $0 \leq \varphi \leq 1$, regolata dal pilota tramite la manetta che agisce sulla MAP, *Manifold Absolute Pressure*):

$$\text{Motore aspirato:} \quad \Pi_a = \Pi_{a0} \cdot \sigma \cdot \varphi. \quad (14)$$

$$\text{Turbo, } h < h_{cr} : \quad \Pi_a = \Pi_{a0} \cdot \varphi. \quad (15)$$

$$\text{Turbo, } h > h_{cr} : \quad \Pi_a = \Pi_{a0} \left[1 - 0,09 \frac{(h - h_{cr})}{1000} \right] \varphi, \quad (16)$$

con h e h_{cr} in metri.

3.5 L'elica: teoria del disco attuatore

Wilbur Wright, nel 1902, fu il primo a riconoscere che l'elica è essenzialmente un'ala svergolata, orientata in un piano normale all'asse longitudinale dell'aeroplano, e che la spinta da essa generata è analoga alla portanza di un'ala. Come un'ala, l'elica genera resistenza (d'attrito, di forma, indotta e d'onda); questa resistenza è un meccanismo di perdita che priva l'elica di parte della potenza utile.

In prima approssimazione le prestazioni di un'elica si valutano modellandola come un *disco attuatore*: una superficie di discontinuità della sola pressione, attraverso cui la velocità assiale varia con continuità dal

valore a monte V_0 fino al valore a valle V_e . Applicando il teorema di Bernoulli a monte e a valle del disco (fluido non viscoso, incomprimibile):

$$\left. \begin{aligned} p_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2 &= p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 \\ (p_1 + \Delta p) + \frac{1}{2}\rho V_1^2 &= p_0 + \frac{1}{2}\rho V_e^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta p = \frac{1}{2}\rho (V_e^2 - V_0^2). \quad (17)$$

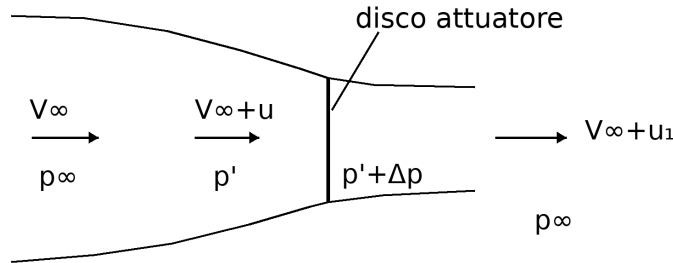


Figura 9. Modello del disco attuatore: tubo di flusso (*stream tube*) e distribuzione della pressione. Attraverso il disco si ha un salto di pressione Δp , mentre la velocità assiale varia con continuità da V_0 a V_e .

Indicando con A_p l'area del disco elica, la spinta disponibile è:

$$T_d = A_p \Delta p = \underbrace{\frac{A_p}{2} \rho (V_e^2 - V_0^2)}_{(a)} = \dot{m} (V_e - V_0) = \underbrace{\rho A_p V_1 (V_e - V_0)}_{(b)}. \quad (18)$$

Teorema di Froude

Confrontando le forme (a) e (b) della (18), e ricordando che $\dot{m} = \rho A_p V_1$, si ottiene la velocità in corrispondenza del disco:

$$V_1 = \frac{V_e + V_0}{2}. \quad (19)$$

La velocità sul disco è la media tra quella a monte e quella a valle: il flusso viene accelerato per metà a monte e per metà a valle dell'elica.

Dimostrazione

La forma (a) si ottiene dalla (17): $T_d = A_p \Delta p = \frac{1}{2} \rho A_p (V_e^2 - V_0^2)$. La forma elementare $T_d = \dot{m} (V_e - V_0)$ vale per qualunque propulsore. Eguagliando le due e ricordando $V_e^2 - V_0^2 = (V_e - V_0)(V_e + V_0)$:

$$\frac{1}{2} \rho A_p (V_e - V_0)(V_e + V_0) = \dot{m} (V_e - V_0) \Rightarrow \dot{m} = \frac{1}{2} \rho A_p (V_e + V_0) = \rho A_p V_1,$$

da cui $V_1 = (V_e + V_0)/2$. □

Velocità indotta e rendimento ideale. Indicando con v_i la velocità incrementale indotta dall'elica, dalla (19) si ha $V_1 = V_0 + v_i$ e $V_e = V_0 + 2v_i$. La spinta diventa:

$$T_d = 2 \dot{m} v_i = 2 \rho A_p (V_0 + v_i) v_i. \quad (20)$$

Il rendimento propulsivo ideale dell'elica, dalla (6), assume la forma:

$$\eta_p = \frac{T_d V_0}{T_d V_0 + \frac{1}{2} \dot{m} (V_e - V_0)^2} = \frac{1}{1 + \frac{v_i}{V_0}}. \quad (21)$$

Nota

Anche per l'elica vale il compromesso visto al §2: il rendimento cresce quanto più piccola è la velocità indotta v_i . Al limite $v_i \rightarrow 0$ si ha $\eta_p \rightarrow 1$ ma $T_d \rightarrow 0$: lo stesso risultato “paradossale” del turbogetto. Proprio perché tratta grandi masse d'aria con piccole accelerazioni, l'elica resta comunque la macchina propulsiva più efficiente.

Attenzione

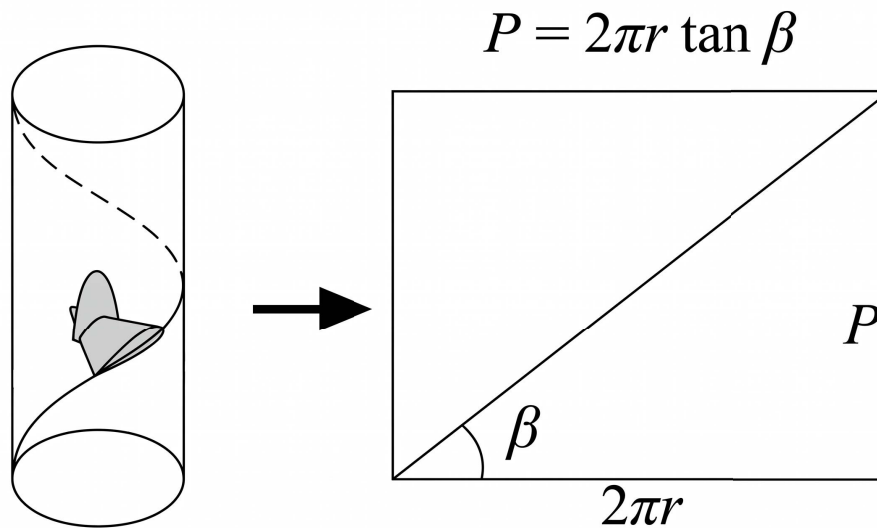
Il rendimento (21) è *ideale*: non tiene conto di importanti contributi dissipativi reali, quali la resistenza parassita delle pale, l'energia cinetica delle componenti rotazionali della scia (*swirl*) e gli effetti di comprimibilità alle estremità delle pale. Quest'ultimo fenomeno è il vero limite all'impiego delle eliche su velivoli ad alte prestazioni. Per una valutazione realistica occorre la *teoria dell'elemento di pala*.

3.6 Teoria dell'elemento di pala

Dal punto di vista funzionale, ogni sezione della pala si comporta come un profilo alare investito da una velocità effettiva V_{eff} , somma vettoriale della velocità di volo V_0 e della velocità di trascinamento rotazionale $\Omega r = 2\pi n r$ (r è la distanza radiale dal mozzo, n il numero di giri al secondo). Considerando una sezione a distanza r , essa descrive, nel moto rototraslatorio, un'elica cilindrica di raggio r ; il *passo geometrico* P è l'avanzamento per giro lungo la generatrice del cilindro:

$$P = 2\pi r \tan \beta, \quad (22)$$

dove β è l'*angolo di calettamento geometrico* (tra la corda e il piano di rotazione). Poiché la velocità periferica varia lungo la pala, la pala è svergolata: β diminuisce dal mozzo all'estremità. Convenzionalmente l'elica si caratterizza tramite il calettamento al 75% del raggio, $\beta_{0,75}$.



P = passo geometrico

β = angolo di *calettamento* geometrico

Figura 10. Geometria dell'elica: sviluppo dell'elica cilindrica e triangolo del passo geometrico $P = 2\pi r \tan \beta$. La pala è svergolata per compensare la variazione di velocità periferica lungo il raggio.

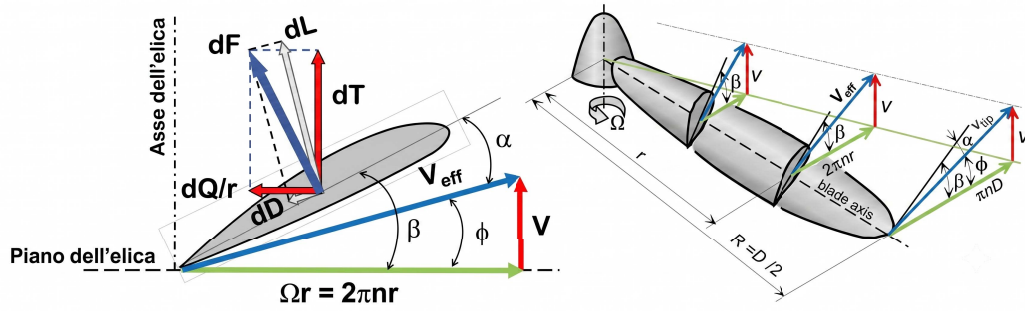


Figura 11. Triangolo di velocità su un elemento di pala. La forza aerodinamica elementare dF si scompone in spinta dT (lungo l'asse) e coppia dQ/r (nel piano di rotazione). β è il calettamento, ϕ l'angolo di calettamento aerodinamico, $\alpha = \beta - \phi$ l'angolo d'attacco.

Rapporto di avanzamento

Si definisce *rapporto di funzionamento* o di *avanzamento* (*advance ratio*) la grandezza adimensionale:

$$J = \frac{V_0}{nD}, \quad (23)$$

dove D è il diametro dell'elica. È un parametro di similitudine per le prestazioni dell'elica, allo stesso titolo dei numeri di Mach e di Reynolds.

L'angolo d'attacco della generica sezione dipende dai valori relativi di V_0 e Ωr :

$$\alpha = \beta - \phi = \beta - \arctan\left(\frac{V_0}{2\pi n r}\right) = \beta - \arctan\left(\frac{J D}{2\pi r}\right). \quad (24)$$

Per fissato calettamento β , l'angolo d'attacco diventa funzione del solo rapporto di avanzamento J . La velocità alle estremità è $(\Omega r)_{\text{tip}} = \pi n D$, da cui $V_0/(\Omega r)_{\text{tip}} = J/\pi$.

Andamento del rendimento. Il rendimento η_p di un'elica a passo fisso dipende da J con una curva caratteristica: è nullo per $J = 0$, cresce fino a un massimo, poi cade bruscamente.

Perché $\eta_p = 0$ per $J = 0$

Dalla definizione di potenza disponibile, $\Pi_d = T V_0$; a velocità nulla ($V_0 = 0$) si ha $\Pi_d = 0$ anche se l'elica genera spinta (spinta statica). Poiché $\Pi_d = \eta_p \Pi_a$ con Π_a finita (la potenza all'albero non dipende direttamente da V_0), deve essere $\eta_p = 0$. Inoltre, per $V_0 = 0$, anche $J = V_0/(nD) = 0$. $\square$

Al crescere di J (cioè di V_0 , a n costante), l'angolo d'attacco α delle sezioni diminuisce. Inizialmente α è grande (profilo prossimo allo stallo, bassa efficienza L/D); poi raggiunge il valore di massima efficienza aerodinamica, dove η_p è massimo; aumentando ancora J , α diventa troppo piccolo (bassa L/D) e infine negativo: la portanza si inverte, la spinta si annulla e $\eta_p \rightarrow 0$.

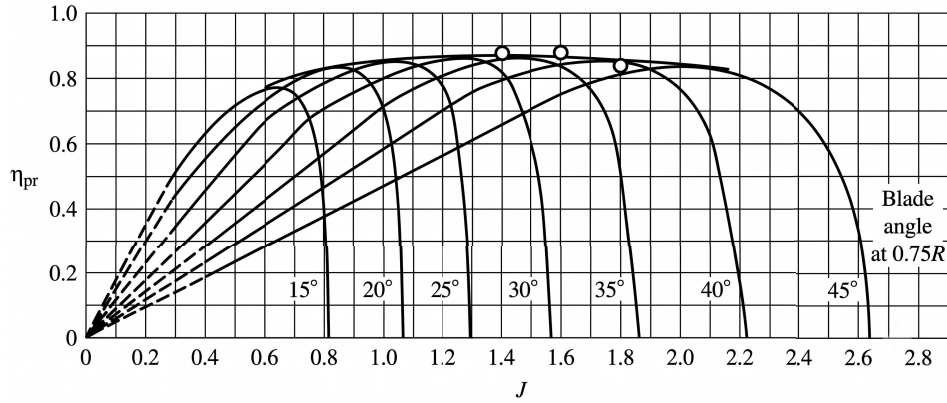


Figura 12. Rendimento η_p di un'elica a passo fisso (profilo Clark Y, tre pale) in funzione del rapporto di avanzamento J , per diversi calettamenti $\beta_{0,75}$. Il luogo dei massimi forma un involuppo quasi piatto a $\eta_{p,\max} \approx 0,85$.

3.7 Curve di prestazione e formule di Renard

Le prestazioni dell'elica si esprimono mediante coefficienti adimensionali (formule di Renard), funzioni del rapporto di avanzamento J e del calettamento $\beta_{0,75}$:

$$\text{Spinta: } T = \rho n^2 D^4 C_T, \quad (25)$$

$$\text{Coppia: } Q = \rho n^2 D^5 C_Q, \quad (26)$$

$$\text{Potenza: } \Pi = \rho n^3 D^5 C_P, \quad (27)$$

dove ρ è la densità dell'aria, C_T , C_Q , C_P sono i coefficienti di spinta, coppia e potenza. Il rendimento dell'elica si ricava come:

$$\eta_p = \frac{\text{potenza utile}}{\text{potenza assorbita}} = \frac{T V_0}{Q \Omega} = \frac{\rho n^2 D^4 C_T}{\rho n^2 D^5 C_Q} \cdot \frac{V_0}{2\pi n} = \frac{C_T}{C_Q} \cdot \frac{J}{2\pi} = \frac{C_T}{C_P} J. \quad (28)$$

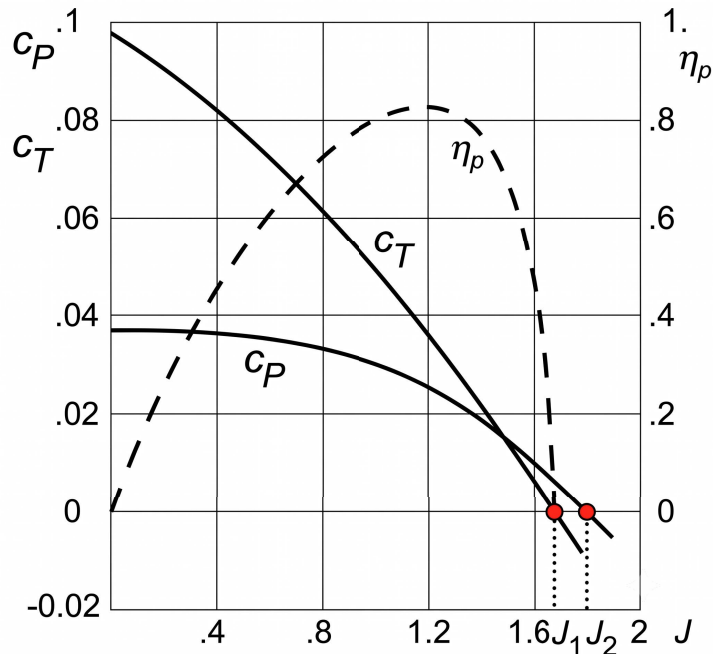


Figura 13. Coefficienti di spinta C_T , di potenza C_P e rendimento η_p in funzione del rapporto di avanzamento J , per fissato calettamento $\beta_{0,75}$.

3.8 Stadi di funzionamento dell'elica a passo fisso

Al variare di J , il segno dei coefficienti definisce i diversi stadi di funzionamento, separati da due valori notevoli J_1 (spinta nulla) e J_2 (coppia nulla). Solo i primi tre sono *ammessi* in funzionamento normale.

Tabella 2. Stadi di funzionamento dell'elica a passo fisso.

Stadio	Intervallo	C_T	C_P
Elica traente	$0 < J < J_1$	> 0	> 0
Elica a spinta nulla	$J = J_1$	$= 0$	> 0
Elica frenante	$J_1 < J < J_2$	< 0	> 0
Elica autorotante	$J = J_2$	< 0	$= 0$
Elica a mulinello (<i>windmilling</i>)	$J > J_2$	< 0	< 0

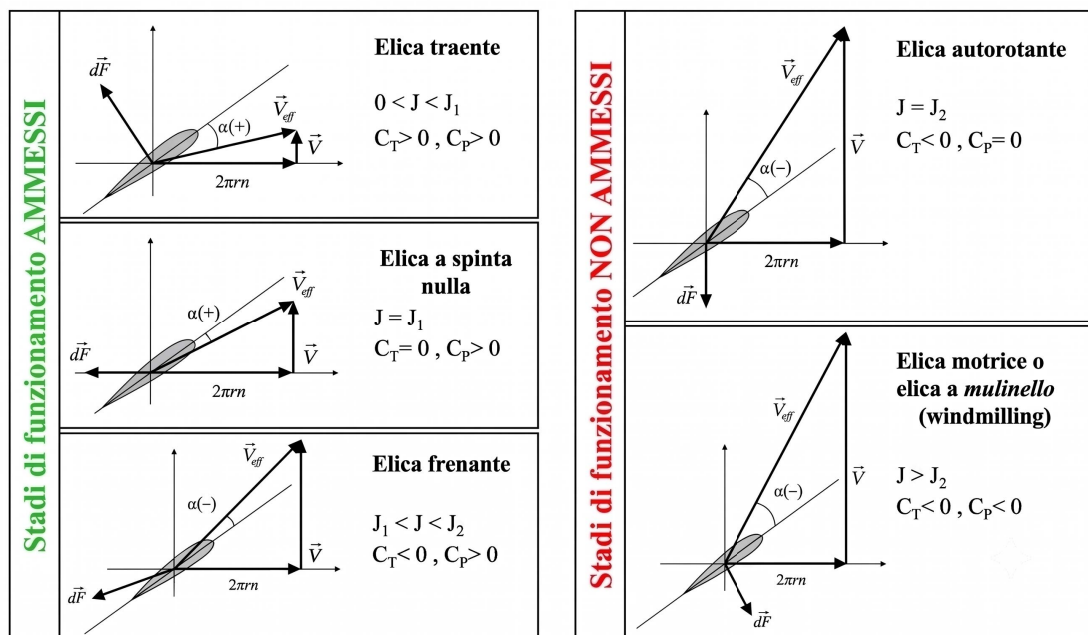


Figura 14. Stadi di funzionamento dell'elica a passo fisso: configurazioni dei triangoli di velocità e della forza dF . I primi tre stadi sono ammessi, gli ultimi due (autorotante e a mulinello) non lo sono.

3.9 Eliche a passo fisso e a passo variabile

Un'elica a passo fisso garantisce il massimo rendimento a un solo valore di J (quindi di V_0), che corrisponde al *punto di progetto*: può essere la velocità di crociera, di salita o altra condizione ritenuta prioritaria. Fuori progetto η_p cade rapidamente. Per il decollo serve un passo corto (piccolo β), per la salita un passo intermedio, per la crociera un passo lungo: l'elica a passo fisso è quindi un *compromesso*.

La soluzione è l'**elica a passo variabile**: l'intera pala viene ruotata da un meccanismo nel mozzo, comandato in modo da spostarsi lungo l'involuppo dei massimi rendimenti (Fig. 12), mantenendo $\eta_p \approx \eta_{p,\max}$ in un ampio intervallo di velocità. Fu uno dei più importanti progressi tecnici degli anni Trenta.

Tabella 3. Confronto tra eliche a passo fisso e a passo variabile.

Passo fisso	Passo variabile
Campo di funzionamento limitato	Ampio campo di funzionamento
Solo ultraleggeri e velivoli GA di prestazioni limitate	Tutti i mono e plurimotori a giri costanti
Massimo rendimento a un solo J	Rendimento prossimo al massimo su un ampio intervallo

L'elica a velocità costante (giri costanti). L'elica a passo variabile non è la soluzione definitiva. La potenza disponibile $\Pi_d = \eta_p \Pi_a$ dipende non solo da η_p , ma anche da Π_a , che è proporzionale ai giri del motore. La coppia aerodinamica resistente sull'elica dipende dal passo: variando il passo manualmente, il pilota alterava i giri allontanandoli dal valore ottimale, abbassando Π_a . Nacque così l'elica a **velocità costante**, una variante in cui il passo è regolato automaticamente da un *regolatore* (*governor*) in modo da mantenere costante il regime di rotazione: si ottimizza il *prodotto* $\eta_p \Pi_a$, non il solo η_p .

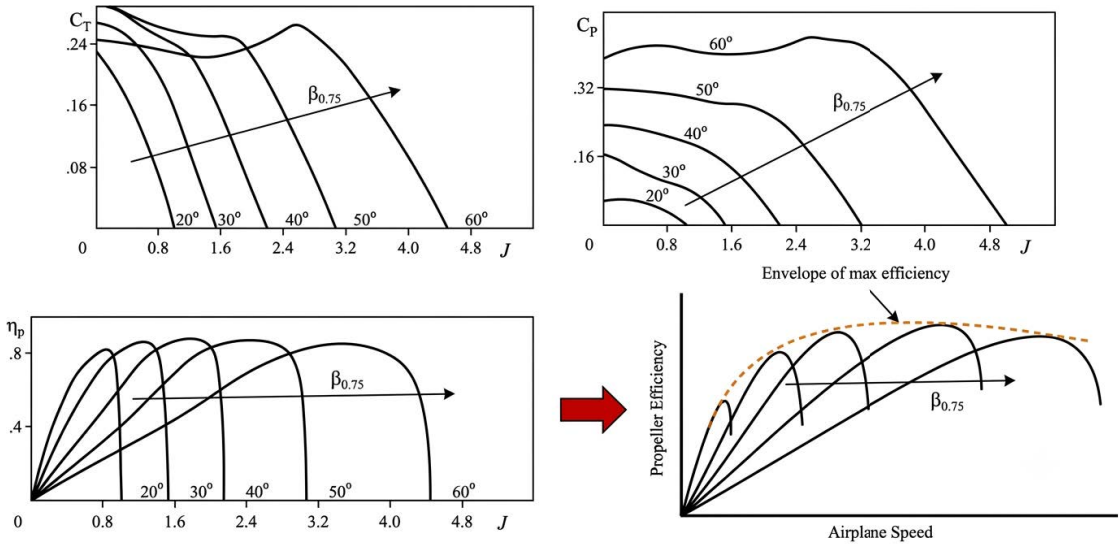


Figura 15. Curve di prestazione dell'elica a passo variabile: i coefficienti C_T , C_P e il rendimento η_p per diversi $\beta_{0.75}$. L'involuppo di massima efficienza si mantiene quasi costante in un ampio campo di velocità.

3.10 Il regolatore centrifugo

Per mantenere costanti i giri senza interventi continui del pilota, si usa un regolatore centrifugo di velocità, basato sul principio del regolatore di Watt: la forza centrifuga agente su masse rotanti (*flyweight*) comanda una valvola che mette in comunicazione il pistone idraulico (nell'ogiva) con il circuito dell'olio in pressione o di drenaggio, variando il calettamento delle pale. Il numero di giri è selezionato dal pilota tramite la *Propeller Control Lever*.

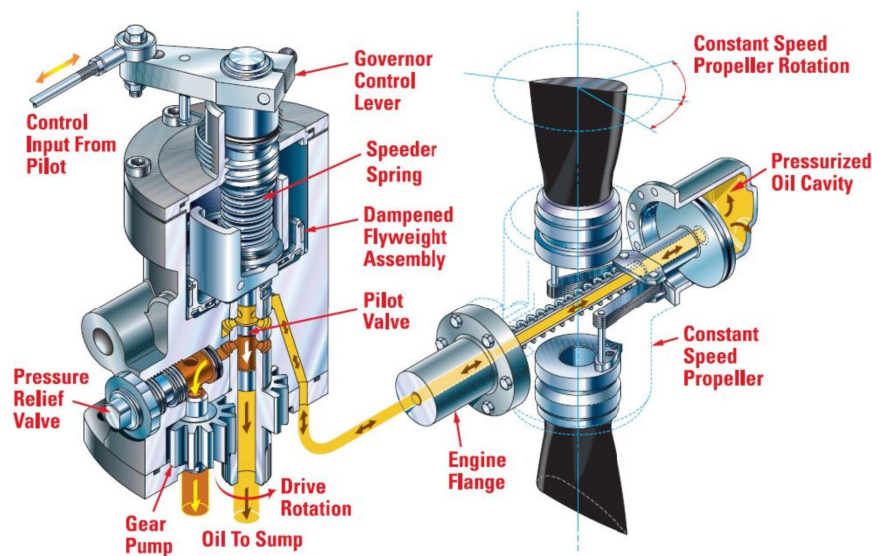


Figura 16. Schema del regolatore centrifugo per eliche a giri costanti, di tipo idraulico. Le masse rotanti (*flyweight*) comandano la *pilot valve*, che regola la pressione dell'olio sul pistone nell'ogiva, variando il passo dell'elica.

Nota

La logica di funzionamento è a retroazione:

- **Overspeed** (giri in eccesso): le masse si allontanano dall'asse, l'olio in pressione raggiunge il pistone, il passo aumenta, cresce la coppia resistente e i giri tornano al valore di equilibrio.
- **Underspeed** (giri in difetto): le masse si avvicinano all'asse, l'olio defluisce, il passo diminuisce, cala la coppia resistente e i giri risalgono.
- **On speed** (equilibrio): la valvola è chiusa, il passo resta fissato.

Il numero di giri è così *indipendente* dalla potenza erogata (comandata dalla manetta / Power Lever): il livello di potenza è monitorato tramite l'indicatore della pressione di alimentazione (MAP).

3.11 Le posizioni *reverse* e *feathered*

La possibilità di regolare il calettamento consente due posizioni estreme di grande importanza operativa:

- **Elia frenante (*reverse*)**: passo negativo, $C_T < 0$, $C_P > 0$. Usata soprattutto sui grandi velivoli da trasporto plurimotore per aumentare l'azione frenante in atterraggio. Corrisponde alla posizione massima arretrata della manetta (*Power lever*), dotata di blocco contro inserimenti involontari.
- **Elia in bandiera (*feathered*)**: passo regolato per minimizzare la resistenza, $C_T < 0$, $C_P = 0$ ($\Omega = 0$). Usata in caso di avaria motore per ridurre la resistenza dell'elica (e quindi il momento d'imbardata) e aumentare l'efficienza. Corrisponde alla posizione massima arretrata della leva del passo (*Propeller lever*).

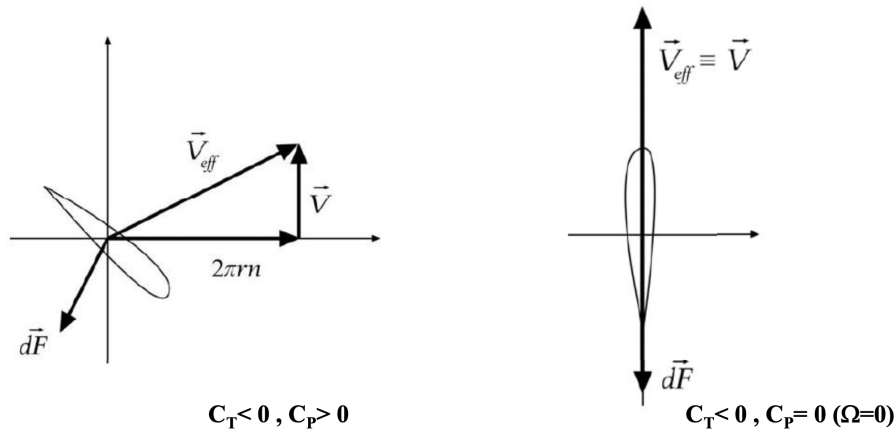


Figura 17. Configurazioni *reverse* (elica frenante, $C_T < 0$, $C_P > 0$) e *feathered* (elica in bandiera, $C_T < 0$, $C_P = 0$): triangoli di velocità e forza dF .

Nota

Sui velivoli turboelica con motore a turbina libera l'elica viene spesso messa in bandiera allo spegnimento a terra; in fase di accensione il calettamento è poi portato al passo minimo necessario per il rullaggio.

3.12 Potenza disponibile e consumo specifico della motoelica

Potenza disponibile della motoelica

La potenza disponibile è il prodotto del rendimento dell'elica per la potenza all'albero:

$$\Pi_d = \eta_p \Pi_a = \eta_p \Pi_{a0} \sigma \phi, \quad (29)$$

con η_p tipicamente tra 0,80 e 0,90 per un'elica a giri costanti. La spinta disponibile si ricava come $T_d = \Pi_d / V_0$.

Attenzione

Per una motoelica con elica a giri costanti, la *potenza disponibile* può essere considerata costante con la velocità (a quota e manetta fissate); ne consegue che la *spinta disponibile* risulta inversamente proporzionale alla velocità, $T_d = \Pi_d / V_0$. È un comportamento opposto a quello dei motori a getto.

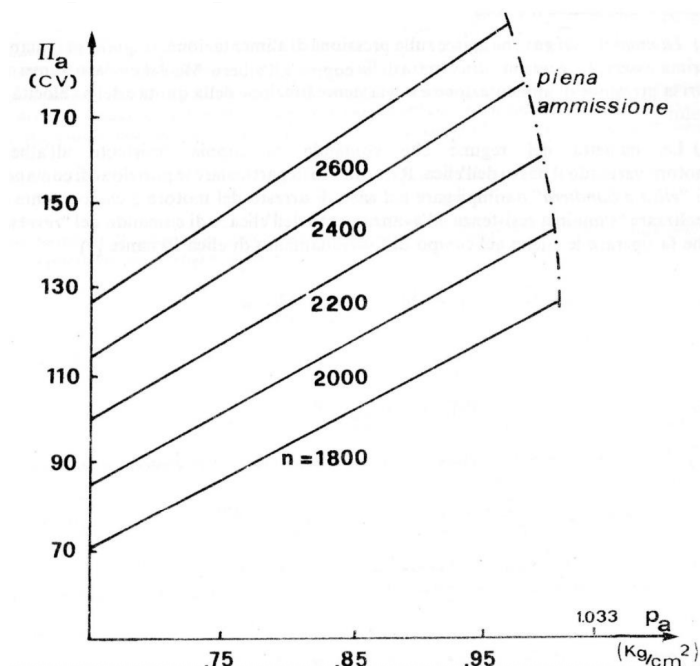


Figura 18. Motoelica con elica a passo variabile: la potenza disponibile Π_d è pressoché costante con la velocità, mentre la spinta disponibile T_d decresce come $1/V_0$.

Il consumo specifico (SFC) è poco dipendente da velocità e quota (cresce lievemente con la quota) e dipende soprattutto dalle condizioni di funzionamento del motore (giri e MAP). Per il calcolo delle autonomie si assume costante; in crociera:

$$\text{SFC} = \text{da } 0,40 \text{ lb}/(\text{hp h}) \text{ a } 0,50 \text{ lb}/(\text{hp h}). \quad (30)$$

4 L'elica come organo costruttivo

Le sezioni precedenti hanno descritto l'elica dal punto di vista *prestazionale*: come essa converte la potenza all'albero in spinta attraverso lo scambio di quantità di moto con l'aria, quali leggi (di Renard) ne governano spinta, coppia e rendimento, e come il passo variabile consenta di mantenere alto η_p in un ampio campo di velocità. In questa sezione adottiamo invece il punto di vista delle *costruzioni aeronautiche*: che cos'è l'elica come componente, come è fatta, di quali materiali, come si classifica per funzione, come la comanda il pilota e — aspetto cruciale per la condotta e per il dimensionamento delle superfici di governo — in che modo il suo funzionamento reagisce sull'intero velivolo.

4.1 Definizione e principio di funzionamento

L'elica

L'elica è l'organo che assorbe la potenza meccanica erogata dal motore e la trasforma in una forza propulsiva utile all'avanzamento, la **trazione**. Essa converte il moto rotatorio dell'albero motore nel moto di traslazione del velivolo.

Concettualmente l'elica si comporta come una vite che “avanza nell'aria”: nel suo moto rotatorio accelera all'indietro la massa d'aria che la investe, e per il principio di azione e reazione ne riceve una spinta in avanti. È esattamente lo stesso bilancio di quantità di moto introdotto in §2: l'elica appartiene alla famiglia dei propulsori che imprimono un piccolo incremento di velocità a una grande portata d'aria, ottenendo così un elevato rendimento propulsivo alle basse velocità di volo.

4.2 Architettura della pala

Nota

Un'elica è costituita da due o più **pale** fissate a un **mozzo** solidale all'albero motore. Le pale sono disposte a uguale distanza angolare e, ruotando, generano la forza traente. Dal punto di vista aerodinamico ogni pala è a tutti gli effetti un'ala: ha grande allungamento, è svergolata e presenta profili di corda variabile dal centro verso l'estremità.

La pala non è geometricamente uniforme, e per due ragioni distinte ma convergenti. La prima è *strutturale*: la sezione di radice (*root*) deve sopportare l'intero carico flettente e centrifugo della pala e perciò è più spessa, mentre la sezione di estremità (*tip*) può essere molto più sottile. La seconda è *aerodinamica*: la velocità periferica di una sezione cresce linearmente con il raggio, $\Omega r = 2\pi nr$, per cui le sezioni esterne lavorano a velocità relative molto maggiori di quelle interne. Per mantenere ovunque un angolo d'attacco efficiente è dunque necessario che l'angolo di calettamento β *diminuisca* dalla radice verso l'estremità: è lo **svergolamento** della pala. Questa variazione, insieme alla rastremazione della corda, serve a rendere più uniforme la distribuzione del carico lungo l'apertura e a massimizzare il rendimento.

Perché il calettamento decresce verso il tip

Si consideri un'elica che ruota a $n = 2.400 \text{ rpm} = 40/\text{s}$. Una sezione al 25% di un raggio $R = 0,95 \text{ m}$ (cioè a $r = 0,24 \text{ m}$) ha velocità periferica $\Omega r = 2\pi \cdot 40 \cdot 0,24 \approx 60 \text{ m/s}$; la sezione al 90% ($r = 0,86 \text{ m}$) raggiunge invece $\Omega r \approx 216 \text{ m/s}$. A parità di velocità di avanzamento V_0 , l'angolo della velocità effettiva rispetto al piano di rotazione, $\arctan(V_0/\Omega r)$, è molto maggiore alla radice che all'estremità: se vogliamo che ogni sezione lavori allo stesso angolo d'attacco α , il calettamento geometrico β deve seguire questa variazione, riducendosi verso il tip. Da qui lo svergolamento.

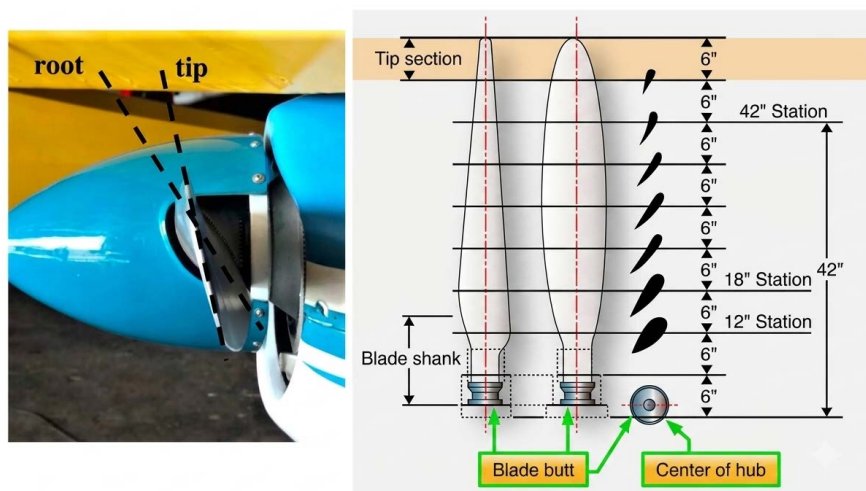


Figura 19. Architettura della pala: la sezione di radice (*root*) è spessa e a forte calettamento; la sezione di estremità (*tip*) è sottile e a calettamento ridotto. Lo svergolamento compensa la variazione della velocità periferica lungo il raggio.

4.3 Classificazione delle eliche per funzione

In base alla funzione e alla posizione rispetto al velivolo si distinguono tre categorie.

Elica traente. È posta anteriormente al motore. Fornisce trazione aspirando l'aria indisturbata che si trova davanti al velivolo e spingendola all'indietro. È la configurazione di gran lunga più diffusa in campo aeronautico.

Elica spingente. È collocata posteriormente. Lavora su un fluido già perturbato dal passaggio del velivolo, per cui il suo effetto si manifesta come spinta più che come trazione. È tipica delle applicazioni marine ed è stata riscoperta in alcune configurazioni aeronautiche recenti.

Elica portante. Fornisce una spinta *sostentatrice* che si oppone direttamente al peso. È l'organo principale di sostentamento dei velivoli ad ala rotante — autogiri, elicotteri, convertiplani — dove l'elica non serve ad avanzare ma a sostenere il velivolo in aria.

Elica aeronautica ed elica marina

L'elica aeronautica opera in aria, un fluido molto meno denso dell'acqua. Ciò si riflette nella sua geometria: alte velocità di rotazione e pale sottili, per ridurre la resistenza e aumentare il rendimento propulsivo. L'elica marina, operando in un fluido denso, ha al contrario pale tozze e gira a regimi molto più bassi.

4.4 I comandi della motoelica a giri costanti

Il pilota di un velivolo con elica a giri costanti dispone di due comandi distinti, le cui funzioni vanno tenute concettualmente separate:

- la **manetta del gas** (*Power Lever*) regola la *potenza* erogata dal motore; la potenza richiesta è letta sul manometro di alimentazione (*Manifold Absolute Pressure*, MAP);
- la **leva del passo** (*Propeller Control Lever*) seleziona il *numero di giri* desiderato dell'elica.

Selezionato il regime di rotazione, il regolatore centrifugo descritto in §3.10 provvede automaticamente a variare il passo delle pale per mantenerlo costante al variare delle condizioni di volo.

Concetto fondamentale

Nelle eliche a giri costanti il *numero di giri* dell'elica è indipendente dalla *potenza* erogata dal motore. L'elica si comporta come un regolatore automatico che mantiene costante il regime di rotazione, adeguando il passo: è proprio questo che consente di disporre sempre del miglior rendimento propulsivo in ogni fase del volo. Aumentare la manetta a giri costanti significa aumentare la potenza (e quindi la coppia e la spinta), non i giri.



Figura 20. Comandi della motoelica a giri costanti: la *Power Lever* regola la potenza (letta sul MAP), la *Propeller Control Lever* seleziona il regime di rotazione che il regolatore mantiene costante variando il passo.

4.5 Le posizioni in bandiera e reversibile (approfondimento costruttivo)

La trattazione prestazionale di §3.11 ha già introdotto le configurazioni *feathered* e *reverse* in termini di segni dei coefficienti C_T e C_P . Dal punto di vista operativo e costruttivo conviene ribadire la funzione.

Elica in bandiera (*full feathering*). Portando completamente indietro la leva del passo, le pale ruotano fino a un calettamento prossimo a 90° , disponendosi “di taglio” rispetto alla corrente. In questa condizione l’elica si ferma e offre la minima resistenza all’avanzamento. È essenziale in caso di avaria al motore: nei monomotori consente una planata pulita; nei plurimotori, mettendo in bandiera l’elica del motore in avaria, si evita che la sua resistenza incrementi il momento imbarcante dovuto all’asimmetria della trazione.

Elica a passo reversibile (*reverse*). Consentendo calettamenti negativi, si inverte la direzione della trazione ottenendo un’azione frenante. È impiegata come freno aerodinamico durante la corsa di atterraggio e nelle manovre a terra; un blocco meccanico di sicurezza ne impedisce l’inserimento accidentale in volo. Lo stesso principio si ritrova nei turbofan, dove l’inversione di spinta può essere realizzata variando il calettamento delle pale del fan intubato (cfr. §9.5).

4.6 Materiali, costruzione e bilanciamento

Le pale possono essere realizzate in lega di alluminio, legno, acciaio o materiali plastici rinforzati. Le eliche a passo fisso, tipicamente bi- o tripala, sono in legno o metallo.

- **Eliche in legno.** Ottenute assemblando concetti radiali di legno laminato (dell’ordine di 5–9 concetti di spessore pari a circa $3/4$ di pollice), incollati e sagomati. Sono leggere e ben smorzanti, ma limitate in diametro e velocità.

- **Eliche in metallo.** Realizzate in lega leggera di alluminio, forgiate da una singola barra e generalmente più sottili di quelle in legno. Si impiegano per eliche di diametro e velocità maggiori.

Bilanciamento

Le pale possono essere cave e ospitare dispositivi antighiaccio. Ogni elica deve essere bilanciata con cura sia *staticamente* (a riposo) sia *dinamicamente* (in rotazione). I due bilanciamenti sono indipendenti: in un'elica bipala un bilanciamento solo statico non garantisce la stabilità dinamica alle alte velocità di rotazione, dove anche piccole asimmetrie di distribuzione di massa generano coppie e vibrazioni dannose.

4.7 Mutua influenza tra elica e velivolo

L'elica e il velivolo si influenzano a vicenda. Il moto del velivolo modifica la corrente che investe l'elica, e a sua volta la spinta prodotta e la scia dell'elica alterano il campo aerodinamico sulle superfici di coda e di comando, potendo generare momenti e rotazioni indesiderate. È utile distinguere gli effetti in due famiglie: di natura *aerodinamica* (flusso elicoidale ed effetto P) e di natura *meccanica* (coppia di reazione ed effetto giroscopico). La loro conoscenza è indispensabile per il dimensionamento delle superfici di governo e per comprendere le scelte costruttive del velivolo.

4.7.1 Flusso elicoidale

L'aria accelerata dall'elica non procede in linea retta: assume un moto a spirale che si avvolge intorno alla fusoliera lungo l'asse longitudinale. Per un'elica destrorsa, questo flusso elicoidale investe l'impennaggio verticale prevalentemente sul lato sinistro, spingendolo verso destra e generando una tendenza all'imbardata; investe inoltre in modo asimmetrico il piano orizzontale di coda, con un contributo al rollio. In sintesi, il velivolo tende a ruotare nello stesso verso di rotazione dell'elica.

Correzione del flusso elicoidale

Per un dato regime di potenza, di norma quello di crociera, l'effetto è corretto già in fase costruttiva disassando leggermente la deriva (la superficie verticale fissa) rispetto all'asse longitudinale. Per regimi diversi da quello di progetto il pilota interviene sul timone di direzione tramite la pedaliera.

4.7.2 Effetto P

Effetto P

L'*effetto P* è il momento imbardante che nasce quando il velivolo vola ad elevato angolo d'attacco (tipicamente in salita): il disco dell'elica è inclinato rispetto alla corrente, e le pale che scendono incontrano l'aria con una velocità relativa diversa da quelle che salgono. Ne risulta una differenza di trazione tra i due lati del disco e quindi un momento imbardante.

L'asimmetria nasce dalla composizione tra la velocità periferica della pala e la componente di velocità di volo perpendicolare al disco: su un lato le due si sommano, sull'altro si sottraggono. L'effetto è tanto più marcato quanto maggiore è l'angolo d'attacco, ed è particolarmente sentito al decollo e in salita; il pilota lo contrasta con il timone di direzione.

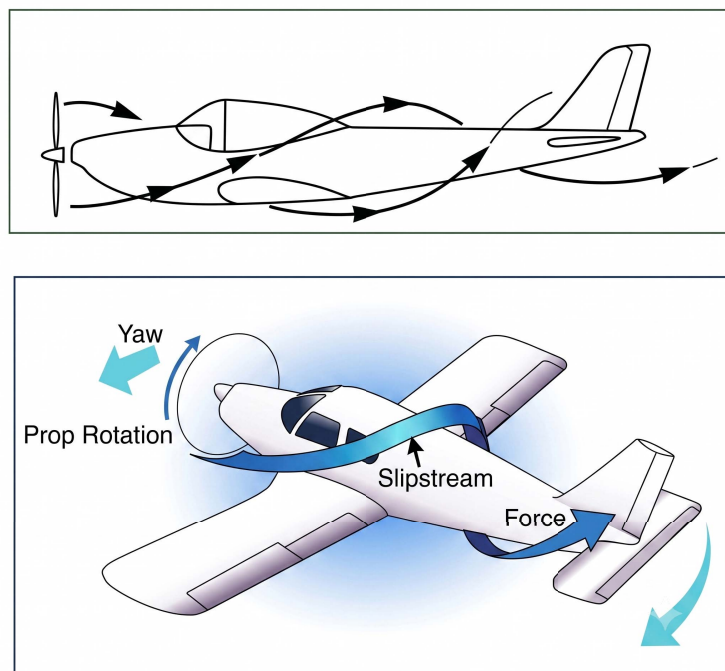


Figura 21. Effetto P: ad elevato angolo d'attacco il disco dell'elica è inclinato rispetto alla corrente e la pala discendente sviluppa più trazione di quella ascendente, generando un momento imbardante.

4.7.3 Coppia di reazione

Alla coppia motrice che il motore applica all'elica corrisponde, per il principio di azione e reazione, una coppia uguale e contraria applicata al velivolo, che tende a farlo ruotare attorno all'asse longitudinale (rollio) nel verso opposto a quello di rotazione dell'elica. A parità di condizioni l'effetto cresce con la coppia assorbita e con il momento d'inerzia dell'elica.

In volo l'effetto è facilmente corretto con alettoni e timone, grazie alle elevate velocità aerodinamiche sulle semiali; a terra, dove la velocità è bassa, tale correzione è inefficace e si ricorre a soluzioni costruttive diverse a seconda dell'architettura del velivolo.

- **Plurimotori.** La coppia di reazione si annulla facendo ruotare le eliche delle due semiali in verso opposto (eliche *controrotanti*): le coppie si bilanciano e il velivolo non tende a rollare. La soluzione è efficace ma comporta motori “destrorsi” e “sinistrorsi” distinti, con maggiori costi e complicazioni logistiche di ricambistica.
- **Monomotori.** Si introduce una lieve asimmetria nella distribuzione di portanza lungo l'apertura, in modo da generare una coppia aerodinamica opposta a quella di reazione; il conseguente disallineamento delle forze si compensa spostando l'asse motore di una quantità pari a metà dello sbilanciamento.

4.7.4 Effetto giroscopico

L'elica in rotazione è a tutti gli effetti un giroscopio e reagisce alle variazioni di assetto del velivolo con una coppia di *precessione*. Quando l'aereo cabra, picchia o vira, la precessione genera un momento aggiuntivo sfasato di 90° rispetto alla manovra: per un'elica destrorsa, a una picchiata corrisponde un'imbardata a sinistra, a una cabrata un'imbardata a destra.

Nota

L'intensità dell'effetto giroscopico cresce con il diametro dell'elica, con la massa delle pale e con la potenza (quindi con il regime di rotazione). Nei velivoli ad alte prestazioni può diventare significativo e

condizionare la condotta: il pilota lo neutralizza con correzioni sui comandi coordinate con la manovra in atto.

5 Teorie aerodinamiche dell'elica

Avvertenza

Questa sezione raccoglie, in forma organica e con derivazioni complete, la trattazione classica dell'aerodinamica dell'elica secondo l'impostazione del corso di *Aerodinamica degli Aeromobili* del prof. **Valentino Losito**. Il filo conduttore è l'analogia con la teoria dell'ala: l'elica è un sistema di ali rotanti, e le sue teorie sono adattamenti — con un grado di approssimazione necessariamente maggiore, vista l'intensità delle perturbazioni indotte — delle teorie globali e locali dell'ala finita.

L'elica è una macchina rotativa a fluido che trasforma la potenza all'albero, fornita dal motore, nella spinta necessaria al volo. Possiede simultaneamente moto di rotazione e di traslazione, cosicché ogni suo punto descrive un'elica cilindrica; in assenza di rotazione si dice *bloccata*, in assenza di traslazione *a punto fisso*. Il suo principio è identico a quello di un ventilatore: proietta aria all'indietro e ne riceve, per reazione, una spinta in avanti. Poiché la conversione di energia non coinvolge alcuna trasformazione termodinamica, l'elica è una macchina ad altissima efficienza meccanica, con rendimenti massimi prossimi all'unità; è questa la ragione di fondo della sua superiorità alle basse velocità di volo.

5.1 Cinematica dell'elemento di pala

Si consideri una pala come una superficie portante fortemente svergolata. Si definisce l'asse r della pala, perpendicolare all'asse di rotazione t e giacente nel piano del disco. L'intersezione della pala con un piano normale ad r in un punto P è un profilo alare — l'*elemento di pala* — la cui corda forma con il piano di rotazione l'**angolo di calettamento** geometrico θ (nel documento indicato anche con β).

Nel moto rototraslatorio l'elemento di pala al raggio r è investito da una velocità effettiva che compone la velocità di trascinamento periferica $\Omega r = 2\pi nr$ (con n il numero di giri al secondo e $\Omega = 2\pi n$ la velocità angolare) e la velocità di volo V_0 :

$$V_{\text{eff}} = \left[(2\pi nr)^2 + V_0^2 \right]^{1/2}. \quad (31)$$

L'angolo tra la velocità effettiva e il piano di rotazione è l'angolo di calettamento *aerodinamico* ϕ , e l'angolo d'attacco dell'elemento è

$$\alpha = \theta - \phi = \theta - \arctan \frac{V_0}{2\pi nr}. \quad (32)$$

Necessità dello svergolamento

Se il profilo fosse lo stesso lungo tutta la pala, dalla (32) segue che il calettamento θ deve *diminuire* dal mozzo verso l'estremità affinché ogni elemento lavori a un angolo d'attacco prossimo a quello ottimale. Infatti, a parità di α , al crescere di r cresce $2\pi nr$ e quindi diminuisce $\arctan(V_0/2\pi nr)$: per mantenere $\alpha = \theta - \phi$ costante occorre che θ segua la diminuzione di ϕ . È la giustificazione quantitativa dello svergolamento (cfr. §4.2).

Dipendenza dal solo rapporto di avanzamento

Si riscriva la (32) mettendo in evidenza nD :

$$\alpha = \theta - \arctan \left(\frac{V_0}{nD} \cdot \frac{D}{2\pi r} \right).$$

A parità di calettamento θ e di rapporto geometrico D/r — cioè per due eliche geometricamente simili

— l'angolo d'attacco dipende dal solo **rapporto di avanzamento**

$$J \equiv \gamma = \frac{V_0}{nD}. \quad (33)$$

Questo è il fondamento della *similitudine cinematica* tra eliche: due eliche geometricamente simili che operano allo stesso J hanno la stessa distribuzione di angoli d'attacco, e quindi gli stessi coefficienti aerodinamici. $\square$

L'angolo ϕ individua il **passo aerodinamico** $p_a = 2\pi r \tan \phi = \gamma D$, proporzionale all'avanzo per giro; il **passo geometrico** $p = 2\pi r \tan \theta$ è invece l'avanzo per giro che l'elemento avrebbe muovendosi lungo la propria corda. La loro differenza è il *regresso* dell'elica.

5.2 Genesi della spinta e coefficienti di Rénard

La forza aerodinamica elementare dF sull'elemento di pala si scompone in portanza dL e resistenza dD ; proiettandola si ottiene la spinta elementare dT (normale al piano di rotazione) e la coppia resistente elementare dQ/r (nel piano di rotazione). Integrando lungo le pale si ottengono la spinta T e la coppia Q assorbita all'albero, cui corrisponde la potenza $\Pi = Q\Omega$ e il rendimento

$$\eta = \frac{T V_0}{Q \Omega} = \frac{T V_0}{\Pi}. \quad (34)$$

Esprimendo la velocità effettiva (31) come proporzionale a nD ,

$$V_{\text{eff}} = \gamma nD \left[1 + \left(\frac{2\pi r}{D} \right)^2 \frac{1}{\gamma^2} \right]^{1/2}, \quad (35)$$

si riconosce che la pressione dinamica è proporzionale a $(nD)^2$ e la superficie di riferimento a D^2 . Si può quindi porre spinta, coppia e potenza nella forma adimensionale dovuta a **Rénard**:

$$T = C_T \rho n^2 D^4, \quad C_T = \frac{T}{\rho n^2 D^4} = C_T(\gamma), \quad (36)$$

$$Q = C_Q \rho n^2 D^5, \quad C_Q = \frac{Q}{\rho n^2 D^5} = C_Q(\gamma), \quad (37)$$

$$\Pi = C_P \rho n^3 D^5, \quad C_P = \frac{\Pi}{\rho n^3 D^5} = C_P(\gamma). \quad (38)$$

Il coefficiente di spinta C_T svolge per l'elica un ruolo analogo al coefficiente di portanza per l'ala. Combinando le (34)–(38) e ricordando $\Pi = Q\Omega = Q2\pi n$, il rendimento si esprime come

$$\eta = \frac{TV_0}{Q\Omega} = \frac{C_T \rho n^2 D^4 \cdot \gamma nD}{C_Q \rho n^2 D^5 \cdot 2\pi n} = \frac{C_T}{C_P} \gamma, \quad (39)$$

avendo usato $C_P = 2\pi C_Q$ (immediato da $\Pi = 2\pi nQ$).

Un secondo sistema di coefficienti

È talvolta comodo riferire le grandezze alla velocità periferica ΩR anziché a nD , ponendo

$$T = T_c \pi R^2 \rho \Omega^2 R^2, \quad Q = Q_c \pi R^2 \rho \Omega^2 R^3, \quad \Pi = P_c \pi R^2 \rho \Omega^3 R^3, \quad \lambda = \frac{V_0}{\Omega R}. \quad (40)$$

Confrontando con le (36)–(38) e ricordando $\Omega = 2\pi n$, $R = D/2$, si ricavano i legami esatti tra i due sistemi:

$$C_T = \frac{\pi^3}{4} T_c, \quad C_Q = \frac{\pi^3}{8} Q_c, \quad C_P = \frac{\pi^4}{4} P_c, \quad \gamma = \pi \lambda. \quad (41)$$

I coefficienti dipendono da γ e, in second'ordine, dai numeri di Reynolds $Re = \rho \pi n D^2 / \mu$ e di Mach $M = \pi n D / a$ delle estremità.

Le due condizioni di similitudine di Rénard

Per trasferire all'elica al vero i risultati sperimentali su modello, Rénard stabilì che devono valere simultaneamente la *similitudine geometrica* (rapporto costante tra tutte le grandezze omologhe) e la *similitudine cinematica* (stesso rapporto di funzionamento γ). È l'analogo, per l'elica, della similitudine di Reynolds e Mach per i profili.

5.3 Considerazioni sul passo e curve caratteristiche

Se lo spessore del profilo fosse nullo, l'elemento opererebbe ad angolo d'attacco

$$\alpha = \arctan \frac{p}{2\pi r} - \arctan \frac{\gamma D}{2\pi r}, \quad (42)$$

e si annullerebbe per tutti gli elementi quando $\gamma = p/D$: in tal caso passo geometrico e aerodinamico coinciderebbero. Volendo invece far lavorare ogni elemento a un dato $\alpha = \text{cost} \neq 0$ per un assegnato γ di progetto, dalla formula di addizione della tangente si ricava la legge che il passo deve seguire lungo il raggio:

$$p = 2\pi r \tan(\alpha + \phi) = 2\pi r \frac{\tan \alpha + \frac{\gamma D}{2\pi r}}{1 - \tan \alpha \frac{\gamma D}{2\pi r}}. \quad (43)$$

Che cosa significa “passo fisso”

Per elica a *passo fisso* si intende un'elica le cui pale, pur avendo passo geometrico variabile con r secondo la (43), sono rigidamente fissate al mozzo. Ruotando rigidamente tutte le pale dello stesso angolo si genera una *nuova* elica: è il principio dell'elica a passo (meglio: calettamento) variabile in volo, che corrisponde a una *famiglia* di eliche con curve caratteristiche e rendimento massimo diversi.

Le **curve caratteristiche** riportano C_T , C_P (o C_Q) ed η in funzione di γ . Il loro andamento si interpreta così:

- al crescere di γ l'angolo d'attacco di tutti gli elementi diminuisce (42), quindi C_T decresce in modo quasi lineare (lieve concavità verso il basso) e si annulla per $\gamma = \gamma_1$; per $\gamma > \gamma_1$ la spinta diventa negativa (elica frenante);
- C_Q e C_P decrescono con legge approssimativamente quadratica (il contributo dominante alla coppia è la resistenza dei profili) e si annullano per $\gamma = \gamma_2 > \gamma_1$; per $\gamma > \gamma_2$ la coppia diventa motrice (mulinello);
- poiché $\eta = (C_T/C_P)\gamma$ è nullo sia per $\gamma = 0$ sia per $\gamma = \gamma_1$, il rendimento ha un massimo tra i due, tipicamente a $\gamma \simeq 0,7 \div 0,8 \gamma_1$.

Eliche lente ed eliche veloci

Le curve descritte sono tipiche di eliche per basse velocità. Per eliche veloci (passo e calettamento nominale elevati) ai bassi γ una porzione di pala può stallare; al crescere di γ la riduzione dei coefficienti dovuta all'inclinazione della forza aerodinamica è compensata dall'aumento di portanza per il minore α , e C_T , C_P si mantengono inizialmente quasi costanti.

5.3.1 Metodo dell'elemento di pala rappresentativo

Le curve caratteristiche si possono stimare riferendosi a un *elemento di pala rappresentativo*, posto a distanza opportuna dall'asse, che sviluppi le stesse forze globali dell'intera elica. Proiettando la forza aerodinamica nelle direzioni normale e parallela al piano di rotazione (Fig. schematica dell'elemento), e indicando con A la superficie fittizia concentrata al raggio r , si ricava

$$C_T = \frac{C_L \cos \phi' - C_D \sin \phi'}{\cos^2 \phi'} \left(\frac{2\pi r}{D} \right)^2 \frac{A}{2D^2}, \quad (44)$$

$$C_P = \frac{C_L \sin \phi' + C_D \cos \phi'}{\cos^2 \phi'} \left(\frac{2\pi r}{D} \right)^3 \frac{A}{2D^2}, \quad (45)$$

con $\bar{r} = 2\pi r/D$ distanza relativa e $\sigma^* = A/2D^2$ legata alla solidità. Il rapporto di funzionamento è $\gamma = \bar{r} \tan \phi'$. Note la polare $C_L(\alpha)$, $C_D(\alpha)$ del profilo rappresentativo, le (44)–(45) forniscono C_T , C_P ed η in funzione di γ e del calettamento. Valori correnti dei fattori di scala sono $2,1 < \bar{r} < 2,3$ e $0,012 < \sigma^* < 0,016$ per eliche bipala, $0,018 < \sigma^* < 0,024$ per le tripala.

5.4 Stadi di funzionamento

Al variare del rapporto di funzionamento e del calettamento, l'elica attraversa distinti *stadi di funzionamento*, individuati dalla posizione del vettore risultante delle forze aerodinamiche rispetto agli assi dell'elemento di pala. Riferendosi alla retta di portanza nulla dell'elemento rappresentativo si distinguono: l'elica *traente* ($C_T > 0$, $C_P > 0$); l'elica a *spinta nulla* ($C_T = 0$, $\gamma = \gamma_1$); l'elica *frenante* ($C_T < 0$, $C_P > 0$, $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$); l'elica *autorotante* ($C_P = 0$, $\gamma = \gamma_2$); il *mulinello* o elica motrice ($C_T < 0$, $C_P < 0$, $\gamma > \gamma_2$).

Attenzione

Non si percorrono tutti gli stadi semplicemente aumentando la velocità di volo a partire dal punto fisso: occorrerebbero velocità troppo elevate. Si procede invece variando il *calettamento*, in modo che il vettore della forza aerodinamica si sposti nei diversi quadranti. È la ragione operativa fondamentale per cui le eliche evolute sono a calettamento variabile.

5.5 Teoria impulsiva semplice (Rankine–Froude)

Ipotesi della teoria impulsiva semplice

1. fluido *ideale*: le perdite viscosive non sono rappresentate, sicché la teoria fornisce valori *limite* (ideali) del rendimento;
2. moto *incomprimibile*;
3. numero *infinito* di pale: il campo è stazionario e le proprietà sono costanti su ogni circonferenza coassiale (indipendenti dalla coordinata angolare);
4. *assenza di rotazione* nella scia (ipotesi propria della sola teoria semplice).

L'elica è modellata come un **disco attuatore**: una superficie infinitamente sottile che imprime al flusso un incremento di pressione Δp inducendo solo variazioni di velocità *assiale*. Siano p_0 e V_0 pressione e velocità asintotiche; avvicinandosi al disco la velocità cresce a $V_0 + u$ (e la pressione cala a p'), attraverso il disco la pressione salta di Δp a velocità costante $V_0 + u$, e nella scia la velocità raggiunge $V_0 + u_1$ mentre la pressione ritorna a p_0 .

Spinta e teorema di Froude

(i) Spinta come quantità di moto. Poiché nella scia la pressione ritorna a p_0 e si dimostra che la risultante delle forze di pressione sulla superficie laterale del tubo di flusso è del second'ordine (trascurabile),

la spinta è pura variazione di quantità di moto assiale:

$$T = \rho (V_0 + u) S u_1. \quad (46)$$

(ii) Spinta come salto di pressione. Applicando Bernoulli separatamente a monte e a valle del disco (l'energia totale H si conserva in ciascun tratto ma salta attraverso il disco):

$$\begin{aligned} p_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2 &= p' + \frac{1}{2}\rho (V_0 + u)^2, \\ p' + \Delta p + \frac{1}{2}\rho (V_0 + u)^2 &= p_0 + \frac{1}{2}\rho (V_0 + u_1)^2. \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro si elide il termine cinetico sul disco e si ottiene

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho [(V_0 + u_1)^2 - V_0^2] = \rho \left(V_0 + \frac{u_1}{2} \right) u_1,$$

da cui, essendo $T = S \Delta p$,

$$T = \rho \left(V_0 + \frac{u_1}{2} \right) u_1 S. \quad (47)$$

(iii) Confronto. Uguagliando la (46) e la (47):

$$\rho (V_0 + u) u_1 S = \rho \left(V_0 + \frac{u_1}{2} \right) u_1 S \implies V_0 + u = V_0 + \frac{u_1}{2},$$

e quindi il **teorema di Froude**:

$$\boxed{u = \frac{u_1}{2}} \quad (48)$$

L'incremento di velocità assiale si realizza per metà a monte del disco e per metà nella scia. È l'esatto analogo del downwash di un'ala finita nella teoria della linea portante di Prandtl. $\square$

Perché le velocità radiali e la rotazione si trascurano

Applicando la conservazione del momento della quantità di moto al tubo di flusso, $\omega r^2 = \text{cost}$; essendo $\omega = 0$ all'infinito a monte, la velocità tangenziale è ovunque nulla a monte. Inoltre, se gli incrementi assiali sono piccoli, le variazioni di area sono trascurabili e con esse le velocità radiali (del second'ordine); l'energia cinetica rotazionale nella scia risulta del terz'ordine. Sono queste stime che giustificano rigorosamente l'ipotesi (4).

5.5.1 Fattore di interferenza assiale e rendimento ideale

Introdotta il **fattore di interferenza assiale** $a = u/V_0$, dalla (48) si ha $u_1 = 2u = 2aV_0$, e la spinta dell'elemento di disco $dS = 2\pi r dr$ diventa, dalla (46),

$$dT = \rho (V_0 + u) u_1 dS = 2\rho V_0^2 (1 + a) a dS. \quad (49)$$

La potenza spesa per accelerare il flusso è $d\Pi = (V_0 + u) dT = 2\rho V_0^3 (1 + a)^2 a dS$, mentre la potenza utile è $V_0 dT$. Il rendimento ideale, conteggiando la sola energia cinetica assiale lasciata nella scia, è

$$\eta_i = \frac{V_0 dT}{(V_0 + u) dT} = \frac{1}{1 + a}. \quad (50)$$

La distribuzione ottima di carico è uniforme

Si cerchi la distribuzione $a = a(r)$ che minimizzi la perdita di energia a parità di spinta utile. La perdita di potenza per unità di superficie è l'energia cinetica residua nella scia,

$$dE = \frac{1}{2} d\dot{m} u_1^2 = \frac{1}{2} \rho (V_0 + u) dS (2aV_0)^2 = 2\rho V_0^3 (1 + a) a^2 dS.$$

Incrementando localmente a di Δa , dalle espressioni di dT (49) e dE si ricava

$$\Delta(dT) = 2\rho V_0^2 (1 + 2a) \Delta a \, dS, \quad \Delta(dE) = 2\rho V_0^3 (2a + 3a^2) \Delta a \, dS.$$

La distribuzione è ottima quando spostare carico da un anello all'altro non riduce la perdita totale, cioè quando $\Delta(dT)/\Delta(dE)$ è indipendente da r :

$$\frac{\Delta(dT)}{\Delta(dE)} = \frac{1}{V_0} \frac{1 + 2a}{2a + 3a^2} = \text{cost} \implies a = \text{cost}.$$

La minima perdita — e dunque il massimo rendimento ideale — si ha con **spinta uniformemente distribuita sul disco**. □

Con a costante, integrando le (49) sull'intero disco $S = \pi R^2$:

$$T = 2\rho V_0^2 (1 + a) a S, \quad \Pi = 2\rho V_0^3 (1 + a)^2 a S. \quad (51)$$

Eliminando a tramite la (50), cioè $a = (1 - \eta_i)/\eta_i$, si ottengono le relazioni che legano il carico del disco al rendimento ideale:

$$\boxed{\frac{T}{\rho V_0^2 S} = \frac{2(1 - \eta_i)}{\eta_i^2}, \quad \frac{\Pi}{\rho V_0^3 S} = \frac{2(1 - \eta_i)}{\eta_i^3}.} \quad (52)$$

Conseguenze progettuali

La (52) mostra che il rendimento ideale *diminuisce* al crescere della potenza assorbita per unità di area del disco e al diminuire della velocità (al calare di V_0 deve aumentare l'accelerazione assiale), e *cresce* aumentando il raggio R . È la giustificazione quantitativa delle eliche di grande diametro per le basse velocità, e il limite è posto solo dalla comprimibilità alle estremità (§5.12).

Andamento con il rapporto di funzionamento e analogia con l'ala

Dalla (52), esprimendo il coefficiente di coppia con la (40) e usando $\Pi = \Omega Q$,

$$Q_c = \frac{\Pi}{\pi R^2 \rho \Omega^3 R^3} = \frac{\Pi}{\pi R^2 \rho V_0^3} \lambda^3 = \frac{2(1 - \eta_i)}{\eta_i^3} \lambda^3,$$

da cui, per i legami (41),

$$C_Q = \frac{1 - \eta_i}{4 \eta_i^3} \gamma^3. \quad (53)$$

Il rendimento ideale cresce rapidamente con γ (ovvero λ) e tende all'unità in modo asintotico per $\gamma \rightarrow \infty$. È lo stesso comportamento della resistenza indotta di un'ala, $C_{Di} = C_L^2/(\pi AR) \rightarrow 0$ per $AR \rightarrow \infty$: in entrambi i casi una grande "estensione" (diametro o apertura) riduce le perdite indotte legate all'energia cinetica lasciata nella scia. □

5.6 Teoria impulsiva generale (con scia rotazionale)

La coppia che l'elica esercita sul fluido genera, per reazione, una rotazione della scia (*swirl*): la corrente a valle possiede una velocità tangenziale, e questa rotazione è una perdita di energia non contemplata dalla teoria semplice. Detta ω la velocità angolare indotta nella scia, l'elemento di coppia uguaglia la quantità di moto angolare impartita nell'unità di tempo all'elemento anulare:

$$dQ = \rho V_0 (1 + a) \omega r^2 \, dS. \quad (54)$$

Salto di pressione con scia rotante

Applicando Bernoulli al fluido *relativo* alle pale, la velocità angolare relativa passa da Ω (a monte) a $\Omega - \omega$ (a valle); il salto di pressione è

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho[\Omega^2 - (\Omega - \omega)^2]r^2 = \rho\omega r^2\left(\Omega - \frac{\omega}{2}\right). \quad (55)$$

La differenza di pressione totale tra valle e monte del disco è $H_1 - H_0 = \Delta p + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$, cioè supera la spinta per unità d'area di una quantità pari all'energia cinetica rotazionale impartita al fluido: è la perdita aggiuntiva rispetto al caso assiale. $\square$

Approssimazione di piccola rotazione

Se la velocità angolare della corrente è piccola rispetto a quella dell'elica ($\omega \ll \Omega$), si trascurano i termini in ω^2 : il salto di pressione totale eguaglia Δp e la pressione nella scia ritorna al valore asintotico. È l'ipotesi che chiude il modello in forma analitica.

Si definisce il **fattore di interferenza rotazionale**

$$a' = \frac{\omega}{2\Omega}. \quad (56)$$

La spinta dell'elemento anulare si può allora scrivere in due modi: dalla (55) con la definizione di a' ,

$$dT = \Delta p dS = 2\rho\Omega^2 r^2 (1 - a') a' dS, \quad (57)$$

e dal bilancio assiale, identico alla (49),

$$dT = 2\rho V_0^2 (1 + a) a dS. \quad (58)$$

Legame tra i fattori di interferenza

Uguagliando le due espressioni della spinta (57) e (58) si ottiene la relazione fondamentale che lega interferenza assiale e rotazionale:

$$V_0^2 (1 + a) a = \Omega^2 r^2 (1 - a') a'. \quad (59)$$

L'elemento di coppia, dalla (54) con $\omega = 2\Omega a'$, diventa

$$dQ = 2\rho V_0 (1 + a) \Omega a' r^2 dS. \quad (60)$$

Rendimento dell'elemento anulare

Dalla (59), moltiplicando per le opportune grandezze, si verifica l'identità

$$V_0 (1 + a) dT = \Omega (1 - a') dQ,$$

che riordinata dà

$$\Omega dQ - V_0 dT = V_0 a dT + \Omega a' dQ = dE,$$

dove il primo membro è l'eccesso di potenza assorbita rispetto al lavoro utile, e il secondo le perdite assiali e rotazionali. Il rendimento dell'elemento anulare segue immediatamente:

$$\eta = \frac{V_0 dT}{\Omega dQ} = \frac{1 - a'}{1 + a}. \quad (61)$$

Il fattore $1/(1 + a)$ è la perdita per accelerazione *assiale* (come nella teoria semplice), il fattore $(1 - a')$ la perdita per rotazione *tangenziale* della scia. $\square$

Fattori di interferenza in funzione di X ed η

Si introduca l'ascissa radiale adimensionale $X = \Omega r / V_0$. Dalla (59), $a/a' = X^2(1 - a')/(1 + a)$; usando la (61) nella forma $(1 - a') = \eta(1 + a)$ si ottiene $a = X^2\eta a'$ e, sostituendo $a' = (1 - \eta(1 + a))$ ricavato dalla stessa,

$$a = X^2\eta[1 - \eta(1 + a)].$$

Risolvendo per a e quindi per $a' = a/(X^2\eta)$:

$$a = \frac{X^2\eta(1 - \eta)}{1 + X^2\eta^2}, \quad a' = \frac{1 - \eta}{1 + X^2\eta^2}. \quad (62)$$

□

Andamento dei fattori lungo la pala

Dalle (62) si legge che, in condizioni di ottimo, il fattore assiale a cresce rapidamente presso il mozzo (dove X è piccolo) e si mantiene quasi costante nella zona periferica, mentre il fattore rotazionale a' è ovunque piccolo tranne che presso il mozzo. La perdita rotazionale è quindi concentrata alla radice della pala — una delle ragioni per cui le sezioni interne contribuiscono poco alla spinta e si dimensionano soprattutto per ragioni strutturali.

Distribuzione ottima: rendimento costante lungo la pala

Si impone, come nella teoria semplice, che $\Delta(dT)/\Delta(dE)$ sia costante con r ; per la relazione $dE = \Omega dQ - V_0 dT$ ciò equivale a richiedere che $\Delta(dT)/\Delta(dQ)$ sia indipendente dal raggio. Sviluppando con le (62) si perviene alla condizione di ottimo (con $\eta = \eta(r)$)

$$\frac{(1 - \eta)X^2}{1 + \eta X^2(2 - \eta)} + \frac{1 + \eta X^2}{2\eta - 1} X^2\eta^2 = \text{cost.} \quad (63)$$

Nell'ipotesi di rendimento prossimo all'unità, $\eta = 1 - \varepsilon$ con $\varepsilon \ll 1$, la (63) conduce al risultato che η **deve essere costante lungo il raggio**: è l'analogo, per l'elica, della distribuzione di carico ellittica dell'ala (resistenza indotta minima a portanza assegnata). Le distribuzioni esatta e approssimata di a ed a' non differiscono sostanzialmente. □

5.6.1 Spinta, coppia e fattore correttivo della scia rotante

Nell'ipotesi di rendimento costante lungo la pala si calcolano spinta e coppia in forma chiusa. Posto $\lambda = V_0/(\Omega R)$, dalla (58) e dalle (62) si ricava la distribuzione di spinta

$$\frac{dT}{dX} = \pi R^2 \rho V_0^2 2\lambda^2 \frac{1 - \eta}{\eta^2} F(X, \eta), \quad F(X, \eta) = \frac{2X^3\eta^3(1 + X^2\eta)}{(1 + X^2\eta^2)^2}, \quad (64)$$

e analogamente per la coppia $\frac{\eta}{\lambda R} \frac{dQ}{dX} = \frac{dT}{dX}$. La funzione $F(X, \eta)$ descrive le distribuzioni di spinta e coppia lungo la pala. Integrando,

$$\frac{T}{\pi R^2 \rho V_0^2} = \frac{2(1 - \eta)}{\eta^2} G(\lambda, \eta), \quad G(\lambda, \eta) = \lambda^2 \int_0^{1/\lambda} F(X, \eta) dX, \quad (65)$$

e per il coefficiente di coppia

$$Q_c = \frac{2\lambda^3(1 - \eta)}{\eta^3} G(\lambda, \eta). \quad (66)$$

Significato di $G(\lambda, \eta)$

Confrontando la (65) con il risultato della teoria semplice (52), la funzione $G(\lambda, \eta)$ è il *fattore correttivo* della spinta dovuto al moto rotazionale indotto nella scia. La perdita di rendimento associata cresce con il coefficiente di coppia ma resta piccola: dell'ordine del 2% per $Q_c \approx 0,004$ e del 4% per $Q_c \approx 0,012$. Diventa però sensibile se la distribuzione di carico si allontana dalla legge ottimale, specie presso il mozzo.

5.7 Calcolo dei rendimenti reali dell'elica

Le teorie impulsive forniscono il rendimento *ideale*, privo di perdite viscosi. Per includere queste ultime si aggiunge al bilancio di potenza dell'elemento anulare la dissipazione viscosa E_v degli N elementi di pala:

$$\Omega (1 - a') dQ = V_0 (1 + a) dT + dE_v, \quad (67)$$

dove la potenza dissipata per attrito dagli N elementi al raggio r è

$$dE_v = \frac{1}{2} \rho c C_D N V_{\text{eff}}^3 dr, \quad (68)$$

con c corda, C_D coefficiente di resistenza del profilo, e V_{eff} risultante della velocità assiale $V_0(1+a)$ e rotazionale $\Omega r(1-a')$.

Scomposizione del rendimento in fattori

Il rendimento complessivo dell'elica si fattorizza nel prodotto

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4 \quad (69)$$

dove

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{1+a} \text{ (perdite assiali),} & \eta_2 &= 1 - a' \text{ (perdite rotazionali),} \\ \eta_3 &\text{ (perdite viscosi di profilo),} & \eta_4 &\text{ (resistenza del mozzo).} \end{aligned}$$

5.7.1 Procedimento iterativo

Assumendo costante lungo la pala il prodotto $c C_D$ (la corda cresce e poi cala dal mozzo all'estremità, mentre C_D varia in senso opposto), si pone $K = \frac{1}{2} c C_D / (\pi R) = \sigma \delta$, con σ solidità e 2δ valore medio efficace del coefficiente di resistenza. Integrando la (68) con le relazioni cinematiche $V_{\text{eff}} \sin \phi' = V_0(1+a)$, $V_{\text{eff}} \cos \phi' = \Omega r(1-a')$, si ottiene la dissipazione viscosa totale

$$E_v = \sigma \delta \pi R^2 \rho \Omega^3 R^3 (1 - a')^3 f(\phi'_1), \quad f(\phi'_1) = \int_{\phi'_1}^{\pi/2} \tan^4 \phi'_1 \csc^5 \phi'_1 d\phi'_1, \quad (70)$$

dove ϕ'_1 è il valore di ϕ' all'estremità delle pale. La funzione $f(\phi'_1)$ è tabulata: cresce da 0,250 per $\phi'_1 = 0$ fino a 0,488 per $\tan \phi'_1 = 0,50$.

Le definizioni di η_1, η_2 portano alle relazioni che chiudono il calcolo iterativo. Dal coefficiente di coppia,

$$Q_c = \frac{\pi R^2 \rho V_0 (1+a) \Omega^2 R^2 a'}{\pi R^2 \rho \Omega^3 R^3} = \lambda \frac{1 - \eta_2}{\eta_1} \implies \eta_2 = 1 - \frac{\eta_1}{\lambda} Q_c. \quad (71)$$

L'angolo all'estremità delle pale è

$$\tan \phi'_1 = \frac{V_0(1+a)}{\Omega R(1-a')} = \frac{\lambda}{\eta_1 \eta_2}. \quad (72)$$

Combinando il bilancio (67) con la (70) e con $\Pi = \pi R^2 \rho \Omega^3 R^3 Q_c$ si ricava il rendimento viscoso

$$\eta_3 = 1 - \frac{\sigma \delta}{Q_c} \eta_2^2 f(\phi'_1). \quad (73)$$

Infine, dalla definizione $\eta Q_c = \lambda T_c$ e dall'espressione $T_c = 2\lambda^2 \eta_1^2 (1 - \eta_1)$ si ottiene

$$\eta_1 = 1 - \frac{1}{2} \eta_2 \eta_3 Q_c \left(\frac{\eta_1}{\lambda} \right)^3. \quad (74)$$

Schema dell'iterazione

Per assegnati $\lambda, \sigma\delta$ e Q_c : si parte da un valore di tentativo di η_1/λ ; con la (71) si valuta η_2 , con la (72) ϕ_1' , con la (73) η_3 , con la (74) il nuovo η_1 ; si itera fino a convergenza. Il prodotto $\eta_1 \eta_2 \eta_3$ fornisce il rendimento al netto della resistenza del mozzo.

5.7.2 Resistenza del mozzo

Detto $R_m \approx 0,1 R$ il raggio del mozzo, con coefficiente di resistenza prossimo all'unità si stima $D_m = \pi R_m^2 \frac{1}{2} \rho V_0^2$, da sottrarre alla spinta. Ne segue il rendimento addizionale

$$\eta_4 = \frac{T - D_m}{T} = 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{R_m}{R} \right)^2 \frac{\eta_1^2}{1 - \eta_1}. \quad (75)$$

Bilancio fisico delle perdite

La gerarchia delle perdite, al variare del rapporto di funzionamento λ , è istruttiva:

- ai bassi λ domina la perdita *assiale* (η_1), che si annulla per $\lambda \rightarrow \infty$ (poiché $a \rightarrow 0$);
- le perdite *rotazionali* (η_2) sono sempre piccole;
- le perdite *viscose* (η_3) sono sempre consistenti, dal $\sim 10\%$ ai bassi λ fino al 20% e oltre agli alti λ ;
- le perdite del *mozzo* (η_4), trascurabili ai bassi λ , riducono il rendimento massimo del $4 \div 5\%$ agli alti λ .

Si verifica inoltre che $\eta_{\max}$ diminuisce al crescere di $\sigma\delta$ e del coefficiente di coppia. È questa scomposizione — assiale, rotazionale, viscosa, mozzo — a guidare il progetto: ad esempio non conviene ridurre η_1 con un diametro tale da portare le estremità in regime transonico, perché il conseguente aumento di C_D deteriorerebbe η_3 più di quanto η_1 migliori.

5.8 Teoria dell'elemento di pala: risultati e limiti

La teoria dell'elemento di pala calcola le forze elementari come quelle di un profilo investito dalla velocità effettiva $V_{\text{eff}} = \sqrt{V_0^2 + \Omega^2 r^2}$ con angolo d'attacco $\alpha = \theta - \phi$, e ottiene spinta e coppia per integrazione:

$$dT = \frac{1}{2} \rho V_{\text{eff}}^2 N c (C_L \cos \phi - C_D \sin \phi) dr, \quad dQ = \frac{1}{2} \rho V_{\text{eff}}^2 N c (C_L \sin \phi + C_D \cos \phi) r dr. \quad (76)$$

Rendimento dell'elemento e angolo ottimo

Il rendimento dell'elemento di pala è

$$\eta = \frac{V_0 dT}{\Omega dQ} = \frac{V_0}{\Omega r} \frac{C_L \cos \phi - C_D \sin \phi}{C_L \sin \phi + C_D \cos \phi}.$$

Posto $\varepsilon = C_D/C_L$ (inverso dell'efficienza del profilo) e usando $V_0/\Omega r = \tan \phi$, dividendo numeratore e denominatore per $C_L \cos \phi$:

$$\eta = \frac{1 - \varepsilon \tan \phi}{1 + \varepsilon \cot \phi}. \quad (77)$$

Annullando $d\eta/d\phi$ si trova che il rendimento è massimo per

$$\phi = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan \varepsilon \approx \frac{\pi}{4},$$

e che si annulla per $r = \varepsilon V_0/\Omega$. □

I tre limiti della teoria dell'elemento di pala

La (77) prevede l'esistenza di un *diametro ottimo* oltre il quale ogni aumento del disco riduce il rendimento — in contrasto con la teoria impulsiva, secondo cui aumentare il diametro è sempre conveniente. Il confronto con l'esperienza (esperienze di Lock) mostra errori dell'ordine del 10% su C_T e C_Q . Le cause sono tre:

1. ogni elemento è supposto lavorare *indipendentemente* dagli altri;
2. la velocità effettiva è presa come semplice risultante di Ωr e V_0 , *ignorando le velocità indotte a e a'* (punto debole centrale, alla luce della teoria impulsiva generale e della linea portante di Prandtl);
3. resta indeterminato l'*allungamento efficace* con cui scegliere C_L e C_D del profilo.

5.9 Teoria vorticoso dell'elica

La portanza di ogni elemento di pala corrisponde a una circolazione $\Gamma(r)$; il campo vorticoso dell'elica è dato da vortici aderenti (radiali, sul disco) e liberi (elicoidali, nella scia). Per numero infinito di pale e scia cilindrica (trascurando la contrazione), lo schema si compone di: vortici aderenti radiali; vortici liberi circolari; vortici liberi rettilinei paralleli alla generatrice del cilindro; vortici liberi assiali al mozzo.

Convergenza con la teoria impulsiva generale

L'analisi del campo indotto fornisce due risultati che saldano le teorie:

1. i *vortici liberi circolari* inducono una velocità assiale che sul piano del disco è la *metà* di quella nella scia infinitamente a valle — esattamente il teorema di Froude (48);
2. dall'equilibrio delle induzioni tangenziali (i vortici aderenti inducono $\omega'' r$, i liberi assiali $\omega' r$, e a monte la velocità angolare totale è nulla, $\omega' + \omega'' = 0$) segue che la velocità angolare indotta sul piano di rotazione è $\omega' = \omega/2$, metà di quella nella scia.

La velocità effettiva sull'elemento è dunque caratterizzata dalla componente assiale $V_0(1 + a)$ e dalla tangenziale $\Omega r(1 - a')$: teoria impulsiva generale e teoria vorticoso conducono alle medesime conclusioni. □

5.10 Perfezionamento della teoria dell'elemento di pala

Il perfezionamento consiste nel sostituire alla velocità effettiva cinematica la velocità $\bar{V}_{\text{eff}}$ che incorpora le velocità indotte a e a' . Le espressioni di spinta e coppia diventano, posto $\sigma = Nc/(2\pi r)$, $C_y = C_L \cos \phi' - C_D \sin \phi'$, $C_x = C_L \sin \phi' + C_D \cos \phi'$,

$$R \frac{dT_c}{dr} = \sigma \left(\frac{r}{R} \right)^3 (1 - a')^2 C_y \sec^2 \phi', \quad R \frac{dQ_c}{dr} = \sigma \left(\frac{r}{R} \right)^4 (1 - a')^2 C_x \sec^2 \phi'. \quad (78)$$

Equazioni di chiusura per a e a'

Confrontando le (78) con i bilanci di quantità di moto assiale ($R dT_c/dr = 4\lambda^2(1 + a)a r/R$) e angolare ($R dQ_c/dr = 4(r/R)^4(1 - a')a' \tan \phi'$), e usando $\lambda = (r/R)(1 - a')/(1 + a) \tan \phi'$, si ricavano le due

equazioni di chiusura che permettono il calcolo iterativo locale:

$$\frac{a}{1+a} = \frac{\sigma C_y}{4 \sin^2 \phi}, \quad \frac{a'}{1-a'} = \frac{\sigma C_x}{4 \sin \phi \cos \phi}. \quad (79)$$

Note N , la legge $c(r)$ e $\theta(r)$, e la polare $C_L(\alpha)$, $C_D(\alpha)$, le (79) determinano a e a' a ogni raggio, e quindi spinta e coppia dell'elica. $\square$

La chiusura di Pistolesi sull'allungamento

Resta il terzo limite: con quale allungamento valutare C_L , C_D ? Il metodo di Pistolesi lo risolve uguagliando la spinta dell'elemento (fluido ideale, $dT/dr = \frac{1}{2}\rho \bar{V}_{\text{eff}}^2 N c C_L \cos \phi'$) al bilancio assiale ($dT/dr = 4\pi\rho\Omega r^2 w \sin \phi'$, con w velocità indotta totale). Si ottiene l'incidenza indotta $w/\bar{V}_{\text{eff}} \approx N c C_L / (8\pi r \sin \phi')$ che, confrontata con quella di una distribuzione ellittica $w/\bar{V}_{\text{eff}} = C_L / (\pi AR)$, fornisce l'**allungamento equivalente**

$$AR = \frac{8 r \sin \phi'}{N c}. \quad (80)$$

5.11 Ottimo di Betz, perdite viscose e numero finito di pale

Condizione di ottimo di Betz

La distribuzione ottimale della circolazione lungo la pala richiede che il rapporto $k = (V_0/\Omega) \Delta(dT)/\Delta(dQ)$ sia costante con r . Poiché $\Delta(dT) = \rho(\Omega - \omega)r dr \Delta\Gamma$ e $\Delta(dQ) = \rho(V_0 + u)r dr \Delta\Gamma$, la condizione diventa

$$\frac{V_0 + u}{(\Omega - \omega)r} = \frac{V_0 + v'}{\Omega r} = \text{cost},$$

cioè $v' = \text{cost}$. In condizioni di ottimo i vortici liberi formano una **superficie elicoidale rigida di passo costante** che trasla con velocità v' lungo l'asse dell'elica — l'esatto analogo della scia piana ideale dell'ala a carico ellittico. $\square$

Da questa condizione si ricava la distribuzione ottimale di circolazione (numero infinito di pale, fluido ideale):

$$\frac{\Gamma N \Omega}{2\pi V_0 v'} = \frac{X^2}{1 + X^2}, \quad X = \frac{\Omega r}{V_0}. \quad (81)$$

Effetto della resistenza di profilo

Aggiungendo alla perdita di energia indotta la dissipazione viscosa $dE_D/dr = \varepsilon \Omega r dT/dr$ (con $\varepsilon = C_D/C_L$), e imponendo nuovamente che gli incrementi $V_0 \Delta(dT)$ e $\Delta(dE)$ siano indipendenti dal raggio, la distribuzione ottimale di circolazione diventa

$$K = \frac{NT\Omega}{2\pi V_0^2} = \frac{(C - \varepsilon X)X^2}{1 + X^2}, \quad (82)$$

con C costante. Rispetto al caso ideale $K = CX^2/(1 + X^2)$, la resistenza di profilo fa sì che la circolazione raggiunga un massimo e poi si annulli per $X = C/\varepsilon$: all'estremità delle pale si ha sempre $X < C/\varepsilon$. Il rendimento risultante è

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(C + \varepsilon X)}, \quad (83)$$

che per $C_D \rightarrow 0$ ritorna costante lungo la pala; la dipendenza da X rende la perdita viscosa importante ai bassi rapporti di funzionamento (dove X è grande). $\square$

Numero finito di pale: fattore di Prandtl

Con un numero *finito* di pale la scia è fatta di schiere vorticosi discrete e le velocità radiali ai bordi non sono più trascurabili. Prandtl ha valutato che la distribuzione ottimale (81) si modifica per il fattore

$$F = \frac{2}{\pi} \arccos(e^{-f}), \quad f = \frac{N}{2} \left(1 - \frac{r}{R}\right) \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{\lambda}. \quad (84)$$

Il significato fisico: il fluido tra due schiere vorticosi consecutive subisce un incremento di velocità assiale aV_0F minore di quello aV_0 del caso a infinite pale. Le teorie per $N \rightarrow \infty$ si estendono al caso reale introducendo F ; ad esempio la spinta dell'elemento diventa $dT = 4\pi r \rho V_0^2 (1 + a) a F dr$. $\square$

Stima della perdita per numero finito di pale

Assimilando l'elica a N pale a un'elica a infinite pale che produce la stessa spinta con raggio ridotto $R_e/R = 1 - (1,386/N) \lambda / \sqrt{1 + \lambda^2}$, e imponendo l'uguaglianza dei rendimenti tramite la (52), si trova che la perdita è piccola ($\sim 2,5\%$ per una bipala a basso λ) ma cresce con λ e al diminuire del rendimento ideale. Per $\eta_i = 0,9$: una bipala rende 0,877 a $\lambda = 0,2$ e 0,848 a $\lambda = 0,4$; una quadripala 0,889 e 0,878 rispettivamente.

5.12 Effetti della comprimibilità in campo subsonico

Prima ancora che le estremità raggiungano il transonico, la comprimibilità riduce il rendimento ideale. Considerando le sole perdite assiali e indicando con V_e la velocità totale nella sezione infinitamente a valle, il rendimento ideale assume la forma compatta già incontrata in §2:

$$\eta_i = \frac{TV_0}{\Pi} = \frac{\dot{m}(V_e - V_0)V_0}{\frac{1}{2}\dot{m}(V_e^2 - V_0^2)} = \frac{2}{1 + \frac{V_e}{V_0}}. \quad (85)$$

Disco attuatore comprimibile

Per determinare V_e si estende la teoria impulsiva semplice al flusso comprimibile: il disco diventa superficie di discontinuità non solo della pressione ma anche della velocità assiale e della densità. Nell'ipotesi di flusso adiabatico, e poiché nella sezione infinitamente a valle si ripristina $p_e = p_0$ (e quindi $\rho_e = \rho_0$), il salto di energia è ancora associato al solo incremento di velocità assiale. Indicando con $V', V'', p', p'', \rho', \rho''$ le grandezze immediatamente a monte e a valle del disco, il sistema si chiude con: continuità $\dot{m}/S = \rho' V' = \rho'' V''$; bilancio di energia $\Pi/S = \frac{1}{2}(\dot{m}/S)(V_e^2 - V_0^2)$; bilancio di quantità di moto; conservazione dell'entalpia totale H_0, H_1 a monte e a valle; e le relazioni isentropiche $p'/\rho'^\gamma = p''/\rho''^\gamma = p_0/\rho_0^\gamma$. Il sistema si riduce a quattro equazioni implicite nelle incognite $\dot{m}/S, \rho', \rho'', V_e$, risolvibili numericamente. $\square$

Il limite di velocità della propulsione a elica

Il risultato pratico è che, a parità di velocità indotta, la comprimibilità *anticipa* la caduta di rendimento rispetto al caso incomprimibile. È questo — più della resistenza d'onda alle estremità, che interviene dopo — a fissare il limite superiore della propulsione a elica convenzionale, attorno a $M \approx 0,7$. Oltre tale limite si ricorre all'intubamento (turbofan) o a schemi avanzati come le eliche controrotanti (*propfan*), che recuperano lo *swirl* (ovvero la perdita η_2) e spostano più in alto il limite di convenienza.

Quadro d'insieme

La trattazione percorsa segue una progressione logica precisa: la cinematica dell'elemento di pala fissa il linguaggio (calettamento, γ, V_{eff}); i coefficienti di Rénard ne adimensionalizzano le prestazioni; le teorie impulsive (semplice e generale) forniscono i *limiti ideali* e le distribuzioni ottimali di carico, separando le perdite assiali da quelle rotazionali; il calcolo dei rendimenti reali aggiunge attrito e mozzo ($\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4$);

la teoria dell'elemento di pala lega le prestazioni alla *geometria*, e il suo perfezionamento — nutrito dalla teoria vorticoso e dalle chiusure di Pistolesi, Betz e Prandtl — ne supera i limiti. È lo stesso percorso, dalla teoria globale a quella locale e vorticoso, che struttura l'aerodinamica dell'ala: l'elica non è che un'ala che ruota.

5.13 Un esempio completo: dal punto di volo al passo dell'elica

Perché questo esempio

Tutta la teoria sviluppata finora — coefficienti adimensionali, curve caratteristiche, rendimenti — trova qui un'applicazione concreta e completa. Partiamo dal *punto di volo* di un velivolo reale e arriviamo, passo dopo passo, fino al *passo geometrico* delle pale, attraversando tutti gli indici dell'elica. È l'occasione per vedere “in azione” i coefficienti, per toccare con mano la coerenza interna delle definizioni, e per imparare a leggere un diagramma sperimentale d'elica.^a

^aEsempio adattato dalla Prima Prova della Gara Nazionale Trasporti e Logistica 2026 (I.I.S. “Baracca”, Forlì), limitatamente alla parte relativa all'elica.

I dati. Un velivolo ultraleggero in volo orizzontale rettilineo uniforme (V.O.R.U.) alla quota di 1.500 ft ($\rho = 1,160 \text{ kg/m}^3$ in aria tipo ISA) vola alla velocità $V_0 = 178 \text{ km/h} = 49,44 \text{ m/s}$. La sua elica assorbe all'albero una potenza $\Pi_a = 37.389 \text{ W}$ con rendimento $\eta_e = 0,818$, gira a $n = 2.350 \text{ rpm}$ ed ha raggio $r = 0,89 \text{ m}$.

Passo 1 — Potenza disponibile e trazione. Il rendimento dell'elica lega la potenza *disponibile* (quella che diventa spinta utile) alla potenza assorbita all'albero:

$$\Pi_d = \eta_e \Pi_a = 0,818 \times 37.389 \text{ W} = 30.584 \text{ W} \approx 30,6 \text{ kW}. \quad (86)$$

In V.O.R.U. la potenza disponibile è il prodotto della trazione per la velocità di volo, $\Pi_d = T V_0$, da cui

$$T = \frac{\Pi_d}{V_0} = \frac{30.584 \text{ W}}{49,44 \text{ m/s}} = 618,6 \text{ N}. \quad (87)$$

Passo 2 — I coefficienti adimensionali “in prima specie”. Nella trattazione della genesi della spinta i coefficienti di Rénard sono stati costruiti sul numero di giri al secondo n e sul diametro D , con il rapporto di funzionamento $J = V_0/(nD)$. Esiste una formulazione equivalente, di uso pratico molto comune nelle esercitazioni, costruita invece sulla velocità angolare $\omega = \Omega$ (in rad/s) e sul raggio $r = R$; la chiameremo “in prima specie”.

Coefficienti dell'elica in prima specie

Con $\omega = 2\pi n$ velocità angolare e r raggio dell'elica:

$$\lambda = \frac{V_0}{\omega r}, \quad \tau = \frac{T}{\rho \omega^2 r^4}, \quad k = \frac{Q}{\rho \omega^2 r^5}, \quad (88)$$

dove $Q = \Pi_a/\omega$ è la coppia all'albero. Il rendimento si esprime come

$$\eta_e = \frac{\tau \lambda}{k}, \quad (89)$$

relazione che funge da *verifica interna* dei calcoli. Il rapporto di funzionamento in prima specie $\lambda = V_0/(\omega r)$ coincide con il $\lambda = V_0/(\Omega R)$ già introdotto; la traccia della gara lo indica con il simbolo γ .

Il significato fisico di λ : avanzo contro velocità periferica

Il prodotto ωr è la velocità periferica dell'estremità della pala (la *tip speed*). Quindi $\lambda = V_0/(\omega r)$ è semplicemente il rapporto tra la velocità di avanzamento e la velocità con cui corre la punta della pala: dice “quanto avanza” l'elica rispetto a “quanto gira”. È lo stesso significato del rapporto di funzionamento J di Rénard, solo normalizzato in modo diverso (come vedremo, $J = \pi\lambda$).

Calcoliamo. Anzitutto la velocità angolare:

$$n = \frac{2.350}{60} = 39,17 \text{ Hz}, \quad \omega = 2\pi n = 246,1 \text{ rad/s.} \quad (90)$$

Quindi, uno dopo l'altro, i tre coefficienti:

$$\lambda = \frac{V_0}{\omega r} = \frac{49,44}{246,1 \times 0,89} = 0,226, \quad (91)$$

$$\tau = \frac{T}{\rho \omega^2 r^4} = \frac{618,6}{1,160 \times 246,1^2 \times 0,89^4} = 0,014,0, \quad (92)$$

$$Q = \frac{\Pi_a}{\omega} = \frac{37.389}{246,1} = 151,9 \text{ N m}, \quad k = \frac{Q}{\rho \omega^2 r^5} = \frac{151,9}{1,160 \times 246,1^2 \times 0,89^5} = 0,003.87. \quad (93)$$

La verifica interna chiude il conto:

$$\frac{\tau \lambda}{k} = \frac{0,014,0 \times 0,226}{0,003.87} = 0,818 = \eta_e. \quad (94)$$

La verifica interna non è una formalità

La (89) non aggiunge informazione nuova: discende direttamente da $\eta_e = TV_0/(Q\omega)$, sostituendo le definizioni (88). Proprio per questo è preziosa: ricalcolare η_e dai tre coefficienti e ritrovare il valore di partenza (0,818) garantisce che non si sia commesso alcun errore di calcolo lungo la strada. È buona prassi, in ogni esercizio d'elica, chiudere sempre con questa verifica.

Prima e seconda specie sono lo stesso oggetto

I coefficienti in prima specie *non* sono entità nuove: si legano a quelli di Rénard tramite semplici fattori. Ricordando che $\omega = 2\pi n$ e $D = 2r$, valgono i raccordi

$$J = \pi \lambda, \quad C_T = \frac{\pi^2}{4} \tau, \quad C_Q = \frac{\pi^2}{8} k. \quad (95)$$

In particolare $\lambda = J/\pi$: il “rapporto di funzionamento in prima specie” della tradizione esercitativa è il rapporto di Rénard $J = V_0/(nD)$ diviso per π . Verifica numerica: $J = \pi\lambda = \pi \cdot 0,226 = 0,709 = V_0/(nD)$; $C_T = (\pi^2/4)\tau = 0,034,6$; $C_Q = (\pi^2/8)k = 0,004,78$; e con $C_P = 2\pi C_Q = 0,030,0$, il rendimento “in seconda specie” $\eta_e = (C_T/C_P)J$ vale ancora 0,818. Le due strade portano allo stesso punto: è solo questione di quale coppia di grandezze (n, D oppure ω, r) si sceglie per adimensionalizzare.

Passo 3 — Lettura del calettamento dal diagramma. Il punto di lavoro dell'elica è ormai individuato: $(\lambda, \tau) = (0,226, 0,014,0)$. Riportandolo sul diagramma sperimentale dell'elica — qui un'elica NACA 5868-9, profilo Clark Y, due pale, con le curve $\tau(\lambda)$ a calettamento $\beta_{0,75}$ costante — si legge il calettamento delle pale. A $\lambda = 0,226$ le curve nominali più vicine danno

$$\beta = 15^\circ: \tau \approx 0,009, \quad \beta = 20^\circ: \tau \approx 0,018,$$

e interpolando linearmente fino al valore $\tau = 0,014,0$:

$$\beta_{0,75} = 15^\circ + 5^\circ \cdot \frac{0,014,0 - 0,009}{0,018 - 0,009} \approx 17,8^\circ. \quad (96)$$

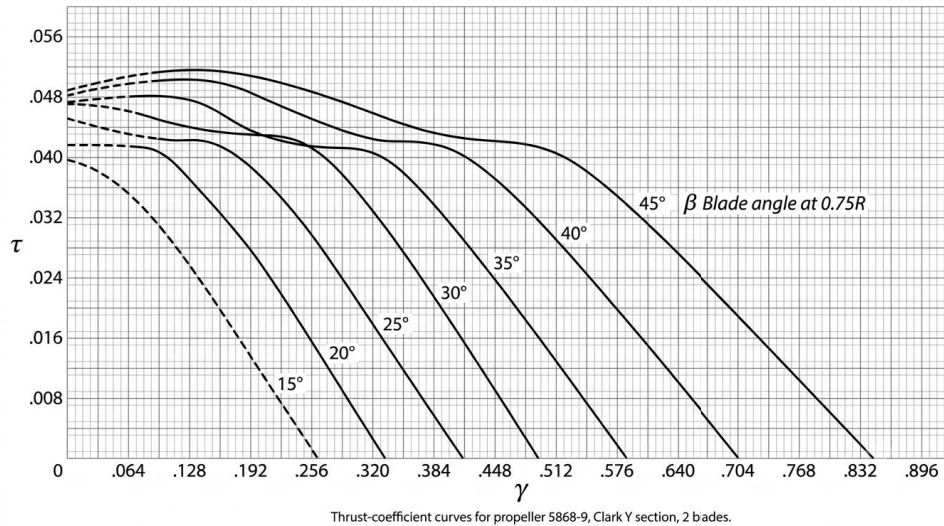


Figura 22. Diagramma del coefficiente di trazione τ in funzione del rapporto di funzionamento λ (prima specie) per l'elica NACA 5868-9 (profilo Clark Y, due pale), con curve a calettamento $\beta_{0,75}$ costante. Il punto di lavoro (0,226, 0,014.0) cade tra le curve a 15° e 20° , da cui $\beta_{0,75} \approx 17,8^\circ$ per interpolazione. Nel testo della gara l'asse delle ascisse è indicato con γ .

La lettura grafica ha un'incertezza ineliminabile

Leggere “a occhio” un punto tra due curve comporta sempre un margine d'incertezza, ed è onesto dichiararlo. L'interpolazione lineare fornisce $\beta_{0,75} \approx 17,8^\circ$; arrotondare alla curva nominale più vicina porterebbe a 20° . La differenza non è trascurabile: come vedremo, si traduce in un passo geometrico che varia di circa il 13%. In una soluzione rigorosa conviene riportare il valore interpolato, esplicitando il procedimento.

Passo 4 — Il passo geometrico.

Passo geometrico

Il passo geometrico H è l'avanzamento teorico dell'elica in un giro completo, nell'ipotesi di moto “a vite” in un mezzo rigido. Valutato alla sezione di riferimento al 75 % del raggio:

$$H = 2\pi r_{0,75} \tan \beta_{0,75}, \quad r_{0,75} = 0,75 r. \quad (97)$$

Con $r_{0,75} = 0,75 \times 0,89 \text{ m} = 0,667.5 \text{ m}$ e il calettamento interpolato $\beta_{0,75} = 17,8^\circ$:

$$H = 2\pi \times 0,667.5 \text{ m} \times \tan 17,8^\circ = 4,194 \text{ m} \times 0,321 = 1,35 \text{ m}. \quad (98)$$

La sensibilità del passo alla lettura

Se si fosse adottato $\beta_{0,75} = 20^\circ$ (lettura alla curva nominale), si otterrebbe $H = 2\pi \times 0,667.5 \times \tan 20^\circ = 1,53 \text{ m}$: circa il 13 % in più. È la traduzione quantitativa dell'incertezza di lettura segnalata sopra, e mostra perché, in un calcolo di prestazioni, valga la pena interpolare con cura anziché “saltare” alla curva più vicina.

Riepilogo del percorso

Partendo dal solo punto di volo (V_0 , quota) e da quattro dati d'elica (Π_d , η_e , n , r) abbiamo ricavato, in cascata: la potenza disponibile $\Pi_d = 30,6 \text{ kW}$, la trazione $T = 618,6 \text{ N}$, i tre coefficienti adimensionali $\lambda = 0,226$, $\tau = 0,014.0$, $k = 0,003.87$ (con verifica $\eta_e = \tau\lambda/k = 0,818$), il calettamento $\beta_{0,75} \approx 17,8^\circ$ letto dal diagramma, e infine il passo geometrico $H \approx 1,35 \text{ m}$. È il filo completo che lega la fisica del volo (spinta, potenza) alla geometria costruttiva dell'elica (passo, calettamento), passando per gli strumenti

adimensionali della teoria.

6 Gasdinamica dei flussi compressibili

Una guida alla lettura

Questa è, per ammissione di molti studenti, la parte più ostica del corso — e insieme la più affascinante, perché è qui che si capisce *davvero* come nasce la spinta di un motore a getto. Le difficoltà non sono nelle formule, ma nell'intuizione: il flusso compressibile si comporta spesso in modo *opposto* a quanto suggerisce il senso comune. Un gas che accelera in un condotto che si allarga? Calore che raffredda? Un'onda che ferma bruscamente un flusso supersonico facendone schizzare pressione e temperatura? Tutto vero, e tutto comprensibile. Procederemo perciò con calma, costruendo prima l'immagine fisica e solo dopo la matematica, con esempi numerici a ogni passo. L'obiettivo non è memorizzare relazioni, ma *vedere* cosa accade al gas mentre attraversa l'ugello di un turbogetto.

6.1 Perché serve la gasdinamica

Un motore termico — a getto o a razzo — produce spinta secondo il principio già incontrato in §2: accelera all'indietro una massa di fluido e ne riceve, per reazione, una spinta in avanti. Tutta la difficoltà ingegneristica sta nel *come* accelerare il fluido. La risposta è: bruciando combustibile si innalza enormemente la temperatura (e quindi l'energia interna) del gas in camera di combustione, e poi si lascia che questo gas caldo e in pressione si *espanda* in un condotto sagomato, l'**ugello**, dove l'energia termica si trasforma in energia cinetica ordinata: il getto.

La domanda centrale di questa sezione è dunque: *che forma deve avere l'ugello perché il gas acceleri il più possibile?* La risposta, come vedremo, dipende in modo sorprendente dal fatto che il flusso sia più lento o più veloce del suono. Ed è per questo che dobbiamo prima capire cos'è davvero la velocità del suono, e cosa cambia quando la si supera.

A causa delle alte velocità in gioco, non possiamo trattare l'aria come un fluido incomprimibile (come si fa, in buona approssimazione, per l'ala di un velivolo da trasporto): la densità varia in modo importante lungo il condotto, e questa variabilità è proprio il meccanismo che permette al gas di accelerare fino a velocità supersoniche. Da qui il nome *gasdinamica*, o fluidodinamica comprimibile.

Avvertenza sulla notazione

In tutta questa sezione il simbolo γ indica il **rapporto dei calori specifici** c_p/c_v , secondo l'uso termodinamico universale — un significato diverso dal rapporto di avanzamento dell'elica di §5. Il contesto, interamente termodinamico, rende la notazione non ambigua. Indichiamo inoltre con u la velocità *locale* del flusso nel condotto (riservando V_0 alla velocità di volo del velivolo) e con il pedice 0 le grandezze *totali* o *di ristagno*, che definiremo tra poco.

6.2 Il gas di lavoro: relazioni di stato

Trattiamo il gas come *ideale*, cioè *termicamente* e *caloricamente* perfetto. La prima ipotesi significa che vale l'equazione di stato

$$p = \rho R T, \quad R = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}, \quad (99)$$

dove $\mathcal{R} = 8.314,5 \text{ J/(kmol K)}$ è la costante universale dei gas, $\mathcal{M}$ la massa molare, e R la costante del particolare gas. Per l'aria ($\mathcal{M} \approx 28,96 \text{ kg/kmol}$) si ha $R \approx 287 \text{ J/(kg K)}$.

Quanto è buona questa ipotesi?

Sorprendentemente buona. Un gas reale si discosta dal comportamento perfetto solo quando è simultaneamente molto compresso e molto freddo (le molecole vicine “sentono” le reciproche forze). Nei motori accade l'opposto: dove la pressione è alta (uscita del compressore, $\sim 4\text{--}5$ MPa) la temperatura è già elevata (~ 1000 K), e nel combustore lo è ancora di più. L'ipotesi *termicamente* perfetta è quindi pienamente giustificata. L'ipotesi *caloricamente* perfetta (c_p , c_v , γ costanti con la temperatura) è più grossolana — in realtà c_p cresce col riscaldamento — ma la adottiamo per poter scrivere formule chiuse, tenendo a mente che a temperature molto alte andrebbe corretta.

Dalla termodinamica sappiamo che, per un gas caloricamente perfetto, entalpia ed energia interna crescono in proporzione alla temperatura: $dh = c_p dT$ e $de = c_v dT$. Poiché $h = e + p/\rho = e + RT$, differenziando si ricava la **relazione di Mayer** e le sue conseguenze:

$$c_p - c_v = R, \quad \gamma \equiv \frac{c_p}{c_v} \implies c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R. \quad (100)$$

Per l'aria a temperatura ambiente, $c_p \approx 1.005$ J/(kg K) e $\gamma = 1,4$ (valore tipico dei gas biatomici); per i gas combustibili, più caldi e con molecole poliatomiche, γ scende verso $1,2 \div 1,3$.

6.3 La velocità del suono: la “velocità dell'informazione”**Cos'è fisicamente la velocità del suono**

La velocità del suono non è solo “quanto va veloce un rumore”. È la velocità con cui una *piccola perturbazione di pressione* si propaga nel gas — e quindi, in ultima analisi, la velocità con cui una parte del fluido può “avvertire” che qualcosa sta cambiando altrove. Immaginiamo di comprimere leggermente il gas in un punto: questa compressione si propaga come un'onda, alla velocità del suono a . Possiamo dire che a è la *velocità dell'informazione* nel gas. Questa idea, apparentemente astratta, è la chiave di tutto ciò che segue: quando il flusso viaggia più veloce del suono, le perturbazioni *non riescono più a risalire la corrente*, e il flusso “non sa” cosa lo aspetta a valle. Da qui nascono gli urti.

Per un gas perfetto la velocità del suono dipende solo dalla temperatura:

$$a = \sqrt{\gamma R T}. \quad (101)$$

Più caldo è il gas, più in fretta si propagano le perturbazioni (le molecole si muovono più velocemente e si “passano” prima la notizia).

La velocità del suono cambia con la quota

Al livello del mare ($T = 288$ K): $a = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 288} \approx 340$ m/s. Alla tropopausa ($T = 217$ K): $a \approx 295$ m/s. Lo stesso aereo che vola a 250 m/s ha quindi un numero di Mach più alto in quota che a bassa quota, semplicemente perché lassù il suono è più lento. È un primo esempio di quanto la temperatura governi tutto, in gasdinamica.

Il rapporto tra velocità del flusso e velocità del suono locale è il **numero di Mach**:

$$M = \frac{u}{a}. \quad (102)$$

È il parametro della gasdinamica. Discrimina i regimi — subsonico ($M < 1$), sonico ($M = 1$), supersonico ($M > 1$) — ma soprattutto, come vedremo, il segno della quantità $1 - M^2$ governa il comportamento qualitativo di ogni flusso compressibile. Tenere d'occhio quel segno sarà la nostra bussola.

6.4 Le tre leggi di conservazione, lette con intuizione

Tutto il comportamento del gas in un condotto discende da tre principi di conservazione, applicati a un sottile “fettina” di condotto (un concio di lunghezza dx). Vale la pena enunciarli prima a parole, poi in formula.

Conservazione della massa. In regime stazionario, tutto il gas che entra da una parte esce dall'altra: la portata in massa non può accumularsi. Detta $\dot{m} = \rho u A$ la portata, essa è costante lungo il condotto:

$$\dot{m} = \rho u A = \text{cost} \implies \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0. \quad (103)$$

La seconda forma (differenziale logaritmica) dice una cosa semplice e profonda: se l'area cala, *qualcosa deve aumentare* tra densità e velocità. Per un fluido incomprimibile (ρ costante) sarebbe solo la velocità (l'acqua nel tubo che si restringe accelera); ma per un gas anche ρ può variare, e questa libertà in più è ciò che rende possibile il regime supersonico.

Conservazione della quantità di moto. È la seconda legge di Newton applicata al fluido: la variazione di quantità di moto eguaglia le forze applicate (pressione e attrito). Per un condotto inviscido (attrito trascurabile) si riduce a

$$\rho u du + dp = 0. \quad (104)$$

Il patto tra velocità e pressione

La (104) è una delle relazioni più importanti di tutta la gasdinamica, e dice qualcosa di intuitivo: *per accelerare il gas* ($du > 0$) *bisogna che la pressione cali* ($dp < 0$), e viceversa. È la versione comprimibile del teorema di Bernoulli. In un ugello vogliamo accelerare il getto: dovremo quindi far cadere la pressione lungo l'ugello. L'energia di pressione del gas caldo si “spende” per comprare velocità.

Conservazione dell'energia. L'energia totale del flusso può cambiare solo se si scambia calore o lavoro con l'esterno. Introducendo l'**entalpia totale** $h_0 = h + u^2/2$ (somma dell'energia termica e cinetica per unità di massa):

$$\Delta h_0 = Q - L_s, \quad (105)$$

dove Q è il calore fornito al fluido e L_s il lavoro estratto all'albero.

L'entalpia totale è il “portafoglio energetico” del gas

Convieni pensare a h_0 come al contenuto energetico complessivo che il fluido trasporta. Bruciare combustibile nel combustore *aggiunge* energia ($Q > 0$, h_0 sale); estrarre lavoro in turbina *toglie* energia ($L_s > 0$, h_0 scende); comprimere col compressore aggiunge energia (lavoro speso sul fluido). Ma — ed è cruciale — *nell'ugello non si scambia né calore né lavoro*: l'ugello non fa che *convertire* l'energia termica già presente in energia cinetica, lasciando h_0 invariata. Accelerare il gas nell'ugello non aumenta la sua energia totale: ne travasa una parte da termica (h) a cinetica ($u^2/2$). Per questo il gas si *raffredda* mentre accelera.

6.5 Grandezze totali: fotografare il gas “fermandolo”

Le grandezze *statiche* (p , T , ρ) sono quelle che un sensore misurerebbe muovendosi *insieme* al gas. Ma in un flusso veloce è spesso più utile chiedersi: *quanto varrebbero pressione e temperatura se fermassimo il gas dolcemente, senza perdite?* Queste sono le grandezze **totali** (o di ristagno), contrassegnate dal pedice 0.

Temperatura totale

Immaginiamo di rallentare adiabaticamente una particella di gas fino a fermarla: tutta la sua energia cinetica si converte in entalpia. Dalla conservazione dell'energia, $h_0 = h + u^2/2$, cioè $c_p T_0 = c_p T + u^2/2$,

da cui $T_0 = T + u^2/(2c_p)$. Esprimendo $c_p = \gamma R/(\gamma - 1)$ e introducendo $a^2 = \gamma R T$ e $M = u/a$:

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right). \quad (106)$$

□

Il riscaldamento da arresto: perché i bordi d'attacco scottano

Un velivolo a $M_0 = 2$ in tropopausa ($T = 217$ K, cioè -56 °C) “vede” l'aria arrivare a Mach 2. Nei punti di ristagno (bordo d'attacco, presa d'aria) l'aria si ferma e si riscalda fino a $T_0 = 217 (1 + 0,2 \cdot 4) = 391$ K, cioè circa $+118$ °C: un salto di oltre 170 K dal solo arresto, senza bruciare nulla! È il *riscaldamento aerodinamico* che impone materiali speciali ai velivoli supersonici e che, all'ingresso di un motore, fornisce gratis una parte della compressione (effetto RAM).

Per la temperatura basta l'ipotesi di adiabaticità. Per pressione e densità totali, invece, conta *come* si arresta il gas: il valore massimo si ottiene in assenza di perdite, cioè con un processo *isentropico*.

Il rallentamento ideale è isentropico

Dalla relazione di Gibbs $T \, ds = dh - dp/\rho$. Per flusso adiabatico $dh = -u \, du$ (l'energia totale si conserva); per flusso inviscido $dp/\rho = -u \, du$ (la (104)). Sostituendo, i due termini si elidono: $T \, ds = 0$, quindi $ds = 0$. Un rallentamento adiabatico e senza attrito non genera entropia. □

Pressione e densità totali

Integrando la relazione di Gibbs a entropia costante si ottiene l'equazione dell'isentropica $T/p^{(\gamma-1)/\gamma} = \text{cost}$ (equivalentemente $p/\rho^\gamma = \text{cost}$). Applicandola tra stato statico e di ristagno, e usando la (106):

$$p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \rho_0 = \rho \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (107)$$

□

La pressione totale è la “valuta delle perdite”

Ecco l'idea più importante, e quella che più aiuta a leggere un motore. In un processo adiabatico senza lavoro all'albero, la temperatura totale T_0 si conserva *sempre* (nessuna energia entra o esce). Ma la pressione totale p_0 si conserva *solo se il processo è reversibile*; ogni irreversibilità — attrito, turbolenza, urti — la fa *diminuire*. La caduta di p_0 è quindi la misura quantitativa delle perdite: è la valuta con cui si pagano le inefficienze. Tutto il progetto di un motore — prese d'aria, ugelli, compressori — è una battaglia per non sprecare pressione totale. Quando, tra poco, vedremo che un urto fa crollare p_0 , capiremo subito perché gli ingegneri li temono.

6.6 Cosa fa cambiare il flusso: i tre “termini forzanti”

Mettiamo ora insieme le tre conservazioni in forma differenziale. Eliminando $d\rho$ con l'equazione di stato, restano tre equazioni nelle tre incognite du , dp , dT (le variazioni delle grandezze nel tratto dx). In forma matriciale:

$$\mathbf{A} \, d\mathbf{X} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/u & 1/p & -1/T \\ \rho u & 1 & 0 \\ u & 0 & \gamma R/(\gamma - 1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -dA/A \\ -f_0 \rho u^2 \, dx/(2D_e) \\ dQ \end{pmatrix}. \quad (108)$$

A secondo membro ci sono i **termini forzanti**: le tre “leve” con cui possiamo agire sul flusso. La prima è la *variazione di area* dA/A (si conforma il condotto); la seconda è l'*attrito* di parete (sempre negativo, non lo si può invertire); la terza è lo *scambio di calore* dQ (combustione, raffreddamento). Studiare un flusso significa capire come reagiscono u , p , T a ciascuna di queste leve.

Il determinante che governa tutto: il blocco sonico

Il determinante della matrice dei coefficienti vale

$$\det \mathbf{A} = \frac{c_p}{u} (1 - M^2). \quad (109)$$

Esso è *positivo* in subsonico, *nullo* in $M = 1$, *negativo* in supersonico. Quando $\det \mathbf{A} = 0$ il sistema diventa singolare: il flusso è *critico* (o *saturato*). Perché esista ancora una soluzione finita, devono annullarsi simultaneamente anche i determinanti ottenuti sostituendo i termini forzanti (determinanti di Rouché Δ_i), cosicché ogni $dX_i = \Delta_i / \det \mathbf{A}$ assuma la forma $0/0$. La condizione $\Delta_i = 0$ *individua dove* il flusso può raggiungere $M = 1$.

Calcolo del determinante

Sviluppando la (108) lungo la terza colonna,

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{1}{uT} (\gamma RT - u^2).$$

Con $a^2 = \gamma RT$, $M = u/a$ e $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$ si ottiene la (109). □

Perché $1 - M^2$ cambia tutto

Il fattore $(1 - M^2)$ ricorrerà in ogni risultato che segue, sempre con lo stesso effetto: *tutto ciò che un flusso subsonico fa in risposta a una leva, un flusso supersonico lo fa al contrario*. È la firma profonda della gasdinamica, e la radice di tutte le “stranezze” che disorientano. La ragione ultima è quella anticipata: in subsonico le perturbazioni risalgono la corrente e il flusso “si organizza” in anticipo; in supersonico non possono, e il flusso reagisce in modo rovesciato. Teniamolo a mente come una regola d’oro.

6.7 La leva dell’area: il flusso isentropico nell’ugello

Concentriamoci sulla sola variazione d’area (attrito e calore trascurabili): è il caso dell’ugello, dove il flusso è in ottima approssimazione *isentropico*. I determinanti di Rouché risultano tutti proporzionali a dA/A , quindi la condizione critica $M = 1$ può realizzarsi *soltanto* dove $dA = 0$: nella sezione di **gola** (area minima). Il segno delle variazioni è dettato da $1 - M^2$:

	convergente ($dA < 0$)	divergente ($dA > 0$)
$M < 1$ (subsonico)	$u \uparrow$ $p, T \downarrow$	$u \downarrow$ $p, T \uparrow$
$M > 1$ (supersonico)	$u \downarrow$ $p, T \uparrow$	$u \uparrow$ $p, T \downarrow$

Come leggere questa tabella, riga per riga

Prendiamoci il tempo di interpretarla, perché è il cuore del funzionamento dell’ugello.

- **Subsonico in un convergente** (alto a sinistra): il gas accelera restringendosi. È l’intuizione di tutti i giorni — il pollice sull’estremità della canna dell’acqua, l’acqua che schizza più veloce. Qui il gas si comporta “come ci aspettiamo”.
- **Supersonico in un divergente** (basso a destra): il gas accelera *allargandosi*. Questo è profondamente controintuitivo, e è il punto su cui gli studenti inciampano. Come può un flusso accelerare

in un condotto che si apre?

La spiegazione fisica del divergente supersonico

La chiave è la conservazione della massa, $\rho u A = \text{cost.}$ In un gas molto veloce (supersonico) la densità è estremamente sensibile alla velocità: quando il gas accelera, si espande e la sua densità ρ *crolla* ancora più in fretta di quanto cresca u . Per mantenere costante il prodotto $\rho u A$, se ρ cala più rapidamente di quanto u cresca, allora l'area A deve *aumentare*. In altre parole: in supersonico il gas “si gonfia” così tanto accelerando che ha bisogno di più spazio, non di meno. In subsonico, invece, la densità varia poco e domina il termine di velocità, come nei fluidi incomprimibili. Il discriminante è proprio $M = 1$, dove la sensibilità della densità pareggia quella della velocità.

Perché l'ugello dei jet è convergente–divergente

Mettendo insieme le due righe utili della tabella, si capisce la forma “a clessidra” dell'ugello di un turbogetto supersonico o di un razzo:

1. nel tratto **convergente** il gas (inizialmente subsonico) accelera e la pressione cala, fino a raggiungere esattamente $M = 1$ nella **gola**;
2. nel tratto **divergente** il gas, ora supersonico, continua ad accelerare espandendosi, raggiungendo all'uscita $M > 1$.

Senza il divergente non si supererebbe mai $M = 1$: un ugello puramente convergente può portare il flusso al più fino a sonico in uscita. È per questo che gli ugelli dei motori che devono spingere ad alta velocità (e tutti i razzi) hanno quella inconfondibile campana divergente. Lo svedese Carl de Laval lo capì per le turbine a vapore già alla fine dell'Ottocento: per questo l'ugello convergente–divergente si chiama anche *ugello di de Laval*.

Il viaggio di una particella di gas nell'ugello

Seguiamo idealmente una particella che entra nel convergente a $M = 0,3$, $T = 1.200$ K (gas caldo dal combustore). Mentre avanza verso la gola accelera, e per la (106) la sua temperatura statica *cala* (l'energia termica diventa cinetica): in gola, a $M = 1$, vale $T^* = T_0 \cdot 2/(\gamma+1)$. Nel divergente continua ad accelerare, raffreddandosi ancora: a $M = 2,5$ la temperatura statica è scesa a circa $T_0/(1+0,2 \cdot 6,25) \approx T_0/2,25$, cioè meno della metà di quella totale. Il gas esce freddo e velocissimo: l'energia termica della combustione si è trasformata in energia cinetica del getto. È esattamente ciò che volevamo.

6.8 Le altre due leve: attrito (Fanno) e calore (Rayleigh)

Nell'ugello le altre due leve sono secondarie, ma capirle completa il quadro e serve per il combustore.

Solo attrito (flusso di Fanno). Il termine forzante è sempre negativo. La sezione critica può stare solo dove l'attrito cessa, cioè all'uscita del condotto. L'effetto dell'attrito è di *spingere il flusso verso $M = 1$ da entrambi i lati*: un flusso subsonico accelera (e p , T calano), un flusso supersonico decelera. In ogni caso, l'attrito fa sempre *diminuire la pressione totale p_0* — coerentemente con il fatto che l'entropia, per il secondo principio, deve crescere.

Solo calore (flusso di Rayleigh). È il caso del combustore (flusso subsonico al quale si aggiunge calore). Anche qui, cedere calore al gas lo spinge verso $M = 1$. Ma c'è una sorpresa.

Il paradosso di Rayleigh: scaldare può raffreddare

In un flusso subsonico, fornire calore aumenta la temperatura — come ci si aspetta — *ma solo fino a* $M = 1/\sqrt{\gamma} \approx 0,85$ (per $\gamma = 1,4$). Nell'intervallo $1/\sqrt{\gamma} < M < 1$ accade l'incredibile: *fornire calore al gas ne abbassa la temperatura statica*. Come è possibile? In quel regime il calore aggiunto accelera il flusso così violentemente che l'energia cinetica cresce più del calore immesso: la differenza viene “rubata” all'energia termica del gas stesso, che quindi si raffredda pur ricevendo calore. È un promemoria salutare: in gasdinamica l'intuizione termodinamica ordinaria va sempre verificata contro le equazioni.

Una regola mnemonica unificante

Le tre leve, se usate in “verso saturante” — *restringere l'area, aggiungere attrito, fornire calore* — spingono tutte il flusso *verso* $M = 1$. Usate al contrario — *allargare*, (l'attrito non si inverte), *sottrarre calore* — lo *allontanano* da $M = 1$. Questa simmetria aiuta a ricordare i comportamenti senza impararli a memoria uno per uno. Nell'ugello la leva dominante è l'area, e in prima approssimazione il flusso è isentropico.

6.9 La legge delle aree: quanto deve aprirsi l'ugello

Sappiamo *che* l'ugello dev'essere convergente-divergente; ora calcoliamo *di quanto* deve aprirsi per raggiungere un dato numero di Mach. L'unica equazione che lega area e velocità è la conservazione della massa. Scrivendo $\dot{m} = \rho u A$ in termini di M e legando le grandezze statiche alle totali (costanti in flusso isentropico):

$$\dot{m} = \sqrt{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{p_0 A M}{\sqrt{R T_0}}. \quad (110)$$

La legge delle aree

Poiché $\dot{m}$, p_0 , T_0 sono costanti, eguagliando la (110) tra una sezione generica e la gola critica ($A = A_t$, $M = 1$) si ottiene:

$$\frac{A}{A_t} = \frac{1}{M} \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \quad (111)$$

□

Una curva a U: due soluzioni per ogni ugello

La funzione $A/A_t(M)$ ha un *minimo* pari a 1 in $M = 1$, e cresce sia verso $M \rightarrow 0$ sia verso $M \rightarrow \infty$: ha la forma di una U. Questo significa che *a ogni rapporto d'aree corrispondono due numeri di Mach*, uno subsonico e uno supersonico. Un divergente con $A/A_t = 3$, ad esempio, può ospitare in uscita sia un flusso subsonico ($M \approx 0,2$) sia uno supersonico ($M \approx 2,6$). Quale dei due si realizzi non dipende solo da ciò che accade a monte, ma anche dalla *pressione di scarico*: il flusso nel convergente-divergente è “informato” dalle condizioni di valle. È un'anticipazione di quanto sia ricca la fisica dell'ugello fuori adattamento.

6.10 Grandezze critiche e strozzamento

Ponendo $M = 1$ nelle (106) e (107) si ottengono i valori *critici* in gola:

$$T^* = T_0 \frac{2}{\gamma+1}, \quad p^* = p_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \rho^* = \rho_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (112)$$

Quando la gola diventa sonica

Perché in gola si raggiunga $M = 1$, la pressione totale a monte deve superare la pressione di gola di un fattore

$$\frac{p_0}{p^*} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \approx 1,89 \quad (\gamma = 1,4). \quad (113)$$

In pratica, in un ugello semplicemente convergente la gola diventa sonica non appena la pressione totale supera circa il *doppio* della pressione ambiente.

Portata critica e funzione di Vandekerckhove

Ponendo $M = 1$ nella (110):

$$\dot{m} = \Gamma \frac{p_0}{\sqrt{R T_0}} A_t, \quad \Gamma = \sqrt{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad (114)$$

dove Γ (funzione di Vandekerckhove) vale $\approx 0,685$ per l'aria ($\gamma = 1,4$) e $\approx 0,649$ per i gas combusti ($\gamma \approx 1,2$). $\square$

Lo strozzamento: il collo di bottiglia sonico

La (114) nasconde un fatto di enorme importanza pratica. Una volta che la gola è sonica, la portata dipende solo dalle condizioni di ristagno (p_0, T_0) e dall'area di gola: *abbassare ancora la pressione di scarico non fa passare più gas*. Si dice che il flusso è **strozzato** (*choked*). La ragione fisica è di nuovo la velocità dell'informazione: in gola il flusso viaggia esattamente a $M = 1$, quindi le perturbazioni di pressione provenienti da valle (che risalgono a velocità sonica) restano “congelate” in gola e non riescono più a risalire a monte. La gola fa da collo di bottiglia: il motore “non sa” che la contropressione è scesa, e la portata resta bloccata. È il principio che regola ugelli, prese d'aria e gli ugelli delle turbine; lo ritroveremo in tutta la trattazione dei jet.

Portata strozzata di un ugello

Un ugello con gola di diametro 0,1 m ($A_t = \pi \cdot 0,1^2/4 \approx 7,85 \times 10^{-3} \text{ m}^2$) elabora gas combusti con $\gamma = 1,2$, $R \approx 462 \text{ J/(kg K)}$, $T_0 = 3.000 \text{ K}$, $p_0 = 10 \text{ MPa}$. Dalla (114), con $\Gamma \approx 0,649$:

$$\dot{m} = 0,649 \frac{10 \cdot 10^6}{\sqrt{462 \cdot 3000}} 7,85 \cdot 10^{-3} \approx 43 \text{ kg/s}.$$

Finché la gola resta sonica, questi 43 kg/s passano *qualunque* sia la pressione esterna: è il motore a fissare la portata, non l'ambiente.

6.11 I regimi dell'ugello al variare della contropressione

Immaginiamo ora un esperimento mentale molto istruttivo: teniamo fisse le condizioni a monte (p_0, T_0) e *abbassiamo lentamente* la pressione ambiente p_a in cui l'ugello scarica, osservando cosa cambia. È il modo migliore per capire i diversi regimi di funzionamento.

Dalla contropressione alta alla bassa: la sequenza dei regimi

1. p_a **di poco sotto** p_0 : il flusso è debole e *ovunque subsonico*; il divergente agisce da semplice diffusore (rallenta e ricomprime). La gola non è ancora sonica.
2. p_a **scende fino a** p_{sub} : la gola raggiunge $M = 1$. Il flusso è sonico in gola ma torna subsonico nel divergente. Da questo momento la portata è *strozzata*.

3. p_a tra p_{sub} e p_{sup} : non esiste più una soluzione tutta isentropica. Nel divergente il flusso diventa supersonico, ma poi un'onda d'urto lo riporta bruscamente subsonico; a valle dell'urto il flusso si ricomprime fino a $p_e = p_a$. Abbassando p_a , l'urto si sposta dalla gola verso l'uscita.
4. $p_a = p_{\text{sup}}$: l'ugello è *adattato*. Il flusso è supersonico in tutto il divergente, senza urti, e esce esattamente alla pressione ambiente. È la condizione di massimo rendimento.
5. $p_a < p_{\text{sup}}$: l'ugello è *sotto-espanso*; il getto esce a pressione maggiore dell'ambiente e continua a espandersi *fuori* dall'ugello.

Il significato di “adattato”, e perché conta

Un ugello si dice *adattato* quando la pressione del getto all'uscita eguaglia quella ambiente ($p_e = p_a$). È la condizione ideale, perché — come ricorderemo dall'espressione completa della spinta in §2, $T = \dot{m}(V_e - V_0) + (p_e - p_0)A_e$ — il termine di pressione si annulla e tutta la spinta viene dal getto. Un ugello *sovra-espanso* ($p_e < p_a$) “tira indietro” (il termine di pressione è negativo) e può addirittura generare urti interni che staccano il flusso dalle pareti; uno *sotto-espanso* ($p_e > p_a$) spreca espansione utile. Poiché la pressione ambiente cambia con la quota, un ugello a geometria fissa è adattato a una sola quota: ecco perché i razzi hanno campane enormi (adattate alle alte quote) e i motori militari ugelli a geometria variabile.

6.12 L'onda d'urto normale: quando il flusso “sbatte contro se stesso”

Siamo al cuore della sezione, e al punto che più disorienta. Abbiamo visto che per contropressioni intermedie ($p_{\text{sup}} < p_a < p_{\text{sub}}$) compare un'onda d'urto nel divergente. Cos'è, fisicamente?

Cos'è un'onda d'urto, e perché esiste solo in supersonico

Torniamo alla velocità del suono come “velocità dell'informazione”. In un flusso *subsonico*, ogni perturbazione di pressione a valle risale la corrente e avvisa il gas a monte, che si adatta gradualmente: le grandezze variano con continuità. In un flusso *supersonico*, invece, il gas corre più veloce delle proprie perturbazioni: *nessuna informazione può risalire*. Il gas a monte “non sa” che a valle lo attende, ad esempio, una contropressione più alta. Quando finalmente la incontra, non può adattarsi in modo graduale: la transizione avviene in uno spessore infinitesimo (poche libere cammino medio molecolari, frazioni di micron), una vera *discontinuità*. È l'onda d'urto: un “muro” attraverso cui pressione, densità e temperatura salgono di colpo, la velocità crolla, e il flusso da supersonico diventa subsonico. È il modo brutale con cui un flusso supersonico “si accorge” del mondo a valle.

Perché in gola non si forma un urto

Una domanda che gli studenti pongono spesso: se l'urto riporta il flusso a subsonico, perché non si forma proprio in gola, dove $M = 1$? Perché l'urto *richiede* un flusso supersonico a monte ($M_1 > 1$): è una transizione da super a sub, non da sonico a sub. In gola il flusso è esattamente sonico; solo *dopo* la gola, accelerando nel divergente, diventa supersonico e può allora ospitare un urto. Inoltre, come dimostreremo, un urto comporta sempre un aumento di entropia, possibile solo passando da super a sub — mai il contrario. Un “urto di espansione” che acceleri il flusso violerebbe il secondo principio e non esiste in natura.

6.12.1 Le relazioni dell'urto normale

Trattiamo l'urto come una discontinuità in un condotto di area costante, adiabatico e senza attrito (lo spessore è infinitesimo: area, calore e attrito non fanno in tempo a contare). Le tre conservazioni in forma finita, tra monte (1) e valle (2), sono:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \quad p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2, \quad h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}. \quad (115)$$

Si noti che la temperatura *totale* si conserva (h_0 costante: l'urto è adiabatico), ma — lo vedremo — la pressione totale no.

La relazione di Rankine–Hugoniot

Dalle prime due equazioni, $p_2 - p_1 = \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2$; usando $u_1 = (\rho_2/\rho_1)u_2$ si ricavano

$$u_1^2 = \frac{\rho_2 p_2 - p_1}{\rho_1 \rho_2 - \rho_1}, \quad u_2^2 = \frac{\rho_1 p_2 - p_1}{\rho_2 \rho_2 - \rho_1}.$$

Sostituendo nell'equazione dell'energia, $u_1^2 - u_2^2 = 2c_p(T_2 - T_1)$, ed eliminando le temperature con l'equazione di stato, dopo riordino si ottiene la **relazione di Rankine–Hugoniot**, che lega densità e pressione attraverso l'urto *senza* contenere la velocità:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_1}{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}. \quad (\text{II6})$$

□

L'urto NON è un'isentropica

La Hugoniot è una curva diversa dall'isentropica $\rho_2/\rho_1 = (p_2/p_1)^{1/\gamma}$, e la differenza è fisicamente decisiva. Per un'isentropica, comprimere all'infinito comprime la densità all'infinito; per un urto, invece, la densità *satura*:

$$\lim_{p_2/p_1 \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad (= 6 \text{ per } \gamma = 1,4). \quad (\text{II7})$$

Per quanto violento sia l'urto, il gas non si comprime oltre 6 volte (per l'aria). Tutta l'energia in eccesso, invece di comprimere, va in *riscaldamento disordinato*: l'urto è fortemente *irreversibile*, genera entropia, e converte energia meccanica utile in calore inutilizzabile. È questa la sua natura dissipativa, e il motivo per cui lo si evita.

Tutto in funzione del solo Mach a monte

Dividendo l'espressione di u_1^2 per $a_1^2 = \gamma p_1/\rho_1$ e usando la Hugoniot si ottiene M_1 in funzione del rapporto di pressioni; invertendo, il **rapporto di pressioni statiche**:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}. \quad (\text{II8})$$

Questo è maggiore di 1 *solo se* $M_1 > 1$: la pressione può salire attraverso l'urto soltanto se il flusso a monte è supersonico. Da qui, con la Hugoniot e l'equazione di stato, seguono il rapporto di densità, di temperatura, e il numero di Mach a valle:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}, \quad (\text{II9})$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right] \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right], \quad (\text{II10})$$

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}. \quad (\text{II11})$$

□

L'urto va sempre da supersonico a subsonico

La (121) mostra che se $M_1 > 1$ allora $M_2 < 1$, e viceversa. Ma il secondo principio (entropia crescente) seleziona una sola direzione: solo la transizione *da supersonico a subsonico* comporta $\Delta s > 0$. Il processo inverso (sub $\rightarrow$ super, “urto di espansione”) ridurrebbe l'entropia e è quindi impossibile. Un urto frena sempre il flusso.

La pressione totale crolla: ecco il prezzo dell'urto

Combinando $p_{02}/p_{01} = (p_2/p_1)(p_{02}/p_2)(p_{01}/p_1)^{-1}$ con le (107) e le relazioni precedenti:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[\frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}}. \quad (122)$$

Poiché T_0 si conserva, il salto di entropia è $s_2 - s_1 = R \ln(p_{01}/p_{02}) > 0$: la pressione totale diminuisce sempre, e quel calo è la perdita irreversibile dell'urto. $\square$

Un urto a Mach 2: i numeri che fanno impressione

Per $M_1 = 2$ e $\gamma = 1,4$, dalle formule precedenti:

$$\frac{p_2}{p_1} = 4,5, \quad \frac{T_2}{T_1} \approx 1,69, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} \approx 2,67, \quad M_2 \approx 0,577, \quad \frac{p_{02}}{p_{01}} \approx 0,72.$$

In uno spessore infinitesimo la pressione statica quadruplica e la temperatura sale del 70%, mentre il flusso da $M = 2$ scende a $M \approx 0,58$. Ma si guardi l'ultimo numero: il 28% della pressione totale — cioè della capacità di compiere lavoro utile — è andato perduto in un istante. Questa è la “bolletta” dell'urto.

Urto fortissimo: i limiti per $M_1 \rightarrow \infty$

Spingendo il Mach a monte all'estremo, le formule danno limiti istruttivi:

$$\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty, \quad \frac{T_2}{T_1} \rightarrow \infty, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad M_2 \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} (\approx 0,378), \quad \frac{p_{02}}{p_{01}} \rightarrow 0.$$

Pressione e temperatura statiche esplodono, la densità satura a 6, il Mach a valle tende a un valore subsonico finito, e la pressione totale crolla a zero. È il motivo profondo per cui rallentare un flusso ipersonico con un *solo* urto normale è disastroso: si perderebbe quasi tutta la pressione totale. Da qui nasce l'idea degli urti obliqui multipli, che vediamo ora.

6.13 L'onda d'urto obliqua: rallentare senza sprecare tutto

L'urto normale frena il flusso ma a caro prezzo. C'è un modo più astuto: far incontrare al flusso supersonico un *ostacolo inclinato* — una rampa, un cuneo, una spina conica — che lo devia di un angolo. Si forma allora un'onda d'urto *obliqua*, inclinata rispetto alla corrente, che frena il flusso ma in modo molto più dolce, lasciandolo spesso ancora supersonico.

L'idea geniale: scomporre la velocità

Il trucco per capire l'urto obliquo è scomporre la velocità del flusso in due componenti rispetto al piano dell'urto: una *normale* all'urto (u_n) e una *tangenziale* (v , parallela all'urto). La fisica è sorprendentemente semplice:

- la componente *tangenziale* attraversa l'urto *indisturbata* ($v_2 = v_1$): l'urto non esercita alcuna forza lungo la propria superficie;

- la componente *normale* si comporta esattamente come in un urto normale: subisce un salto, frenando da supersonica a subsonica.

In altre parole, **un urto obliquo è un urto normale “visto di sbieco”**, che agisce solo sulla componente di velocità perpendicolare a esso. Tutta la teoria dell’urto normale si riusa pari pari, sostituendo a M_1 il numero di Mach *normale* $M_{n1} = M_1 \sin \theta$, dove θ è l’angolo che l’urto forma con la corrente incidente.

Relazioni dell’urto obliquo

Detto θ l’angolo dell’urto rispetto alla corrente e δ l’angolo di cui il flusso viene deviato (la semiapertura del cuneo), le componenti normali a monte e a valle sono

$$M_{n1} = M_1 \sin \theta, \quad M_{n2} = M_2 \sin(\theta - \delta). \quad (123)$$

Il salto attraverso l’urto obliquo si calcola applicando *tutte* le relazioni dell’urto normale (118)–(122) al solo M_{n1} : ad esempio

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{n1}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad M_{n2}^2 = \frac{(\gamma-1)M_{n1}^2 + 2}{2\gamma M_{n1}^2 - (\gamma-1)}. \quad (124)$$

La relazione che lega i tre parametri — angolo di deviazione δ , angolo d’urto θ e Mach a monte M_1 — è la celebre *relazione θ – δ – M* :

$$\tan \delta = 2 \cot \theta \frac{M_1^2 \sin^2 \theta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\theta) + 2}. \quad (125)$$

Perché gli urti obliqui sono “deboli” e si usano in serie

Poiché l’urto obliquo agisce solo sulla componente normale $M_{n1} = M_1 \sin \theta < M_1$, il “Mach efficace” è minore di quello reale: l’urto è quindi più *debole* di un urto normale alla stessa velocità di volo, e la perdita di pressione totale è molto minore. A valle, il flusso è generalmente ancora supersonico (solo u_n è diminuita, v è intatta). Da qui l’idea delle **prese d’aria supersoniche a urti obliqui multipli**: si fa attraversare al flusso una serie di urti obliqui deboli (su rampe a inclinazione crescente), ciascuno dei quali lo rallenta un poco perdendo poca pressione totale, e solo alla fine un urto normale debole lo riporta subsonico. La perdita complessiva è molto inferiore a quella di un unico urto normale forte. Tipicamente: un urto obliquo fino a $M_0 = 2$, due per $2 < M_0 \leq 2,5$, e così via. È il principio delle prese del Concorde e dei caccia supersonici.

Urto debole, urto forte, e distacco

Per ogni angolo di deviazione δ (sotto un massimo $\delta_{\max}$), la (125) ammette *due* soluzioni per θ : un *urto debole* (piccolo θ , flusso a valle quasi sempre ancora supersonico) e un *urto forte* (grande θ , flusso subsonico a valle). In natura si realizza quasi sempre quello debole. Se però si pretende una deviazione maggiore di $\delta_{\max}$ — un cuneo troppo aperto — nessun urto obliquo attaccato può soddisfare le equazioni: l’urto si *stacca* dal corpo e diventa un’onda curva (*bow shock*) che precede l’ostacolo, con un tratto centrale praticamente normale. È ciò che si osserva davanti a un corpo tozzo in volo supersonico, come una capsula di rientro.

Il rovescio della medaglia: l’espansione di Prandtl–Meyer

Simmetricamente all’urto (compressione brusca), un flusso supersonico che incontra una parete che si *allontana* (angolo convesso) *accelera* e si espande, in modo continuo e *isentropico*, attraverso un ventaglio di infinite onde di Mach (*espansione di Prandtl–Meyer*). È il meccanismo con cui il flusso supersonico “gira l’angolo” espandendosi: compressione → urto (discontinuo, con perdite); espansione → ventaglio (continuo, senza perdite). La coppia urto/ventaglio descrive tutto ciò che un flusso supersonico fa agli

spigoli, ed è alla base del calcolo dei profili alari supersonici e dei getti fuori adattamento.

6.14 Localizzazione dell'urto nell'ugello

Torniamo all'ugello sovra-espanso, con un urto normale nel divergente. Nota la posizione dell'urto (cioè l'area A_{sb} in cui si trova), il calcolo procede a catena: dalla legge delle aree (III) si ricava M_1 (supersonico) appena a monte dell'urto; dalla (121) il Mach a valle M_2 ; dalla (122) la pressione totale a valle p_{02} . A valle dell'urto la p_0 è costante a p_{02} , e applicando di nuovo la legge delle aree tra l'urto e l'uscita,

$$\frac{A_e}{A_{sb}} = \frac{M_2}{M_e} \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad (126)$$

si ricava M_e e infine $p_e = p_{02}(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2)^{-\gamma/(\gamma-1)}$. Nella realtà p_a è nota e si itera sulla posizione dell'urto finché $p_e = p_a$: l'urto si “sistema” esattamente dove serve per far quadrare la pressione di uscita con l'ambiente.

Quando la trattazione 1D non basta più

L'urto normale interno qui descritto si osserva solo per sovraespansioni molto spinte (rapporto pressione d'uscita/ambiente sotto $\approx 0,25 \div 0,4$). Per sovraespansioni minori il flusso si stacca dalle pareti e si formano sistemi di urti obliqui bi/tridimensionali nel getto: la trattazione quasi-monodimensionale non basta più, e servono metodi più avanzati (caratteristiche, CFD). La gasdinamica 1D resta comunque lo strumento corretto per dimensionare l'ugello e prevederne il regime di funzionamento.

6.15 Sintesi: la gasdinamica al servizio del getto

Ripercorriamo il filo, ora che abbiamo tutti i pezzi. Le relazioni di stato e l'entalpia totale danno la *contabilità energetica* dei componenti di un motore: il compressore alza T_0 e p_0 , il combustore alza T_0 a p_0 quasi costante, la turbina abbassa entrambe estraendo lavoro, l'ugello converte h_0 in energia cinetica a h_0 costante. Il determinante $1 - M^2$ spiega la forma a clessidra dell'ugello e il blocco sonico in gola. La legge delle aree e la portata critica lo dimensionano e ne svelano lo strozzamento. Le condizioni operative ne raccontano i regimi al variare della contropressione. E le relazioni d'urto — normale e obliquo — descrivono cosa accade fuori adattamento, perché gli urti frenano sempre, e perché la caduta di pressione totale sia il vero nemico da combattere.

Il messaggio da portare a casa

Tre idee, sopra tutte, rendono comprensibile il funzionamento di un motore a getto. *Primo*: la velocità del suono è la velocità con cui il gas “scambia informazioni”; superarla cambia tutto di segno. *Secondo*: l'entalpia totale misura l'energia trasportata, la pressione totale misura quanta di quell'energia è ancora *utilizzabile* — e ogni irreversibilità, urto in testa, ne distrugge una parte. *Terzo*: per accelerare un gas oltre il suono serve un condotto che prima si stringe e poi si allarga, perché in supersonico il gas che accelera si espande più in fretta di quanto accelera. Con queste tre idee in mano, l'espressione della spinta del turbogetto $T = \dot{m}(V_e - V_0) + (p_e - p_0)A_e$ smette di essere una formula da memorizzare e diventa il racconto di ciò che accade, sezione dopo sezione, al gas che attraversa il motore.

7 Il ciclo Brayton: il cuore termodinamico dei motori a getto

Dove siamo nel discorso

La sezione precedente ci ha dato gli strumenti della gasdinamica: sappiamo come il gas accelera in un ugello e come si comporta in un condotto. Ora facciamo un passo indietro e guardiamo il motore *nel suo insieme*, come una macchina che preleva aria, le aggiunge energia bruciando combustibile, e la restituisce trasformata. Quasi tutti i motori aeronautici — turbogetto, turbofan, turboelica, con o senza postbruciatore — sono varianti di una stessa idea termodinamica: il **ciclo Brayton** (o Brayton–Joule, o turbogas). Capirlo bene significa capire *perché* questi motori funzionano, da quali parametri dipendono le loro prestazioni, e quali compromessi deve affrontare il progettista. È il ponte tra la termodinamica e i motori veri delle sezioni seguenti.

7.1 I quattro tempi di una turbina a gas

Una turbina a gas è fatta, nella sua forma essenziale, di tre organi in serie: un **compressore**, una **camera di combustione** e una **turbina**. Seguiamo un chilogrammo d'aria nel suo viaggio attraverso la macchina, numerando le stazioni: 1 ingresso compressore, 2 uscita compressore (= ingresso camera), 3 uscita camera (= ingresso turbina), 4 uscita turbina. Il ciclo consta di quattro trasformazioni:

- 1 → 2 Compressione.** Il compressore innalza pressione e temperatura dell'aria, spendendo un lavoro L_c (fornito dall'esterno, attraverso l'albero).
- 2 → 3 Combustione.** In camera si inietta combustibile e lo si brucia: il calore Q_b liberato innalza fortemente la temperatura del gas, a pressione (idealmente) costante.
- 3 → 4 Espansione.** Il gas caldo e in pressione si espande in turbina, producendo un lavoro L_t .
- 4 → 1 Cessione di calore.** Allo scarico, i gas combusti si raffreddano nell'atmosfera fino a tornare alle condizioni iniziali, cedendo all'ambiente il calore Q_a . (Questa trasformazione “chiude” idealmente il ciclo e avviene fuori dalla macchina.)

Da dove viene il lavoro?

Ecco la prima domanda cruciale: se la turbina deve anche azionare il compressore (sono sullo stesso albero), come fa il motore a produrre lavoro *utile* in più? La risposta sta tutta nella combustione: il gas che entra in turbina (stazione 3) è molto più caldo di quello che esce dal compressore (stazione 2). E un gas caldo, espandendosi, restituisce *più* lavoro di quanto ne sia servito per comprimerlo da freddo. La turbina produce dunque abbastanza lavoro da azionare il compressore e avanzarne: questo avanzo è il lavoro utile. Capire *perché* il gas caldo “rende di più” è il prossimo passo, e ha un nome elegante: la divergenza delle isobare.

7.2 Il segreto del ciclo: la divergenza delle isobare

Studiamo il ciclo sul **piano entropico** $T-s$ (temperatura-entropia), il più istruttivo per le macchine a flusso continuo: in esso l'area sottesa da una trasformazione reversibile è il calore scambiato, e — come vedremo — l'area racchiusa dal ciclo è il lavoro utile.

Perché nei motori si lavora in grandezze “totali” ma il piano è statico

Nelle turbomacchine le velocità del flusso sono modeste (100–150 m/s nel compressore e in turbina, ancor meno in camera), quindi i numeri di Mach sono piccoli e le grandezze totali coincidono quasi con le statiche: $T_0 \simeq T$, $h_0 \simeq h$. Possiamo perciò scrivere l'equazione dell'energia (105) nella forma semplice $\Delta h \simeq Q - L_s$, e usare il piano $T-s$ (statico) senza errori sensibili. Il vantaggio del piano $T-s$ sul piano h_0-s è che permette di “vedere” anche le conversioni tra energia termica e cinetica che avvengono nella

presa e nell'ugello dei motori a getto, di cui il turbogas è l'antenato.

Le isobare divergono

Sul piano $T-s$, la pendenza di un'isobara (curva a pressione costante) è proporzionale alla temperatura:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_{p=\text{cost}} = \frac{T}{c_p} \quad (127)$$

Quindi un'isobara è tanto più ripida quanto più si è in alto (alta T): *le isobare a pressioni diverse divergono salendo verso l'alto.*

Dimostrazione

Dalla relazione di Gibbs $T ds = dh - dp/\rho$; a pressione costante $dp = 0$, e con $dh = c_p dT$ si ha $T ds = c_p dT$, da cui la (127). $\square$

Perché questa è “la” ragione per cui il ciclo produce lavoro

La divergenza delle isobare è il cuore segreto del ciclo Brayton, e vale la pena visualizzarla. Compressione ($1 \rightarrow 2$) ed espansione ($3 \rightarrow 4$) avvengono tra le *stesse* due isobare (p_1 in basso, p_2 in alto), ma a *quote diverse*: la compressione in basso (gas freddo), l'espansione in alto (gas caldo, dopo la combustione). Poiché là in alto le isobare sono più divaricate, lo stesso “salto di pressione” corrisponde a un *salto di temperatura — e quindi di entalpia, e quindi di lavoro — maggiore*. In formule: il lavoro di espansione $L_e = c_p(T_3 - T_4)$ supera il lavoro di compressione $L_c = c_p(T_2 - T_1)$ proprio perché il gas caldo, espandendosi, attraversa isobare più distanti. Senza combustione (senza il salto verso l'alto), compressione ed espansione si annullerebbero e non resterebbe nulla. È la combustione che “solleva” l'espansione nella zona dove le isobare rendono di più.

7.3 Il ciclo ideale: ipotesi e prestazioni

Per ricavare formule maneggevoli, partiamo dal ciclo *ideale*, con queste ipotesi semplificative (le rilasceremo nel ciclo reale):

- portata costante (trascuriamo la piccola massa di combustibile aggiunta);
- gas ideale (termicamente e caloricamente perfetto, γ costante);
- nessuna dispersione di calore;
- nessuna perdita di pressione (combustione e scarico perfettamente isobari);
- compressione ed espansione **isentropiche** (adiabatiche e senza attrito); la turbina espande fino alla pressione ambiente.

Sul piano $T-s$ il ciclo ideale è quindi una figura chiusa con due lati verticali (le isentropiche $1 \rightarrow 2$ e $3 \rightarrow 4$) e due lati a esponenziale crescente (le isobare $2 \rightarrow 3$ e $4 \rightarrow 1$).

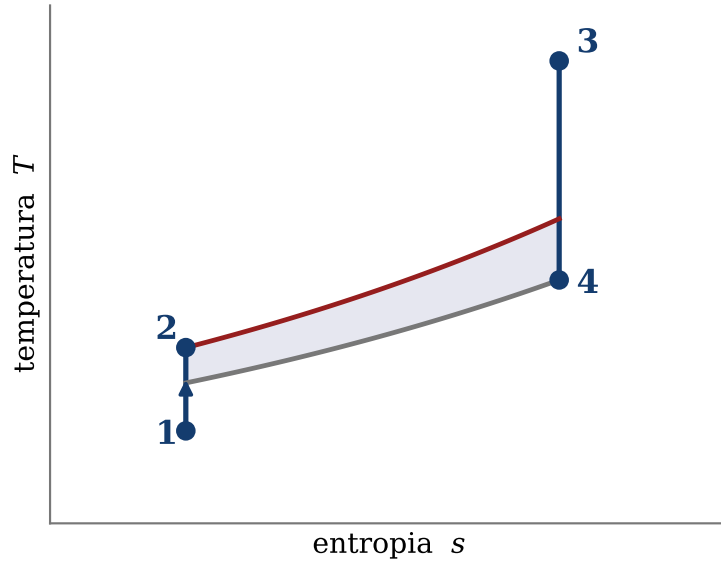


Figura 23. Ciclo Brayton ideale sul piano entropico $T-s$. Le isentropiche di compressione ($1 \rightarrow 2$) ed espansione ($3 \rightarrow 4$) sono verticali; le isobare di combustione ($2 \rightarrow 3$, alta pressione) e di scarico ($4 \rightarrow 1$, bassa pressione) sono esponenziali e *divergenti*: è la loro divergenza a rendere $L_t > L_c$. L'area racchiusa è il lavoro utile.

Definiamo i **parametri di progetto**. Il *rapporto di compressione* $\beta_c = p_2/p_1$ e il comodo *parametro di rapporto di pressione*

$$\tau_c = \beta_c^{(\gamma-1)/\gamma}, \quad (128)$$

che nel caso ideale coincide con T_2/T_1 (per l'isentropica). E il *rapporto di temperature del ciclo*

$$\tau = \frac{T_3}{T_1}, \quad (129)$$

rapporto tra la temperatura massima (ingresso turbina) e minima (ambiente).

Lavoro utile e rendimento del ciclo ideale

Per gas caloricamente perfetto e trasformazioni isentropiche, i due lavori sono:

$$L_c = c_p(T_2 - T_1) = c_p T_1(\tau_c - 1), \quad L_t = c_p(T_3 - T_4) = c_p T_1 \tau \left(1 - \frac{1}{\tau_c}\right),$$

dove per la turbina si è usato $T_4/T_3 = (p_4/p_3)^{(\gamma-1)/\gamma} = (p_1/p_2)^{(\gamma-1)/\gamma} = 1/\tau_c$ (le isobare di combustione e scarico impongono $p_3 = p_2, p_4 = p_1$). Il **lavoro utile** è la differenza:

$$L_u = L_t - L_c = c_p T_1 (\tau - \tau_c) \left(1 - \frac{1}{\tau_c}\right). \quad (130)$$

Il calore fornito in camera è $Q_b = c_p(T_3 - T_2) = c_p T_1(\tau - \tau_c)$, e il **rendimento termodinamico** (lavoro utile su calore speso) risulta, con una notevole semplificazione:

$$\eta_{tb} = \frac{L_u}{Q_b} = 1 - \frac{1}{\tau_c} = 1 - \frac{T_1}{T_2}. \quad (131)$$

□

Un risultato sorprendente

La (131) dice qualcosa di inaspettato: *il rendimento del ciclo ideale dipende solo dal rapporto di compressione*, non dalla temperatura massima del ciclo! Più si comprime, più si rende — punto. La temperatura T_3 (cioè quanto si scalda il gas in camera) non entra affatto nel rendimento. Questo stupisce, perché verrebbe da pensare che “scaldare di più” renda di più. E invece no: scaldare di più aumenta il *lavoro utile* (come vedremo), ma non il *rendimento*. È una prima, importante dissociazione tra i due indici di prestazione, che ritroveremo — ancor più marcata — nel ciclo reale.

Un ciclo Brayton ideale, numeri alla mano

Prendiamo $\beta_c = 10$, $\tau = 5$ (cioè $T_3 = 1.500$ K con $T_1 = 300$ K), $\gamma = 1,4$, $c_p = 1.005$ J/(kg K). Dalla (128): $\tau_c = 10^{0,2857} \approx 1,93$. Il rendimento (131): $\eta_{tb} = 1 - 1/1,93 \approx 0,48$ (48%). Il lavoro utile (130): $L_u = 1005 \cdot 300 \cdot (5 - 1,93)(1 - 1/1,93) \approx 446$ kJ/kg. Le temperature alle stazioni: $T_2 = T_1 \tau_c \approx 579$ K, $T_4 = T_3/\tau_c \approx 777$ K. Si noti che il gas esce dalla turbina ancora caldissimo (777 K): in un turbogetto, quel residuo di energia verrà speso nell’ugello per fare il getto.

7.4 Il lavoro utile: quando si annulla e quando è massimo

A differenza del rendimento, il lavoro utile (130) dipende *sia* dal rapporto di compressione β_c *sia* dal rapporto di temperature τ . Conviene capirne l’andamento, perché è ciò che decide quanto sia “densa” di potenza una macchina — e quindi quanto leggera, dato che $P = \dot{m} L_u$.

Il lavoro utile come area del ciclo

C’è un modo bellissimo di vedere il lavoro utile. Poiché in un ciclo l’entalpia totale torna al valore iniziale, l’equazione dell’energia dà $L_u = Q_b - Q_a$: il lavoro utile è il calore entrato meno quello uscito. Ma sul piano T - s ogni calore reversibile è l’area sottesa dalla trasformazione ($Q = \int T ds$). Quindi Q_b è l’area sotto l’isobara $2 \rightarrow 3$, Q_a è l’area sotto l’isobara $4 \rightarrow 1$, e la loro differenza — il lavoro utile — è **l’area racchiusa dal ciclo**. Un ciclo “grasso”, che racchiude molta area, produce molto lavoro per chilogrammo di aria; un ciclo “magro” ne produce poco. Tenere a mente questa immagine aiuta a capire tutto ciò che segue.

I due estremi in cui il lavoro utile si annulla

Dalla (130), $L_u = c_p T_1 (\tau - \tau_c)(1 - 1/\tau_c)$, il lavoro utile si annulla per due valori di β_c :

- $\beta_c = 1$ (cioè $\tau_c = 1$): non c’è compressione. Senza compressione il gas non può espandere e non si produce nulla: il ciclo è “schiacciato” su una linea, area nulla.
- $\beta_c = (T_3/T_1)^{1/(\gamma-1)}$ (cioè $\tau_c = \tau$): la compressione porta già T_2 a coincidere con la temperatura massima T_3 . Allora non c’è più spazio per fornire calore ($Q_b = 0$, $T_2 = T_3$), e l’espansione ha appena l’energia per ripagare la compressione. Di nuovo, area nulla.

Tra questi due estremi il lavoro utile è positivo e passa per un massimo.

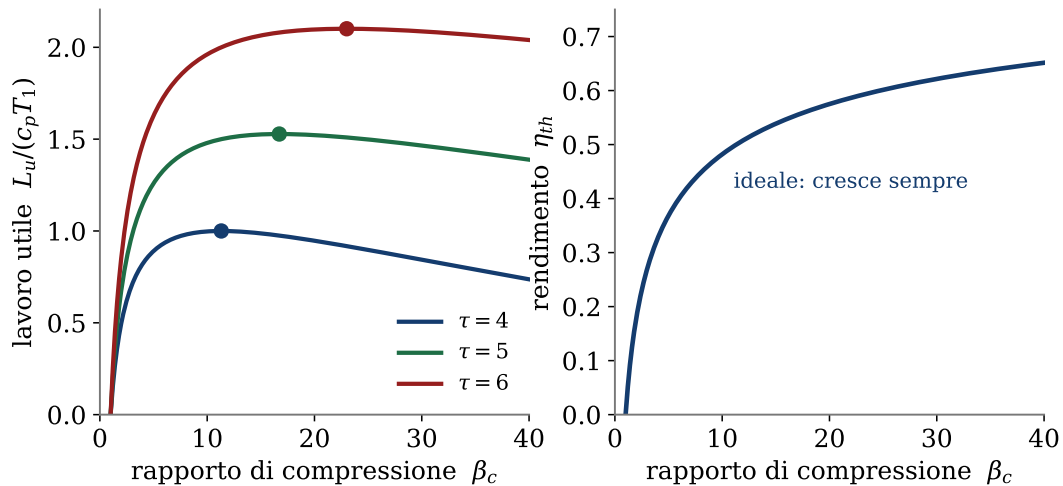


Figura 24. Andamenti tipici del lavoro utile L_u e del rendimento termodinamico η_{th} in funzione del rapporto di compressione β_c , per alcuni valori del rapporto di temperature τ . Nel ciclo *ideale* η_{th} cresce monotonicamente; il lavoro utile ha invece un massimo a $\tau_c = \sqrt{\tau}$. Le condizioni di massimo lavoro utile e di massimo rendimento *non* coincidono.

Il rapporto di compressione di massimo lavoro utile

Annullando $\partial L_u / \partial \tau_c = 0$ nella (130) si trova

$$\tau_{c,\max} = \sqrt{\tau} = \sqrt{\frac{T_3}{T_1}} \quad \Rightarrow \quad \beta_{c,\max} = \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}. \quad (132)$$

Una proprietà elegante di questa condizione: sostituendo $\tau_c = \sqrt{\tau}$ nelle relazioni $T_2 = T_1 \tau_c$ e $T_4 = T_1 \tau / \tau_c$ si ottiene $T_2 = T_4$. **Il massimo lavoro utile si ha quando la temperatura di fine compressione eguaglia quella di fine espansione.** $\square$

Perché esiste un massimo: il tiro alla fune tra rendimento e calore

L'esistenza di un massimo è fisicamente trasparente. Aumentando β_c , il rendimento η_{th} cresce (comprimere di più rende di più). Ma, a temperatura massima T_3 fissata (limite dei materiali della turbina!), comprimere di più significa che T_2 si avvicina a T_3 , e quindi resta meno "spazio termico" per bruciare: il calore $Q_b = c_p(T_3 - T_2)$ cala. Il lavoro utile $L_u = \eta_{th} Q_b$ è il prodotto di un fattore crescente (η_{th}) e uno decrescente (Q_b): il loro compromesso dà il massimo. È un tiro alla fune, e il punto di equilibrio è $\tau_c = \sqrt{\tau}$.

Massimizzare il lavoro utile

Con $\tau = 5$ (cioè $T_3 = 1.500$ K), $\gamma = 1,4$, $T_1 = 300$ K: la (132) dà $\tau_c = \sqrt{5} \approx 2,24$, cioè $\beta_c \approx 16,7$. A questo rapporto, $\eta_{th} = 1 - 1/2,24 \approx 0,55$ e $L_u \approx 461$ kJ/kg — il massimo possibile per quel τ . Confrontando con l'esempio precedente ($\beta_c = 10$, $L_u \approx 446$): aumentando β_c da 10 a 16,7 il lavoro utile cresce solo di poco (siamo vicini al massimo, dove la curva è piatta) ma il rendimento sale sensibilmente, da 0,48 a 0,55. È un'anticipazione del fatto che, per il rendimento, conviene comprimere ancora di più.

L'effetto della temperatura massima T_3

Aumentare τ (cioè T_3 , la temperatura di ingresso turbina) è sempre benefico: aumenta il lavoro utile, allarga il campo di β_c che dà lavoro positivo, e sposta il massimo verso β_c più alti. Ecco perché la storia dei motori a getto è in gran parte la storia della corsa a innalzare T_3 — da ~ 1100 K dei primi turbogetti a oltre 1900 K dei motori moderni — corsa resa possibile da leghe sempre più resistenti, palette raffreddate inter-

namente e rivestimenti ceramici (TBC). La temperatura massima è il vero collo di bottiglia tecnologico del motore.

7.5 Confronto con Carnot: quanto siamo lontani dall'ideale assoluto

Il rendimento massimo *teoricamente* possibile per qualunque macchina che operi tra le temperature estreme T_1 e T_3 è quello del **ciclo di Carnot**:

$$\eta_{th,Carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_3}. \quad (133)$$

Il ciclo Brayton ideale, con $\eta_{th} = 1 - T_1/T_2$, ha rendimento minore perché $T_2 < T_3$: il calore non viene fornito tutto alla temperatura massima, ma a partire da T_2 , più bassa.

Il dilemma di Carnot e perché non lo si insegue

Per avvicinare Carnot bisognerebbe avvicinare T_2 a T_3 , cioè comprimere moltissimo (l'isobara $2 \rightarrow 3$ diventerebbe quasi un'isoterma alla temperatura massima, come in Carnot). Ma — lo sappiamo dal paragrafo precedente — avvicinare T_2 a T_3 *schiacia il lavoro utile verso zero*! Si avrebbe un motore efficientissimo ma che produce pochissimo per chilogrammo d'aria: enorme, pesante e poco potente. È un compromesso impossibile da ignorare: nei motori aeronautici, dove il peso è tutto, non si insegue affatto Carnot, ma si cerca il giusto equilibrio tra rendimento (consumo) e lavoro utile (peso). La termodinamica ci dice il limite; l'ingegneria sceglie dove fermarsi prima.

7.6 Il ciclo reale: dove si perde, e quanto

Il ciclo ideale è un'utile bussola, ma un motore vero perde energia a ogni passo. I fattori che allontanano il ciclo reale dall'ideale sono molti:

1. la compressione *non* è isentropica (attrito tra fluido e palette);
2. nemmeno l'espansione in turbina lo è (stesso motivo);
3. la combustione è incompleta e dispersa (incombusti, calore perso dalle pareti);
4. la combustione non è perfettamente isobara (attrito e addizione di calore riducono la pressione totale);
5. i cuscinetti dissipano per attrito;
6. la portata non è costante (combustibile aggiunto, aria spillata per raffreddare le palette);
7. le proprietà del gas cambiano con la combustione;
8. le ipotesi di gas perfetto introducono approssimazioni.

I due effetti dominanti sono i primi due — le *irreversibilità di compressione ed espansione* — e ci concentriamo su quelli, che si descrivono con due rendimenti.

Cosa fa l'attrito al ciclo, visivamente

Sul piano $T-s$, l'attrito *genera entropia*: le trasformazioni nelle turbomacchine, che nell'ideale erano segmenti verticali (isentropici), nel reale si *inclinano verso destra* (l'entropia cresce). Conseguenza pratica:

- il compressore reale, a parità di rapporto di pressione, scalda il gas *di più* del necessario ($T_2 > T'_2$, dove l'apice indica l'ideale): parte del lavoro speso va in calore disordinato invece che in compressione utile;
- la turbina reale, a parità di rapporto di espansione, estrae *meno* lavoro ($T_4 > T'_4$): una parte dell'energia disponibile si perde in attrito.

Il ciclo reale è quindi più “magro” dell’ideale: racchiude meno area, e quindi rende meno lavoro utile. Se le perdite sono troppo grandi, il ciclo potrebbe addirittura non produrre lavoro utile affatto, pur avendo $\beta_c > 1$ e $T_3 > T_2$.

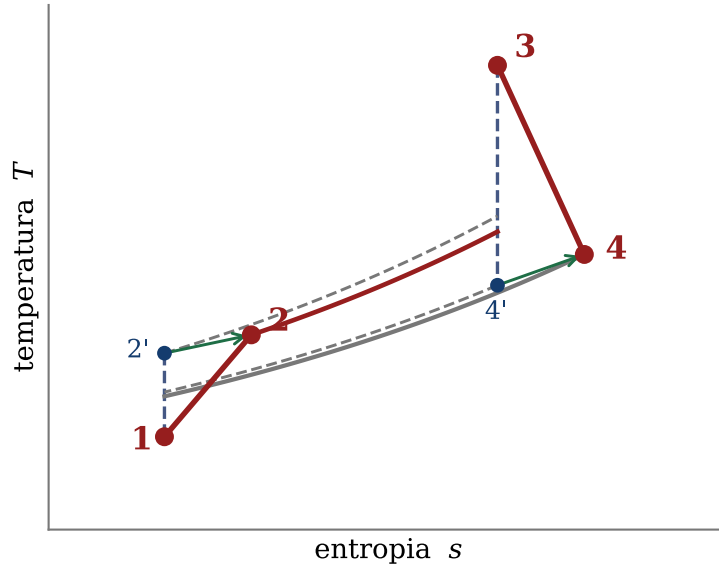


Figura 25. Confronto tra ciclo ideale (tratteggiato, 1 2' 3 4') e reale (continuo, 1 2 3 4) a parità di β_c e τ . Le irreversibilità inclinano verso destra le trasformazioni nelle turbomacchine: il compressore reale scalda di più ($T_2 > T_2'$), la turbina reale estrae meno ($T_4 > T_4'$). Il ciclo reale racchiude meno area: minore lavoro utile.

Rendimenti isentropici di compressore e turbina

Si confrontano il processo reale e quello ideale *a parità di rapporto di pressione*. Il **rendimento isentropico del compressore** è il rapporto tra il lavoro idealmente necessario e quello realmente speso:

$$\eta_c = \frac{L'_c}{L_c} = \frac{T'_2 - T_1}{T_2 - T_1}. \quad (134)$$

Il **rendimento isentropico della turbina** è il rapporto tra il lavoro realmente estratto e quello idealmente estraibile:

$$\eta_t = \frac{L_t}{L'_t} = \frac{T_3 - T_4}{T_3 - T'_4}. \quad (135)$$

Valori tipici: $\eta_c \approx 0,88 \div 0,90$, $\eta_t \approx 0,90 \div 0,92$ (la turbina rende un po' di più del compressore, per ragioni fluidodinamiche: in turbina il gradiente di pressione è favorevole, in compressore avverso).

Temperature reali di fine compressione ed espansione

Esplicitando T_2 dalla (134) e usando $T'_2/T_1 = \tau_c$:

$$T_2 = T_1 \left(1 + \frac{\tau_c - 1}{\eta_c} \right). \quad (136)$$

Il compressore reale scalda di più: il salto $T_2 - T_1$ è amplificato dal fattore $1/\eta_c > 1$. Analogamente, dalla (135) con $T'_4/T_3 = 1/\tau_c$ (avendo $\tau_t = \tau_c$, poiché la turbina espande fino a p_1):

$$T_4 = T_3 \left[1 - \eta_t \left(1 - \frac{1}{\tau_c} \right) \right]. \quad (137)$$

La turbina reale lascia il gas più caldo: estrae meno salto termico. $\square$

Lavoro utile e rendimento del ciclo reale

Il lavoro utile reale, con le (136) e (137):

$$L_u = c_p T_1 \left[\eta_t \tau \left(1 - \frac{1}{\tau_c} \right) - \frac{\tau_c - 1}{\eta_c} \right] = c_p T_1 \left[\eta_t \tau - \frac{\tau_c}{\eta_c} \right] \left(1 - \frac{1}{\tau_c} \right). \quad (138)$$

Il calore in camera è ora $Q_b = c_p(T_3 - T_2) = c_p T_1(\tau - 1 - (\tau_c - 1)/\eta_c)$, e il rendimento termodinamico reale risulta

$$\eta_{tb} = \eta_{tb,id} \frac{\tau \eta_c \eta_t - \tau_c}{\tau \eta_c - \tau_c + 1 - \eta_c}, \quad (139)$$

dove $\eta_{tb,id} = 1 - 1/\tau_c$ è il rendimento ideale. Il fattore di correzione è minore di uno e dipende, ora, *anche* da τ e dai rendimenti dei componenti. $\square$

Nel reale, il rendimento ha un massimo

Ecco la differenza più importante tra ideale e reale. Nell'ideale, il rendimento (131) cresce *senza fine* con β_c : più si comprime, meglio è. Nel reale non è così: il rendimento (139) **cresce, raggiunge un massimo, poi cala**. La ragione è che, comprimendo sempre di più, il lavoro di compressione (già penalizzato da $1/\eta_c$) diventa così grande da divorare il guadagno; e poiché il lavoro di turbina è a sua volta decurtato da η_t , oltre un certo β_c il bilancio peggiora. Il massimo di η_{tb} si sposta verso β_c più alti al crescere di τ : di nuovo, l'importanza di temperature massime elevate, che giustificano e rendono utili rapporti di compressione spinti.

Quanto costano le irreversibilità

Stesso ciclo di prima ($\beta_c = 10$, $\tau = 5$, $T_1 = 300$ K), ma ora reale con $\eta_c = 0,89$, $\eta_t = 0,91$. Con $\tau_c = 1,93$: dalla (139) si ottiene $\eta_{tb} \approx 0,39$ (contro 0,48 ideale) e dalla (138) $L_u \approx 346$ kJ/kg (contro 446). Le temperature reali: $T_2 \approx 614$ K (contro 579: il compressore scalda di più) e $T_4 \approx 842$ K (contro 777: la turbina lascia il gas più caldo). In sintesi: due rendimenti di componente attorno al 90% bastano a far perdere quasi un quinto del lavoro utile e quasi un quinto del rendimento. È la misura di quanto continuo le perdite fluidodinamiche nelle turbomacchine.

7.7 Dal ciclo alla macchina: portate e potenza

Calcolati L_u e η_{tb} , dimensionare la macchina è immediato. Per una potenza utile P richiesta, la portata d'aria necessaria è

$$\dot{m}_a = \frac{P}{L_u}, \quad (140)$$

e la portata di combustibile, detto Q_f il potere calorifico del combustibile,

$$\dot{m}_f = \frac{P}{\eta_{tb} Q_f}. \quad (141)$$

Dal ciclo al motore

Il ciclo reale dell'esempio precedente ($L_u \approx 346$ kJ/kg, $\eta_{tb} \approx 0,39$) deve erogare $P = 5.000$ kW. Serve allora una portata d'aria $\dot{m}_a = 5000/346 \approx 14,5$ kg/s. Con un cherosene di $Q_f \approx 43$ MJ/kg, la portata di combustibile è $\dot{m}_f = 5000/(0,39 \cdot 43000) \approx 0,30$ kg/s. Il rapporto $\dot{m}_f/\dot{m}_a \approx 0,02$ conferma che si brucia circa un chilo di combustibile ogni cinquanta d'aria: è il forte eccesso d'aria tipico delle turbine a gas, necessario per contenere la temperatura in camera entro i limiti dei materiali.

7.8 Sintesi: due indici, un compromesso

Il messaggio da portare a casa

Il ciclo Brayton si regge su poche idee robuste. *Primo*: il lavoro nasce dalla divergenza delle isobare — il gas caldo, espandendosi, rende più di quanto sia costato comprimerlo da freddo, e la combustione serve proprio a “sollevare” l’espansione dove le isobare rendono di più. *Secondo*: due soli parametri governano tutto — il rapporto di compressione β_c e il rapporto di temperature τ (limitato dalla resistenza delle palette di turbina). *Terzo*, e decisivo: *rendimento e lavoro utile non si massimizzano insieme*. Il massimo rendimento richiede β_c elevati; il massimo lavoro utile richiede β_c più contenuti ($\tau_c = \sqrt{\tau}$). Il progettista sceglie dove stare a seconda della missione: alti β_c per i voli a lungo raggio (dove conta il consumo, e quindi il peso del combustibile), β_c più bassi per il corto raggio e dove conta la leggerezza del motore. È lo stesso compromesso che ritroveremo, declinato in termini di spinta ed efficienza, in tutti i motori a getto delle sezioni che seguono: il turbogetto, il turbofan e il turboelica non sono che modi diversi di sfruttare questo ciclo, e di spendere il lavoro utile (o l’energia residua allo scarico) per generare spinta.

8 Il motore turbogetto (turbojet)

Il turbogetto fu sviluppato negli anni Cinquanta sulla base del ciclo Brayton: l’aria entra attraverso una presa, attraversa una serie di stadi di compressione, subisce la combustione e si espande in turbina, per poi essere convogliata in un ugello dove viene espulsa a velocità maggiore di quella d’ingresso, producendo spinta. I turbogetti consentono grandi spinte e velocità elevate (alti numeri di Mach), a fronte di un consumo abbastanza elevato.

8.1 Componenti e costruzione della spinta

I componenti fondamentali, in successione, sono:

1. **Diffusore** (1–2): l’aria entra con velocità $\simeq V_0$ e viene rallentata, con aumento di pressione p e temperatura T .
2. **Compressore** (2–3): le pale rotanti compiono lavoro sull’aria, con grande incremento di p e T .
3. **Combustore** (3–4): l’aria è miscelata col carburante e bruciata a pressione essenzialmente costante.
4. **Turbina** (4–5): i gas si espandono cedendo lavoro; la turbina, collegata al compressore tramite un albero, aziona il compressore.
5. **Ugello** (5–6): il gas si espande ulteriormente ed è scaricato con velocità V_e .

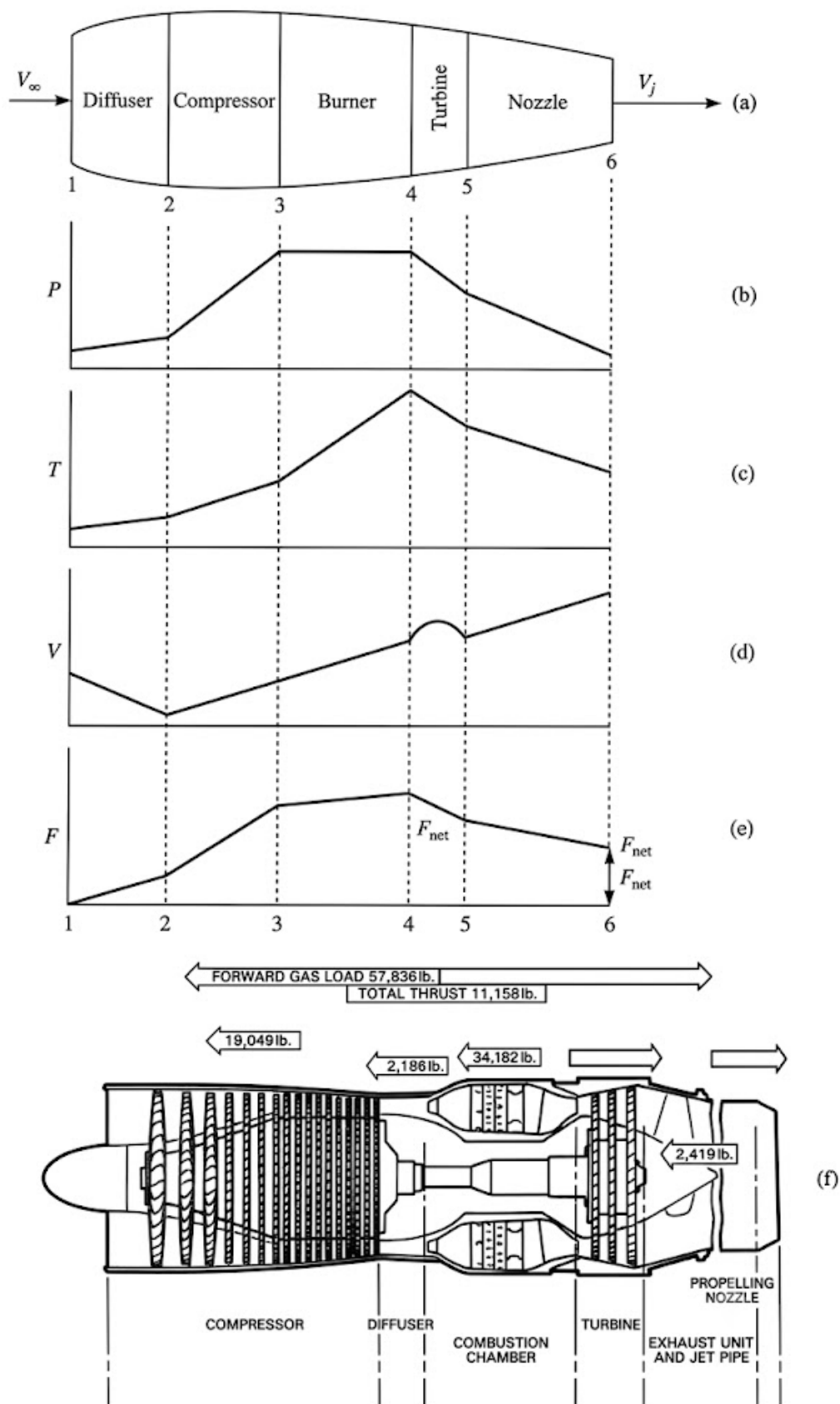


Figura 26. Motore turbogetto: (a) componenti; (b) pressione statica p ; (c) temperatura statica T ; (d) velocità V lungo l'asse del motore. Nel diffusore e nel compressore p e T crescono; nel combustore T cresce a p costante; in turbina e ugello il gas si espande accelerando.

La spinta nasce dalla risultante delle distribuzioni di pressione e sforzo di taglio su tutte le superfici interne ed esterne. La “costruzione della spinta” si può leggere così: l’alta pressione nel diffusore e nel compressore agisce su aree orientate in avanti, generando una grande forza nella direzione della spinta; la spinta accumulata cresce attraverso diffusore, compressore e combustore. In turbina e ugello, invece, parte delle superfici è orientata all’indietro e la pressione vi produce una forza opposta: la spinta accumulata diminuisce. All’uscita dell’ugello la spinta netta accumulata resta positiva ed è la spinta prodotta dal motore.

Nota

Il calcolo diretto delle distribuzioni di pressione su tutta la superficie interna sarebbe un’impresa anche per la moderna fluidodinamica computazionale (CFD). Fortunatamente la spinta si calcola molto più semplicemente con un volume di controllo attorno al motore, applicando la seconda legge di Newton al flusso che lo attraversa — esattamente l’approccio del §2.

8.2 Equazione della spinta e consumo specifico

Una derivazione più dettagliata della spinta, che include la massa di carburante e il termine di pressione all’ugello, fornisce:

$$T = (\dot{m}_a + \dot{m}_f) V_e - \dot{m}_a V_0 + (p_e - p_0) A_e. \quad (142)$$

I primi due termini rappresentano la variazione di quantità di moto; il termine di pressione $(p_e - p_0) A_e$ è di norma più piccolo e in prima approssimazione trascurabile, riconducendo la (142) alla forma elementare $T \simeq \dot{m}_a (V_e - V_0)$.

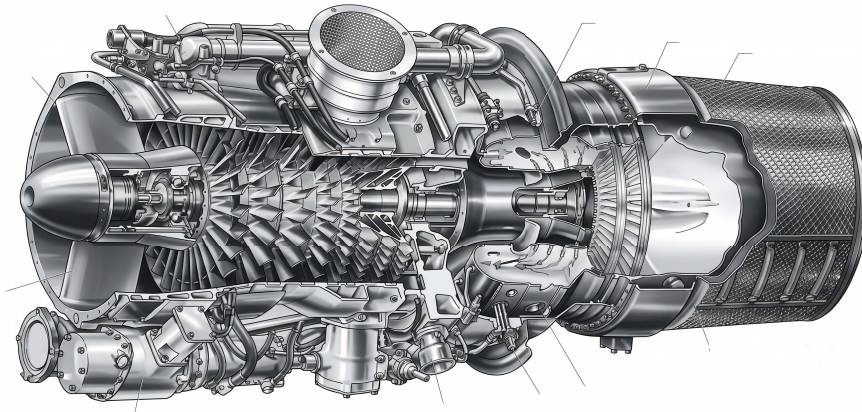


Figura 27. Spaccato di un turbogetto: si distinguono compressore (assiale), camera di combustione, turbina e ugello di scarico.

Il consumo specifico di un turbogetto si basa sulla *spinta* (l’output misurabile), non sulla potenza, ed è detto *consumo specifico di spinta* c_j (TSFC):

$$c_j = \frac{\text{peso di carburante consumato in un dato tempo}}{(\text{spinta sviluppata}) \cdot (\text{intervallo di tempo})}. \quad (143)$$

Nel SI $[c_j] = 1/\text{s}$, ma la consuetudine usa l’unità inconsistente $\text{SFC}_J = \text{lb}/(\text{lbf h})$.

8.3 Il ciclo del turbogetto, stazione per stazione

Dal ciclo Brayton al motore vero

La sezione sul ciclo Brayton (§7) ci ha mostrato il *principio* termodinamico; ora lo applichiamo al turbogetto reale, seguendo il gas stazione per stazione. La differenza essenziale rispetto al turbogas di terra è duplice. Primo: la compressione non comincia nel compressore, ma già nella *presa d'aria*, dove il moto del velivolo “incanala” e rallenta l'aria, convertendone l'energia cinetica in pressione (effetto RAM). Secondo: l'espansione non finisce in turbina, ma prosegue nell'*ugello*: la turbina estrae solo il lavoro che serve ad azionare il compressore, e tutta l'energia residua va a fare il *getto*. Il turbogetto è quindi un ciclo Brayton in cui “lavoro utile” e “energia del getto” si fondono: ciò che il turbogas spenderebbe come lavoro all'albero, qui diventa velocità di efflusso.

Numeriamo le stazioni in modo standard: *a* condizioni indisturbate (ambiente), *1* ingresso presa, *2* uscita presa (= ingresso compressore), *3* uscita compressore (= ingresso combustore), *4* uscita combustore (= ingresso turbina), *5* uscita turbina (= ingresso ugello), *9* uscita ugello.

Presa d'aria (a → 2): la compressione gratis. La presa rallenta il flusso senza scambiare lavoro né calore: la temperatura totale si conserva, mentre quella statica cresce per effetto della decelerazione. Dalla (106):

$$T_2 \simeq T_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \right), \quad (144)$$

dove M_0 è il numero di Mach di volo. La pressione statica aumenta, ma la pressione totale diminuisce per le irreversibilità; introducendo il *rendimento pneumatico* della presa $\varepsilon_d = p_{02}/p_{0a}$:

$$p_2 \simeq \varepsilon_d p_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad \beta_d = \frac{p_2}{p_a}. \quad (145)$$

La presa d'aria è un compressore che non costa nulla

Il rapporto di compressione della presa β_d cresce *fortemente* con il Mach di volo: è quasi 1 a basse velocità, ma vale già $\sim 1,5$ a $M_0 = 0,8$ e arriva a $\sim 6,6$ a $M_0 = 2$. Questa compressione è “gratuita” — non costa lavoro all'albero, la fa il moto del velivolo — e a Mach elevati domina il rapporto di compressione globale del ciclo. È la ragione profonda per cui i turbogetti danno il meglio ad alta velocità, e per cui un velivolo come il Concorde poteva usare compressori relativamente modesti: gran parte del lavoro lo faceva la presa.

Compressore (2 → 3). Posto il rapporto di compressione $\beta_c = p_3/p_2$ e il parametro $\tau_c = \beta_c^{(\gamma-1)/\gamma}$, la temperatura di uscita segue la relazione del compressore reale (§7.6), col rendimento isentropico η_c :

$$T_3 = T_2 \left(1 + \frac{\tau_c - 1}{\eta_c} \right), \quad p_3 = \beta_c p_2. \quad (146)$$

Il rapporto di compressione *globale* del ciclo è il prodotto di quello della presa e del compressore: $\beta_o = \beta_d \beta_c$.

Combustore (3 → 4). Si inietta combustibile e si brucia, innalzando la temperatura fino a T_4 — fissata dalla resistenza delle palette di turbina, il vincolo tecnologico cruciale. Il rapporto combustibile/aria necessario è

$$f \simeq \frac{c_p (T_4 - T_3)}{\eta_b Q_f}, \quad (147)$$

con η_b rendimento di combustione e Q_f potere calorifico. La combustione non è perfettamente isobara: $p_4 = \varepsilon_b p_3$, con $\varepsilon_b \lesssim 1$ rendimento pneumatico del combustore.

Turbina (4 → 5): solo quanto basta al compressore. Qui sta la specificità del turbogetto: *la turbina estrae esattamente il lavoro che serve al compressore*, non di più. Imponendo il bilancio di potenza all'albero (con i rendimenti meccanici η_{mc}, η_{mt}):

$$T_5 \simeq T_4 - \frac{T_3 - T_2}{\eta_{mc} \eta_{mt}}, \quad (148)$$

e la pressione di uscita turbina si ricava dal suo rendimento isentropico η_t :

$$p_5 \simeq p_4 \left(1 - \frac{T_5/T_4}{\eta_t} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (149)$$

Perché la turbina “si ferma presto”

Nel turbogas di terra la turbina espande il gas fino alla pressione ambiente, estraendo tutto il lavoro possibile (che diventa lavoro utile all'albero). Nel turbogetto, invece, la turbina si ferma molto prima: appena ha estratto l'energia necessaria a far girare il compressore, smette. Il gas esce dalla turbina ancora caldo e *in pressione* (la p_5 è ben sopra l'ambiente): è questa energia residua, non spesa all'albero, che l'ugello convertirà in velocità del getto. In un certo senso, il turbogetto “sposta” il lavoro utile del Brayton dall'albero al getto.

Ugello (5 → 9): il salto in velocità. L'ugello espande il gas dalla pressione p_5 fino (idealmente) alla pressione ambiente, convertendo il salto entalpico in energia cinetica. Con rendimento isentropico dell'ugello η_n e ipotesi di ugello adattato ($p_9 = p_a$):

$$\Delta h_n = \eta_n c_p T_5 \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_5} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right], \quad u_e = \sqrt{2 \Delta h_n}. \quad (150)$$

La velocità di efflusso u_e è ciò che, confrontato con la velocità di volo V_0 , determina la spinta.

8.4 Prestazioni: spinta specifica, rendimenti, consumo

Sotto le ipotesi usuali ($f \ll 1$, ugello adattato), la spinta del turbogetto si riduce alla forma vista, e per unità di portata d'aria si definisce la **spinta specifica**:

$$I_a = \frac{F}{\dot{m}_a} \simeq u_e - V_0. \quad (151)$$

È il parametro più immediato: misura quanta spinta si ottiene da ogni chilogrammo d'aria al secondo, e quindi quanto può essere “piccolo” il motore a parità di spinta.

Per valutare l'efficienza si introducono tre potenze: la *disponibile* $P_{av} \simeq \dot{m}_f Q_f$ (energia chimica del combustibile), la *del getto* $P_j \simeq \dot{m}_a (u_e^2 - V_0^2)/2$ (energia cinetica netta impressa al flusso), e la *propulsiva* $P_p = F V_0$ (lavoro utile per spingere il velivolo). Da queste i tre rendimenti già definiti in §2:

- **termodinamico** $\eta_{tb} = P_j/P_{av}$: quanto bene il motore converte l'energia chimica in energia cinetica del flusso;
- **propulsivo** $\eta_p = P_p/P_j$: quanto bene l'energia cinetica del getto si traduce in spinta utile;
- **globale** $\eta_o = \eta_{tb} \eta_p = P_p/P_{av}$: l'efficienza complessiva, inversamente proporzionale al consumo.

Il **consumo specifico di spinta** (TSFC) si lega semplicemente alla spinta specifica:

$$\text{TSFC} = \frac{\dot{m}_f}{F} = \frac{f}{I_a}. \quad (152)$$

Un turbogetto in crociera, numeri alla mano

Consideriamo un turbogetto con $\beta_c = 25$, $T_4 = 1.500$ K, rendimenti $\varepsilon_d = 0,95$, $\eta_c = 0,90$, $\eta_b = 0,99$, $\varepsilon_b = 0,94$, $\eta_t = 0,92$, $\eta_n = 0,98$, $\eta_{mc} = \eta_{mt} = 0,98$, in volo a $M_0 = 0,8$ alla quota di 11.000 m ($T_a = 217$ K, $p_a = 22,7$ kPa). La presa porta $T_2 \simeq 217(1 + 0,2 \cdot 0,64) \approx 245$ K e un $\beta_d \approx 1,5$; il compressore eleva ulteriormente pressione e temperatura, il combustore porta a 1500 K, la turbina ne preleva quanto basta, e l'ugello accelera il gas fino a u_e ben superiore ai $V_0 = 0,8 \cdot \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 217} \approx 236$ m/s di volo. La differenza $u_e - V_0$ è la spinta specifica, dell'ordine di qualche centinaio di m/s di "velocità utile" per ogni kg/s d'aria.

8.5 Effetto dei parametri di progetto

Il turbogetto ha due parametri di progetto — il rapporto di compressione β_c e la temperatura massima T_4 (cioè $\tau = T_4/T_a$) — più una condizione operativa che pesa moltissimo: il numero di Mach di volo M_0 , che attraverso β_d entra nel rapporto di compressione globale. Gli andamenti seguono la logica del ciclo Brayton reale, con qualche torsione propria del getto.

Come variano i quattro indici

- **Rendimento termodinamico** η_{tb} : ha un *massimo* al variare di β_o (come nel Brayton reale) e cresce con T_4 . A Mach elevato la forte compressione della presa sposta il massimo verso β_c più bassi (a $M_0 = 2$ la presa fa già gran parte del lavoro).
- **Rendimento propulsivo** η_p : *diminuisce* all'aumentare di T_4 (perché cresce u_e , e con essa il divario rispetto a V_0 , abbassando $v = V_0/u_e$); *cresce* invece con M_0 (perché cresce V_0 , avvicinandolo a u_e). È il motivo per cui il turbogetto "ama" le alte velocità.
- **Rendimento globale** $\eta_o = \eta_{tb}\eta_p$: ha un massimo a β_c elevati; peggiora con T_4 (la caduta di η_p prevale sul guadagno di η_{tb}) ma migliora nettamente con M_0 .
- **Spinta specifica** $I_a = u_e - V_0$: ha un massimo a β_c *contenuti* (come il lavoro utile del Brayton, $\tau_c = \sqrt{\tau}$) e cresce molto con T_4 . A Mach alto il massimo si sposta a β_c ancora più bassi, e I_a tende a calare perché il termine sottrattivo V_0 cresce più in fretta di u_e .

Il solito conflitto: rendimento contro spinta specifica

Ritorna, identico al Brayton, il conflitto tra i due obiettivi. Il *massimo rendimento* (minimo consumo) chiede β_c *alti*; la *massima spinta specifica* (motore più piccolo e leggero a parità di spinta) chiede β_c *bassi*. Aumentare T_4 aiuta la spinta specifica ma penalizza il rendimento globale (via η_p). Il progettista sceglie secondo la missione: un caccia privilegia spinta specifica (motore compatto, β_c moderati, T_4 alte), un velivolo da trasporto a lungo raggio privilegia il consumo (β_c elevati). È lo stesso compromesso del turbogas, riletto in chiave propulsiva.

8.6 Prestazioni a punto fisso

A velocità nulla (aereo fermo al decollo) la presa d'aria *non* comprime: al contrario, per richiamare aria nel motore il compressore deve creare una *depressione* al proprio ingresso. L'aria, incanalandosi nella presa (condotto divergente a velivolo fermo), si *espande* leggermente, e la pressione alla stazione 2 scende sotto quella ambiente.

La caduta di pressione al punto fisso

Stimiamo la caduta assumendo l'espansione isentropica e una velocità d'ingresso compressore $u_2 \approx 150$ m/s. Dalla conservazione dell'entalpia totale (aria ambiente in quiete):

$$T_2 = T_a - \frac{u_2^2}{2c_p} = 288,15 - \frac{150^2}{2 \cdot 1005} \approx 277 \text{ K},$$

e per l'isentropica $p_2/p_a = (T_2/T_a)^{\gamma/(\gamma-1)} \approx 0,87$: una caduta di pressione di circa il **13%** già prima del compressore. Effetto sulle prestazioni: la spinta specifica cala di meno dello 0,5%, ma il TSFC peggiora di oltre il 5% (il rendimento termodinamico dipende soprattutto dal rapporto di pressioni, che qui scende).

Il decollo nelle giornate calde

Un secondo effetto, spesso sottovalutato, riguarda la temperatura ambiente. La spinta dipende dal *rapporto* di temperature $\tau = T_4/T_a$, non da T_4 in sé. Se al decollo la temperatura ambiente sale da 15 °C a 40 °C, con $T_4 = 1.400$ K fissata, τ scende da $\approx 4,86$ a $\approx 4,47$: una penalizzazione della spinta specifica di circa l'**8%**, proprio nella fase in cui serve la massima spinta. È il motivo per cui, negli aeroporti caldi e d'alta quota, i velivoli soffrono al decollo e talvolta devono ridurre il carico.

8.7 Perché l'ugello è (quasi sempre) solo convergente

In un turbogetto il rapporto tra pressione totale all'ingresso ugello e pressione ambiente è quasi sempre maggiore del valore critico (§6.10): servirebbe quindi, in linea di principio, un ugello convergente-divergente per espandere fino all'adattamento. Eppure quasi tutti i turbogetti, turboelica e turbofan usano ugelli *puramente convergenti* (la gola coincide con l'uscita, e il flusso resta al più sonico).

Un compromesso pragmatico

Perché rinunciare alla parte divergente? Per due ragioni concrete. Da un lato, il guadagno di spinta dell'ugello adattato è modesto: per il turbogetto dell'esempio ($\beta_c = 25$, $M_0 = 0,8$, quota 11 km) servirebbe un rapporto d'area $A_c/A_t \approx 1,9$ per guadagnare circa l'8% di spinta in crociera, ma al punto fisso il guadagno scende all'1,7%. Dall'altro, la parte divergente aggiunge *peso e resistenza aerodinamica*, e introduce problemi di adattamento a quote diverse. Il bilancio, per un motore subsonico, è sfavorevole: meglio un ugello convergente semplice, leggero e robusto, accettando una piccola perdita. La parte divergente si giustifica solo nei motori spiccatamente supersonici (e nei razzi), dove i rapporti di espansione — e i guadagni — sono molto maggiori.

I combustibili

I motori a getto bruciano cherosene (Jet-A e Jet-A1 per uso civile, Jet-B per climi freddi, serie JP per uso militare), con potere calorifico $Q_f \approx 43$ MJ/kg. La scelta del cherosene rispetto alle benzine dei motoelica è legata alla maggiore quota di volo degli aviogetti (dettata dalla ricerca del massimo rapporto portanza/resistenza alle alte velocità) e alle migliori proprietà di sicurezza e densità energetica.

8.8 Variazione di spinta e consumo con velocità e quota — regime subsonico

Effetto della velocità. La portata d'aria entrante è $\dot{m}_a = \rho_\infty A_1 V_0$. Al crescere di V_0 la portata aumenta, ma V_e resta quasi invariata (dipende soprattutto dai processi interni di compressione e combustione, non da V_0); quindi la differenza $V_e - V_0$ diminuisce. Nella (142) i due effetti tendono a compensarsi, per cui la spinta è una funzione *debole* della velocità. In prima approssimazione, a velocità subsoniche:

T ragionevolmente costante con V_0 .

Effetto della quota. Poiché $\dot{m}_a = \rho_\infty A_1 V_0$, al crescere della quota ρ_∞ diminuisce, e con essa la portata e dunque la spinta. La variazione si esprime tramite il rapporto delle densità:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = \sigma. \quad (153)$$

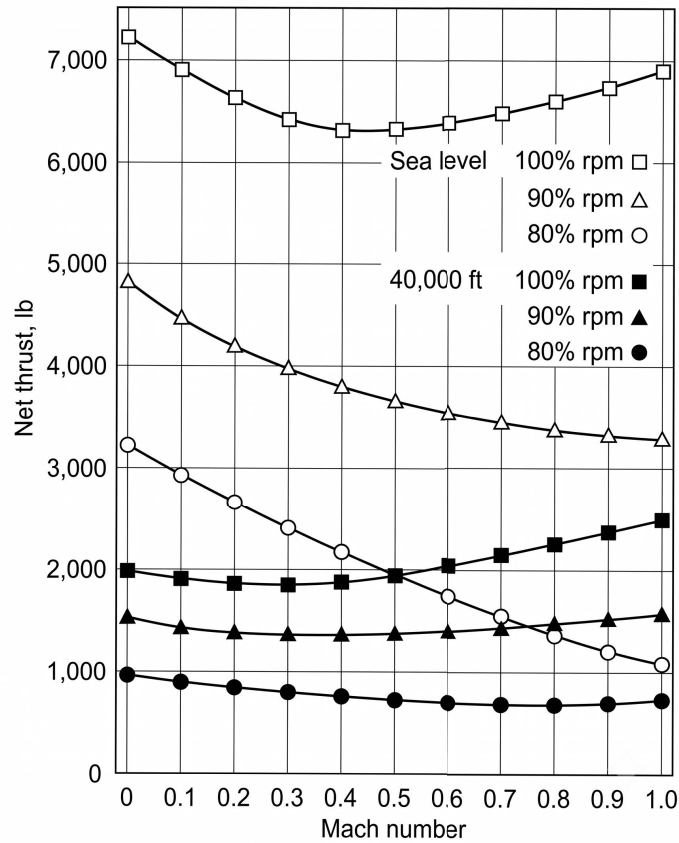


Figura 28. Spinta di un turbogetto in funzione del numero di Mach, a due quote (livello del mare e 40.000 ft) e per tre regimi di rotazione. In quota T è una funzione molto debole del Mach.

Considerando i *ratings* di salita e crociera, si assumono valide:

$$\text{Max climb (salita):} \quad T = 0,90 \sigma T_0 \varphi, \quad (154)$$

$$\text{Max cruise (crociera):} \quad T = 0,85 \sigma T_0 \varphi. \quad (155)$$

Il consumo specifico cresce in modo monotono con il numero di Mach; a bassa velocità vale circa 1 lb/(lbf h). Per $M < 1$ si può scrivere $\text{TSFC} = 1,0 + k M$, con k funzione di quota e regime (a 40.000 ft, $k \approx 0,5$). L'effetto della quota sul consumo è debole e si assume SFC_J costante con la quota.

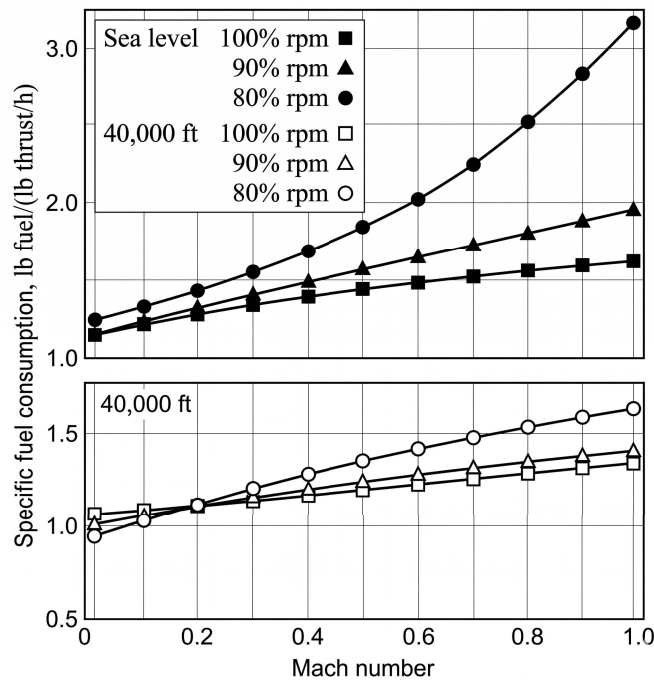


Figura 29. Consumo specifico SFC_f di un turbogetto in funzione del numero di Mach: cresce monotonicamente con la velocità di volo.

8.9 Regime supersonico

In regime supersonico la spinta cresce quasi linearmente con il Mach (più che raddoppia da $M = 1$ a $M = 2$). La ragione sta nel grande recupero di pressione totale nel diffusore della presa supersonica. Dalla relazione isentropica:

$$\frac{p_{\text{total}}}{p_{\text{static}}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad (156)$$

al crescere di M la pressione totale recuperata diventa molto grande; ciò incrementa fortemente V_e (gli ugelli supersonici sono convergenti-divergenti). Nella (142) aumentano sia $\dot{m}_a$ sia V_e , e dunque la spinta. Per il turbogetto Olympus 593 (Concorde) si può assumere:

$$\frac{T}{T_{M=1}} = 1 + 1,18 (M - 1), \quad (157)$$

mentre il consumo specifico cresce solo lievemente e si può ritenere costante.

Nota

È proprio il miglior consumo specifico del turbogetto al Mach di progetto $M = 2,2$ la ragione per cui il Concorde montò quattro turbogetti Rolls-Royce/SNECMA Olympus 593, e non turbofan. Su un turbofan il consumo specifico cresce molto con il Mach, rendendolo svantaggioso a velocità così elevate.

9 Il motore turbofan (turboventola)

Il turbofan nasce dall'esigenza di combinare l'alta spinta del turbogetto con l'alto rendimento dell'elica. Il cuore (*core*) è un turbogetto (diffusore, compressore, combustore, turbina, ugello); la turbina aziona però anche una grande **ventola** (*fan*) esterna al core, contenuta in una gondola. Il flusso si divide in due percorsi:

- il **flusso secondario (freddo)** attraversa solo il fan e fluisce esternamente al core; è trattato come da un'elica intubata, con rendimento prossimo a quello di un'elica;

- il **flusso primario (caldo)** attraversa il core e subisce il ciclo Brayton, con rendimento di un turbogetto.

Il rendimento propulsivo globale è un compromesso tra i due: di grande successo, tanto che oggi la stragrande maggioranza degli aeroplani a getto monta turbofan.

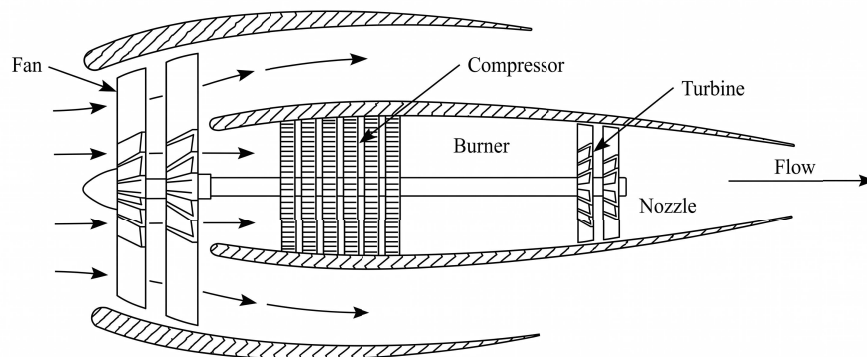


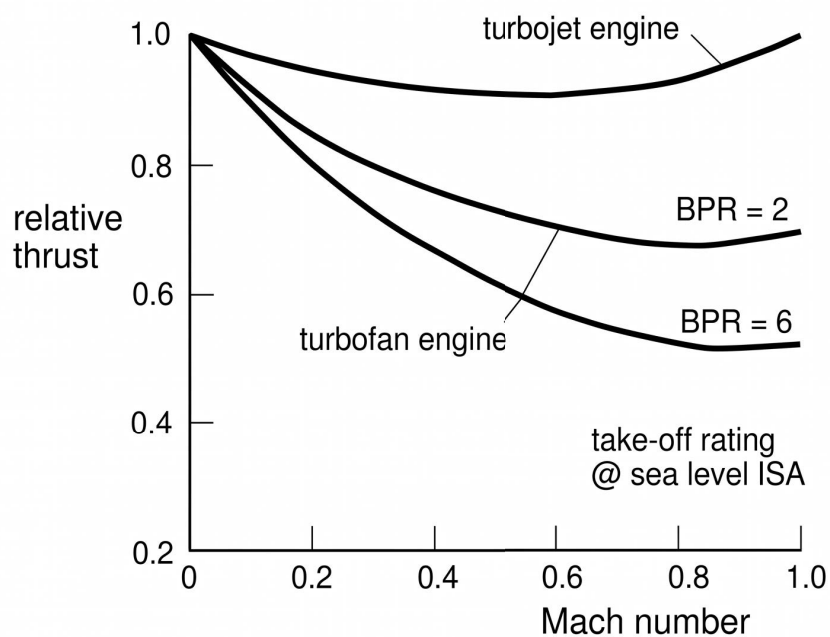
Figura 30. Schema di un turbofan: il fan, azionato dalla turbina, elabora il flusso secondario (freddo) esternamente al core. Sono evidenziati compressore e turbina di bassa e alta pressione, camera di combustione e ugello.

9.1 Il rapporto di diluizione (BPR)

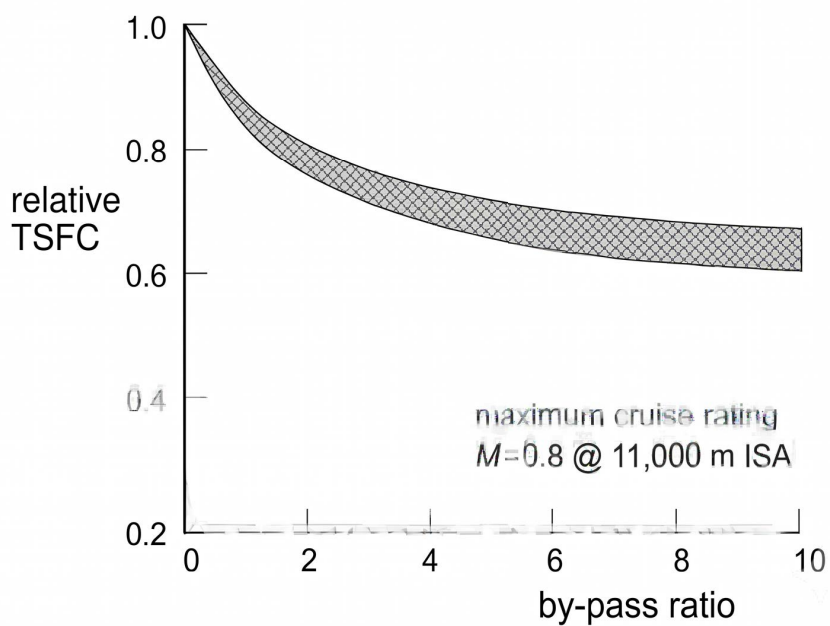
Rapporto di diluizione (By-Pass Ratio)

$$\text{BPR} = \frac{\text{portata di massa del flusso secondario (freddo)}}{\text{portata di massa del flusso primario (caldo)}}. \quad (158)$$

A parità d'altro, un BPR maggiore comporta minore velocità dei gas di scarico (e quindi rendimento propulsivo più alto, minor consumo e minor rumore), ma minore spinta specifica e maggiori dimensioni del motore (più peso e più resistenza della gondola). La riduzione di velocità dei gas si ottiene appunto separando il flusso freddo dal flusso caldo; il flusso freddo può miscelarsi con quello caldo prima dell'ugello (*flussi miscelati*) o restare separato (*flussi separati*).



(b) Thrust lapse with speed



(a) Specific fuel consumption

Figura 31. Evoluzione con il BPR: turbogetto (BPR = 0), turbofan a flussi miscelati (basso/medio BPR) e turbofan a flussi separati (alto BPR).

Tabella 4. Classificazione dei propulsori a getto in base al BPR, con esempi.

Categoria	Esempi (motore / velivolo)	BPR
Turbojet	Olympus 593 / Concorde	0
Low BPR turbofan	EJ200 / Eurofighter; F100 / F-15, F-16	$0 < \text{BPR} < 2$
Medium BPR turbofan	CFM56-7B27 / Boeing 737-800	$2 < \text{BPR} < 5$
High BPR turbofan	GE90 / Boeing 777; Trent 900 / A380	$\text{BPR} > 5$

Nota

I turbofan ad alto BPR (ordine di 5) equipaggiano i velivoli da trasporto civile e hanno un consumo specifico in crociera di circa 0,6 lb/(lbf h), quasi la metà di un turbogetto convenzionale: da qui il loro predominio. I velivoli militari ad alte prestazioni (F-15, F-16, Eurofighter) usano invece turbofan a basso BPR (circa 1-1,5), con prestazioni più vicine a quelle del turbogetto, per ottenere grandi spinte da motori compatti.

9.2 Variazione di spinta e consumo — turbofan ad alto BPR

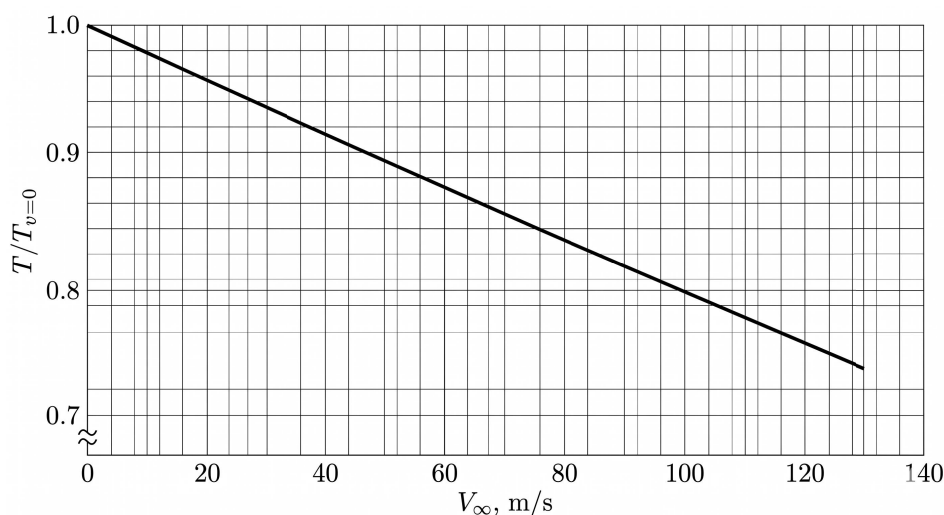
La spinta di un turbofan civile ha una variazione marcata con la velocità alle basse quote (comportamento “da elica”, dovuto al fan), mentre alle quote operative (oltre 25.000 ft) e ai Mach di crociera (0,70-0,85) è abbastanza costante.

Decollo. Per il decollo (basse quote) la spinta si riduce con la velocità secondo la legge (dati Rolls-Royce RB211-535E4):

$$K_T(V_0) = \frac{T}{T_0} \Big|_{V_0=0 \text{ rif.}} = 1 - 0,20 \frac{V_0}{100}, \quad (159)$$

con V_0 in m/s, valida fino a circa 140 m/s: la spinta cala del 20% ogni 100 m/s. A quote fino a 5.000 ft si moltiplica per $\sqrt{\sigma}$:

$$T = K_T(V_0) T_0 \sqrt{\sigma}. \quad (160)$$

**Figura 32.** Spinta al decollo di un turbofan in funzione della velocità: riduzione lineare descritta dalla (159).

Ratings del motore. Per ogni motore si definiscono condizioni di funzionamento (*ratings*) che il pilota adotta nelle diverse fasi:

- **MTO** (Max Take-Off): spinta massima al decollo, per circa 5 minuti; il valore a $V = 0$ e quota zero è la *spinta statica* o di targa T_0 .

- **MCT** (Max Continuous): spinta massima continuativa in volo, importante in caso di avaria di un motore.
- **MCL** (Max Climb): spinta massima per la salita (15–20 minuti).
- **MCR** (Max Cruise): spinta massima per la crociera (anche ore).
- **Idle**: spinta minima in volo (es. discesa).

Salita e crociera (modello K_{MZ}). Si definisce il fattore adimensionale

$$K_{MZ} = \frac{T}{T_{M=0, b=0}}, \quad (161)$$

funzione di Mach e quota. Le spinte disponibili nei ratings di salita e crociera si calcolano come:

$$\text{Salita (climb): } T = (0,87 T_0) K_{MZ}(M, z) \varphi, \quad (162)$$

$$\text{Crociera (cruise): } T = (0,83 T_0) K_{MZ}(M, z) \varphi. \quad (163)$$

I fattori 0,87 e 0,83 esprimono che le spinte massime di salita e crociera sono rispettivamente l'87% e l'83% della spinta di decollo T_0 . Il fattore K_{MZ} è ben rappresentato dalle polinomiali:

$$\begin{aligned} z = 0 \text{ (S/L)} : K_{MZ} &= 1,00 - 1,028 M + 0,608 M^2, \\ z = 10.000 \text{ ft} : K_{MZ} &= 0,79 - 0,651 M + 0,345 M^2, \\ z = 20.000 \text{ ft} : K_{MZ} &= 0,56 - 0,345 M + 0,216 M^2, \\ z = 30.000 \text{ ft} : K_{MZ} &= 0,32; \quad z = 35.000 \text{ ft} : K_{MZ} = 0,27; \\ z = 40.000 \text{ ft} : K_{MZ} &= 0,22; \quad z = 45.000 \text{ ft} : K_{MZ} = 0,18. \end{aligned}$$

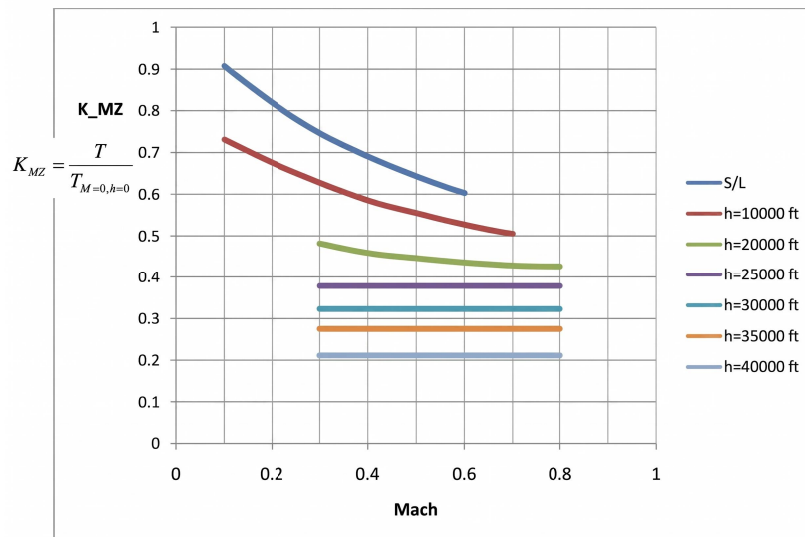


Figura 33. Fattore K_{MZ} (spinta relativa alla statica a quota zero) in funzione del Mach, per varie quote, per un turbofan ad alto BPR. Modello generico scalabile.

Spinta in crociera di un turbofan

Il motore JT8D montato sull'MD-80 ha spinta statica al decollo $T_0 = 8.400 \text{ kg}$ (forza-peso). Stimiamo la spinta in crociera a $M = 0,80$, 30.000 ft ($K_{MZ} = 0,32$), manetta al massimo ($\varphi = 1$):

$$T = (0,83 \cdot 8400) \cdot 0,32 \cdot 1 \approx 2.200 \text{ kg}.$$

Con manetta all'80% ($\phi = 0,80$):

$$T = (0,83 \cdot 8400) \cdot 0,32 \cdot 0,80 \approx 1.780 \text{ kg.}$$

In crociera la spinta disponibile è quindi circa il 20–25% di quella di decollo: l'effetto è dovuto soprattutto alla bassa densità alle alte quote.

Variazione con la quota. Alle quote operative la dipendenza dalla quota è simile a quella del turbogetto. Si può usare la legge di Mattingly:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^m \quad (m \approx 1), \quad (164)$$

oppure l'approssimazione $K_{MZ} = k \sigma$ (per il JT9D-7A, $k \approx 0,86$).

9.3 Modello semplificato del turbofan ad alto BPR

Per analisi rapide (non al calcolatore) si può adottare il seguente modello (BPR tra 5 e 6,5):

Modello semplificato turbofan ad alto BPR

Decollo (S/L e quote fino a 5.000 ft, ϕ massimo):

$$T = K_T(V_0) T_0, \quad T = K_T(V_0) T_0 \sqrt{\sigma} \text{ (in quota),}$$

con $K_T = 1 - 0,20 V_0/100$.

Salita (Max Climb):

$$\begin{aligned} T &= 0,83 K_T(V_0) T_0 \phi && \text{(quota S/L)} \\ T &= 0,83 K_T(V_0) T_0 \phi \sqrt{\sigma} && \text{(quote basse, fino a 15.000 ft)} \\ T &= 0,75 \sigma T_0 \phi && \text{(alte quote, oltre 20.000 ft, costante con } V) \end{aligned}$$

Crociera (Max Cruise):

$$T = 0,71 \sigma T_0 \phi \quad \text{(alte quote, oltre 20.000 ft, costante con } V).$$

Potenza disponibile: $\Pi_d = T V_0$.

9.4 Consumo specifico del turbofan

Il consumo specifico varia sia con la quota sia con il Mach. Nell'intorno del Mach di crociera ($0,7 < M < 0,85$):

$$c_t = B(1 + k M), \quad (165)$$

con B e k costanti empiriche. Il forte incremento di c_t con la velocità spiega perché i turbofan non furono usati sul Concorde ($M = 2,2$). Con la quota il consumo è abbastanza costante (variazione $\sim 5\%$ tra 9.000 m e 11.000 m). I valori tipici in crociera (35.000 ft, $M = 0,80$) per alto BPR sono:

$$\text{SFC}_f = \text{da } 0,55 \text{ lb/(lbf h)} \text{ a } 0,70 \text{ lb/(lbf h)}. \quad (166)$$

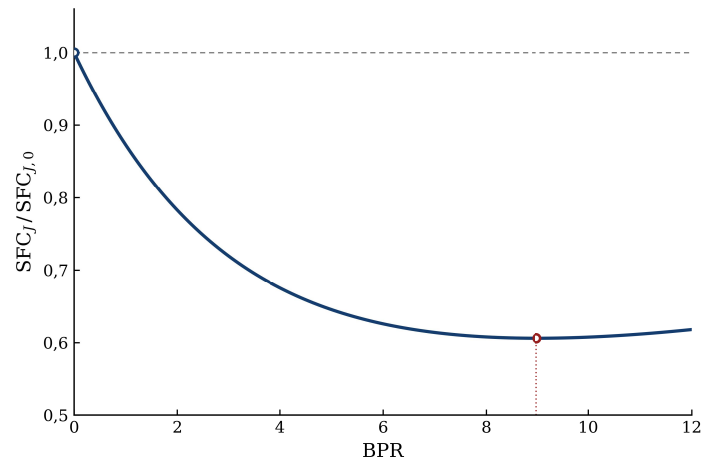


Figura 34. Variazione relativa del consumo specifico SFC_f con il rapporto di diluizione (BPR): cresce il BPR, cala il consumo specifico.

9.5 Gli inversori di spinta (thrust reverser)

In atterraggio, dopo il contatto, vengono azionati gli inversori di spinta, che deviano in avanti il getto producendo una decelerazione rapida (insieme agli aerofreni), prima dell'azione dei freni alle ruote. La configurazione dipende dal motore:

- tipo *clamshell* o *target*: utilizza il flusso *caldo*; applicato a turbojet e turbofan a basso BPR;
- tipo *cascade*: utilizza il flusso *freddo*; applicato a turbofan a medio/alto BPR.

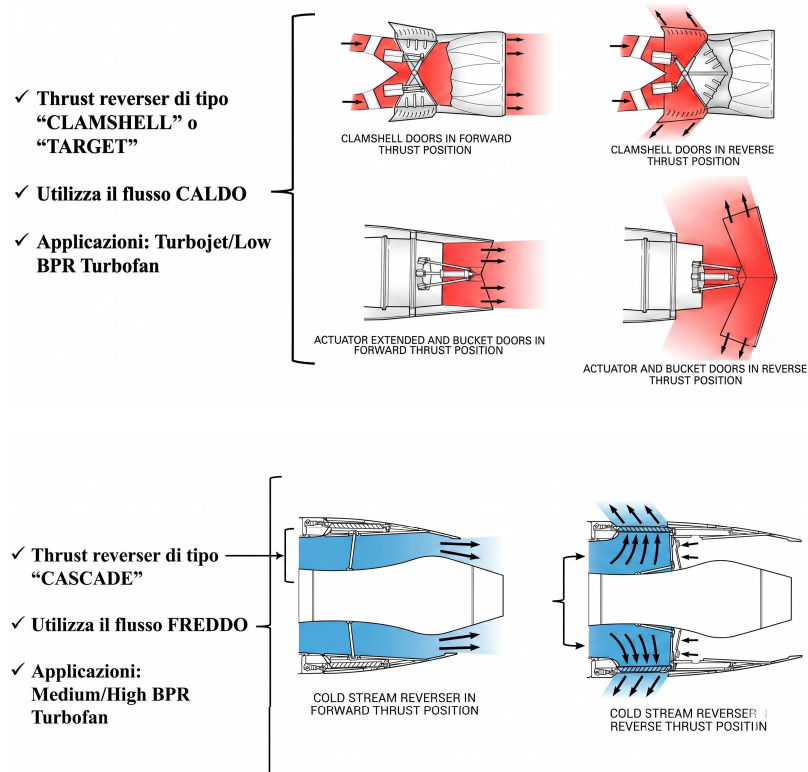


Figura 35. Inversori di spinta: tipo *clamshell/target* (flusso caldo) e tipo *cascade* (flusso freddo), nelle posizioni di spinta diretta e inversa.

10 Il motore turboelica (turboprop)

La turboelica è essenzialmente un'elica azionata da una turbina a gas: è il propulsore a turbina più vicino alla combinazione motore alternativo/elica. Una piccola parte della spinta (circa il 5–10%) deriva dal getto di scarico, ma la quota dominante (90–95%) è generata dall'elica, sempre a giri costanti.

10.1 Architettura e caratteristiche generali

L'aria, compressa e bruciata, si espande in turbina cedendo lavoro. A differenza del turbogetto, la turbina aziona non solo il compressore ma anche l'elica. Si distinguono due architetture:

- **turbina collegata al compressore:** un unico gruppo turbina;
- **turbina libera (*free turbine*):** la turbina di bassa pressione, indipendente, aziona l'elica, mentre quella di alta pressione aziona il compressore. È l'architettura più frequente (es. Pratt & Whitney PT6A).

È sempre necessaria una **scatola di riduzione** (*gear box*): la turbina gira a decine di migliaia di giri (da 10.000 rpm a 15.000 rpm), mentre l'elica deve girare a da 2.000 rpm a 2.500 rpm per evitare onde d'urto alle estremità.

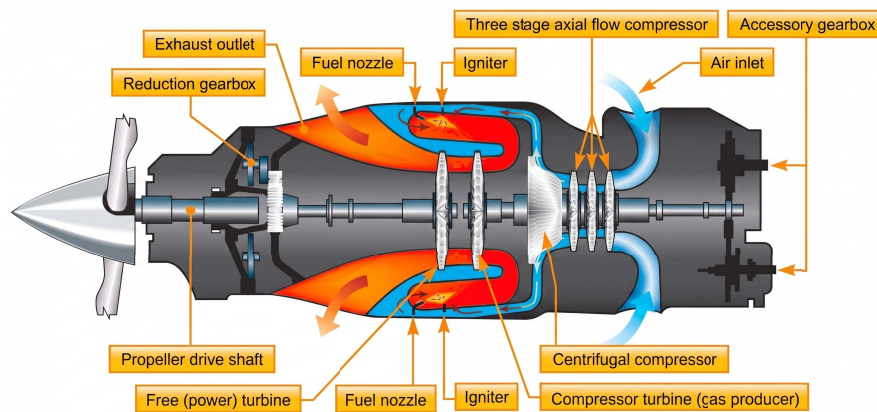


Figura 36. Schema di un motore turboelica con turbina libera (Pratt & Whitney PT6A): presa d'aria, compressore, camera di combustione, turbina del generatore di gas, turbina libera di potenza, scatola di riduzione ed elica.

Le prestazioni sono *intermedie* tra motoelica e turbogetto:

- elevata efficienza dovuta all'elica, quindi consumi minori del turbogetto (ma maggiori della motoelica);
- potenze molto più elevate della motoelica (anche da 10.000 shp a 11.000 shp), inferiori al turbogetto; idonea anche a velivoli da trasporto di grandi dimensioni;
- velocità massime limitate a da 350 kts a 400 kts ($M \approx 0,6-0,7$), per la caduta di rendimento dell'elica alle alte velocità (onde d'urto alle estremità delle pale).

10.2 Potenza disponibile, potenza equivalente e spinta

La spinta totale è somma del contributo dell'elica T_p e del getto T_j . La potenza disponibile (potenza netta che include sia la potenza all'albero che la spinta del getto) è:

$$\Pi_d = (T_p + T_j) V_0 = \eta_p \Pi_a + T_j V_0. \quad (167)$$

È utile introdurre la *potenza all'albero equivalente* Π_{ea} (*equivalent shaft horsepower, eshp*), che ingloba l'effetto della spinta del getto come se tutta la potenza passasse per l'albero:

$$\Pi_d = \eta_p \Pi_{ea}. \quad (168)$$

Dimostrazione

Eguagliando le (167) e (168):

$$\eta_p \Pi_{ea} = \eta_p \Pi_a + T_j V_0 \Rightarrow \Pi_{ea} = \Pi_a + \frac{T_j V_0}{\eta_p}.$$

La potenza equivalente è dunque la potenza all'albero effettiva Π_a aumentata del contributo del getto, riportato all'albero dividendo per il rendimento dell'elica. $\square$

Nota

La turboelica ha una intrinseca *ambivalenza*: è più pertinente la spinta o la potenza? Non c'è una risposta univoca. Di conseguenza il consumo specifico può essere riferito alla spinta totale, oppure alla potenza disponibile Π_d , alla potenza all'albero Π_a o alla potenza equivalente Π_{ea} . È sempre indispensabile, leggendo le specifiche del costruttore, accertarsi di quale definizione sia in uso. Una regola pratica: in condizioni statiche a terra una turboelica produce circa 2,5 lbf di spinta per cavallo all'albero.

10.3 Variazione di potenza e consumo con velocità e quota

Effetto della velocità (effetto RAM). La potenza all'albero cresce con la velocità per effetto del ristagno dinamico. Si introduce il fattore K_v :

$$K_v = 1,00 + 0,0080 \left(\frac{V_0}{100} \right)^2, \quad V_0 \text{ in km/h.} \quad (169)$$

In prima approssimazione, l'incremento di potenza è circa il 10% a 350 km/h e il 20% a 500 km/h.

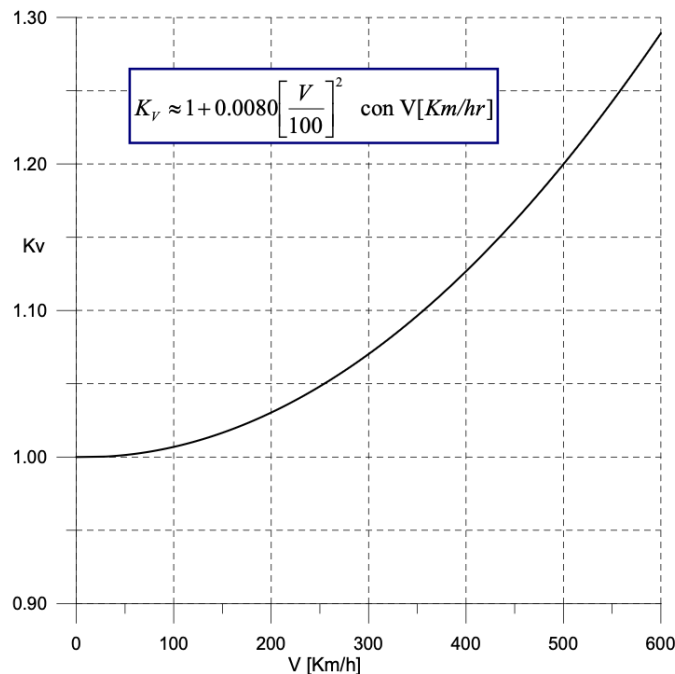


Figura 37. Effetto RAM nel motore turboelica: fattore K_v (incremento di potenza all'albero) in funzione della velocità di volo, secondo la (169).

Effetto della quota. I dati sono ben correlati da $\Pi_a/\Pi_{a0} = (\rho/\rho_0)^n$ con $n = 0,7$. Per semplicità, nei calcoli di prestazioni, si può assumere la legge lineare $\Pi_a/\Pi_{a0} = \sigma$.

Potenza all'albero della turboelica

$$\Pi_a = \Pi_{a0} \varphi \sigma K_v \quad (170)$$

con Π_{a0} potenza di targa (massima al decollo), φ grado di ammissione, σ rapporto delle densità, K_v effetto RAM. La potenza disponibile è $\Pi_d = \eta_p \Pi_a$, con η_p costante con la velocità (elica a giri costanti).

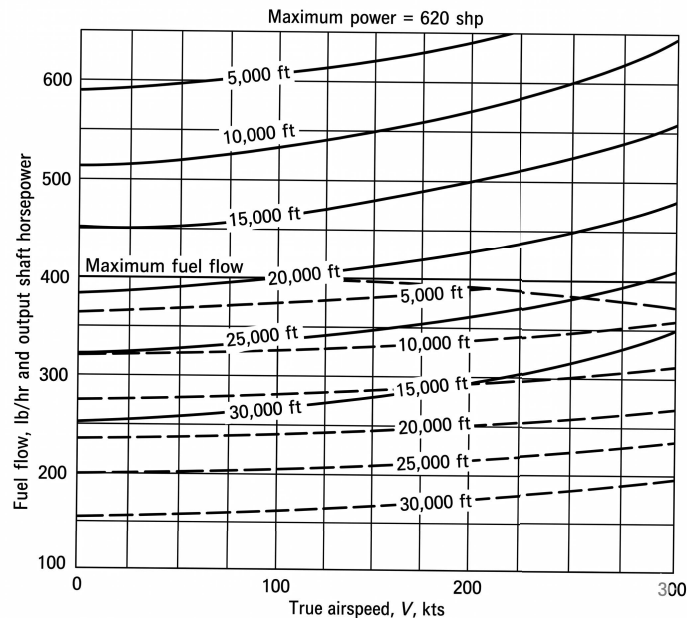


Figura 38. Dipendenza della potenza all'albero di una turboelica (es. PT6A) dalla velocità di volo e dalla quota.

Il consumo specifico tipico è $SFC =$ da 0,60 lb/(shp h) a 0,70 lb/(shp h) (contro 0,40–0,50 della motore), ritenuto costante con velocità e quota (lieve riduzione del 10% dal livello del mare a 20.000 ft). Se riferito alla potenza equivalente, l'unità diventa lb/(eshp h).

Nota

Per analisi non al calcolatore, in luogo della legge (169) si può incrementare forfettariamente la potenza all'albero: +5% a 250 km/h, +10% a 350 km/h, +13% a 400 km/h (bimotori tipo King Air), +20% a 500 km/h (tipo ATR 42).

II I componenti dei motori a getto**Dal motore ai suoi organi**

Finora abbiamo trattato i componenti del motore come “scatole nere”, caratterizzate da un rendimento (la presa con ε_d , il compressore con η_c , la turbina con η_t , e così via) senza guardarvi dentro. Questa sezione apre quelle scatole: per ciascun organo — presa d'aria, compressore, camera di combustione, turbina, ugello — vediamo *come* è fatto, *quali* compromessi ne governano il progetto, e *perché* assume la forma che ha. È il passaggio dalla termodinamica del ciclo all'ingegneria del motore reale, e fornisce il vocabolario necessario per leggere lo spaccato di un turbofan moderno riconoscendone ogni parte.

II.1 La presa d'aria (presa dinamica, diffusore)

La presa d'aria è il primo organo che il flusso incontra. Il suo compito è duplice: **rallentare** l'aria fino a un numero di Mach ($M \approx 0,4 \div 0,5$, cioè ~ 150 m/s) compatibile con l'ingresso del compressore, e operare una **prima compressione** sfruttando l'energia cinetica del flusso (effetto RAM). Deve farlo perseguendo quattro obiettivi spesso in conflitto:

1. un flusso **uniforme** all'uscita: ogni disuniformità si propaga a valle e, all'ingresso turbina, crea zone a temperatura non ottimale che penalizzano le prestazioni (la turbina lavora al limite dei materiali, e non può tollerare picchi locali);
2. la **minima perdita di pressione totale** (ogni caduta di p_0 riduce il salto entalpico disponibile a valle);
3. la minima **resistenza aerodinamica** esterna;
4. il minimo **peso**, che sostanzialmente significa la minima lunghezza.

La differenza più importante è tra prese subsoniche e supersoniche, che seguono logiche opposte.

II.1.1 Prese subsoniche: un divergente delicato

In volo subsonico la presa deve *rallentare* il flusso: per il comportamento del flusso subsonico (§6.7) serve un condotto **divergente**. Il rapporto d'area si ricava dalla legge delle aree (III): per rallentare da $M_0 \approx 0,8$ a $M_2 \approx 0,4$ basta un rapporto $A_2/A_1 \approx 1,4$.

Il nemico della presa subsonica: il distacco

La presa subsonica vive sotto un *gradiente di pressione avverso*: la pressione cresce nella direzione del moto (il flusso rallenta e si comprime), e questo tende a “frenare” lo strato limite fino a staccarlo dalle pareti, creando ricircolazioni che degradano le prestazioni. Per questo non si può aprire il divergente quanto si vorrebbe: oltre un semiangolo di $\sim 10^\circ$ il flusso si separa. In pratica si resta su $5^\circ \div 7^\circ$, accettando una presa più lunga (e quindi più pesante) pur di mantenere il flusso attaccato. È l'opposto di un ugello, dove il gradiente favorevole (pressione decrescente) permette geometrie più aggressive senza rischio di distacco.

La presa che “respira” al variare della velocità

Il comportamento della presa subsonica cambia con la velocità di volo, e in modo che vale la pena visualizzare. A velivolo fermo o lento (fino a $M_0 \approx 0,5$) il motore “aspira” più aria di quanta ne arrivi naturalmente: le linee di corrente *convergono* verso l'imbocco, e l'aria si espande già fuori dalla presa. Oltre $M_0 \approx 0,5$ accade il contrario: il tubo di flusso catturato si *restringe* avvicinandosi alla presa, l'aria si comprime già all'esterno (compressione “gratuita” e senza attrito di parete), e questo contributo si somma a quello interno. È il motivo per cui negli elicotteri (turboalbero), che volano sempre ben sotto $M_0 = 0,5$, la presa *non* è divergente ma convergente: un divergente non farebbe che aumentare la depressione che il compressore deve creare per richiamare l'aria.

I due indici di rendimento della presa sono il *rapporto di pressioni totali* $\varepsilon_d = p_{02}/p_{0a}$ e il *rendimento adiabatico* η_d ; entrambi *diminuiscono* all'aumentare del Mach di volo, per il crescere delle perdite per attrito. Una nota costruttiva: nei trigetto con motore in coda (Boeing 727, DC-10, L-1011) la presa a condotto curvo (*S-bend*) è lunga e introduce disuniformità; le configurazioni a presa diretta le limitano, al prezzo di un rinforzo strutturale della deriva.

II.1.2 Prese supersoniche: governare gli urti

In volo supersonico la presa deve rallentare il flusso da supersonico a subsonico, e questo — lo sappiamo da §6.12 — non può avvenire senza urti. La scelta del tipo di presa è quindi la scelta di *come gestire gli urti* per minimizzarne le perdite.

Presa convergente-divergente: bella in teoria, impraticabile. In teoria, un flusso supersonico si potrebbe rallentare isentropicamente con un convergente (fino a $M = 1$ in gola) seguito da un divergente subsonico. Ma c'è un ostacolo fatale: l'*avviamento*. Durante l'accelerazione del velivolo, a Mach inferiori a quello di progetto, la gola risulta troppo stretta per far defluire la portata che investe la presa; il flusso in eccesso non può essere spillato (in supersonico non risale la corrente), e si forma comunque un urto davanti alla presa. Far "ingoiare" l'urto richiede un sovravelocità (*overspeeding*) che la sola analisi 1D mostra possibile solo per Mach di progetto sotto 2, o una geometria variabile complicata. In pratica, non si usa.

Presa a urto normale (Pitot): la più semplice. È una presa divergente identica a quella subsonica, davanti alla quale, in volo supersonico, si forma un *urto normale*. Semplice e leggera, ma le perdite di pressione totale dell'urto normale (§6.12.1) crescono rapidamente col Mach: accettabile fino a $M_0 \approx 1,5 \div 1,6$ (perdite sotto il 10%), inaccettabile oltre.

Presa a urti obliqui: la soluzione per l'alto supersonico. Per Mach elevati si usa una serie di *urti obliqui* (su una spina conica o un cuneo), più deboli dell'urto normale (§6.13), seguiti da un urto normale finale debole. Ogni urto obliquo rallenta un poco il flusso perdendo poca p_0 ; la perdita complessiva degli $n + 1$ urti diminuisce all'aumentare di n . Però ogni rampa devia ulteriormente il flusso, che alla fine va riportato in direzione assiale (con altre perdite e maggior lunghezza): esiste quindi un numero ottimo di urti, crescente col Mach (un urto obliquo fino a $M_0 = 2$, due per $2 < M_0 \leq 2,5$, e così via).

La compressione esterna risolve l'avviamento

Le prese a urti obliqui a *compressione esterna* hanno un pregio decisivo: poiché la compressione avviene prima dell'imbocco, il flusso può adattarsi alle diverse velocità di volo senza il problema di avviamento della convergente-divergente. Per il massimo rendimento, tutti gli urti (obliqui e normale) devono convergere sul labbro della presa: poiché l'angolo degli urti dipende dal Mach, le prese ad alte prestazioni usano una *spina* o un *cuneo mobili*, regolati in volo. Le prese assialsimmetriche (a spina conica) danno flusso più uniforme; quelle rettangolari (a cuneo), meno efficienti, tollerano meglio angoli d'attacco e imbardata, e sono perciò preferite sui caccia.

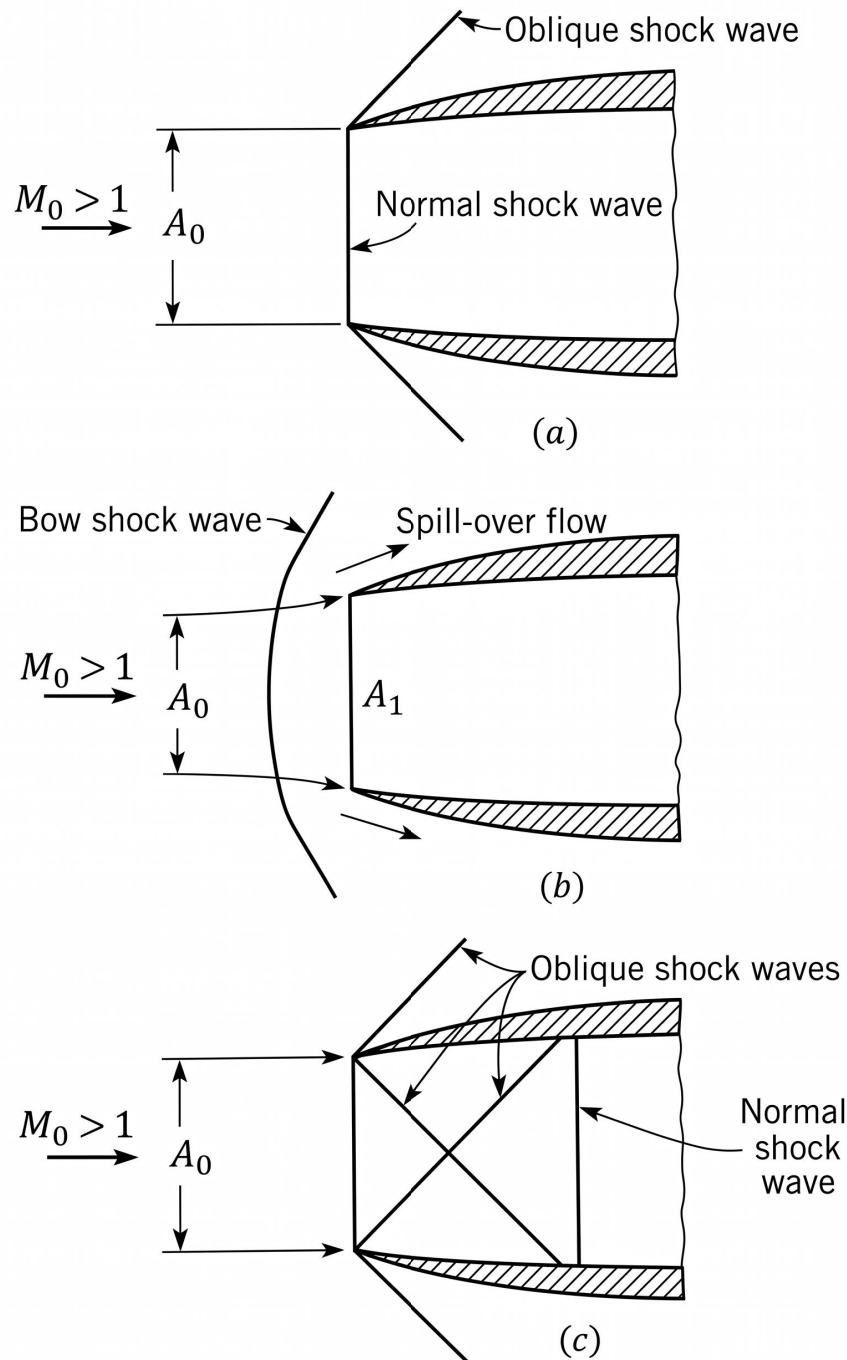


Figura 39. Tipi di presa d'aria supersonica: (a) a urto normale (Pitot), semplice ma con alte perdite oltre $M_0 \approx 1,6$; (b) a uno o più urti obliqui generati da una spina/cuneo, con urto normale finale: le perdite di pressione totale calano all'aumentare del numero di urti.

II.2 Le turbomacchine: come si scambia lavoro col flusso

Compressore e turbina sono entrambe *turbomacchine*: macchine che scambiano lavoro con il fluido tramite una ruota palettata (**rotore** o girante) calettata su un albero, alloggiata in una cassa che porta a sua volta pale fisse (**statore**). Il compressore è una macchina *operatrice* (cede energia al fluido, $L_s < 0$); la turbina è *motrice* (estrae energia, $L_s > 0$). Prima di esaminarli separatamente, conviene capire il principio comune che lega il lavoro scambiato alla geometria delle pale: l'equazione di Eulero.

Equazione di Eulero delle turbomacchine

Il lavoro scambiato per unità di massa dipende solo dalle componenti *tangenziali* della velocità assoluta del fluido, all'ingresso e all'uscita del rotore:

$$L_s = U_2 u_{t,2} - U_1 u_{t,1}, \quad (171)$$

dove $U = \omega r$ è la velocità periferica della pala al raggio r e u_t la componente tangenziale della velocità del fluido. Per una macchina *assiale* ($r_2 \simeq r_1$, quindi $U_2 \simeq U_1 = U$) si riduce a

$$L_s = U \Delta u_t. \quad (172)$$

Dal momento della quantità di moto

Solo la componente tangenziale della velocità ha momento rispetto all'asse. Il flusso di momento della quantità di moto entrante è $\dot{m} u_{t,1} r_1$, quello uscente $\dot{m} u_{t,2} r_2$. Per la seconda equazione cardinale, la coppia all'albero è $C = \dot{m} (u_{t,2} r_2 - u_{t,1} r_1)$. La potenza è $P = C \omega = \dot{m} (\omega r_2 u_{t,2} - \omega r_1 u_{t,1}) = \dot{m} (U_2 u_{t,2} - U_1 u_{t,1})$, da cui, dividendo per $\dot{m}$, la (171). $\square$

Perché le macchine radiali rendono di più per stadio

L'equazione di Eulero spiega una scelta progettuale fondamentale. In una macchina *radiale* (centrifuga) il raggio d'uscita è molto maggiore di quello d'ingresso ($r_2 \gg r_1$, quindi $U_2 \gg U_1$): il primo termine della (171) domina e si può scambiare un lavoro *elevatissimo* in un solo stadio. In una macchina *assiale* ($r_2 \simeq r_1$) il lavoro per stadio è modesto, e servono molti stadi. È il compromesso centrale tra le due architetture di compressore.

Triangoli di velocità. Il legame tra lavoro e geometria delle pale si visualizza con i *triangoli di velocità*: in ogni sezione, la velocità assoluta $\tilde{u}$ del fluido è la somma della velocità *relativa* alla pala $\tilde{w}$ (diretta lungo la pala) e della velocità di trascinamento $\tilde{U}$ (tangenziale, dovuta alla rotazione): $\tilde{u} = \tilde{w} + \tilde{U}$. Le pale del rotore, deviando il flusso, ne cambiano la componente tangenziale u_t : è questa deviazione — per la (172) — a “misurare” il lavoro scambiato.

11.3 Il compressore

Il compressore eleva la pressione dell'aria spendendo il lavoro estratto dalla turbina. Può essere centrifugo o assiale.

11.3.1 Compressore centrifugo

Nel compressore centrifugo l'aria entra assialmente, viene accelerata radialmente verso l'esterno dal rotore (*impeller*) e poi rallentata e compressa nello statore (*diffuser*). Per l'equazione di Eulero, sfruttando il grande r_2/r_1 , raggiunge rapporti di compressione fino a ~ 10 in un solo stadio: è quindi semplice ed economico (pochi stadi). Il suo difetto fatale per l'aeronautica è la grande **area frontale**, che genera molta resistenza aerodinamica. È perciò relegato a motori di potenza limitata (piccoli turboalbero, APU).

11.3.2 Compressore assiale

È la scelta universale per i motori di una certa potenza. Il flusso resta parallelo all'asse, e ogni stadio (rotore + statore) fornisce un rapporto di compressione modesto ($\beta_{c,i} \approx 1,2 \div 1,7$). Per ottenere i rapporti complessivi richiesti (fino a 40–50 nei motori moderni) si dispongono **molti stadi** in serie (15–20), e il rapporto totale è il prodotto di quelli dei singoli stadi:

$$\beta_c = \prod_{i=1}^N \beta_{c,i}. \quad (173)$$

Perché il compressore è “difficile” e la turbina “facile”

C'è un'asimmetria profonda tra compressore e turbina, e nasce dal *gradiente di pressione*. Nel compressore la pressione *cresce* nel senso del moto: il gradiente è *avverso*, tende a far rifluire e staccare il flusso dalle pale. Per questo ogni stadio può elaborare solo un piccolo salto di pressione (curvature di pala contenute), e ne servono molti. Nella turbina la pressione *cala* nel senso del moto: gradiente *favorevole*, il flusso è “spinto” e resta attaccato anche con pale molto curve. Per questo **pochi stadi di turbina** (1–4) bastano ad azionare molti stadi di compressore, e per questo il rendimento di turbina è sempre un po' superiore a quello di compressore ($\eta_t > \eta_c$). È lo stesso motivo per cui la presa (che comprime) è delicata e l'ugello (che espande) è robusto.

Sezioni multiple e “spool” coassiali

Le pale del primo stadio sono lunghe (l'aria è poco densa) e quindi pesanti: gli sforzi centrifughi limitano la velocità di rotazione, e con essa — per Eulero — il lavoro per stadio. La soluzione è dividere il compressore in sezioni che ruotano a velocità *diverse*, ciascuna azionata da una propria turbina tramite alberi coassiali: bassa pressione (LP) lenta, alta pressione (HP) veloce. Si parla di configurazione *twin-spool* (due alberi, preferita da GE e Pratt & Whitney) o *triple-spool* (tre alberi: LP/fan, IP, HP, preferita da Rolls-Royce). Lungo il compressore la densità cresce e, a velocità assiale costante, la sezione di passaggio si restringe: le pale diventano progressivamente **più corte** stadio dopo stadio.

Dettagli costruttivi notevoli: gli statori a *calettamento variabile* adattano gli angoli alle diverse fasi di volo; le estremità delle pale sono sagomate a “unghia” per minimizzare il gioco (*gap*) con la cassa senza danni in caso di contatto; la configurazione *blisk* (*blade + disk*, pala e disco in un solo pezzo) e la più recente *bling* (*bladed ring*) riducono peso e migliorano l'aerodinamica, al prezzo di riparazioni più onerose in caso di danno (es. *bird strike*).

II.3.3 Il fan

Il fan è un compressore particolare, di uno o due stadi, che comprime *tutta* la portata del motore (primaria + secondaria) dando un piccolo incremento di pressione. Poiché elabora una portata enorme a bassa densità, ha pale lunghissime che pesano molto: per contenerne la massa si realizzano **cave** (con anima a nido d'ape o strutture di rinforzo) o in *composito*. Una pala del fan del GE90, in composito, supera i 120 cm di lunghezza ma pesa meno di 22 kg.

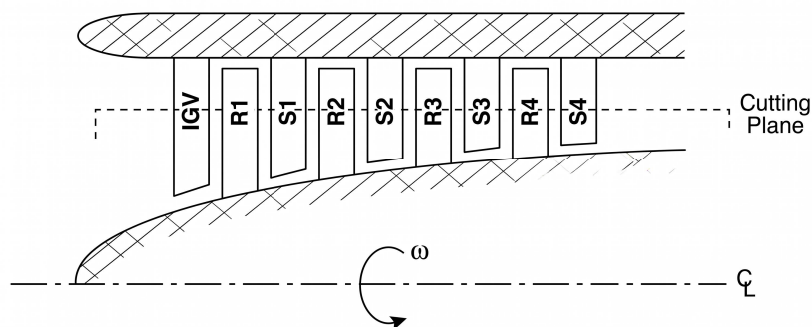


Figura 40. Compressore assiale pluristadio: rotore (pale rotanti) e statore (pale fisse) per ogni stadio. La sezione di passaggio si restringe verso valle (densità crescente, velocità assiale costante), quindi le pale si accorciano stadio dopo stadio.

11.4 La camera di combustione

Nella camera di combustione l'energia chimica del combustibile diventa energia termica del flusso: è qui che il ciclo Brayton riceve il suo calore Q_b . Il processo deve compiersi in sei fasi, in uno spazio brevissimo e in pochi millisecondi: *iniezione* del combustibile liquido, sua *atomizzazione* in goccioline fini, *evaporazione*, *miscelamento* con l'aria, *accensione*, e *completamento* della reazione.

Il rapporto combustibile/aria e il rapporto di equivalenza

La grandezza che governa la combustione è il rapporto combustibile/aria $f = \dot{m}_f / \dot{m}_a$. Per confrontarlo col valore "ideale" si usa il *rapporto di equivalenza* $\phi = f/f_{st}$, normalizzato rispetto al valore *stechiometrico* f_{st} (quello per cui combustibile e ossigeno si consumano esattamente a vicenda). Per il cherosene $f_{st} \approx 1/15 \approx 0,067$. Si ha $\phi = 1$ alla stechiometria, $\phi < 1$ in miscela *povera* (eccesso d'aria), $\phi > 1$ in miscela *ricca* (eccesso di combustibile).

Il problema centrale: troppa aria per accendere

Ecco il paradosso che determina tutta l'architettura del combustore. Per non fondere le palette della turbina, il rapporto combustibile/aria *globale* deve essere molto basso: $f \approx 0,02$, cioè $\phi \approx 0,3$. Ma una miscela così povera *non si accende*: l'accensione è possibile solo in un intervallo ristretto attorno a $\phi = 1$ (i *limiti di infiammabilità*), intervallo che per giunta si restringe al calare della pressione — da cui la difficoltà di riaccendere il motore ad alta quota. Come si concilia un ϕ globale di 0,3 con la necessità di un ϕ locale vicino a 1 per accendere?

La soluzione: dividere l'aria in zone

La risposta è geniale e definisce la forma del combustore. L'aria viene divisa, mediante un *liner* (un lamierino forato che delimita la zona di fiamma), in due correnti:

- **l'aria primaria** (circa il 20% del totale) entra in testa al liner e si mescola col combustibile in proporzione quasi stechiometrica ($\phi \approx 1$): qui la miscela accende e brucia, raggiungendo temperature oltre i 2000 K;
- **l'aria secondaria** (o di diluizione, il restante 80%) scorre *fuori* dal liner e viene immessa progressivamente attraverso i fori, a valle della zona di fiamma, per *raffreddare* i gas combusti fino alla temperatura T_4 accettabile dalla turbina.

Così il combustore opera con ϕ globale basso (0,3) ma con ϕ locale prossimo a 1 nella zona primaria: si accende dove serve, si raffredda dove serve. L'aria di diluizione svolge anche un ruolo di raffreddamento delle pareti del liner.

Geometrie. Tre architetture, con compromessi diversi:

- **tubolari** (*can*): più liner cilindrici separati (7–16) attorno all'asse. Robuste, facili da provare e sostituire singolarmente, ma pesanti e ingombranti.
- **tubo-anulari** (*can-annular*): liner cilindrici dentro un unico involucro toroidale. Buon compromesso.
- **anulari** (*annular*): un'unica camera toroidale. Leggere, compatte, basse perdite di pressione (basso rapporto superficie/volume, quindi ε_b alto), ma costruttivamente delicate. È la soluzione dominante nei motori moderni.

Prestazioni richieste. Combustione quasi completa (η_b prossimo a 1), basse perdite di pressione (ε_b prossimo a 1), basse **emissioni** (NO_x , CO, incombusti, particolato), profilo di temperatura in uscita *uniforme*

(anzi, leggermente più freddo alla radice e alla sommità delle pale di turbina, dove gli sforzi e le tenute sono critici), dimensioni contenute (ma non troppo: ridurre la camera riduce il tempo di residenza e quindi la completezza della combustione — l'ennesimo compromesso), combustione stabile e affidabile in tutto l'involuppo di volo.

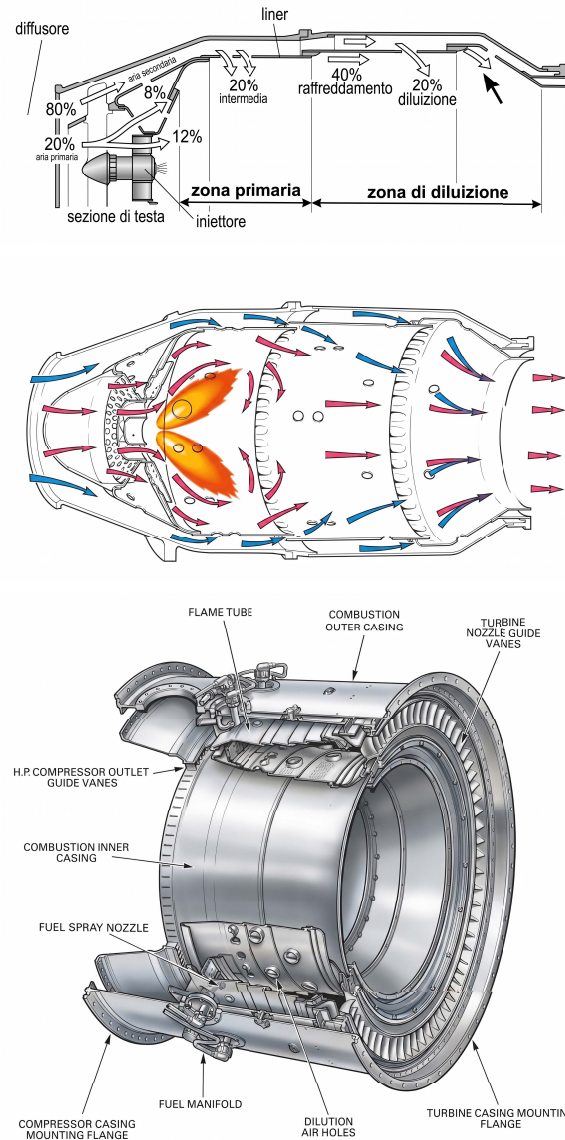


Figura 41. Camera di combustione anulare: l'aria primaria ($\sim 20\%$) entra in testa al liner e brucia a $\varphi \approx 1$ (zona di fiamma, oltre 2000 K); l'aria secondaria di diluizione ($\sim 80\%$) entra dai fori del liner a valle e raffredda i gas fino alla T_4 tollerata dalla turbina.

11.5 La turbina

La turbina estrae lavoro dai gas caldi per azionare il compressore (e il fan). È anch'essa una turbomacchina assiale, governata dall'equazione di Eulero (172), ma con lo statore che *precede* il rotore (nel compressore era l'opposto). Grazie al gradiente di pressione favorevole, pochi stadi (1–4) bastano. Lungo la turbina la densità *cala* (il gas si espande), quindi — a portata costante — la sezione di passaggio cresce e le pale si **allungano** stadio dopo stadio (l'opposto del compressore).

La sfida dei materiali: pale più calde del loro punto di fusione

La turbina è il componente più sollecitato del motore: le sue pale ruotano a $\sim 10\,000$ giri/min (sforzi centrifughi enormi) e sono investite da gas a temperatura T_4 che può superare di *centinaia di gradi* il punto di fusione delle leghe. Due tecnologie rendono possibile l'impossibile:

- **superleghe** a base di nichel, con altissima resistenza specifica fino a oltre 1200 K (e cristallo singolo, per eliminare i bordi di grano);
- il **raffreddamento delle pale**: aria relativamente fredda spillata dal compressore scorre in canali interni alla pala (fino a cinque passaggi) e traspira da microfori sulla superficie, formando un *film* protettivo (*film cooling*) tra la pala e i gas caldi.

È la corsa a innalzare T_4 — e quindi spinta specifica e rendimento — ad aver guidato lo sviluppo di questi materiali e tecniche di raffreddamento.

Lo statore del primo stadio: già sonico

Lo statore del primo stadio di turbina (detto anche *piastra ad ugelli*, *nozzle guide vanes*) accelera i gas tipicamente fino a velocità sonica, ed è l'elemento più caldo in assoluto: viene raffreddato come e più delle pale rotanti. L'aria di raffreddamento deve avere pressione superiore a quella dei gas (p_4 , di poco inferiore a p_3 per via di ε_b): per i primi stadi si usa aria dell'HP, per gli stadi successivi (a pressione minore) aria più fredda della sezione LP del compressore, che raffredda meglio con minor portata.

Grado di reazione

Il *grado di reazione* di uno stadio misura come il salto entalpico (o di pressione) si ripartisce tra rotore e statore:

$$R = \frac{\Delta h_{\text{rotore}}}{\Delta h_{\text{stadio}}}. \quad (174)$$

Negli stadi *ad azione* ($R = 0$) tutto il salto di pressione è elaborato nello statore (nel rotore varia solo l'energia cinetica); negli stadi *a reazione* ($R > 0$) il salto si ripartisce tra statore e rotore. Per fluidi incomprimibili R coincide con la frazione di salto di pressione elaborata dal rotore; per fluidi comprimibili il legame è meno diretto ma il concetto resta. È un parametro chiave nel disegno aerodinamico degli stadi.

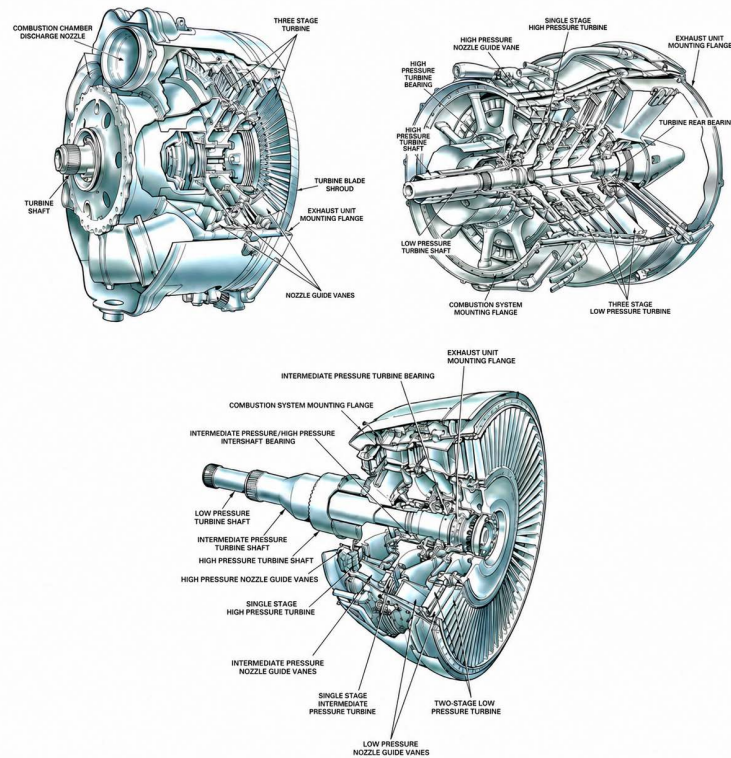


Figura 42. Turbina assiale pluristadio: ogni stadio ha statore (che precede) e rotore. La sezione di passaggio cresce verso valle (densità calante), quindi le pale si allungano stadio dopo stadio — l'opposto del compressore.

11.6 L'ugello propulsivo

La teoria dell'ugello è già stata sviluppata in gasdinamica (§6.9, §6.11); qui ne consideriamo gli aspetti costruttivi e le funzioni accessorie. L'obiettivo primario è convertire l'energia termica residua in energia cinetica del getto col massimo rendimento η_n , minimo peso, minima resistenza e — requisito sempre più importante — minimo rumore.

Configurazioni. L'ugello di un motore respirante opera quasi sempre in condizioni *critiche* (Mach unitario in gola). Le configurazioni tipiche:

- **convergente** (turboelica, turbogetto, turbofan): la pressione d'uscita resta $\geq p_a$ (ugello non adattato), con una piccola perdita rispetto all'adattamento — accettata, come visto in §8.7, per risparmiare peso e resistenza;
- **ad area variabile** (turbogetti con postbruciatore): l'area di gola si adatta alle diverse condizioni;
- **convergente-divergente** (endoreattori e motori marcatamente supersonici): per espandere fino all'adattamento a grandi rapporti di pressione.

Una soluzione intermedia è l'ugello a *spina conica*: una spina che si estende oltre l'uscita offre al flusso una sezione crescente (come un divergente) avvicinando l'adattamento e recuperando un po' di spinta.

Inversori di spinta. Per accorciare la corsa d'atterraggio, l'ugello può deviare il getto in avanti, generando una componente di spinta opposta al moto che assiste i freni. Le configurazioni a *conchiglia* e a *secchio* operano sul flusso caldo; nei turbofan ad alto rapporto di by-pass, dove fino all'80% della spinta viene dal flusso freddo, conviene invertire solo quest'ultimo (più freddo, più silenzioso, e senza intervenire sui gas caldi). All'inversione il motore viene portato quasi al massimo, generando un forte rumore: per questo alcuni aeroporti ne limitano l'uso alle piste bagnate o alle emergenze.

Thrust vectoring e V/STOL. Negli aerei da combattimento, ugelli orientabili (*thrust vectoring*) deviano la spinta per migliorare la manovrabilità a bassa velocità, dove le superfici aerodinamiche sono poco efficaci. Nei velivoli a decollo verticale o corto (V/STOL, come l'Harrier e la versione F-35B) ugelli orientabili indirizzano la spinta verso il basso.

La guerra al rumore

Nei turbogetti l'ugello era l'organo più rumoroso, perché l'intensità del rumore del getto cresce con l'*ottava potenza* della velocità di efflusso u_e . È questa, più di ogni altra, la ragione del successo del turbofan: la sua velocità di efflusso molto più bassa abbatte drasticamente il rumore. Ulteriori riduzioni vengono dagli ugelli *chevron* (i bordi “a dente di sega” che si vedono sul Boeing 787), che favoriscono una miscelazione dolce col flusso esterno riducendo il rumore con perdita di spinta minima (0,25–0,5%). La riduzione del rumore non è solo ambientale: aeroporti meno rumorosi possono operare più ore al giorno, con evidente ritorno economico.

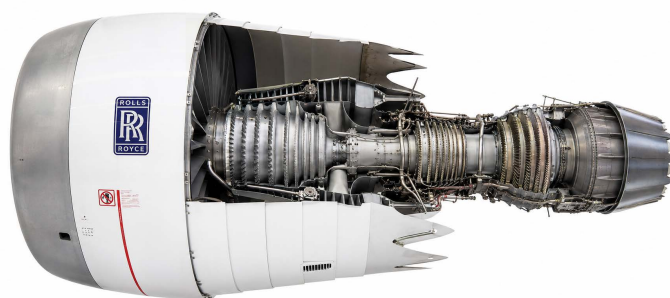


Figura 43. Ugello chevron: i bordi a dente di sega della carenatura favoriscono una miscelazione graduale tra getto e aria esterna, riducendo il rumore (che cresce con u_e^8) con una perdita di spinta dello 0,25–0,5%.

11.7 Sintesi: il motore come catena di componenti

Come i componenti si passano il flusso

Ripercorrere il motore organo per organo rivela una logica unitaria, scandita da due gradienti opposti. Nella metà “fredda” (presa e compressore) la pressione *cresce*: il gradiente avverso rende questi organi delicati — la presa rischia il distacco, il compressore richiede molti stadi e rendimenti più bassi. Nella metà “calda” (turbina e ugello) la pressione *cala*: il gradiente favorevole li rende robusti — pochi stadi di turbina, ugelli semplici. Tra le due metà sta il combustore, che inietta calore alla temperatura massima T_4 , vincolo tecnologico supremo fissato dai materiali della turbina. Ogni componente è progettato attorno a un compromesso tra prestazione, peso e perdite di pressione totale — quella “valuta” che, introdotta in §6.5, attraversa come un filo rosso l'intera macchina. Conoscere i singoli organi significa saper leggere uno spaccato di turbofan non come un groviglio di pale, ma come la realizzazione fisica del ciclo Brayton: ogni pezzo al suo posto, ciascuno con un compito preciso nello scambio fondamentale tra energia termica e spinta.

12 Riepilogo dei modelli propulsivi

Raccogliamo qui le relazioni salienti per ciascun propulsore, utili al calcolo delle prestazioni. Per turbofan e turboelica le variazioni di spinta/potenza con la velocità possono essere trascurate nelle analisi semplificate.

12.1 Pistoni / elica (motoelica)

$$\begin{aligned}
\text{Potenza all'albero: } \Pi_a &= \Pi_{a0} \sigma \varphi \\
\text{Potenza disponibile: } \Pi_d &= \eta_p \Pi_a = \eta_p \Pi_{a0} \sigma \varphi \\
\text{Spinta disponibile: } T_d &= \Pi_d / V_0 \\
\text{Consumo specifico: } \text{SFC} &= \text{da } 0,40 \text{ lb}/(\text{hp h}) \text{ a } 0,50 \text{ lb}/(\text{hp h})
\end{aligned}$$

Potenza all'albero costante con la velocità; potenza disponibile costante con V per elica a giri costanti; SFC costante con quota e velocità.

12.2 Turboelica / elica

$$\begin{aligned}
\text{Potenza all'albero: } \Pi_a &= \Pi_{a0} \sigma \varphi K_v, \quad K_v = 1,00 + 0,0080 (V_0/100)^2 [V_0 \text{ in km/h}] \\
\text{Potenza disponibile: } \Pi_d &= \eta_p \Pi_a = \eta_p \Pi_{a0} \sigma \varphi K_v \\
\text{Spinta disponibile: } T_d &= \Pi_d / V_0 \\
\text{Consumo specifico: } \text{SFC} &= \text{da } 0,60 \text{ lb}/(\text{shp h}) \text{ a } 0,70 \text{ lb}/(\text{shp h})
\end{aligned}$$

Potenza all'albero variabile con la velocità (effetto RAM K_v); η_p costante con la velocità (elica a giri costanti); SFC costante con quota e velocità.

12.3 Turbogetto puro

$$\begin{aligned}
\text{Max thrust (decollo): } T_d &= T_0 \sigma \\
\text{Spinta disponibile (salita): } T_d &= 0,90 T_0 \sigma \varphi \\
\text{Spinta disponibile (crociera): } T_d &= 0,85 T_0 \sigma \varphi \\
\text{Potenza disponibile: } \Pi_d &= T_d V_0 \\
\text{Consumo specifico: } \text{SFC}_f &= \text{da } 1,00 \text{ lb}/(\text{lbf h}) \text{ a } 2,00 \text{ lb}/(\text{lbf h})
\end{aligned}$$

Spinta costante con il Mach; variazione con la quota data da σ . Solo l'~80–85% della spinta di decollo T_0 è utilizzabile in volo (condizioni continuative).

12.4 Turbofan ad alto BPR (modello semplificato)

$$\begin{aligned}
\text{Decollo (S/L, fino a 5.000 ft): } T &= K_T(V_0) T_0 \sqrt{\sigma}, \quad K_T = 1 - 0,20 V_0/100 \\
\text{Salita (S/L): } T &= 0,83 K_T(V_0) T_0 \varphi \\
\text{Salita (quote basse): } T &= 0,83 K_T(V_0) T_0 \varphi \sqrt{\sigma} \\
\text{Salita (alte quote): } T &= 0,75 \sigma T_0 \varphi \\
\text{Crociera (alte quote): } T &= 0,71 \sigma T_0 \varphi \\
\text{Potenza disponibile: } \Pi_d &= T V_0 \\
\text{Consumo specifico: } \text{SFC}_f &= \text{da } 0,50 \text{ lb}/(\text{lbf h}) \text{ a } 0,70 \text{ lb}/(\text{lbf h})
\end{aligned}$$

Ad alte quote spinta costante con la velocità, variazione con la quota data da σ .

Spinta e potenza disponibile in crociera (turbofan MD-80)

Motore JT9D, spinta massima al decollo $T_0 = 8.300 \text{ kg}$. In crociera (Max Cruise) a 10.000 m ($\sigma = 0,337$), $\varphi = 1$:

$$T = 0,71 \sigma T_0 = 0,71 \cdot 0,337 \cdot 8300 \approx 1.986 \text{ kg}$$

cioè circa il 24% della spinta di targa. A $M = 0,80$ ($V_0 \approx 240$ m/s) la potenza disponibile è:

$$\Pi_d = T V_0 = (1986 \cdot 9,81) \text{ N} \cdot 240 \text{ m/s} \approx 4,68 \text{ MW} \approx 6.268 \text{ hp.}$$

12.5 Quadro qualitativo finale

Nella propulsione a elica la *potenza disponibile* è costante con la velocità e la spinta varia come $1/V_0$; nella propulsione a getto è la *spinta disponibile* a essere costante con la velocità (alle alte quote), mentre la potenza cresce linearmente. In entrambi i casi la dipendenza dalla quota è legata al rapporto delle densità σ .

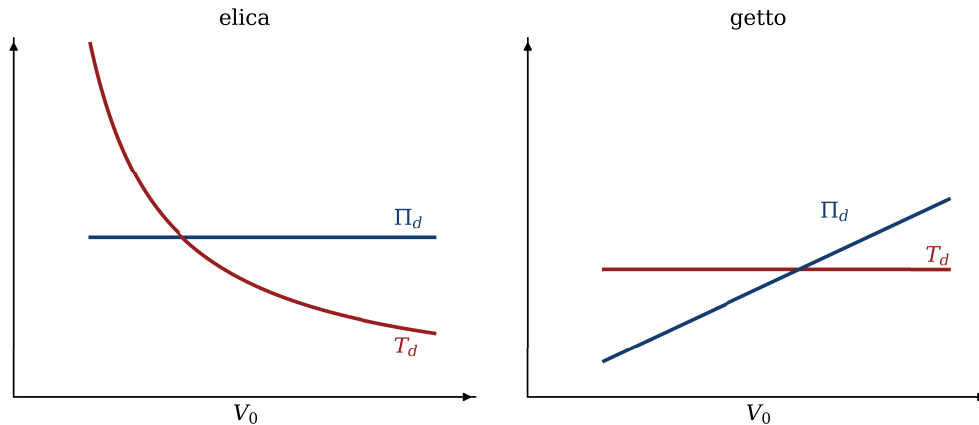


Figura 44. Quadro di sintesi: a sinistra propulsione a elica (potenza disponibile costante, spinta $\propto 1/V_0$); a destra propulsione a getto (spinta disponibile costante, potenza $\propto V_0$).

Tabella 5. Vantaggi e svantaggi delle principali famiglie di propulsori.

Tipologia	Vantaggi	Svantaggi
Turbojet	Relativamente semplice, efficiente a velocità supersoniche ($M \approx 2$)	Scarsa efficienza in subsonico, rumorosità elevata
Turbofan	Più silenzioso (minore V_e), efficiente in subsonico	Maggiore complessità, peso e dimensioni (più resistenza), più sensibile a ghiaccio e FOD
Turboprop	Alta efficienza alle basse velocità subsoniche (fino a $M \approx 0,6-0,7$), alto rapporto potenza/peso, efficace in frenata (<i>reverse</i>) e in condizioni OEI (<i>feathered</i>)	Maggiore complessità e peso (scatola di riduzione), velocità massima limitata, maggiore rumorosità e vibrazioni
Motoelica	Massimo rendimento propulsivo, semplicità, basso costo	Potenza e quota operativa limitate, velocità contenute

A Come si leggono i cicli nei piani termodinamici

Perché questa appendice

Nelle sezioni sul ciclo Brayton e sul turbogetto abbiamo disegnato cicli sul piano $T-s$ e parlato di “aree”, “isobare divergenti”, “lavoro pari all’area racchiusa”. Sono affermazioni che, se non spiegate a fondo, restano formule da accettare per fede. Questa appendice colma quel vuoto: vuole insegnare a *leggere* un diagramma termodinamico come si legge una mappa, capendone il senso intimo. Una volta acquisita questa capacità, qualunque ciclo — Brayton, Otto, Diesel, Rankine — diventa trasparente: si “vede” a colpo d’occhio dove si spende lavoro, dove se ne produce, quanto calore serve e quanto se ne spreca. È uno strumento concettuale che vale per tutta la termodinamica applicata, non solo per i motori a getto.

A.1 Lo stato di un fluido: due numeri bastano

Il punto di partenza è un fatto semplice ma potente. Lo stato termodinamico di una data quantità di fluido *monofase* (tutto gas, o tutto liquido) è completamente individuato da **due sole variabili di stato** indipendenti. Fissate due grandezze — per esempio pressione e temperatura — tutte le altre (densità, energia interna, entalpia, entropia...) sono automaticamente determinate dalle relazioni di stato.

Cosa significa “variabile di stato”

Una variabile di stato è una proprietà che dipende *solo* dallo stato attuale del fluido, non da come ci è arrivato. Pressione, temperatura, densità, energia interna, entalpia ed entropia sono variabili di stato: due campioni di gas nelle stesse condizioni (p, T) hanno la stessa entropia, qualunque sia la loro storia. Calore e lavoro *non* lo sono: dipendono dal *percorso* seguito, non solo dai punti di partenza e arrivo. È una distinzione fondamentale, e il diagramma termodinamico la rende visibile: gli *stati* sono punti, le *trasformazioni* sono cammini, e calore e lavoro sono proprietà del cammino (aree), non dei punti.

Questa è la ragione per cui possiamo rappresentare lo stato del fluido come un **punto** su un piano cartesiano, scegliendo come assi due variabili di stato. Una **trasformazione** (compressione, riscaldamento, espansione...) diventa allora una **curva** che congiunge lo stato iniziale a quello finale, e un **ciclo** — una sequenza di trasformazioni che riporta il fluido allo stato di partenza — diventa una **curva chiusa**.

A.2 I tre piani termodinamici fondamentali

La scelta degli assi non è neutra: ogni coppia di variabili mette in luce aspetti diversi. Tre sono i piani classici.

Il piano di Clapeyron $p-v$ (pressione–volume specifico). È il più antico e intuitivo. Il suo pregio è che *l'area sotto una trasformazione reversibile rappresenta il lavoro di pressione scambiato*, perché il lavoro elementare di un fluido che si espande è $dL = p dv$ (pressione per variazione di volume). È il piano d'elezione per i motori *volumetrici* (alternativi a pistone), dove il fluido è racchiuso in un cilindro a volume variabile. Ha però un limite per le nostre macchine: non mostra direttamente il lavoro delle *turbomacchine* a flusso continuo.

Il piano di Mollier $h-s$ (entalpia–entropia). È il piano d'elezione per le macchine a *flusso continuo* (turbine, compressor, ugelli). Il motivo è nell'equazione dell'energia $\Delta h_0 = Q - L_s$: le *differenze di ordinata* (entalpia) misurano direttamente il lavoro e/o il calore scambiato per unità di massa. Un salto verticale sul piano di Mollier “è” un lavoro o un calore: comodissimo per leggere a colpo d'occhio le prestazioni di un componente.

Il piano entropico $T-s$ (temperatura–entropia). È il piano che useremo di più, e il più ricco di significato. Ha due qualità preziose:

- l'ordinata è la **temperatura**, grandezza direttamente misurabile (a differenza di entalpia ed entropia, che sono costruite);
- l'area sotto una trasformazione reversibile è il **calore scambiato** (lo dimostreremo tra poco).

Inoltre, per un gas caloricamente perfetto (c_p costante) entalpia e temperatura sono proporzionali ($h = c_p T + \text{cost}$), quindi il piano $T-s$ eredita anche le buone proprietà del piano di Mollier. È, per le turbine a gas, il miglior compromesso tra leggibilità fisica e misurabilità.

Perché non un piano in grandezze totali?

Verrebbe da pensare che, lavorando con grandezze totali nei motori, convenga un piano T_0-s o h_0-s . In realtà no, per due ragioni. Primo: nelle turbomacchine le velocità sono modeste e $T_0 \simeq T$, $h_0 \simeq h$, quindi il vantaggio sarebbe nullo. Secondo, e decisivo: un piano in grandezze totali *nasconderebbe*

proprio le conversioni tra energia termica e cinetica che avvengono nella presa d'aria e nell'ugello dei motori a getto — conversioni che sono il cuore del funzionamento. Usando le grandezze statiche, invece, quelle trasformazioni si vedono e come. È un caso in cui la scelta “apparentemente più comoda” è quella sbagliata.

A.3 Il calore è un'area: la chiave del piano $T-s$

Veniamo al concetto più importante, quello che rende il piano $T-s$ uno strumento di lettura così potente.

L'area sotto una trasformazione reversibile è il calore scambiato

Per una trasformazione reversibile, il calore scambiato per unità di massa è

$$Q = \int T ds, \quad (175)$$

cioè l'**area sottesa** dalla curva che rappresenta la trasformazione sul piano $T-s$ (l'area compresa tra la curva e l'asse delle entropie).

Dimostrazione

La definizione di entropia per una trasformazione reversibile è $ds = dQ/T$, da cui $dQ = T ds$. Integrando lungo la trasformazione, $Q = \int T ds$. Geometricamente, $T ds$ è l'area di una striscia infinitesima di altezza T e base ds ; sommando tutte le strisce si ottiene l'area sotto la curva. $\square$

Imparare a “vedere” il calore

Questa è la lente con cui guardare ogni diagramma $T-s$. Una trasformazione che procede verso *destra* (entropia crescente, $ds > 0$) sottende un'area positiva: *il fluido riceve calore*. Una che procede verso *sinistra* ($ds < 0$) cede calore. Una trasformazione *verticale* ($ds = 0$, isentropica) non sottende area: *non c'è scambio di calore* — è adiabatica e reversibile. Più la curva è “in alto” (alta T), più calore corrisponde a un dato spostamento orizzontale, perché le strisce sono più alte. Con un po' di pratica, si legge il calore di una trasformazione semplicemente “pesando con l'occhio” l'area che sottende.

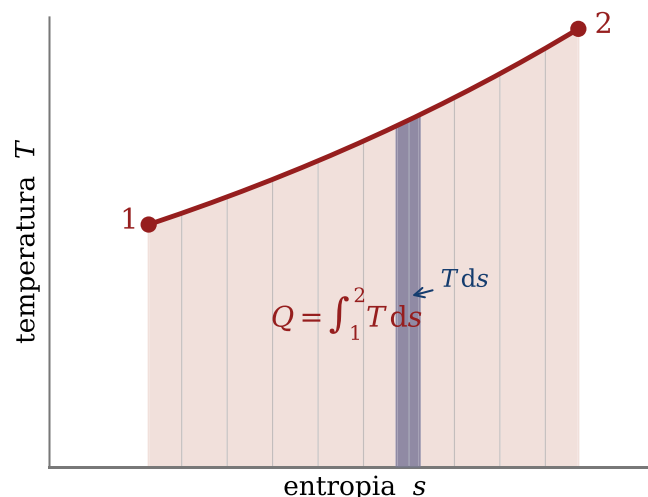


Figura 45. Il calore come area sul piano $T-s$. Lungo una trasformazione reversibile da 1 a 2, ogni striscia infinitesima ha altezza T e base ds , e area $T ds$; la somma di tutte le strisce è il calore scambiato $Q = \int_1^2 T ds$, cioè l'intera area sottesa dalla curva.

A.4 La forma delle trasformazioni notevoli

Per leggere un ciclo bisogna riconoscere a vista le trasformazioni che lo compongono. Vediamo come appaiono sul piano $T-s$.

Isentropica (adiabatica reversibile): un segmento verticale. Per definizione $s = \text{cost}$, quindi è una **retta verticale**. È l'idealizzazione di compressione ed espansione nelle turbomacchine: nessuno scambio di calore, nessuna perdita. Non sottende area (niente calore), ma fa variare la temperatura — e quindi, per un componente adiabatico, scambia lavoro.

Isoterma: un segmento orizzontale. $T = \text{cost}$ è una **retta orizzontale**. È rara nei cicli reali ma fondamentale in quello di Carnot. L'area che sottende, $Q = T \Delta s$, è calore scambiato a temperatura costante.

Isobara (pressione costante): una curva esponenziale crescente. È la forma delle trasformazioni in camera di combustione e allo scarico. La sua equazione si ricava dalla relazione dell'entropia, e ha andamento **esponenziale**:

$$T = T_{\text{rif}} \exp\left(\frac{s - s_{\text{rif}}}{c_p}\right) \quad (p = \text{cost}). \quad (176)$$

La sua pendenza locale è $\partial T / \partial s = T / c_p$: cresce con la temperatura.

Isocora (volume costante): esponenziale più ripida. Analoga all'isobara ma con c_v al posto di c_p : poiché $c_v < c_p$, la sua pendenza T / c_v è maggiore. Le isocore sono quindi più ripide delle isobare. Compaiono nel ciclo Otto dei motori a benzina.

A.5 Perché le isobare divergono (e perché è così importante)

Abbiamo già incontrato questo fatto parlando del ciclo Brayton; qui lo inquadrriamo nel suo contesto naturale, perché è la proprietà geometrica che “fa funzionare” tutti i cicli a combustione.

Le isobare a pressioni diverse divergono

La pendenza di un'isobara sul piano $T-s$ è proporzionale alla temperatura:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}. \quad (177)$$

Quindi due isobare a pressioni diverse, salendo verso temperature più alte, diventano entrambe più ripide — ma quella a pressione maggiore resta sempre a sinistra — e la *distanza orizzontale* tra loro *aumenta*: le isobare **divergono** verso l'alto.

Dimostrazione

Dalla relazione di Gibbs $T ds = dh - dp/\rho$ a pressione costante ($dp = 0$): $T ds = dh = c_p dT$, da cui $\partial T / \partial s = T / c_p$. Poiché la pendenza cresce con T , e a parità di entropia un'isobara a pressione maggiore sta a temperatura più alta, le due curve si allontanano salendo. $\square$

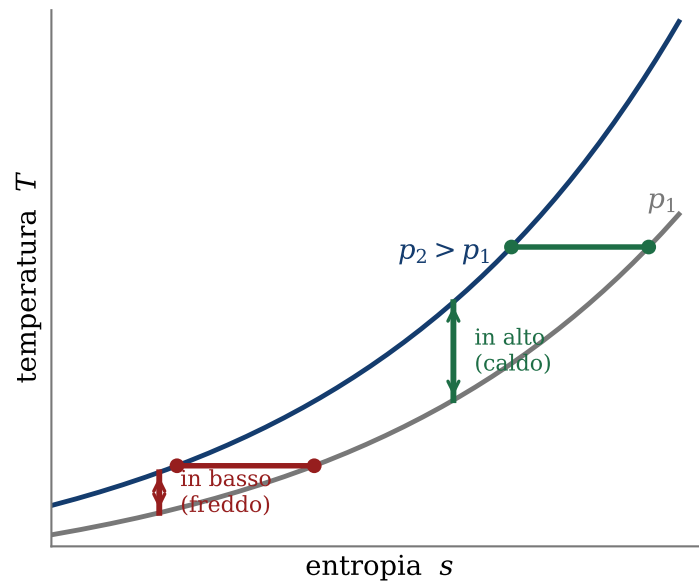


Figura 46. Le isobare divergono. Due isobare $p_1 < p_2$ sul piano $T-s$: a parità di variazione di pressione (passaggio dall'una all'altra), il salto di temperatura è piccolo “in basso” (gas freddo) ma molto più grande “in alto” (gas caldo). È questa divergenza a far sì che l'espansione del gas caldo renda più della compressione del gas freddo.

La divergenza delle isobare è “il motore” del ciclo

Ecco perché questa proprietà geometrica è tanto importante. In un ciclo come il Brayton, la compressione (in basso, gas freddo) e l'espansione (in alto, gas caldo dopo la combustione) avvengono tra le *stesse* due isobare. Ma in alto le isobare sono più distanti: lo stesso “salto di pressione” corrisponde, in alto, a un salto di temperatura — e quindi di entalpia, e quindi di lavoro — *maggiore*. L'espansione restituisce dunque più lavoro di quanto ne sia costata la compressione: la differenza è il lavoro utile. Senza la divergenza delle isobare, compressione ed espansione si pareggerebbero e il ciclo non produrrebbe nulla. È la combustione, “sollevando” il gas nella zona dove le isobare divergono, a rendere possibile il guadagno. In una sola frase: *i cicli a combustione producono lavoro perché conviene espandere caldo ciò che si è compresso freddo*.

A.6 Il lavoro utile è l'area racchiusa dal ciclo

Dal calore-come-area discende il risultato più elegante di tutti.

Area del ciclo = lavoro utile

Per un ciclo reversibile percorso in senso orario sul piano $T-s$, il lavoro utile per unità di massa è l'**area racchiusa** dalla curva chiusa che rappresenta il ciclo.

Dimostrazione

In un ciclo il fluido torna allo stato iniziale, quindi la variazione di ogni variabile di stato è nulla; in particolare $\Delta h_0 = 0$. L'equazione dell'energia su tutto il ciclo dà allora $L_u = Q_b - Q_a$, dove Q_b è il calore complessivamente assorbito e Q_a quello complessivamente ceduto. Ma Q_b è l'area sottesa dai tratti percorsi verso destra ($ds > 0$), e Q_a l'area sottesa dai tratti percorsi verso sinistra ($ds < 0$); la loro differenza è esattamente l'*area racchiusa* dalla curva chiusa. $\square$

Un ciclo “grasso” è un ciclo potente

Questa è l'immagine da tenere sempre presente. *Più area racchiude un ciclo, più lavoro produce per chilogrammo di fluido.* Un ciclo “grasso”, ampio, è una macchina densa di potenza — e quindi, a parità di potenza, più piccola e leggera. Un ciclo “magro”, schiacciato, produce poco e richiede molta portata per dare la stessa potenza. Quando in §7 abbiamo visto che il lavoro utile si annulla agli estremi (a $\beta_c = 1$ e a $\tau_c = \tau$), lo si può ora “vedere”: in entrambi i casi il ciclo collassa su una linea di area nulla. E il massimo lavoro utile corrisponde semplicemente al ciclo che, tra quei due estremi, racchiude più area.

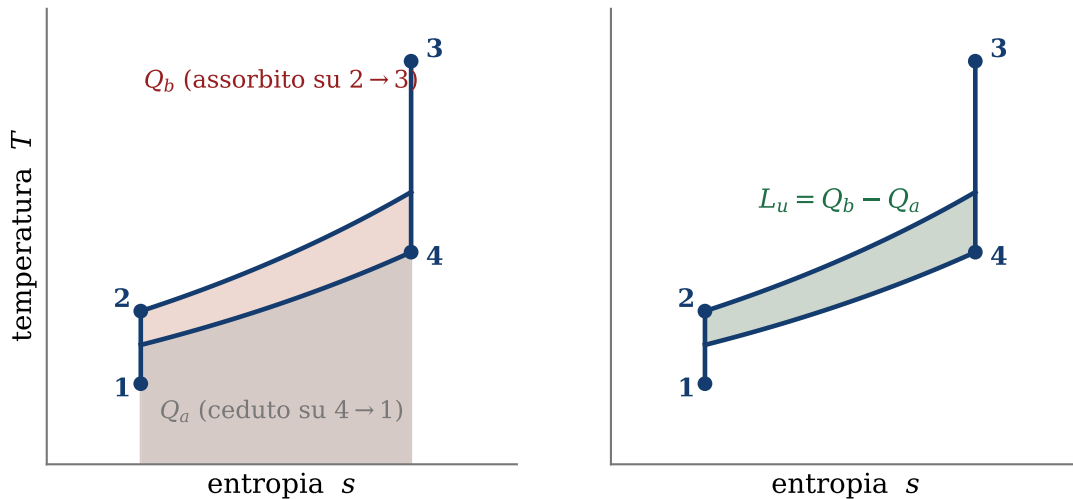


Figura 47. Lettura del lavoro e del rendimento sul ciclo Brayton ideale. A sinistra: il calore assorbito Q_b è l'area sotto l'isobara di combustione ($2 \rightarrow 3$), quello ceduto Q_a l'area sotto l'isobara di scarico ($4 \rightarrow 1$). A destra: la loro differenza — l'area racchiusa dal ciclo — è il lavoro utile $L_u = Q_b - Q_a$. Il rendimento è il rapporto L_u/Q_b .

A.7 Leggere il rendimento sul diagramma

Il rendimento termodinamico è il rapporto tra ciò che si ottiene (lavoro utile) e ciò che si spende (calore fornito):

$$\eta_{th} = \frac{L_u}{Q_b} = \frac{Q_b - Q_a}{Q_b} = 1 - \frac{Q_a}{Q_b}. \quad (178)$$

Sul piano $T-s$ è quindi il rapporto tra l'area racchiusa dal ciclo e l'area sottesa dal tratto di adduzione del calore (la trasformazione di combustione). Equivalentemente, è uno meno il rapporto tra l'area del calore ceduto e quella del calore fornito.

Perché conviene cedere calore “in basso”

La (178) suggerisce subito come migliorare il rendimento: ridurre Q_a , il calore buttato via. E poiché $Q_a = \int T ds$ lungo lo scarico, conviene che quella cessione avvenga alla *temperatura più bassa possibile* (strisce basse, area piccola). Specularmente, conviene fornire calore alla temperatura più *alta possibile*. È esattamente il principio che rende il ciclo di Carnot — in cui tutto il calore entra alla T massima ed esce alla T minima — il più efficiente possibile tra due temperature date. Ogni ciclo reale cerca, nei limiti del possibile, di avvicinarsi a questa condizione: scaldare in alto, raffreddare in basso.

A.8 Come si legge l'irreversibilità: l'inclinazione a destra

Finora abbiamo parlato di trasformazioni reversibili. Ma i componenti reali generano entropia (attrito, turbolenza), e il secondo principio impone che l'entropia di un sistema isolato possa solo crescere. Sul diagramma questo ha una firma inconfondibile.

Le perdite spostano i punti verso destra

In una trasformazione *adiabatica* (nessuno scambio di calore con l'esterno), se fosse reversibile l'entropia resterebbe costante: segmento verticale. Se invece è *irreversibile*, l'attrito interno genera entropia, e la trasformazione *si inclina verso destra* ($\Delta s > 0$). Così:

- un compressore reale, a parità di rapporto di pressione, porta a un punto più a destra (e più in alto) dell'ideale: ha speso più lavoro, in parte degradato in calore;
- una turbina reale arriva a un punto più a destra dell'ideale: ha estratto meno lavoro, perdendone una parte in attrito.

La quantità di "inclinazione a destra" è la misura visiva dell'irreversibilità: più un componente è scadente, più le sue trasformazioni si sdraiano. È anche il motivo per cui, nel ciclo reale, l'area racchiusa è minore (meno lavoro utile) e la pressione totale cala: l'aumento di entropia "mangia" prestazioni. Il piano $T-s$ rende quindi visibile non solo quanto lavoro fa una macchina, ma anche quanto ne spreca.

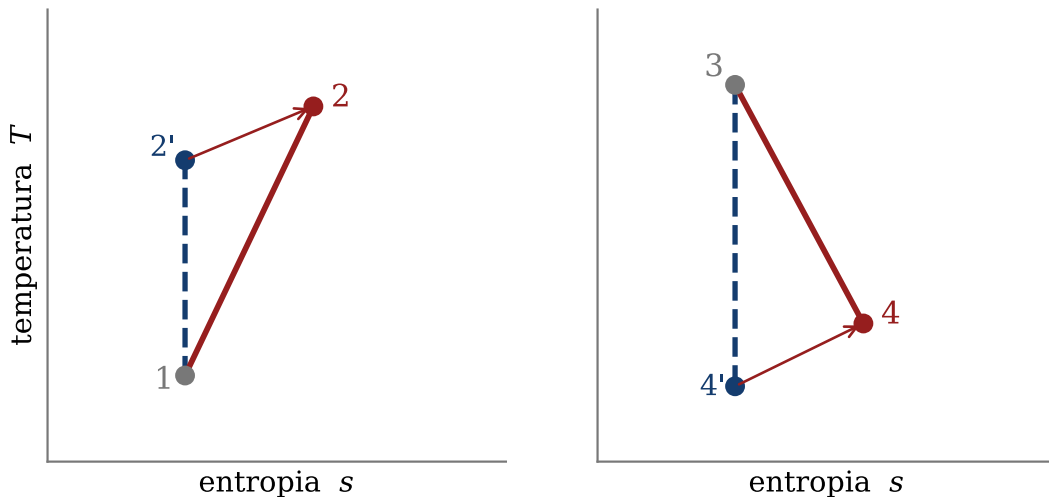


Figura 48. La firma dell'irreversibilità sul piano $T-s$. A sinistra il compressore: la trasformazione ideale $1 \rightarrow 2'$ è verticale (isentropica), quella reale $1 \rightarrow 2$ si inclina a destra (l'entropia cresce) e arriva più in alto (si è speso più lavoro, in parte degradato in calore). A destra la turbina: la reale $3 \rightarrow 4$ si inclina a destra e arriva più in alto della ideale $3 \rightarrow 4'$ (si è estratto meno lavoro). L'inclinazione misura la perdita.

A.9 Guida pratica: leggere un ciclo in cinque passi

Riassumiamo in una procedura operativa tutto quanto detto. Davanti a un qualunque ciclo sul piano $T-s$, per coglierne il senso bastano cinque domande.

1. **Dove sono gli stati?** Individuare i punti-chiave (i "vertici" del ciclo) e riconoscere a cosa corrispondono nei componenti reali (ingresso e uscita di compressore, combustore, turbina, ugello).
2. **Che forma hanno le trasformazioni?** Verticali = isentropiche (turbomacchine ideali); esponenziali crescenti = isobare (combustione, scarico); inclinate a destra = irreversibili (componenti reali).
3. **Dove entra e dove esce il calore?** I tratti percorsi verso destra assorbono calore (combustione); quelli verso sinistra lo cedono (scarico). Le rispettive aree sottese sono Q_b e Q_a .
4. **Quanto lavoro produce?** L'area racchiusa dalla curva chiusa è il lavoro utile. Un ciclo ampio è potente; uno schiacciato no.

5. **Quanto rende?** Il rapporto tra l'area racchiusa e l'area del calore fornito è il rendimento. Per migliorarlo: scaldare più in alto, raffreddare più in basso, ridurre le inclinazioni (le irreversibilità).

Il senso ultimo

Un diagramma termodinamico non è un disegno decorativo: è una *contabilità energetica completa*, leggibile a colpo d'occhio. Altezza = temperatura (la qualità dell'energia); larghezza = entropia (il disordine, le perdite); aree = calori e lavori (le quantità in gioco). Imparare a leggerlo significa imparare a “vedere” l'energia mentre si trasforma — dove si concentra, dove si degrada, dove si raccoglie come lavoro utile. È questa la competenza che trasforma una collezione di formule in una comprensione viva del funzionamento dei motori. Vale la pena esercitarsi a ridisegnare, da soli, il ciclo Brayton ideale e reale (§7) e quello del turbogetto (§8.3) ponendosi, per ciascuno, le cinque domande qui sopra: è il modo migliore per far propria questa appendice.

B Tabelle di riferimento dei motori

A completamento della trattazione si rimanda alle tabelle dei costruttori per i dati di spinta/potenza, consumo specifico, BPR e peso dei motori reali.

Tabella 6. Valori tipici per classe di motore a getto: rapporto di diluizione, consumo specifico in crociera e applicazioni. Valori indicativi ($M_0 \approx 0,8$, $h \approx 35.000$ ft).

Tipologia	BPR (ord. di grand.)	SFC _J crociera [lb/(lb·h)]	Applicazioni tipiche
Turbogetto puro	0	1,2–1,4	Concorde; velivoli militari più datati
Turbofan basso BPR	≈ 1 (1–1,5)	1,1–1,2	Caccia (F-15, F-16, Eurofighter), spesso con postbruciatore
Turbofan alto BPR	≈ 5 (e oltre)	0,5–0,7	Trasporto civile subsonico (B747, A320, ...)

Il rapporto spinta/peso al punto fisso cresce dal turbogetto subsonico (≈ 3 –5) al turbofan (≈ 4 –6), fino a ≈ 8 per il turbogetto con postbruciatore.

Tabella 7. Motori turbogetto e turbofan di riferimento: spinta statica al decollo (livello del mare), rapporto di diluizione, consumo specifico in crociera e applicazione. Valori tipici da dati di costruttore.

Motore	Tipo	T_{statica}^a [kN] (lbf)	BPR	SFC _J ^b [lb/(lb·h)]	Applicazione
RR/Snecma Olympus 593	turbogetto ^c	139 (31 300)	0	$\approx 1,2$	Concorde
P&W JT8D	turbofan basso BPR	62–97 (14 000–21 700)	0,96–1,74	0,75–0,80	B727, DC-9, B737-200, MD-80
P&W F100	turbofan basso BPR ^c	79 (17 800)	$\approx 0,36$	$\approx 0,8^d$	F-15, F-16
CFM56-5B	turbofan alto BPR	98–147 (22 000–33 000)	$\approx 5,5$	0,55–0,60	famiglia A320
GE90-115B	turbofan alto BPR	513 (115 300)	≈ 9	$\approx 0,52$	B777-200LR/300ER

^a Spinta statica al decollo a livello del mare; per i motori con postbruciatore è indicato il valore *a secco*.

^b Consumo specifico in crociera subsonica ($M_0 \approx 0,8$), tranne l'Olympus 593 (crociera supersonica $M_0 \approx 2$); valori indicativi.

^c Con postbruciatore: ≈ 169 kN (38 000 lbf) per l'Olympus 593, ≈ 129 kN (29 000 lbf) per l'F100.

^d A secco; con postbruciatore il consumo specifico aumenta fortemente.