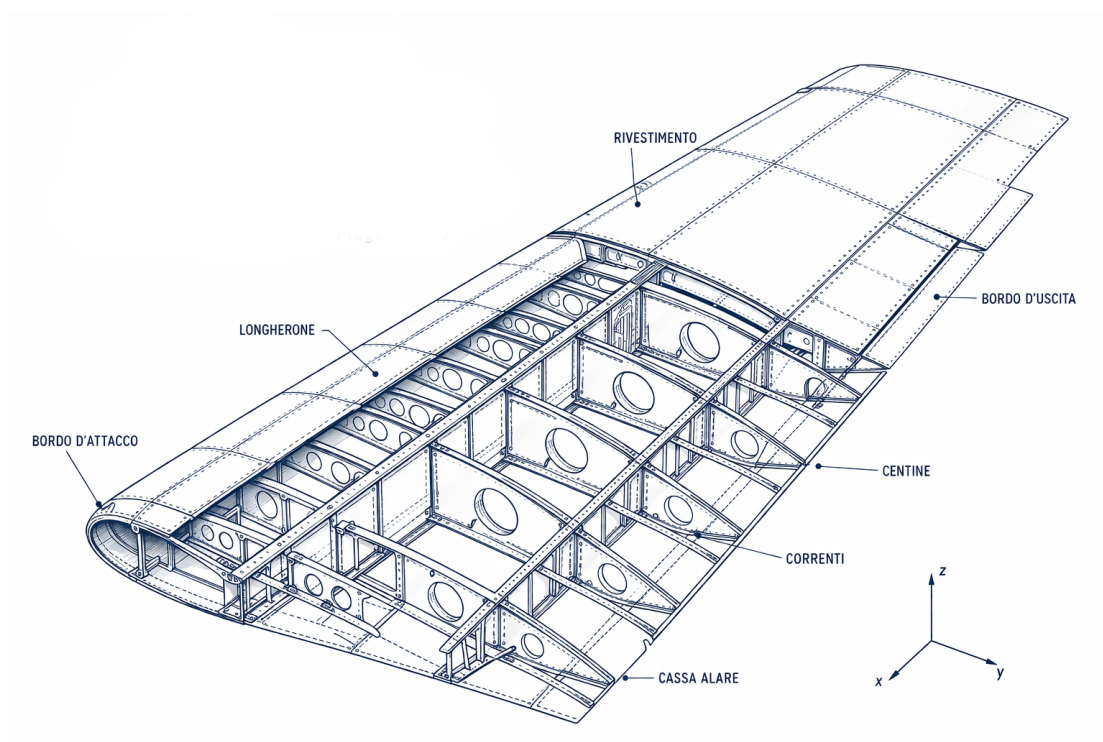


Diagrammi delle sollecitazioni lungo un'ala



Prof. Ing. Raucci Biagio
Docente di Costruzioni Aeronautiche

Indice

Premessa	2
1 Il calcolo statico di una struttura aeronautica	3
1.1 Finalità del calcolo statico	3
1.2 Filosofia del progetto: dal semplice al raffinato	3
2 Il metodo analitico delle travi inflesse	4
2.1 Le caratteristiche della sollecitazione interna	4
2.2 La convenzione di De Saint-Venant sui segni	4
2.3 Il concio elementare e la genesi delle equazioni $T(x)$ ed $M_f(x)$	5
3 Le relazioni differenziali di Schwedler	6
3.1 Equilibrio del concio infinitesimo	6
3.2 Prima relazione di Schwedler: $dT/dx = -p(x)$	7
3.3 Seconda relazione di Schwedler: $dM_f/dx = T(x)$	8
4 Il principio di sovrapposizione degli effetti	9
4.1 Enunciato e fondamento	9
4.2 Strategia di calcolo	9
4.3 Esempio illustrativo	10
5 Costruzione operativa dei diagrammi: esempi guidati	10
5.1 Caso A – Mensola con carico distribuito uniforme	10
5.2 Caso B – Trave appoggiata con forza concentrata in mezzzeria	12
5.3 Caso C – Trave appoggiata con carico distribuito	13
6 Schematizzazione strutturale: l'ala come trave	15
6.1 Lo schema semplice a travi	15
6.2 La lunghezza della trave equivalente: quando $\ell = b/2$?	15
6.3 Una nota sulla simmetria	17
7 Le equazioni cardinali della statica	18
7.1 Calcolo delle reazioni vincolari	18
8 Procedura operativa di costruzione dei diagrammi	18
9 Quadro sinottico dei casi applicativi	20
Sintesi conclusiva della Parte I	20
PARTE II – Casi applicativi	21
10 Caso 1 – Ala controventata a pianta rettangolare	22
10.1 Inquadramento e dati del problema	22
10.2 Schema strutturale e diagramma di corpo libero	22
10.3 Calcolo dei carichi	22
10.4 Calcolo delle reazioni vincolari	23
10.5 Equazioni delle sollecitazioni	23
10.6 Diagrammi delle sollecitazioni	24
10.7 Sezione critica e considerazioni di progetto	24

11 Caso 2 – Ala a sbalzo a pianta rettangolare con motore	25
11.1 Inquadramento e dati del problema	25
11.2 Schema strutturale e diagramma di corpo libero	25
11.3 Sovrapposizione degli effetti	25
11.4 Calcolo dei carichi e delle reazioni	26
11.5 Equazioni delle sollecitazioni	26
11.6 Diagrammi delle sollecitazioni	27
11.7 Sezione critica	27
12 Caso 3 – Ala a sbalzo trapezoidale (rastremata) con motore	28
12.1 Inquadramento e dati del problema	28
12.2 Calcolo del peso strutturale dell'ala – formula di Gabrielli	28
12.3 Schema strutturale e carico distribuito trapezoidale	28
12.4 Equazioni delle sollecitazioni	29
12.5 Diagrammi delle sollecitazioni	29
12.6 Sezione critica e considerazioni di progetto	30
13 Sintesi conclusiva e confronto fra i tre casi	31
13.1 Tabella riassuntiva	31
13.2 Considerazioni didattiche di sintesi	31
13.3 Verso il dimensionamento del longherone	31

Premessa

Prima di dimensionare un'ala dobbiamo sapere *quanto* e *dove* viene sollecitata. È esattamente ciò che fanno i **diagrammi delle sollecitazioni**: ci dicono come variano, lungo l'apertura, lo sforzo normale N , lo sforzo di taglio T e il momento flettente M_f . Sono il punto di partenza obbligato di tutto: senza di essi non potremmo né *dimensionare* né *verificare* gli elementi strutturali dell'ala – longheroni, centine, attacchi alari. In questa dispensa impareremo a costruirli passo dopo passo.

Il lavoro è diviso in due parti. La **Parte I – Teoria generale** è pensata come una cassetta degli attrezzi: prima rimettiamo a fuoco gli strumenti della Scienza delle Costruzioni che ci servono (il *metodo analitico delle travi inflesse*, le *relazioni differenziali di Schwedler*, il *principio di sovrapposizione degli effetti*), provandoli subito su tre esempi guidati via via più impegnativi; poi mostriamo come quegli stessi strumenti si applicano all'ala vera e propria. La **Parte II** sviluppa tre casi concreti:

- ala controventata a pianta rettangolare con carico distribuito;
- ala a sbalzo (incastrata) a pianta rettangolare con carico distribuito e carico concentrato (motore);
- ala a sbalzo a pianta trapezoidale (rastremata) con carico distribuito variabile linearmente e carico concentrato.

Nota didattica. La teoria iniziale è il *linguaggio comune* con cui leggeremo poi ogni caso aeronautico. Vale la pena non saltarla: una volta padroneggiata, ogni problema sull'ala si riduce a un'applicazione di cose già viste. Investire tempo qui significa risparmiarne molto dopo.

"Ciascuno di noi è, in verità, un'immagine del grande gabbiano, un'infinita idea di libertà, senza limiti"

— Richard Bach, *Il gabbiano Jonathan Livingston*

1 Il calcolo statico di una struttura aeronautica

1.1 Finalità del calcolo statico

Definizione

Si chiama **calcolo statico** di una struttura aeronautica l'insieme delle operazioni che hanno lo scopo di *accertare* (verifica) o di *determinare* (dimensionamento) il comportamento della struttura stessa quando essa è soggetta ad una assegnata distribuzione di forze applicate in condizioni statiche.

Sull'**ala di un velivolo** agiscono insieme forze di natura molto diversa. La cosa davvero importante da tenere a mente non è tanto il loro valore, quanto il loro *verso*: chi spinge verso l'alto e chi verso il basso. È proprio da come queste forze si bilanciano che nasce l'andamento delle sollecitazioni interne. Vediamole una per una.

Carichi agenti sull'ala

- **Forze aerodinamiche**: principalmente la *portanza* L , diretta dal basso verso l'alto, che costituisce il carico sollecitante per eccellenza in volo livellato. Si distribuisce lungo l'apertura con una legge $p(x)$ che dipende dalla pianta alare e dalla distribuzione del coefficiente di portanza locale $C_L(x)$.
- **Forze di massa** (peso strutturale dell'ala Q_{ala} , peso del carburante nei serbatoi, peso del carrello se ivi installato): distribuite o localizzate, sempre dirette *dall'alto verso il basso* (effetto del campo gravitazionale).
- **Carichi concentrati**: tipicamente il *peso del motore* P_m se installato in ala, oppure le reazioni di gondole, serbatoi esterni, attacchi del carrello.
- **Forze propulsive**: spinta o trazione T_p del propulsore (se installato in ala), agente lungo l'asse di rotazione dell'elica.

Notiamo subito una cosa che tornerà spesso: le *forze di massa* e i *pesi concentrati* tirano verso il basso, cioè in verso *opposto* alla portanza. Di fatto, quindi, **scaricano** l'ala. Sembra un dettaglio, ma ha una conseguenza pratica enorme. Conviene piazzare le masse pesanti (serbatoi, motori) il più lontano possibile dalla radice: il loro peso lavora "contro" il momento flettente che la portanza genera all'incastro, e lo riduce. È esattamente il motivo per cui sui grandi velivoli da trasporto (Boeing 747, Airbus A380) i motori stanno appesi sotto le ali e non in fusoliera: appesantire l'ala dove la portanza la flette aiuta a tenerla insieme.

1.2 Filosofia del progetto: dal semplice al raffinato

Quando si comincia a progettare un velivolo c'è un piccolo paradosso: per calcolare la struttura servirebbe conoscerla, ma la struttura è proprio ciò che stiamo cercando di determinare. Se ne esce per *affinamenti successivi*: si parte da uno schema grezzo e lo si raffina passo dopo passo, fino alla *struttura ottimale*, quella che mette d'accordo basso peso, costo contenuto, durata e affidabilità. Nei primi giri di questo processo servono schemi di calcolo *semplici*.

Schemi semplici e isostatici

Nelle prime fasi del progetto si adottano schemi di calcolo che siano:

Semplici:

perché consentono di eseguire rapidamente i numerosi calcoli necessari alla ricerca della soluzione migliore.

Isostatici:

perché permettono di determinare le sollecitazioni in una porzione della struttura, o addirittura in un singolo elemento, *indipendentemente* dalla scelta della struttura circostante.

Questo consente di dimensionare o verificare *entro certi limiti* le varie parti della struttura in modo indipendente.

Gli schemi più raffinati – quelli che tengono conto delle **interazioni iperstatiche** tra le varie parti – entrano in gioco solo più avanti, quando il progetto è ormai maturo. A quel punto carta e penna non bastano più e si ricorre a software dedicati (i codici agli elementi finiti, FEM – *Finite Element Method*). In questa dispensa restiamo volutamente nel mondo semplice e isostatico: è lì che si imparano i concetti.

2 Il metodo analitico delle travi inflesse

Prima di tuffarci nell'ala, fissiamo il **linguaggio** con cui descriveremo cosa succede “dentro” una trave qualsiasi. È un richiamo di Scienza delle Costruzioni, ma lo affrontiamo in chiave *operativa*: non teoria fine a sé stessa, ma esattamente ciò che serve per tracciare i diagrammi $T(x)$ ed $M_f(x)$ in qualunque situazione.

2.1 Le caratteristiche della sollecitazione interna

Cosa significa “caratteristiche della sollecitazione”?

Quando una trave equilibrata è sottoposta ad un sistema di forze esterne attive (carichi) e reattive (reazioni vincolari), in ogni sezione retta della trave si trasmettono **forze interne** attraverso le quali una parte di trave esercita azione sull'altra. Riducendo tali forze interne al *baricentro della sezione*, si ottiene una forza risultante e una coppia risultante, le cui componenti rispetto ad un sistema di riferimento locale prendono il nome di *caratteristiche della sollecitazione*:

Sforzo normale N :

componente della forza risultante *parallela* all'asse della trave; tende ad allungare ($N > 0$, trazione) o ad accorciare ($N < 0$, compressione) il concio.

Sforzo di taglio T :

componente della forza risultante *perpendicolare* all'asse della trave; tende a far scorrere una sezione rispetto a quella adiacente.

Momento flettente M_f :

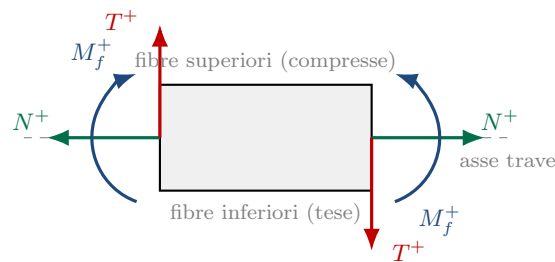
componente della coppia risultante con asse *perpendicolare* al piano in cui giacciono i carichi; tende a flettere la trave incurvandone l'asse.

Per le travi piane caricate nel proprio piano (caso tipico dell'ala in volo livellato) le caratteristiche da considerare si riducono dunque a tre: $N(x)$, $T(x)$ ed $M_f(x)$.

2.2 La convenzione di De Saint-Venant sui segni

Un segno “+” o “-” su un diagramma deve voler dire qualcosa di preciso: altrimenti il diagramma non si sa leggere. Per questo serve una **convenzione sui segni**. Quella che usiamo (standard in Italia) è la convenzione di **De Saint-Venant**, e si ragiona sempre su un *concio elementare*, cioè una fettina di trave che immaginiamo di ritagliare dalla struttura per guardarci dentro.

Convenzione di De Saint-Venant – versi positivi sul concio



Versi positivi delle caratteristiche N , T , M_f secondo De Saint-Venant.

Le tre regole pratiche corrispondenti alla figura sono:

- Lo **sforzo normale** N è positivo se genera *trazione*, cioè se le frecce “escono” dal concio (allungamento delle fibre).
- Lo **sforzo di taglio** T è positivo se tende a far ruotare il concio in *senso orario*.
- Il **momento flettente** M_f è positivo se tende ad *allungare le fibre inferiori* (concavità verso l'alto, “a sorriso”).

Lettura operativa per il calcolo

Quando si percorre la trave da sinistra verso destra ed in una generica sezione si “taglia” la trave per studiare l'equilibrio del tronco di sinistra, sulla sezione di taglio si rivelano le tre caratteristiche N , T , M_f come *azioni che il tronco di destra esercita sul tronco di sinistra*. Allora, considerando solo le forze a sinistra:

- $N(x)$ = somma algebrica delle forze *parallele all'asse* a sinistra della sezione, considerate positive se di trazione;
- $T(x)$ = somma algebrica delle forze *perpendicolari all'asse* a sinistra, positive se dirette verso l'alto;
- $M_f(x)$ = somma algebrica dei momenti rispetto al baricentro della sezione di tutte le forze a sinistra, positivi se *orari*.

Se si sceglie invece di considerare il tronco di destra, tutti i segni si invertono: forze verso il basso a destra danno taglio positivo, momenti antiorari a destra danno momento flettente positivo. Questa “simmetria” è una conseguenza diretta dell'equilibrio della trave.

2.3 Il concio elementare e la genesi delle equazioni $T(x)$ ed $M_f(x)$

Per ricavare le funzioni $T(x)$ ed $M_f(x)$ esistono due strade, del tutto equivalenti nei risultati ma diverse nello spirito:

- Metodo diretto:** in ogni sezione di interesse si considera l'equilibrio del *tronco finito* di trave a sinistra (o a destra) della sezione e si calcolano direttamente i valori di T ed M_f . È più rapido nei casi semplici, ma fornisce i valori *punto per punto*, non l'andamento continuo.
- Metodo analitico (delle travi inflesse):** si introduce una *ascissa corrente* x e si scrivono $T(x)$ ed $M_f(x)$ come *funzioni continue* di x , valide su un intero intervallo della trave. Si ottengono così le *equazioni delle sollecitazioni*, dalle quali si ricavano sia i valori notevoli sia i diagrammi.

Noi useremo il *metodo analitico*. Il motivo è semplice: quando il carico varia lungo l'apertura (pensiamo a un'ala rastremata) la sezione più sollecitata non si sa in anticipo, e l'unico modo per scoprirla è avere $T(x)$ ed $M_f(x)$ scritte come funzioni continue e poi cercarne i massimi.

Procedura del metodo analitico

1. Si fissa un **sistema di riferimento**, con origine in un estremo della trave (tipicamente il vincolo) e ascissa x crescente verso l'altro estremo.
2. Si considera una **sezione generica** di ascissa x .
3. Si scrive l'equilibrio del *tronco di sinistra* (o di destra) di lunghezza x , esprimendo $T(x)$ ed $M_f(x)$ come funzioni algebriche di x .
4. Se sulla trave sono presenti *carichi concentrati* o *vincoli intermedi*, le funzioni $T(x)$ ed $M_f(x)$ cambiano espressione in corrispondenza di tali punti: si introducono allora più **intervalli di validità**, ognuno con la propria espressione.

Che forma avranno i diagrammi? C'è una regola d'oro: la *forma* delle curve $T(x)$ ed $M_f(x)$ dipende solo dal *tipo* di carico, non dai numeri. Vale la pena imparare a riconoscere “a colpo d'occhio” cosa aspettarsi prima ancora di fare un conto – è il modo migliore per accorgersi al volo se un diagramma è sbagliato.

Tipo di carico	$T(x)$	$M_f(x)$	Note
Solo carichi concentrati	costante a tratti	lineare a tratti	salti di T in corrispondenza di ogni forza concentrata
Carico distribuito uniforme $p = \text{cost}$	lineare	parabolico (2° grado)	in tratto a sbalzo: ramo di parabola
Carico distribuito lineare (p_R, p_E)	parabolico (2° grado)	cubico (3° grado)	tipico delle ali rastremate
Coppia concentrata m	continuo (nessun salto)	salto pari a m	raro nel caso aeronautico

Distinzione concettuale fondamentale

Teniamo ben separati due comportamenti che a scuola si confondono di continuo. Una *forza concentrata* fa fare al taglio un **salto** (alto quanto la forza) e al momento un **cambio di pendenza** – ma il momento resta *continuo*, non salta. Una *coppia concentrata* fa il contrario: fa **saltare il momento** e lascia il taglio del tutto indisturbato. In una parola: le forze “rompono” il taglio, le coppie “rompono” il momento.

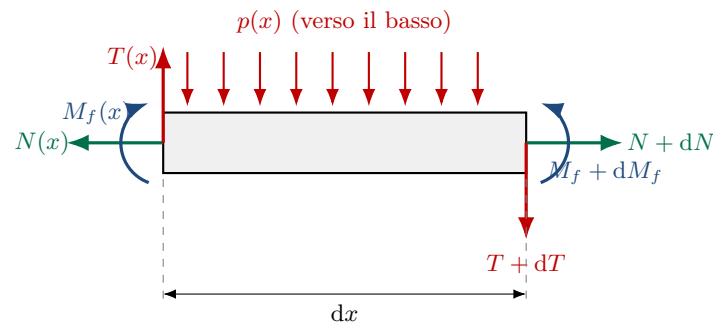
3 Le relazioni differenziali di Schwedler

Carico, taglio e momento non sono tre cose scollegate: sono *legate da relazioni differenziali* sorprendentemente semplici. È una delle idee più eleganti della Scienza delle Costruzioni, e la dobbiamo a Johann Wilhelm Schwedler (1823–1894). Queste relazioni servono a due cose: **controllare** se un diagramma che abbiamo tracciato è coerente, e – ancora più utile – *prevedere* dove cadranno i massimi e i minimi del momento *prima* di calcolarli. Ricaviamole con cura, partendo dall'equilibrio di un concio infinitesimo.

3.1 Equilibrio del concio infinitesimo

Prendiamo una trave caricata da una distribuzione $p(x)$ di forze per unità di lunghezza, rivolte verso il basso (come pesi e forze di gravità). L'idea è di ritagliare una fettina sottilissima – un

concio infinitesimo di lunghezza dx , compreso tra la sezione x e la sezione $x + dx$ – e imporre che, da sola, stia in equilibrio. Tutto nasce da qui.



Concio infinitesimo isolato e azioni che lo equilibrano.

Sul concio agiscono:

- sulla faccia di sinistra (di ascissa x): le caratteristiche $N(x)$, $T(x)$, $M_f(x)$, secondo i versi positivi della convenzione di De Saint-Venant;
- sulla faccia di destra (di ascissa $x + dx$): le caratteristiche $N + dN$, $T + dT$, $M_f + dM_f$, sempre secondo la stessa convenzione (con i versi sulla faccia destra speculari rispetto a quella sinistra: vedi figura);
- sul tratto dx : una forza esterna distribuita di risultante $p(x) dx$, diretta verso il basso.

3.2 Prima relazione di Schwedler: $dT/dx = -p(x)$

Imponiamo che il concio non si muova in verticale, cioè l'**equilibrio alla traslazione verticale**. Contiamo positive le forze verso l'alto e sommiamo ciò che agisce sulle due facce e sul tratto dx :

$$T(x) - [T(x) + dT] - p(x) dx = 0$$

da cui, semplificando $T(x)$:

$$-dT - p(x) dx = 0 \implies dT = -p(x) dx$$

Dividiamo tutto per dx ed ecco la **prima relazione di Schwedler**:

Prima relazione di Schwedler

$$\boxed{\frac{dT}{dx} = -p(x)} \quad (1)$$

La derivata del taglio rispetto all'ascissa è uguale al carico distribuito cambiato di segno.

Cosa ci dice, in pratica. La pendenza del diagramma del taglio è il carico (cambiato di segno). Quindi:

- Se $p(x) = 0$ (tratto scarico): $dT/dx = 0$, ovvero T è *costante* su quel tratto.
- Se $p(x)$ è costante (carico distribuito uniforme): T è *lineare* (la sua pendenza vale $-p$).
- Se $p(x)$ è lineare (carico trapezoidale, tipico delle ali rastremate): T è *parabolico*.
- In presenza di una **forza concentrata** F , la (1) non vale puntualmente: il taglio subisce un *salto* pari a $-F$ (se F è diretta verso il basso) nel punto di applicazione.

3.3 Seconda relazione di Schwedler: $dM_f/dx = T(x)$

Ora imponiamo che il concio non ruoti: l'**equilibrio alla rotazione**. Scegliamo come polo il *baricentro della faccia destra* – è una furbizia, così le forze applicate proprio lì non fanno momento e spariscono dal conto (resta solo la coppia $M_f + dM_f$). Prendiamo positivi i momenti orari:

$$-M_f(x) + [M_f(x) + dM_f] - T(x) \cdot dx + p(x) dx \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

Esaminiamo termine per termine:

- $-M_f(x)$: la coppia M_f sulla faccia sinistra è oraria rispetto al baricentro di quella stessa faccia, ma *antioraria* rispetto al baricentro della faccia destra; quindi compare con segno meno.
- $+ [M_f + dM_f]$: la coppia sulla faccia destra è oraria rispetto al proprio baricentro (per la convenzione DSV).
- $-T(x) dx$: il taglio $T(x)$ sulla faccia sinistra è diretto verso l'alto e dista dx dal polo (la faccia destra), quindi produce un momento *antiorario* rispetto al polo.
- $+p(x) dx \cdot dx/2$: il carico distribuito ha risultante $p dx$ applicata in mezzzeria del concio, cioè a distanza $dx/2$ dal polo; produce un momento orario.

Semplifichiamo. Il termine $p(x)(dx)^2/2$ è un *infinitesimo di ordine superiore*: contiene $(dx)^2$ ed è quindi molto più piccolo degli altri, che vanno con dx . Lo possiamo buttare via senza rimorsi. Resta:

$$dM_f - T(x) dx = 0 \implies dM_f = T(x) dx$$

Seconda relazione di Schwedler

$$\boxed{\frac{dM_f}{dx} = T(x)} \quad (2)$$

La derivata del momento flettente rispetto all'ascissa è uguale allo sforzo di taglio.

Cosa ci dice, in pratica. Questa è forse la relazione più preziosa di tutte, perché lega la *forma* delle due curve.

- Il momento flettente è una funzione *primitiva* del taglio: graficamente, l'**area sottesa** dal diagramma di T tra due ascisse fornisce la *variazione* di M_f tra le stesse ascisse:

$$M_f(x_2) - M_f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} T(\xi) d\xi$$

- **La conseguenza che useremo sempre.** Finché T mantiene lo stesso segno, M_f va tutto da una parte: *sale* dove $T > 0$, *scende* dove $T < 0$. Morale: *il momento ha un massimo o un minimo proprio dove il taglio si annulla* (o salta). È la bussola con cui andremo a caccia delle sezioni critiche.
- Combinando le due relazioni si ottiene la *equazione differenziale del secondo ordine* del momento:

$$\frac{d^2 M_f}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -p(x)$$

Da cui, per integrazione doppia, si ottiene direttamente $M_f(x)$ nota la legge del carico.

Verifica metodologica imprescindibile

Appena finito di tracciare T ed M_f , fermiamoci trenta secondi e controlliamo che:

- nei punti in cui $T = 0$, M_f ha un *estremo* (massimo o minimo locale);
- dove $T > 0$, M_f è *crescente*; dove $T < 0$, M_f è *decrescente*;

- la *pendenza* del diagramma di M_f in un punto è numericamente uguale al *valore* del taglio in quel punto.

Se anche una sola di queste cose non torna, da qualche parte c'è un errore – di conto o di disegno. È una verifica che costa pochi secondi e che salva da quasi tutti gli errori grossolani: non saltiamola mai.

4 Il principio di sovrapposizione degli effetti

4.1 Enunciato e fondamento

Quando su una trave agiscono più carichi insieme, il **principio di sovrapposizione degli effetti** ci permette di affrontarli *uno alla volta* e poi sommare. È una comodità enorme: trasforma un problema complicato in tanti problemi semplici.

Enunciato del principio

Per un sistema strutturale *lineare*, l'effetto prodotto dall'applicazione simultanea di più carichi è uguale alla *somma algebrica* degli effetti prodotti da ciascun carico applicato separatamente. In simboli, se sulla trave agiscono i carichi $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$:

$$\begin{aligned} T(x) &= T_1(x) + T_2(x) + \dots + T_n(x) \\ M_f(x) &= M_{f,1}(x) + M_{f,2}(x) + \dots + M_{f,n}(x) \end{aligned}$$

dove $T_i(x)$ ed $M_{f,i}(x)$ sono il taglio ed il momento flettente prodotti dal solo carico $\mathcal{F}_i$.

Quando possiamo usarlo? Solo se il sistema è *lineare*. Detto in modo concreto, servono tre condizioni:

1. **Linearità geometrica:** gli spostamenti e le deformazioni sono “piccoli”, tali da non modificare apprezzabilmente la configurazione iniziale.
2. **Linearità costitutiva:** il materiale segue la legge di Hooke, $\sigma = E \varepsilon$, con E costante (regime elastico lineare).
3. **Linearità dei vincoli:** i vincoli reagiscono in modo proporzionale agli spostamenti che impediscono.

Buona notizia: per le travi isostatiche che studiamo qui queste tre condizioni sono *sempre* soddisfatte, quindi possiamo sovrapporre senza pensarci. Una sola eccezione da ricordare: i problemi di *stabilità* (il carico di punta), dove si esce dal campo lineare e la sovrapposizione non vale più.

4.2 Strategia di calcolo

Procedura applicativa

1. Si *decompon*e il sistema di carico totale in carichi elementari (ciascuno di natura semplice: solo carico distribuito, oppure solo un carico concentrato, oppure solo una coppia...).
2. Per ciascun caso elementare si calcolano *separatamente* reazioni vincolari R_i , taglio $T_i(x)$ e momento flettente $M_{f,i}(x)$.
3. Si *sommano algebricamente* i risultati:

$$R = \sum_i R_i, \quad T(x) = \sum_i T_i(x), \quad M_f(x) = \sum_i M_{f,i}(x)$$

4.3 Esempio illustrativo

Trave a sbalzo con carico distribuito + concentrato

Si consideri una mensola di lunghezza ℓ , incastrata in A e libera in B , sottoposta contemporaneamente a:

- un carico distribuito uniforme p verso il basso, su tutta la lunghezza;
- un carico concentrato F verso il basso, applicato all'estremo libero B .

Caso (a) – solo carico distribuito p . Mensola con carico uniforme:

$$\begin{aligned} R'_A &= p\ell \quad (\uparrow), & M'_A &= \frac{1}{2} p \ell^2 \\ T'(x) &= p(\ell - x), & M'_f(x) &= -\frac{1}{2} p (\ell - x)^2 \end{aligned}$$

Caso (b) – solo carico concentrato F in B . Mensola con carico concentrato all'estremo libero:

$$\begin{aligned} R''_A &= F \quad (\uparrow), & M''_A &= F \ell \\ T''(x) &= F, & M''_f(x) &= -F(\ell - x) \end{aligned}$$

Sovrapposizione. Il sistema reale corrisponde alla somma dei due casi:

$$\begin{aligned} R_A &= R'_A + R''_A = p\ell + F \\ M_A &= M'_A + M''_A = \frac{1}{2} p \ell^2 + F \ell \\ T(x) &= p(\ell - x) + F \\ M_f(x) &= -\frac{1}{2} p (\ell - x)^2 - F(\ell - x) \end{aligned}$$

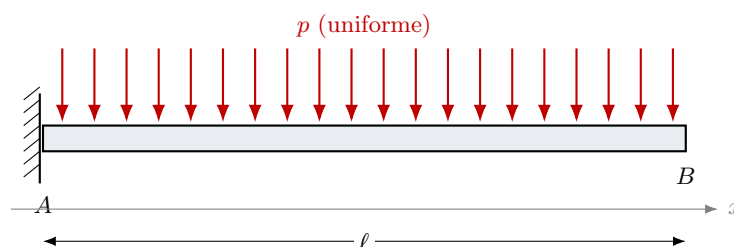
5 Costruzione operativa dei diagrammi: esempi guidati

Bando alla teoria: mettiamo le mani in pasta su tre casi classici, dal più facile al più completo. L'obiettivo non è imparare a memoria delle formule (si dimenticano), ma costruire un *metodo* – lo stesso che, identico, riuseremo poi sull'ala. Seguiamo ogni volta le stesse fasi, così il procedimento diventa un automatismo.

5.1 Caso A – Mensola con carico distribuito uniforme

Dati

Trave a mensola incastrata in A , libera in B . Lunghezza ℓ . Carico distribuito uniforme p (verso il basso) su tutta la luce.



Fase 1 – Reazioni vincolari. L'incastro fornisce tre reazioni: H_A , V_A , M_A . Imponendo le tre equazioni cardinali della statica:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 : \quad H_A &= 0 \\ \sum F_y = 0 : \quad V_A - p\ell &= 0 \implies V_A = p\ell \\ \sum M^{(A)} = 0 : \quad M_A - p\ell \cdot \frac{\ell}{2} &= 0 \implies M_A = \frac{1}{2}p\ell^2\end{aligned}$$

Fase 2 – Equazioni delle sollecitazioni. Tagliamo idealmente la trave in una sezione generica x (con $0 \leq x \leq \ell$) e guardiamo solo il tronco di sinistra. Cosa c'è a sinistra? La reazione V_A verso l'alto, il pezzo di carico distribuito su lunghezza x (che pesa px verso il basso ed è applicato a metà, cioè a $x/2$ dal taglio) e il momento d'incastro M_A (antiorario, quindi *negativo* in convenzione DSV). Sommiamo:

$$\begin{aligned}T(x) &= V_A - px = p\ell - px = p(\ell - x) \\ M_f(x) &= -M_A + V_A \cdot x - px \cdot \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}p\ell^2 + p\ell x - \frac{1}{2}px^2 \\ &= -\frac{1}{2}p(\ell - x)^2\end{aligned}$$

Fase 3 – Verifica con Schwedler.

- $\frac{dT}{dx} = -p$: coerente con $-p(x) = -p$ ✓
- $\frac{dM_f}{dx} = p(\ell - x) = T(x)$ ✓

Fase 4 – Valori notevoli.

Sezione x	$T(x)$	$M_f(x)$	Note
$x = 0$ (radice A)	$p\ell$	$-\frac{1}{2}p\ell^2$	sezione critica
$x = \ell$ (estr. B)	0	0	estremo libero

Fase 5 – Tracciamento dei diagrammi.

Diagramma del taglio – mensola con p

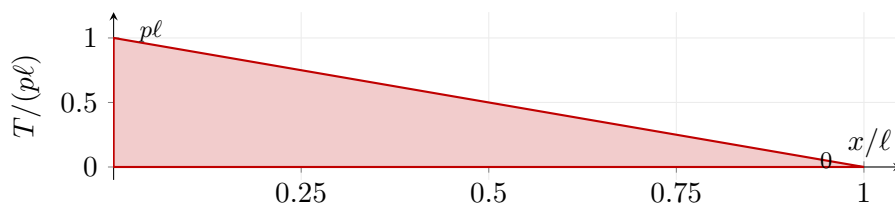
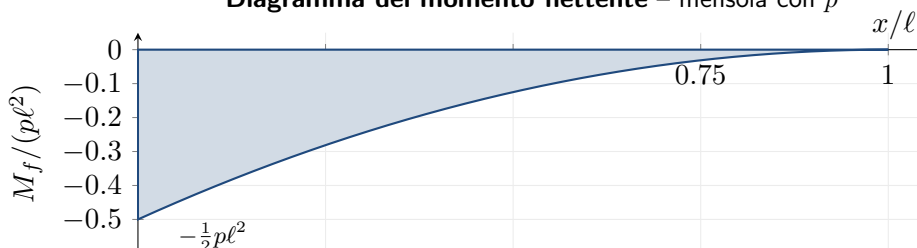


Diagramma del momento flettente – mensola con p



Come previsto: carico costante $\Rightarrow$ taglio *lineare* che cala, $\Rightarrow$ momento a *parabola*. E il momento è massimo (in modulo) là dove ci aspettavamo, cioè all'incastro – la sezione che dovremo dimensionare.

5.2 Caso B – Trave appoggiata con forza concentrata in mezziera

Dati

Trave appoggiata di lunghezza ℓ , cerniera in A , appoggio in B . Carico concentrato F verso il basso applicato in mezziera C (a distanza $\ell/2$ da A).

Fase 1 – Reazioni vincolari. Per simmetria del carico e dei vincoli:

$$V_A = V_B = \frac{F}{2}, \quad H_A = 0$$

Fase 2 – Equazioni delle sollecitazioni. Attenzione: la forza in C spezza la trave in *due intervalli*. A sinistra e a destra di C le forze in gioco sono diverse, quindi $T(x)$ ed $M_f(x)$ avranno due espressioni distinte. Trattiamoli separatamente.

Intervallo 1 – A-C ($0 \leq x \leq \ell/2$): guardo a sinistra; l'unica forza presente è V_A .

$$T(x) = V_A = \frac{F}{2}$$

$$M_f(x) = V_A \cdot x = \frac{F}{2} x$$

Intervallo 2 – C-B ($\ell/2 \leq x \leq \ell$): ora a sinistra ho sia V_A sia F .

$$T(x) = V_A - F = -\frac{F}{2}$$

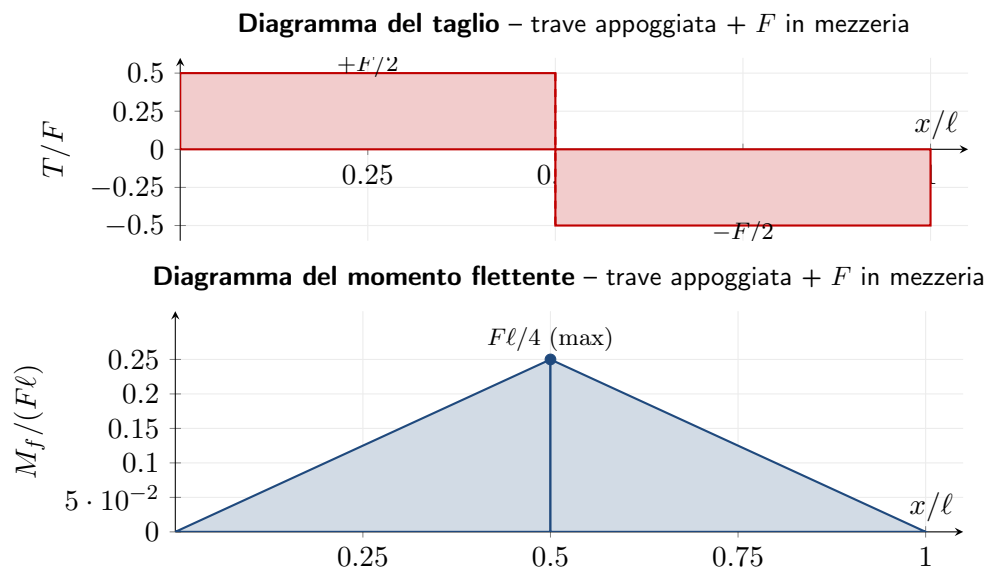
$$M_f(x) = V_A \cdot x - F \cdot \left(x - \frac{\ell}{2}\right) = \frac{F}{2} (\ell - x)$$

Fase 3 – Verifica con Schwedler. In entrambi gli intervalli $p(x) = 0$, quindi $T(x) = \text{costante}$, in accordo con la (1). Inoltre $dM_f/dx = F/2 = T$ nell'intervallo 1 e $dM_f/dx = -F/2 = T$ nell'intervallo 2. ✓ In C , il taglio subisce un *salto* pari a $-F$ (da $+F/2$ a $-F/2$); il momento flettente è *continuo* (entrambe le espressioni danno $M_f(\ell/2) = F\ell/4$) ma cambia pendenza.

Fase 4 – Valori notevoli.

Sezione x	$T(x)$	$M_f(x)$	Note
$x = 0$ (cerniera A)	$+F/2$	0	cerniera
$x = \ell/2^-$	$+F/2$	$F\ell/4$	limite sinistro di C
$x = \ell/2^+$	$-F/2$	$F\ell/4$	limite destro: salto di T
$x = \ell$ (appoggio B)	$-F/2$	0	appoggio

Il momento è massimo proprio sotto la forza, cioè dove il taglio cambia segno (da $+F/2$ a $-F/2$): coerente con Schwedler. Vale $|M_f|_{\max} = F\ell/4$.

Fase 5 – Tracciamento dei diagrammi.**5.3 Caso C – Trave appoggiata con carico distribuito****Dati**

Trave appoggiata di lunghezza ℓ , cerniera in A , appoggio in B . Carico distribuito uniforme p verso il basso su tutta la luce.

Fase 1 – Reazioni vincolari. Per simmetria:

$$V_A = V_B = \frac{p\ell}{2}, \quad H_A = 0$$

Fase 2 – Equazioni delle sollecitazioni. Guardiamo il tronco di sinistra fino alla sezione x (qui non ci sono salti: una sola espressione vale per tutta la trave):

$$T(x) = V_A - px = \frac{p\ell}{2} - px$$

$$M_f(x) = V_A x - px \cdot \frac{x}{2} = \frac{p\ell}{2}x - \frac{px^2}{2}$$

Fase 3 – Ricerca del massimo del momento. Sfruttiamo la bussola di Schwedler (2): il momento è massimo dove il taglio si annulla. Imponiamo $T(x) = 0$:

$$\frac{p\ell}{2} - px = 0 \implies x_{T=0} = \frac{\ell}{2}$$

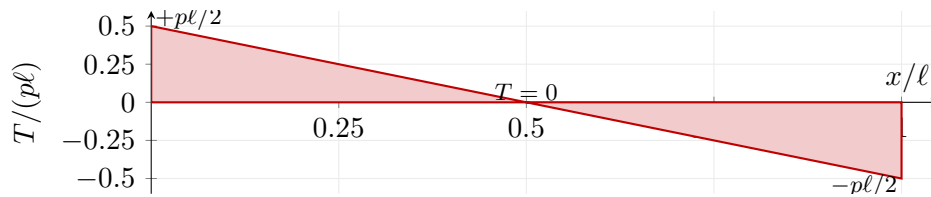
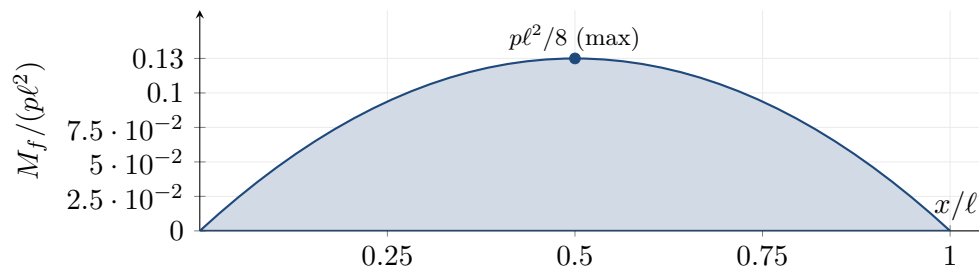
In quel punto:

$$M_{f\max} = \frac{p\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} - \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{p\ell^2}{4} - \frac{p\ell^2}{8} = \frac{p\ell^2}{8}$$

Fase 4 – Verifica con Schwedler.

- $\frac{dT}{dx} = -p \quad \checkmark$
- $\frac{dM_f}{dx} = \frac{p\ell}{2} - px = T(x) \quad \checkmark$

Fase 5 – Tracciamento dei diagrammi.

Diagramma del taglio – trave appoggiata con p Diagramma del momento flettente – trave appoggiata con p 

Il taglio è una retta che attraversa lo zero in mezzeria; il momento è una parabola simmetrica, massima al centro e pari a $p\ell^2/8$. Vale la pena fissare bene questa formula: il famoso $p\ell^2/8$ ricorre ovunque nella pratica, dalle travi dei solai alle ali.

Sintesi metodologica degli esempi guidati

Dai tre casi sviluppati emerge il seguente schema operativo standard, **valido per qualsiasi struttura isostatica**:

1. Calcolare le *reazioni vincolari* con le tre equazioni cardinali della statica.
2. Identificare gli *intervalli di validità* (uno per ogni carico concentrato o vincolo intermedio).
3. In ciascun intervallo, scrivere $T(x)$ ed $M_f(x)$ guardando *solo le forze a sinistra (o a destra)* della sezione, applicando la convenzione di De Saint-Venant.
4. Verificare con le relazioni di Schwedler ($dT/dx = -p$, $dM_f/dx = T$).
5. Cercare i *punti notevoli* (zeri del taglio, salti, estremi di M_f) e tracciare i diagrammi.
6. Identificare la *sezione critica* per il dimensionamento.

6 Schematizzazione strutturale: l'ala come trave

6.1 Lo schema semplice a travi

Schema a travi

Schema semplice a travi: è lo schema più elementare con il quale si può rappresentare la struttura del velivolo. In tale schematizzazione, le parti principali della struttura (**ala**, **fusoliera**, **impennaggi di coda**) vengono tutte considerate come travi.

Lo stesso vale per le superfici mobili (alettoni, ipersostentatori, equilibratore, timone): anch'esse sono, in fondo, travi – collegate alle parti fisse tramite cerniere e organi di comando.

Il bello è che, una volta deciso che tipo di trave è l'ala – incastrata o controventata, *a seconda dell'architettura* – il calcolo delle sollecitazioni è esattamente quello visto finora. Nessuno strumento nuovo: solo gli stessi principi applicati a un caso che ci interessa di più.

Esempio applicativo – due architetture a confronto

Ala controventata

(Cessna 172; analogo al Piper PA-18 Super Cub)



Schema: il velivolo presenta un'ala *controventata* (con puntone). Ai fini del calcolo statico la semiala si schematizza come **trave su due appoggi** (cerniera in radice + appoggio sul puntone): sistema *isostatico*, con il puntone che assorbe trazione/compressione.

Ala a sbalzo

(Boeing 737)



Schema: il velivolo presenta un'ala *a sbalzo* (cantilever). Ai fini del calcolo statico la semiala si schematizza come **trave incastrata in radice** (mensola): sistema *isostatico* con tre reazioni vincolari in radice (sforzo, taglio, momento).

6.2 La lunghezza della trave equivalente: quando $\ell = b/2$?

Nei manuali, accanto agli schemi della semiala, si legge spesso la postilla “*solo in certe soluzioni costruttive vale $\ell = b/2$* ”. Sembra una pignoleria, ma è una distinzione importante: separa lo schema di *prima approssimazione* (quello che usiamo per i conti preliminari) dallo schema di *dettaglio* (necessario per la verifica finale). Vale la pena capire da dove nasce.

Quando $\ell = b/2$ e quando no?

La lunghezza ℓ della *trave equivalente* che modella la semiala dipende dalla **posizione del vincolo** che la fusoliera offre alla struttura alare. Si distinguono due architetture tipiche:

(a) Cassone alare passante (*carry-through*)

Il longerone (o l'intero cassone alare) attraversa la fusoliera *senza interruzione strutturale*, collegando direttamente le due semiali come se fossero un'unica trave. In questo caso il *nodo rigido di vincolo* si idealizza in mezzera del velivolo, e dunque:

$$\ell = \frac{b}{2}$$

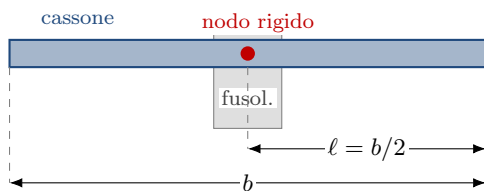
(b) Attacchi laterali alla fusoliera

Le semiali sono attaccate alla fusoliera tramite *perni*, *lugs* o *bullonature* applicati ai fianchi della stessa. Il vincolo è dunque *spostato verso l'esterno* di una quantità pari a metà della larghezza-fusoliera $W_{fus}/2$, e risulta:

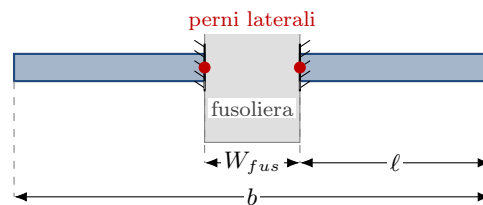
$$\ell = \frac{b - W_{fus}}{2} < \frac{b}{2}$$

Visualizzazione delle due architetture. La figura seguente mostra schematicamente, in vista frontale, le due soluzioni costruttive; in entrambi i casi sono evidenziati l'*ingombro della fusoliera* (in grigio) e la *trave strutturale equivalente* (in blu).

(a) Cassone alare passante
(“carry-through”)



(b) Attacchi laterali
(“side-pin”)



Le due architetture costruttive di attacco ala-fusoliera.

Esempio numerico – Cessna 172

Per il Cessna 172 “Skyhawk” (apertura $b = 11,0$ m, larghezza fusoliera $W_{fus} \approx 1,0$ m) le due schematizzazioni producono:

$$\ell_{(a)} = b/2 = 5,50 \text{ m} \quad (\text{cassone passante, schema preliminare})$$

$$\ell_{(b)} = (b - W_{fus})/2 = 5,00 \text{ m} \quad (\text{attacchi laterali, schema reale})$$

La differenza è $\sim 10\%$: si traduce, sul momento di incastro alla radice (proporzionale a ℓ^2), in uno scarto $\sim 20\%$. È uno scarto trascurabile in fase di predimensionamento ma significativo per la verifica finale.

Confronto tra velivoli reali. La tabella seguente mostra l'effetto della larghezza-fusoliera per alcuni velivoli rappresentativi delle diverse categorie:

Velivolo	b [m]	W_{fus} [m]	$b/2$ [m]	ℓ_{eff} [m]	Architettura
Aliante DG-1000	20,0	0,6	10,0	9,7	cassone passante (fus. sottile)
Cessna 172	11,0	1,0	5,5	5,0	attacchi laterali
Tecnam P2006T	11,4	1,1	5,7	5,15	cassone ventrale passante
Boeing 737-800	35,8	3,8	17,9	16,0	cassone passante (sotto cabina)
Boeing 747-400	64,4	6,5	32,2	28,9	cassone passante (sotto cabina)
Airbus A380	79,8	7,1	39,9	36,3	cassone passante (sotto cabina)

Implicazioni operative e convenzione adottata

- In **predimensionamento** si usa $\ell = b/2$, accettando un'approssimazione *a vantaggio della sicurezza* (il momento ottenuto è maggiore di quello reale, perché il braccio è più lungo).
- In **verifica finale** si deve usare la lunghezza *effettiva* della trave equivalente, calcolata sulla base della reale architettura di attacco ala-fusoliera.
- Nei velivoli con *cassone alare passante* (la maggior parte dei velivoli moderni: Cessna 172/182, Tecnam P2006T, Boeing 737, alianti DG-1000...) la schematizzazione $\ell = b/2$ è *quasi esatta*, perché il nodo rigido strutturale è effettivamente prossimo alla mezzzeria.
- Negli alianti ad alto allungamento ($AR > 25$) e nei piccoli velivoli con fusoliera molto sottile, l'approssimazione $\ell \simeq b/2$ diventa eccellente (errore $< 3\%$).

In tutta la presente dispensa, salvo diversa indicazione, adotteremo la convenzione $\ell = b/2$.

Esempio applicativo pratico – impatto sul dimensionamento

Quesito. Per un velivolo bimotore tipo Tecnam P2006T ($b = 11,4\text{ m}$, $W_{fus} = 1,1\text{ m}$, carico distribuito uniforme $p = 377\text{ kgf/m}$), si confronti il momento di incastro alla radice $|M_f|_{\max} = \frac{1}{2} p \ell^2$ ottenuto nei due schemi.

Schema (a) – $\ell = b/2 = 5,70\text{ m}$ (predimensionamento):

$$M_{R,(a)} = \frac{1}{2} \cdot 377 \cdot 5,70^2 \approx 6122\text{ kgf} \cdot \text{m}$$

Schema (b) – $\ell_{eff} = (b - W_{fus})/2 = 5,15\text{ m}$ (verifica finale):

$$M_{R,(b)} = \frac{1}{2} \cdot 377 \cdot 5,15^2 \approx 4998\text{ kgf} \cdot \text{m}$$

Differenza: $\Delta M_R/M_{R,(a)} \approx -18\%$, ovvero il modello preliminare *sovrastima* il momento reale di radice del 18%.

Conclusione operativa. Il dimensionamento eseguito con $\ell = b/2$ è *conservativo*: il longherone risulterà leggermente sovradimensionato rispetto allo stretto necessario. La verifica finale con ℓ_{eff} permette di affinare il progetto e ridurre il peso strutturale, con benefici diretti sul carico utile e sulle prestazioni del velivolo.

6.3 Una nota sulla simmetria

Un velivolo è simmetrico rispetto al piano verticale che lo taglia in lungo: per questo ne studiamo **una sola semiala** e diamo per scontato che l'altra si comporti in modo speculare. La sua lunghezza la chiamiamo ℓ (in molti testi, $b/2$). Conviene prenderci confidenza da subito.

7 Le equazioni cardinali della statica

7.1 Calcolo delle reazioni vincolari

Definizione

Si chiamano **reazioni vincolari** le forze e/o le coppie che i vincoli devono esercitare sulla struttura per mantenerla in equilibrio statico, impedendole qualunque movimento (traslazione e rotazione). Esse si ottengono imponendo che siano soddisfatte le *equazioni cardinali della statica*.

Per un **corpo piano** dotato di tre gradi di libertà (due traslazioni e una rotazione), le tre equazioni cardinali si scrivono:

$$\sum F_{ix} = 0 \quad \sum F_{iy} = 0 \quad \sum M_i^{(P)} = 0 \quad (3)$$

in cui la sommatoria dei momenti $\sum M_i^{(P)}$ è calcolata rispetto ad un **polo** P scelto a piacere (in genere il punto in cui agiscono più forze incognite, in modo da semplificare la risoluzione).

Se il sistema è **staticamente determinato** (isostatico), le tre sommatorie si riducono a tre comuni equazioni di primo grado, indipendenti e facilmente risolvibili nelle incognite, che sono le componenti delle reazioni vincolari.

Sistemi iperstatici

Se le reazioni incognite sono *più* delle equazioni di equilibrio (tre, nel piano), il sistema è **iperstatico**: le sole equazioni della statica non bastano più e bisogna affiancarle a equazioni di *congruenza* geometrica (cioè sulle deformazioni). È un mondo più ricco ma anche più complicato; per scelta didattica, in questa dispensa restiamo sempre nel caso isostatico, dove tutto si risolve con le tre equazioni cardinali e basta.

8 Procedura operativa di costruzione dei diagrammi

Abbiamo tutti i pezzi. Mettiamoli in fila in una **procedura** da seguire sempre uguale, qualunque sia l'ala da analizzare. È la nostra “ricetta”: finché la seguiamo con ordine, non ci si perde.

Fase A – Identificazione dei carichi

- A.1 Stabilire la **configurazione di volo** di riferimento (volo livellato, manovra, raffica): essa determina il *fattore di carico* n e quindi l'intensità della portanza.
- A.2 Calcolare la **portanza totale** sulla semiala come $L_{semi} = n \cdot (Q_{tot} - Q_{ala})/2$, dove Q_{tot} è il peso totale del velivolo e Q_{ala} il peso strutturale dell'ala.
- A.3 Determinare il **carico distribuito** $p(x)$ in funzione della pianta alare (rettangolare, trapezoidale, ellittica...) e l'eventuale **carico concentrato** (motore, serbatoio, carrello).

Fase B – Schematizzazione strutturale

- B.1 Adottare lo schema **a trave** più idoneo all'architettura considerata: trave su due appoggi (controventata) o mensola (sbalzo).
- B.2 Disegnare il **diagramma di corpo libero** della semiala, indicando con chiarezza:
 - le forze attive (carichi distribuiti e concentrati);
 - le reazioni vincolari incognite (componenti orizzontale e verticale, eventuale momento

di incastro).

- B.3 Scegliere un **sistema di riferimento**, abitualmente con l'origine nel vincolo di radice, l'asse x diretto verso l'estremità e l'asse y verso l'alto.

Fase C – Calcolo delle reazioni vincolari

- C.1 Scrivere le tre equazioni cardinali della statica (3), scegliendo come polo dei momenti il punto rispetto al quale il maggior numero di reazioni incognite è nullo (tipicamente la radice).
- C.2 Risolvere il sistema lineare nelle reazioni vincolari.
- C.3 Verificare il **senso fisico** delle reazioni ottenute (segni coerenti con la natura dei carichi). Si ricordi che, nello schema controventato, se $\ell_1 < \ell_2$ la reazione R_R in radice cambia verso e risulta diretta verso l'alto.

Fase D – Equazioni delle sollecitazioni

- D.1 Considerare una **generica sezione di ascissa x** .
- D.2 Applicando il *metodo analitico delle travi inflesse* (§2) scrivere le espressioni di $T(x)$, $M_f(x)$ ed eventualmente $N(x)$ in funzione di x .
- D.3 **Distinguere gli intervalli** di validità: ogni volta che si incontra un vincolo intermedio o un carico concentrato, occorre introdurre un nuovo intervallo e una nuova espressione.
- D.4 Quando sono presenti più carichi (es. distribuito + concentrato), si sfrutta il **principio di sovrapposizione degli effetti** (§4): $T(x) = T'(x) + T''(x)$, $M_f(x) = M'_f(x) + M''_f(x)$.

Fase E – Tracciamento dei diagrammi

- E.1 Calcolare i **valori notevoli** (zeri, massimi, minimi, punti di discontinuità) delle funzioni $T(x)$ e $M_f(x)$.
- E.2 Tracciare i diagrammi sotto la rappresentazione della trave, riportando con cura la scala e l'orientamento.
- E.3 Verificare le **relazioni differenziali** di Schwedler (§3):

$$\frac{dT}{dx} = -p(x), \quad \frac{dM_f}{dx} = T(x).$$

Esse implicano, in particolare, che il **momento flettente ammette estremo** (massimo o minimo) nelle sezioni in cui $T(x) = 0$.

Fase F – Interpretazione e verifica

- F.1 Identificare la **sezione critica**, cioè quella dove agisce il momento flettente (o il taglio) di intensità massima: è in quella sezione che dovrà essere effettuato il dimensionamento del longherone principale.
- F.2 Confrontare l'andamento ottenuto con il **senso fisico atteso**: nelle ali a sbalzo M_f è massimo alla radice e nullo all'estremità; nelle ali controventate vi sono due massimi locali in corrispondenza della radice e del puntone, con un punto di flesso intermedio.

9 Quadro sinottico dei casi applicativi

I casi che saranno sviluppati nella *Parte II* di questa dispensa sono riassunti nella tabella seguente, che può servire come “mappa di studio” prima di affrontare gli esempi numerici.

Casi applicativi – Parte II

Configurazione	Schema statico	Carichi
Ala controventata rettilinea	Trave su due appoggi (cerniera in R , appoggio in C sul puntone)	Solo carico distribuito uniforme p (portanza)
Ala a sbalzo rettilinea	Mensola incastrata in radice	Carico distribuito uniforme p + carico concentrato P_1 (motore)
Ala a sbalzo trapezoidale (rastremata)	Mensola incastrata in radice	Carico distribuito a variazione lineare $p(x)$ + carico concentrato P_m

Per ognuno dei casi sopra elencati la trattazione seguirà sempre lo schema in *sei fasi* esposto nel paragrafo precedente, in modo che lo studente possa progressivamente abituarsi ad un metodo di lavoro *rigoroso e ripetibile*.

Sintesi conclusiva della Parte I

Concetti chiave da memorizzare

- Il calcolo statico dell'ala mira a determinare le sollecitazioni (N , T , M_f) lungo l'apertura, presupposto per il dimensionamento.
- L'ala viene schematizzata come una **trave**: *su due appoggi* (controventata) o *mensola* (sbalzo).
- Le **equazioni cardinali della statica** consentono di calcolare le reazioni vincolari nei sistemi isostatici.
- Le caratteristiche di sollecitazione sono definite con **convenzione di segno** sul concio elementare (De Saint-Venant): N positivo in trazione, T positivo se ruota il concio in senso orario, M_f positivo se allunga le fibre inferiori.
- Il **metodo analitico delle travi inflesse** consente di scrivere $T(x)$ ed $M_f(x)$ come funzioni continue dell'ascissa, da cui ricavare i diagrammi.
- Le **relazioni differenziali di Schwedler** $\frac{dT}{dx} = -p(x)$ e $\frac{dM_f}{dx} = T(x)$ legano fra loro carico, taglio e momento flettente: il momento ammette estremo dove il taglio si annulla.
- In presenza di più carichi vale il **principio di sovrapposizione degli effetti**: si sommano i contributi calcolati separatamente.

Fine della Parte I – Teoria generale.

Nelle pagine che seguono si svilupperanno i casi applicativi.

Parte II

Casi applicativi

Tre velivoli reali per tre architetture alari

Ora applichiamo la procedura in sei fasi (A–F) a tre ali vere. Le abbiamo scelte non a caso: sono *tre architetture diverse* che coprono i casi che si incontrano davvero, e ognuna corrisponde a un velivolo realmente costruito. Passeremo dal più semplice (controventata) al più completo (rastremata con motore), e vedremo che la “ricetta” resta sempre la stessa.

Tabella di marcia dei tre casi

Caso	Velivolo di riferimento	Carichi
§ 10 – <i>Controventata</i>	Piper PA-18 “Super Cub” (utility, ala alta a montante)	p uniforme
§ 11 – <i>Sbalzo rettangolare</i>	Tecnam P2006T (bimotore leggero da turismo/scuola)	p uniforme + carico concentrato P_1 del motore
§ 12 – <i>Sbalzo trapezoidale</i>	Velivolo da addestramento di concetto (ala rastremata, motore in ala)	p a variazione lineare + carico concentrato P_m del motore

10 Caso 1 – Ala controventata a pianta rettangolare

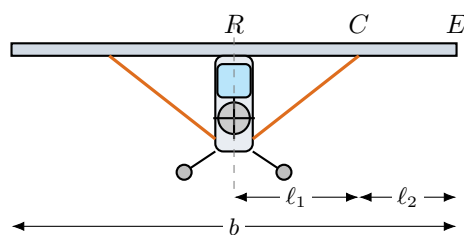
10.1 Inquadramento e dati del problema

Partiamo dalla classica **ala alta a montante**: la troviamo sulla maggior parte dei velivoli da turismo leggero (Cessna 172/182, Piper PA-18 “Super Cub”, Maule M-7...). L'ala è agganciata alla fusoliera con una *cerniera* in radice (R) ed è sorretta a metà da un *puntone obliquo*, il controvento, che scende verso il basso della fusoliera (lo chiamiamo punto C). Strutturalmente è una *trave su due appoggi* – cerniera in R , appoggio in C – con un pezzetto a sbalzo C – E verso l'estremità. Il puntone è il trucco che alleggerisce tutto: assorbe lui buona parte del carico.

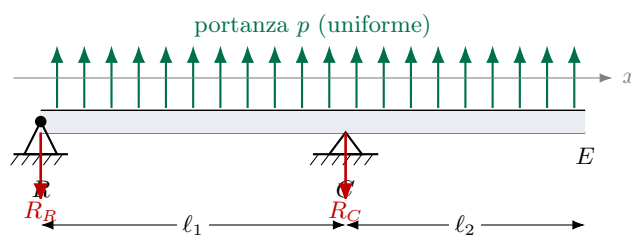
Dati di riferimento – Piper PA-18 “Super Cub”

Peso totale al decollo	$Q_{tot} = 800 \text{ kgf}$	(categoria utility)
Peso strutturale dell'ala	$Q_{ala} = 60 \text{ kgf}$	(per semiala $\sim 30 \text{ kgf}$)
Superficie alare	$S = 16,5 \text{ m}^2$	
Apertura alare	$b = 10,7 \text{ m}$	semiala $\ell = b/2 = 5,35 \text{ m}$
Distanza radice–puntone	$\ell_1 = 3,0 \text{ m}$	
Distanza puntone–estremità	$\ell_2 = 2,35 \text{ m}$	($\ell = \ell_1 + \ell_2$)
Fattore di carico di progetto	$n = 4$	(limite manovra positiva)

10.2 Schema strutturale e diagramma di corpo libero



Vista frontale del velivolo
(Piper PA-18 “Super Cub”)



Schema strutturale equivalente
(trave su due appoggi con sbalzo)

NOTA – Solo in certe soluzioni costruttive vale $\ell = b/2$

Ricordiamo la postilla di § 6.2: $\ell = b/2$ è esatta solo se il cassone alare è *passante*. Qui ci va bene: nel Piper PA-18 l'ala corre continua *sopra* la fusoliera (è tipico delle ali alte a montante), quindi prendere $\ell = b/2 = 5,35 \text{ m}$ è praticamente esatto.

10.3 Calcolo dei carichi

Fase A – Carico distribuito di portanza

La portanza totale che la semiala deve sviluppare in condizione di carico limite ($n = 4$) è:

$$L_{semi} = \frac{n(Q_{tot} - Q_{ala})}{2} = \frac{4 \cdot (800 - 60)}{2} = 1480 \text{ kgf}$$

Per ipotesi di pianta rettangolare e carico uniforme:

$$p = \frac{L_{semi}}{\ell} = \frac{1480}{5,35} \approx 276,6 \text{ kgf/m}$$

10.4 Calcolo delle reazioni vincolari**Fase C – Reazioni R_R ed R_C**

Si applicano le equazioni cardinali della statica. Scegliendo come polo dei momenti il punto R (radice):

$$\sum M^{(R)} = 0 : \quad R_C \cdot \ell_1 - p \cdot \ell \cdot \frac{\ell}{2} = 0 \implies \boxed{R_C = \frac{p \cdot \ell^2}{2 \ell_1}}$$

$$\sum F_y = 0 : \quad R_R + R_C - p \cdot \ell = 0 \implies \boxed{R_R = p \cdot \ell - R_C}$$

Valori numerici – reazioni

$$R_C = \frac{276,6 \cdot 5,35^2}{2 \cdot 3,0} \approx 1319,7 \text{ kgf} \quad (\downarrow)$$

$$R_R = 276,6 \cdot 5,35 - 1319,7 \approx 160,3 \text{ kgf} \quad (\downarrow)$$

10.5 Equazioni delle sollecitazioni**Fase D – Taglio e momento flettente**

Sezione generica di ascissa x misurata dalla radice R . Applicando il metodo analitico delle travi inflesse ed il principio di sovrapposizione:

Taglio:

$$T(x) = p \cdot x - R_R \quad 0 \leq x \leq \ell_1$$

$$T(x) = p \cdot x - R_R - R_C \quad \ell_1 \leq x \leq \ell$$

Momento flettente:

$$M_f(x) = \frac{1}{2} p x^2 - R_R \cdot x \quad 0 \leq x \leq \ell_1$$

$$M_f(x) = \frac{1}{2} p x^2 - R_R \cdot x - R_C \cdot (x - \ell_1) \quad \ell_1 \leq x \leq \ell$$

Punti notevoli e ricerca degli estremi

Per Schwedler, gli estremi di M_f cadono dove $T(x) = 0$. Nel primo intervallo:

$$T(x) = 0 \implies x_{T=0} = \frac{R_R}{p} = \frac{160,3}{276,6} \approx 0,58 \text{ m}$$

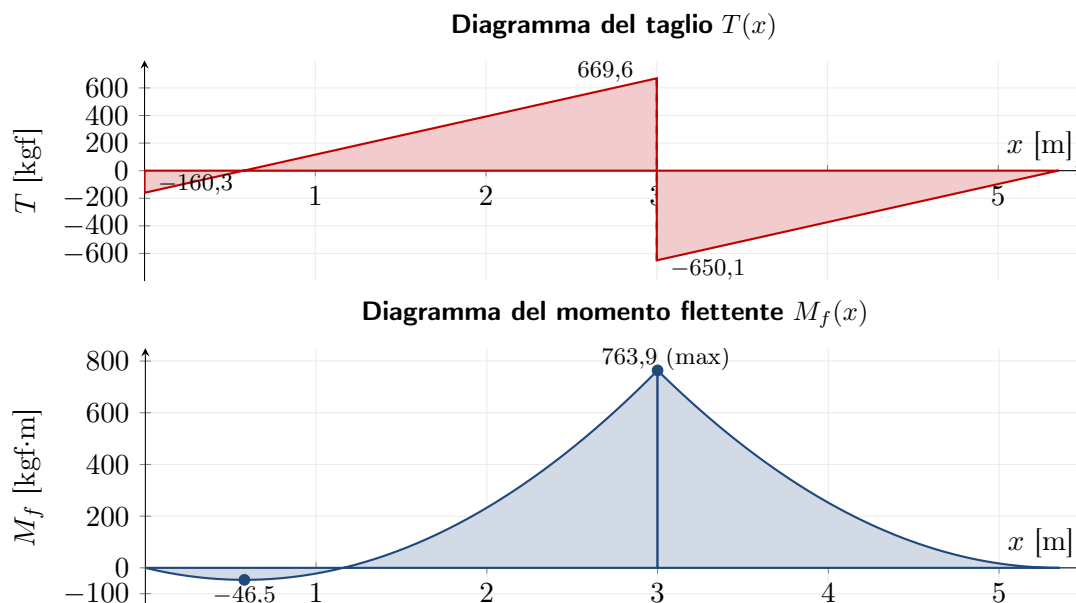
A questa ascissa si trova un *minimo locale* del momento flettente ($M_f < 0$). Al puntone ($x = \ell_1$), il taglio subisce una discontinuità (salto pari a $-R_C$) e M_f attinge un *massimo locale*.

Valori notevoli

Sezione x [m]	$T(x)$ [kgf]	$M_f(x)$ [kgf·m]	Note
0 (radice R)	-160,3	0	cerniera
0,580 ($T=0$)	0	-46,5	minimo locale di M_f
1,159	320,5	0	passaggio di M_f per zero
3,0 ⁻ (ℓ_1^-)	669,6	763,9	limite sx puntone
3,0 ⁺ (ℓ_1^+)	-650,1	763,9	limite dx
5,35 (ℓ , estremità E)	0	0	E libero

Sezione critica: $x = \ell_1$, dove $|M_f|_{\max} \approx 763,9 \text{ kgf} \cdot \text{m}$.

10.6 Diagrammi delle sollecitazioni



10.7 Sezione critica e considerazioni di progetto

Sezione di dimensionamento

La sezione di dimensionamento del longherone principale è quella in corrispondenza dell'**attacco del puntone** ($x = \ell_1$):

$$|M_f|_{\max} \approx 764 \text{ kgf} \cdot \text{m} \approx 7,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Il **puntone** stesso, sollecitato in compressione lungo il suo asse, dovrà essere verificato a *carico di punta* (Eulero).

11 Caso 2 – Ala a sbalzo a pianta rettangolare con motore

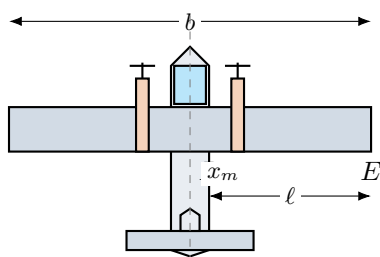
11.1 Inquadramento e dati del problema

Saliamo di un gradino: un'ala **a sbalzo** (cantilever), senza puntone, incastrata in radice. Qui agiscono *insieme* due carichi – la portanza distribuita e il **peso concentrato** di un motore montato in ala – ed è l'occasione perfetta per usare la sovrapposizione degli effetti. Il velivolo è il **Tecnam P2006T**, un bimotore quadriposto che molte scuole di volo italiane conoscono bene.

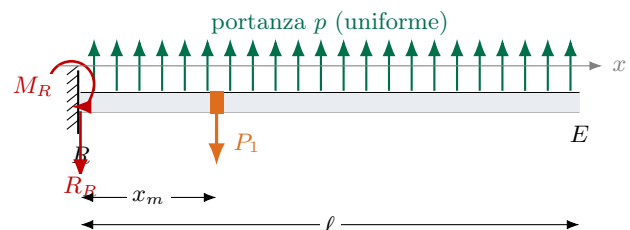
Dati di riferimento – Tecnam P2006T

Peso totale al decollo	$Q_{tot} = 1230 \text{ kgf}$	(MTOM CS-VLA)
Peso strutturale dell'ala	$Q_{ala} = 100 \text{ kgf}$	(stimato)
Superficie alare	$S = 14,76 \text{ m}^2$	
Apertura alare	$b = 11,4 \text{ m}$	semiala $\ell = b/2 = 5,7 \text{ m}$
Peso del motore (Rotax 912)	$P_{motore} = 95 \text{ kgf}$	
Posizione del motore	$x_m = 1,5 \text{ m}$	dalla radice
Fattore di carico	$n = 3,8$	(FAR-23 categoria normale)

11.2 Schema strutturale e diagramma di corpo libero



Vista in pianta del velivolo
(Tecnam P2006T – bimotore)



Schema strutturale equivalente
(trave a sbalzo con carico concentrato)

11.3 Sovrapposizione degli effetti

Strategia di calcolo

Trattandosi di un sistema lineare, applichiamo il **principio di sovrapposizione degli effetti** (§ 4):

Caso (a)

Ala caricata solo dal carico distribuito p . Si ottengono R'_R , M'_R , $T'(x)$, $M'_f(x)$.

Caso (b)

Ala caricata solo dal carico concentrato P_1 . Si ottengono R''_R , M''_R , $T''(x)$, $M''_f(x)$.

Caso totale

$R_R = R'_R - R''_R$, $M_R = M'_R - M''_R$, e $T(x) = T'(x) + T''(x)$, $M_f(x) = M'_f(x) + M''_f(x)$.

11.4 Calcolo dei carichi e delle reazioni

Fase A – Carichi

Carico distribuito di portanza:

$$p = \frac{n(Q_{tot} - Q_{ala})}{2\ell} = \frac{3,8 \cdot (1230 - 100)}{2 \cdot 5,7} \approx 376,7 \text{ kgf/m}$$

Carico concentrato del motore:

$$P_1 = n \cdot P_{motore} = 3,8 \cdot 95 = 361 \text{ kgf}$$

Fase C – Reazioni vincolari (incastro)

Caso (a) – solo carico distribuito: $R'_R = p \cdot \ell$, $M'_R = \frac{1}{2} p \ell^2$

Caso (b) – solo carico concentrato: $R''_R = P_1$, $M''_R = P_1 \cdot x_m$

Risultanti (sovrapposizione):

$$R_R = p \cdot \ell - P_1, \quad M_R = \frac{1}{2} p \ell^2 - P_1 \cdot x_m$$

Valori numerici – reazioni

$$R'_R \approx 2147 \text{ kgf}$$

$$M'_R \approx 6119 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

$$R''_R = 361 \text{ kgf}$$

$$M''_R = 541,5 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

$$R_R \approx 1786 \text{ kgf} (\downarrow)$$

$$M_R \approx 5577 \text{ kgf} \cdot \text{m} (\text{orario})$$

Effetto di scarico del motore

Guardiamo i segni: il contributo del motore $M''_R = P_1 \cdot x_m$ va *sottratto*, quindi **abbassa** il momento all'incastro. Il peso del motore, in altre parole, *scarica* la radice. È esattamente il principio che avevamo anticipato nella Parte I, ed è il motivo per cui i grandi velivoli appendono i motori sotto le ali.

11.5 Equazioni delle sollecitazioni

Fase D – Taglio e momento flettente

Origine: $x = 0$ alla *radice* R , crescente verso E .

Taglio (sovrapposto):

$$T(x) = p \cdot x - p \cdot \ell + P_1$$

$$0 \leq x \leq x_m$$

$$T(x) = p \cdot x - p \cdot \ell$$

$$x_m \leq x \leq \ell$$

Momento flettente (sovrapposto):

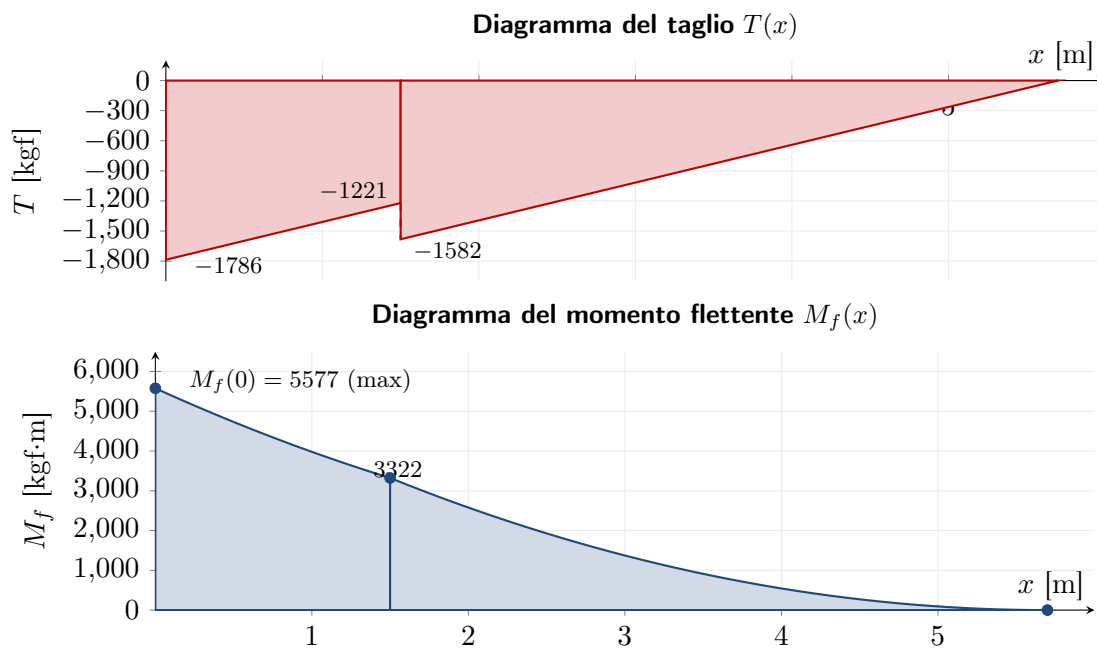
$$M_f(x) = \frac{1}{2} p (x - \ell)^2 + P_1 (x - x_m)$$

$$0 \leq x \leq x_m$$

$$M_f(x) = \frac{1}{2} p (x - \ell)^2$$

$$x_m \leq x \leq \ell$$

11.6 Diagrammi delle sollecitazioni



11.7 Sezione critica

Sezione di dimensionamento

Sezione critica: **radice**.

$$|M_f|_{\max} = M_R \approx 5577 \text{ kgf} \cdot \text{m} \approx 54,7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$|T|_{\max} = R_R \approx 1786 \text{ kgf} \approx 17,5 \text{ kN}$$

Senza il motore, $|M_f|_{\max}$ sarebbe stato $M'_R = 6119 \text{ kgf} \cdot \text{m}$: il motore ha quindi prodotto un *alleggerimento* del $\sim 8,9\%$.

12 Caso 3 – Ala a sbalzo trapezoidale (rastremata) con motore

12.1 Inquadramento e dati del problema

Ed eccoci al caso più ricco: un'ala a sbalzo ma stavolta a pianta trapezoidale (rastremata), cioè con la corda che si restringe verso l'estremità. Su di essa agiscono sia un *carico distribuito che varia linearmente* lungo l'apertura (più portanza dove la corda è larga) sia il *peso concentrato* del motore. Non è un esercizio capriccioso: la pianta rastremata è la soluzione strutturalmente più efficiente, ed è quella che si vede sulla maggior parte degli aerei moderni.

Dati di riferimento – Velivolo da addestramento

Peso totale al decollo	$Q_{tot} = 1300 \text{ kgf}$	
Superficie alare	$S = 16,0 \text{ m}^2$	
Apertura alare	$b = 11,0 \text{ m}$	semiala $\ell = b/2 = 5,5 \text{ m}$
Corda alla radice	$c_R = 2,0 \text{ m}$	
Corda all'estremità	$c_E = 0,9 \text{ m}$	rapporto di rastremazione $\lambda = 0,45$
Allungamento alare	$AR = b^2/S = 7,56$	
Peso del motore in ala	$P_{motore} = 80 \text{ kgf}$	
Posizione del motore	a 1,2 m dalla radice	$(x_m = \ell - 1,2 = 4,3 \text{ m dalla tip})$
Fattore di carico	$n = 4$	

12.2 Calcolo del peso strutturale dell'ala – formula di Gabrielli

Formula di Gabrielli

$$Q_{ala} = 0,022 \cdot n \cdot k \cdot AR \cdot S \cdot \sqrt[3]{Q_{tot}} \quad [\text{kgf}]$$

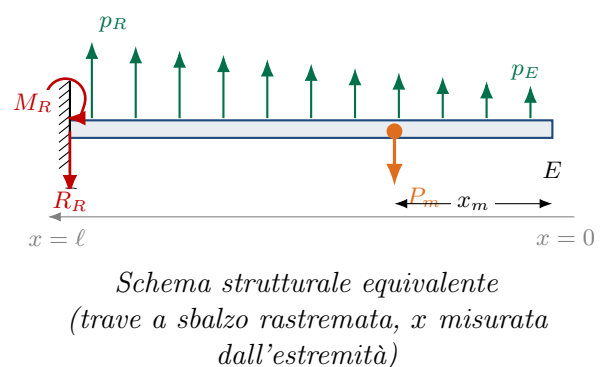
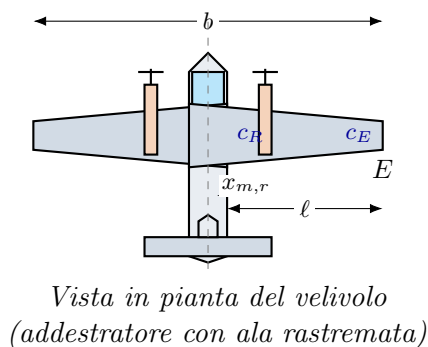
con Q_{tot} in kgf, S in m^2 e $k \approx 1,0$ per addestratori.

Stima del peso strutturale

$$Q_{ala} = 0,022 \cdot 4 \cdot 1,0 \cdot 7,56 \cdot 16,0 \cdot \sqrt[3]{1300} \approx 116,2 \text{ kgf}$$

pari a circa il 8,9% del peso totale.

12.3 Schema strutturale e carico distribuito trapezoidale



Distribuzione del carico

Più corda significa più portanza: ecco perché il carico segue l'andamento della corda e cresce *linearmente* dall'estremità verso la radice. In formule:

$$p(x) = p_E + \frac{p_R - p_E}{\ell} \cdot x, \quad p_R = \frac{n(Q_{tot} - Q_{ala})}{S} \cdot c_R, \quad p_E = \frac{n(Q_{tot} - Q_{ala})}{S} \cdot c_E$$

Calcolando: $\frac{n(Q_{tot} - Q_{ala})}{S} \approx 295,95 \text{ kgf/m}^2$, da cui $p_R \approx 591,9 \text{ kgf/m}$, $p_E \approx 266,4 \text{ kgf/m}$.

12.4 Equazioni delle sollecitazioni

Fase D – Taglio e momento flettente

Carico distribuito – integrazione successiva con origine in E ($x = 0$):

$$T'(x) = (p_R - p_E) \frac{x^2}{2\ell} + p_E x$$

$$M_f'(x) = (p_R - p_E) \frac{x^3}{6\ell} + p_E \frac{x^2}{2}$$

Carico concentrato (motore a x_m dalla tip):

$$T''(x) = 0, \quad M_f''(x) = 0 \quad 0 < x < x_m$$

$$T''(x) = -P_m, \quad M_f''(x) = -P_m(x - x_m) \quad x_m < x \leq \ell$$

con $P_m = n \cdot P_{motore} = 320 \text{ kgf}$ e $x_m = 4,3 \text{ m}$.

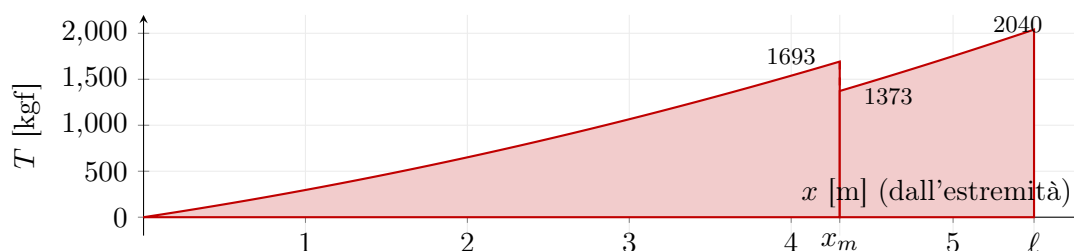
Sollecitazioni totali: $T(x) = T'(x) + T''(x)$, $M_f(x) = M_f'(x) + M_f''(x)$.

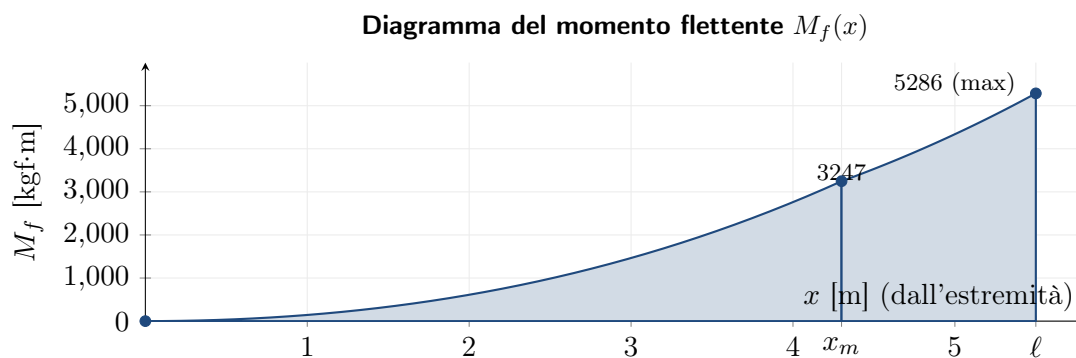
Valori notevoli

Sezione x [m]	$T(x)$ [kgf]	$M_f(x)$ [kgf·m]	Note
0 (estr. E)	0	0	estremo libero
$4,3^- (x_m^-)$	1693	3247	limite sx motore
$4,3^+ (x_m^+)$	1373	3247	limite dx (continuità)
$5,5 (\ell, \text{ radice } R)$	2040	5286	sezione critica

12.5 Diagrammi delle sollecitazioni

Diagramma del taglio $T(x)$





12.6 Sezione critica e considerazioni di progetto

Sezione di dimensionamento

La **sezione critica** è la radice ($x = \ell$):

$$|M_f|_{\max} = M_R \approx 5286 \text{ kgf} \cdot \text{m} \approx 51,9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$|T|_{\max} = R_R \approx 2040 \text{ kgf} \approx 20,0 \text{ kN}$$

13 Sintesi conclusiva e confronto fra i tre casi

13.1 Tabella riassuntiva

Caso	Velivolo	Sez. critica posizione	$ M_f _{\max}$ [kgf·m]	$ T _{\max}$ [kgf]	R_R [kgf]
1 – Controv. rett.	PA-18	$x = \ell_1$ (puntone)	764	670	160
2 – Sbalzo rett.	P2006T	$x = 0$ (radice)	5577	1786	1786
3 – Sbalzo trapez.	Addestrat.	$x = \ell$ (radice)	5286	2040	2040

13.2 Considerazioni didattiche di sintesi

Lezioni dei tre casi

1. **Sull'architettura strutturale:** l'ala controventata richiede *longheroni significativamente più leggeri*, perché il puntone trasferisce una porzione importante del carico direttamente alla fusoliera.
2. **Sull'effetto di scarico delle masse in ala:** ogni qual volta si dispongono masse (motore, serbatoi, carrello) lontano dalla radice, esse *sottraggono* momento flettente all'incastro.
3. **Sulla pianta alare:** la pianta trapezoidale produce un momento di radice leggermente inferiore rispetto alla rettangolare equivalente.
4. **Sulle relazioni differenziali di Schwedler:** in tutti e tre i casi si può verificare che $dM_f/dx = T(x)$ e che gli estremi di M_f cadono dove T si annulla o ha una discontinuità.

13.3 Verso il dimensionamento del longherone

I valori di $|M_f|_{\max}$ e $|T|_{\max}$ che abbiamo trovato non sono il traguardo, ma il **trampolino**: sono i dati di ingresso con cui si dimensiona davvero il longherone principale. In sintesi, da qui si parte con:

- **Verifica a flessione:** $\sigma_f = M_f/W_x \leq \sigma_{amm}$.
- **Verifica a taglio:** $\tau = T/A_{anima} \leq \tau_{amm}$.
- **Verifica della stabilità:** pannelli di dorso (compressi) soggetti a carico di punta.

Concetti chiave da memorizzare – Parte II

- Per l'ala **controventata**, la sezione critica è nel punto di attacco del puntone, $x = \ell_1$.
- Per l'ala **a sbalzo** (rettangolare o trapezoidale), la sezione critica è sempre alla radice.
- Le **masse in ala** producono uno *scarico* del momento di radice: scelta di layout strutturalmente conveniente.
- Il **principio di sovrapposizione** consente di trattare separatamente carichi distribuiti e concentrati.
- La **verifica con le relazioni di Schwedler** è un controllo metodologico imprescindibile.

Strumento interattivo – Calcolo online delle sollecitazioni

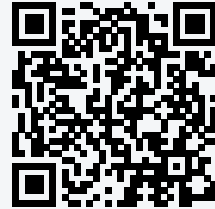
I tre casi della **Parte II** non restano sulla carta: sono implementati in una piccola **web-app** che calcola, in tempo reale, i diagrammi di *taglio* $T(x)$, *momento flettente* $M_f(x)$ e *sforzo normale* $N(x)$ lungo la semiala. Si sceglie l'architettura, si impostano i parametri (apertura, fattore di carico, pesi, posizione del motore...) e si preme **ESEGUI CALCOLO**: lo schema strutturale e i diagrammi si aggiornano all'istante.

Le tre configurazioni selezionabili corrispondono uno a uno ai casi studiati:

- **ALA_CONTROVENTATA** → Caso 1 (§ 10) (controventata rettangolare, p uniforme);
- **ALA_SBALZO_MOTORE** → Caso 2 (§ 11) (sbalzo rettangolare, p + motore, per sovrapposizione);
- **ALA_RASTREMATA** → Caso 3 (§ 12) (sbalzo trapezoidale, p lineare + motore).

Come usarla. Risolvete prima l'esercizio a mano, poi inserite gli stessi dati nella web-app e confrontate: deve tornare tutto, dalle reazioni vincolari alla sezione critica. È anche l'ambiente ideale per i “*what-if*”: spostate il motore verso l'estremità, aumentate il fattore di carico n , e osservate *come* cambia il momento di radice – ritrovando “dal vivo” l'effetto di scarico discusso nel testo.

► braucci.github.io/SollecitazioniAla



Inquadra il codice
per aprire la web-app