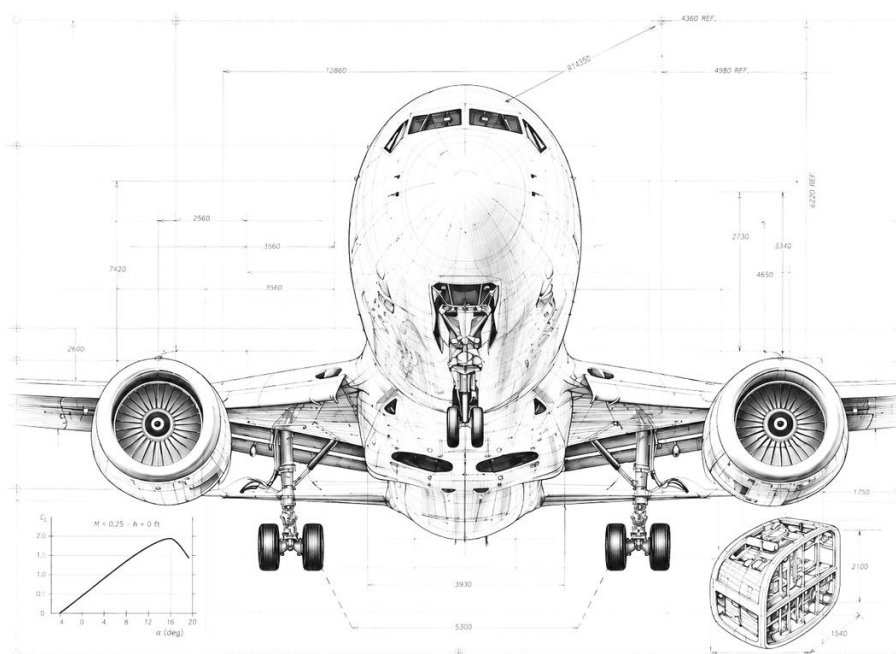


CORSO DI FLUIDODINAMICA

INDIRIZZO DI COSTRUZIONI AERONAUTICHE

Statica dei fluidi

La pressione, l'equilibrio e le forze nei fluidi in quiete



Appunti dalle lezioni

a cura del Prof. B. Raucci

Monografia n. 2 — Fluidodinamica

Anno scolastico 2026/27

Prefazione

Questa monografia raccoglie e ordina in forma organica le lezioni dedicate alla *statica dei fluidi*, il secondo grande capitolo del corso di Fluidodinamica. Con statica dei fluidi — o *fluidostatica* — si intende lo studio dei fenomeni in cui il fluido si trova in quiete, oppure si muove senza generare sforzi di taglio interni: una condizione che, per quanto restrittiva possa apparire, descrive un numero sorprendente di problemi tecnici reali.

Il dimensionamento di una diga, la sollecitazione a cui è sottoposto un serbatoio in pressione, la forma che assume la superficie libera di un liquido dentro un serbatoio in rapida rotazione, la spinta che permette a una mongolfiera o a un dirigibile di sollevarsi, la pressione che l'atmosfera esercita sulla fusoliera di un velivolo in quota: sono tutti problemi di fluidostatica. In ognuno di essi le uniche forze in gioco sono le *forze di pressione* e le *forze di volume* (il peso, in primo luogo), e determinarne la risultante è precisamente lo scopo di questa parte della disciplina.

Il testo segue un percorso costruttivo. Si parte dalla domanda più semplice — *che cos'è la pressione e come agisce* — per dimostrare il principio di Pascal; si passa poi a stabilire *come la pressione varia* da punto a punto, ricavando l'equazione fondamentale della fluidostatica e, come suoi casi particolari, la legge di Stevino per i liquidi e la distribuzione di pressione nell'atmosfera standard. Con questi strumenti si affronta il problema centrale per le applicazioni: il *calcolo delle forze di pressione* su superfici piane e curve. Si giunge quindi alla spinta di Archimede e alle questioni di galleggiamento e stabilità, per chiudere con i principi di funzionamento dei misuratori di pressione. Un capitolo finale di esercizi svolti mostra come questi concetti si combinano nella pratica.

Ogni argomento è introdotto seguendo lo stesso schema didattico: prima il *significato fisico*, poi la *formulazione matematica*, infine l'*interpretazione tecnica*, con esempi concreti — molti dei quali di ambito aeronautico — che ancorano le formule a sistemi reali. I riquadri colorati distinguono le definizioni, le osservazioni, le formule chiave da memorizzare, gli avvertimenti e gli esempi svolti.

Buono studio.

Indice

Prefazione	i
1 Pressione in un fluido e principio di Pascal	1
1.1 Natura microscopica della pressione	1
1.2 La pressione è una grandezza scalare	2
1.3 Isotropia della pressione: il principio di Pascal	2
1.4 Un'osservazione di grande portata: l'effetto scala	4
2 Distribuzione di pressione e legge di Stevino	5
2.1 Equilibrio di un elemento di fluido	5
2.2 Forma vettoriale: l'equazione fondamentale	6
2.3 Il caso del fluido in quiete soggetto al solo peso	6
2.4 Densità costante: la legge di Stevino	7
2.5 Fluido in moto rigido: l'accelerazione conta	8
3 Distribuzione di pressione nei gas e atmosfera standard	9
3.1 Perché nei gas la densità non è costante	9
3.2 Atmosfera isoterma: la legge esponenziale	9
3.3 L'ipotesi isoterma non basta: verso l'atmosfera reale	10
3.4 L'atmosfera standard	10
3.4.1 Distribuzione di pressione nella troposfera	11
4 Forze di pressione su superfici piane	14
4.1 Impostazione generale del problema	14
4.2 Superficie piana, pressione costante	14
4.2.1 Il punto di applicazione: il centroide	15
4.3 Superficie piana, distribuzione lineare di pressione	15
4.3.1 Dove è applicata la forza idrostatica: il momento di figura	16
5 Forze di pressione su superfici curve	19
5.1 Il problema e il metodo del volume isolato	19
5.2 Determinazione di modulo e direzione	20
5.3 Determinazione della retta di applicazione	20
6 Spinta di Archimede e stabilità del galleggiamento	22
6.1 Derivazione della spinta	22
6.2 Corpo all'interfaccia fra due fluidi	23
6.3 Galleggiamento e stabilità: il metacentro	24
7 Misuratori di pressione	26
7.1 Il barometro	26
7.2 Il manometro a tubo aperto	27
7.3 Il manometro a U	27
7.4 Il manometro inclinato	27
7.5 Manometri meccanici ed elettronici	28

8	Esercizi svolti	29
8.1	Paratia con fluido incognito	29
8.2	Manometro a densità incognita	30
8.3	Effetto scala: la dimensione limite di una goccia	30
A	Notazione e simboli	32
A.1	Grandezze fondamentali	32
A.2	Forze, superfici e grandezze geometriche	33
A.3	Convenzioni e operatori	33

Pressione in un fluido e principio di Pascal

Con questo capitolo cambiamo argomento: dopo aver studiato le proprietà dei fluidi, cominciamo a occuparci della loro *statica*. Studiare la statica di un fluido significa domandarsi quali azioni esso sia capace di esercitare quando si trova in condizioni di quiete. In realtà, come vedremo, l'idea di «statica» per un fluido è un po' più ampia di quanto il termine suggerisca: possiamo accettare che il fluido si muova — anche con un'accelerazione, ed eventualmente con un'accelerazione variabile nel tempo — purché esso *non si deformi*, ossia si muova come se fosse un corpo rigido. Sappiamo infatti, dalla definizione stessa di fluido, che una deformazione angolare genera sforzi viscosi, cioè sforzi di taglio; in tutto questo capitolo, e in buona parte dei successivi, tali sforzi saranno assenti.

L'azione più importante che un fluido esercita quando è in quiete è l'azione di *pressione*. È su di essa che concentriamo l'attenzione.

1.1 Natura microscopica della pressione

Come per tutte le grandezze incontrate finora, l'effetto macroscopico della pressione è unico, ma il meccanismo microscopico che lo produce è profondamente diverso a seconda che si tratti di un gas o di un liquido.

Consideriamo una superficie a contatto con un fluido. Il fluido esercita su di essa una pressione, e questa pressione non è altro che il risultato delle forze che le singole unità di fluido — molecole, atomi — trasmettono alla parete. La pressione è, per definizione, una forza per unità di superficie: si tratta di sommare tutte le forze esercitate dalle molecole e di dividerle per l'area su cui agiscono.

Osservazione

Nei *gas* le molecole possiedono velocità elevate e disordinate, regolate dalla distribuzione di Maxwell–Boltzmann. Alcune di esse urtano la parete e, nell'urto, le trasmettono una quantità di moto secondo il teorema dell'impulso. Se le molecole fossero poche, la parete avvertirebbe una successione di urti discreti; ma poiché esse sono un numero enorme (dell'ordine del numero di Avogadro), statisticamente nell'unità di tempo la parete riceve sempre la stessa quantità di urti, e dunque una forza costante. La pressione dei gas nasce quindi dal *bombardamento molecolare* della parete.

Nei *liquidi*, invece, le molecole non hanno velocità tanto estreme: si trovano tutte alla distanza di equilibrio, al di sotto della quale nascono violente forze di repulsione. Gli strati superiori di fluido, a causa del peso, comprimono le molecole sottostanti; queste reagiscono con forze di repulsione che si scaricano infine sulla superficie. Nei liquidi, dunque, la pressione è legata soprattutto al *peso* della colonna di fluido sovrastante.

È notevole che, pur avendo origini microscopiche così diverse, i due effetti siano descritti dalla stessa grandezza macroscopica. È precisamente il potere dell'ipotesi del continuo: essa ci consente di trattare in modo unificato fenomeni che, a livello molecolare, sono governati da meccanismi differenti. D'ora in avanti ci muoveremo definitivamente nel mondo macroscopico.

1.2 La pressione è una grandezza scalare

Chiariamo anzitutto la natura della grandezza. Le grandezze fisiche possono essere scalari (determinate da un solo numero con l'unità di misura), vettoriali (numero, direzione e verso) o tensoriali. La pressione è una grandezza *scalare*.

Dimensionalmente, essendo una forza per unità di superficie, ha le dimensioni di una massa per una lunghezza alla meno uno per un tempo alla meno due:

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{\text{kg m/s}^2}{\text{m}^2} = \text{kg}/(\text{m s}^2).$$

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura è il *pascal*, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$.

Nota

La pressione è scalare, ma la forza che essa genera su una superficie è un vettore. Se S è una superficie piana su cui agisce una pressione costante p e $\hat{n}$ è la normale uscente, la risultante della forza di pressione vale

$$\mathbf{F} = -pS\hat{n}.$$

Il prodotto pS fornisce il modulo, $\hat{n}$ individua la direzione, e il segno meno esprime il fatto fondamentale che la forza è diretta in *verso opposto* alla normale uscente: la pressione *spinge* sempre contro la superficie, mai la tira.

1.3 Isotropia della pressione: il principio di Pascal

Poniamo ora la domanda cruciale: *il valore della pressione in un punto dipende dall'orientamento della superficie su cui agisce?* In altre parole, se ruoto la superficie cambiando la direzione della sua normale, la pressione varia oppure resta la stessa? Nel linguaggio della meccanica dei continui: la pressione dà luogo a uno stato di sforzo *isotropo* o *anisotropo*?

Per rispondere, isoliamo all'interno di un fluido in quiete un elemento a forma di *prisma*, con una base rettangolare nel piano xy , una faccia rettangolare nel piano yz e una faccia inclinata di un angolo θ qualunque (figura 1.1). Chiamiamo dx , dy , dz le dimensioni infinitesime dell'elemento.

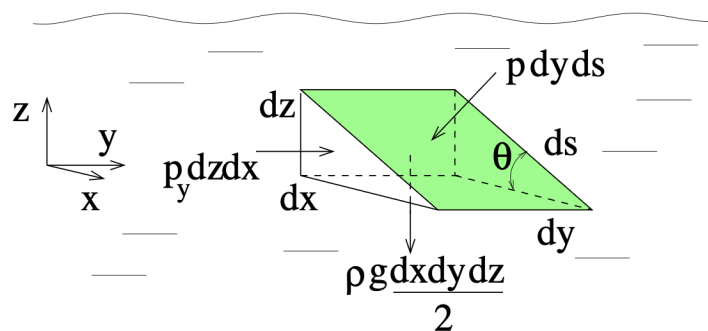


Figura 1.1. Diagramma di corpo libero per un elemento di fluido a forma di prisma in quiete. Sulla faccia inclinata, di normale generica, agisce la pressione p ; sulle facce coordinate agiscono p_x , p_y , p_z ; in direzione verticale interviene inoltre il peso proprio.

Poiché l'elemento è in quiete, la seconda legge di Newton impone che la risultante delle forze sia nulla. Le forze agenti sono le forze di pressione sulle facce e il peso proprio del fluido.

Equilibrio lungo y . Le uniche facce che generano forze lungo y sono i due triangoli paralleli al piano xz , di area $dx dz/2$. Non sapendo ancora se la pressione dipenda dall'orientamento, indichiamo con p_y^+ la pressione sulla faccia la cui normale punta nel verso positivo di y e con p_y^- quella sulla faccia opposta. L'equilibrio si scrive

$$p_y^- \frac{dx dz}{2} - p_y^+ \frac{dx dz}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_y^- = p_y^+.$$

Da qui apprendiamo che la pressione *non dipende dal verso* della normale. Non sappiamo ancora, però, se dipenda dalla direzione.

Equilibrio lungo x . Consideriamo ora la faccia rettangolare di area $dy dz$, su cui agisce la pressione p_x , e la faccia inclinata di area $ds dy$, su cui agisce la pressione p (senza pedice, per sottolineare che la sua normale ha un orientamento del tutto generico). La componente lungo x della forza sulla faccia inclinata deve bilanciare la forza su quella rettangolare:

$$p ds dy \sin \theta = p_x dy dz.$$

Ma dal triangolo rettangolo si ha $ds \sin \theta = dz$; sostituendo e semplificando $dy dz$ si ottiene il risultato cruciale

$$p = p_x.$$

Poiché l'angolo θ non è mai stato fissato, facendolo variare possiamo spazzare qualunque orientamento: la pressione sulla faccia inclinata, comunque orientata, è sempre uguale a quella sulla faccia normale all'asse x . È scomparsa anche la dipendenza dalla *direzione*.

Equilibrio lungo z . Rimane la direzione verticale, in cui interviene anche il peso. L'equilibrio fornisce

$$p_z dx dy = p ds dy \cos \theta + \rho g \frac{dx dy dz}{2},$$

e osservando che $ds \cos \theta = dx$ si semplifica in

$$p_z = p + \rho g \frac{dz}{2}.$$

Questo risultato, a prima vista, ci turba: la pressione p_z non è semplicemente uguale a p , ma vi compare un termine aggiuntivo che, per giunta, dipende ancora dalla dimensione dz dell'elemento.

Il passaggio al limite. La contraddizione è solo apparente. Le pressioni p_x, p_y, p_z e p sono valutate in punti *leggermente diversi* dell'elemento, non nello stesso punto. Per rispondere alla domanda iniziale — che riguarda la pressione *in un punto* — dobbiamo far collassare il prisma su un punto, cioè far tendere a zero dx, dy, dz mantenendone costanti i rapporti. Nel limite, il termine $\rho g dz/2$ svanisce e resta

$$p_z = p.$$

Mettendo insieme i tre risultati:

$$p_x = p_y = p_z = p.$$

Formula chiave

Principio di Pascal. In un fluido in quiete il valore della pressione in un punto è *indipendente dall'orientamento* della superficie su cui agisce: la pressione dà luogo a uno stato di sforzo *isotropo*. Pascal aveva enunciato questo principio su base sperimentale; qui lo abbiamo dimostrato in modo rigoroso a partire dall'equilibrio di un elemento di fluido.

Attenzione

Il passaggio al limite ha richiesto di annullare le dimensioni dell'elemento. È proprio qui che si vede la necessità dell'ipotesi del continuo: se non l'avessimo assunta, nel limite ci troveremmo in un volume così piccolo da non contenere più alcuna molecola, e non avrebbe più senso parlare di densità o di pressione. Il principio di Pascal, in ultima analisi, è valido perché trattiamo il fluido come un mezzo continuo.

1.4 Un'osservazione di grande portata: l'effetto scala

La dimostrazione appena svolta offre lo spunto per un argomento collaterale di enorme importanza nell'ingegneria. Torniamo all'equilibrio lungo z : vi comparivano due tipi di forza fatti in modo profondamente diverso. La forza di pressione, $p \, d\mathbf{s} \, dy$, è una *forza di superficie*: prodotto di uno scalare per un'area. La forza peso, $\rho \, g \, dx \, dy \, dz/2$, è invece una *forza di volume*: dipende dal volume dell'elemento.

Indicando con d l'ordine di grandezza dei lati dell'elemento, le forze di superficie sono proporzionali a d^2 , mentre le forze di volume sono proporzionali a d^3 . Ne segue che, al variare delle dimensioni di un corpo, forze di superficie e forze di volume *non crescono nello stesso modo*: al diminuire delle dimensioni le forze di volume perdono importanza rispetto a quelle di superficie, mentre al crescere delle dimensioni avviene il contrario. Questo fenomeno si chiama *effetto scala*.

Esempio: l'effetto scala nel volo

Perché gli insetti battono le ali centinaia o migliaia di volte al secondo, mentre gli uccelli grandi le battono poche volte al secondo, e gli aeroplani non possono avere ali battenti? Le forze d'inerzia associate al moto non stazionario dipendono dalla massa, e quindi dal volume, cioè crescono come d^3 ; le forze di superficie che sostengono la struttura crescono come d^2 . In un organismo piccolo le inerzie sono trascurabili e il battito rapido è possibile; al crescere delle dimensioni le inerzie crescono più in fretta della resistenza strutturale, finché il meccanismo ad ala battente diventa impraticabile. Un passero batte le ali vigorosamente; un'aquila le batte lentamente e più spesso veleggiando; un albatro, con oltre tre metri di apertura alare, vola quasi esclusivamente veleggiando.

Lo stesso principio spiega perché gli insetti possano avere un esoscheletro (che lavora a flessione) mentre gli animali grandi hanno bisogno di un endoscheletro, in cui le ossa lavorano a compressione: al crescere delle dimensioni, le forze di volume crescono troppo perché un guscio a flessione possa reggerle.

Attenzione

L'effetto scala ha una conseguenza pratica che ogni progettista deve tenere presente. Se si dispone del progetto di una struttura e viene richiesto un progetto identico ma per una struttura, poniamo, due volte più grande, *non basta* moltiplicare per due tutte le dimensioni: le forze in gioco non crescono con la stessa legge di potenza delle dimensioni. In campo aeronautico è il motivo per cui, nel costruire un aeromodello in scala, non è sufficiente ridurre proporzionalmente tutte le quote, ma occorre anche rivedere la geometria dei profili alari per riequilibrare il rapporto fra peso e portanza.

Riassumendo, in questo capitolo abbiamo stabilito che vale il principio di Pascal — la pressione in un punto genera sforzi di superficie isotropi — e abbiamo visto come la pressione, pur nascendo da meccanismi microscopici diversi nei gas e nei liquidi, sia trattabile in modo unificato grazie all'ipotesi del continuo. La dimostrazione ci ha offerto inoltre l'occasione di introdurre l'effetto scala. Nel prossimo capitolo useremo il principio di Pascal per stabilire *come* la pressione varia da punto a punto in un fluido.

Distribuzione di pressione e legge di Stevino

Nel capitolo precedente abbiamo stabilito che la pressione in un punto agisce allo stesso modo in tutte le direzioni. Dobbiamo ora capire in che modo la pressione *varia* all'interno di un fluido in quiete — o in moto, purché senza sforzi di taglio interni. È una domanda diversa dalla precedente: nel principio di Pascal abbiamo mostrato che la pressione in un dato punto non dipende dall'orientamento della normale; ora ci chiediamo come la pressione, intesa come *funzione di campo* $p(x, y, z)$, cambi passando da un punto all'altro.

2.1 Equilibrio di un elemento di fluido

Consideriamo un elemento di fluido a forma di parallelepipedo, di dimensioni infinitesime dx , dy , dz , e applichiamo a esso la seconda legge della dinamica $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$. L'elemento è soggetto alle forze di pressione sulle sue sei facce e al peso proprio. Assumiamo la gravità antiparallela all'asse z .

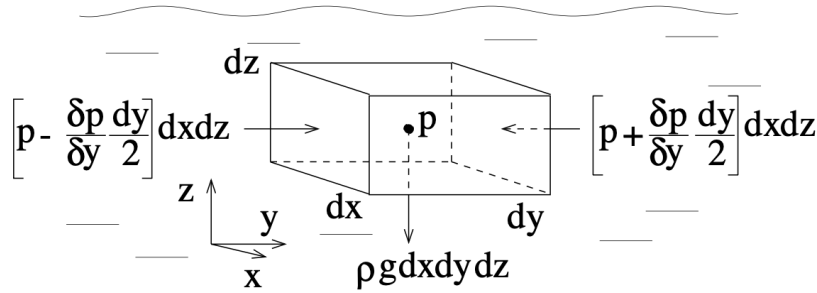


Figura 2.1. Equilibrio delle pressioni per un elemento di fluido a forma di parallelepipedo. Le pressioni sulle facce opposte si valutano con lo sviluppo in serie di Taylor a partire dal valore p nel centro dell'elemento.

Indichiamo con p il valore della pressione al centro dell'elemento. Per ottenere le pressioni sulle facce ci spostiamo di mezza dimensione in avanti e all'indietro, usando lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine (i termini di ordine superiore sono infinitesimi trascurabili). Sulle due facce perpendicolari all'asse y , di area $dx dz$, le pressioni valgono

$$p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \quad \text{e} \quad p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2},$$

e le corrispondenti forze sono dirette in verso opposto alle normali uscenti. La risultante lungo y è

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dz = -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz.$$

Uguagliando al prodotto massa per accelerazione, $m a_y = \rho dx dy dz a_y$, e semplificando il volume comune si ottiene

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho a_y.$$

Un ragionamento identico lungo x fornisce $-\partial p / \partial x = \rho a_x$.

Direzione verticale. Lungo z occorre includere il peso proprio, $-\rho g \, dx \, dy \, dz$ (negativo perché $\mathbf{g}$ è antiparallela a z). L'equilibrio diventa

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx \, dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx \, dy - \rho g \, dx \, dy \, dz = \rho \, dx \, dy \, dz \, a_z,$$

da cui, semplificando,

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = \rho a_z.$$

2.2 Forma vettoriale: l'equazione fondamentale

Le tre relazioni scalari possono essere riunite. Osserviamo che le derivate parziali $\partial p / \partial x$, $\partial p / \partial y$, $\partial p / \partial z$ sono le componenti del *gradiente* della pressione,

$$r p = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}.$$

Indicando con $\mathbf{f}$ il vettore che raccoglie tutte le densità di forze di volume (nel nostro caso $\mathbf{f} = -g \hat{\mathbf{z}}$) e con $\mathbf{a}$ l'accelerazione, l'equilibrio dell'elemento si scrive in forma compatta:

Formula chiave

Equazione fondamentale della fluidostatica.

$$-r p + \rho \mathbf{f} = \rho \mathbf{a}.$$

La relazione ha validità generale qualunque siano $\mathbf{f}$ e $\mathbf{a}$; l'unica restrizione è l'assenza di sforzi viscosi nel fluido. Scritta in forma vettoriale, è valida in qualunque sistema di riferimento — cartesiano, cilindrico, sferico — il che la rende uno strumento estremamente potente.

Osservazione

Il termine $\mathbf{f}$ non contiene necessariamente solo la gravità. Se ci trovassimo in un sistema di riferimento rotante, comparirebbe la forza centrifuga; in un sistema accelerato, la forza d'inerzia corrispondente. L'equazione fondamentale accoglie tutte le forze di volume: è proprio la sua generalità a renderla così utile.

2.3 Il caso del fluido in quiete soggetto al solo peso

Applichiamo l'equazione al caso più comune: fluido fermo ($\mathbf{a} = \mathbf{0}$) con la sola gravità fra le forze di volume. Le tre componenti diventano

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g.$$

Le prime due ci dicono che la pressione non può dipendere né da x né da y : può essere al più funzione della sola z . La terza diventa allora un'equazione differenziale ordinaria:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

Osservazione

Questa relazione ha una conseguenza importante di per sé: in un fluido in quiete la pressione è *costante su ogni piano orizzontale* (a quota z costante) e varia solo con la quota. È il fondamento del principio dei vasi comunicanti e del principio di Torricelli: a quote uguali, all'interno dello stesso fluido connesso, corrispondono pressioni uguali.

Se non specifichiamo come la densità dipenda dalla pressione, l'equazione non è integrabile. Il caso più semplice si presenta quando ρ può ritenersi *costante*.

2.4 Densità costante: la legge di Stevino**Attenzione**

In senso strettamente matematico un fluido a densità rigorosamente costante è *incomprimibile*, cioè avrebbe un modulo di comprimibilità E infinito. Nessun materiale reale lo è: l'acqua ha $E \approx 2 \times 10^9$ Pa, il mercurio poco più di 2×10^{10} Pa, e persino il diamante ha un modulo di Young finito (circa 440 GPa). L'ipotesi $\rho = \text{cost.}$ è dunque un'approssimazione *ingegneristica*: è lecita quando le variazioni di pressione che si incontrano sono *piccole rispetto al modulo di comprimibilità* del materiale. Per l'acqua, una variazione anche di 1 MPa è solo mezzo millesimo di E : la variazione di densità è del tutto irrilevante. Tipicamente questo avviene per i liquidi.

Se $\rho = \text{cost.}$, l'equazione si integra immediatamente:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad p(z) = p(z_0) - \rho g (z - z_0).$$

Formula chiave

Legge di Stevino. In un liquido a densità costante, con l'asse z orientato verso l'alto,

$$p(z) = p_0 - \rho g z,$$

dove p_0 è la pressione alla quota di riferimento $z = 0$. La pressione cresce linearmente con la profondità di immersione.

È notevole che questa legge, che si conosce sin dagli studi liceali, emerga qui come semplice caso particolare dell'equazione fondamentale. Simon Stevin (italianizzato in Stevino), scienziato fiammingo, la ricavò per via sperimentale ben prima che fosse disponibile il calcolo infinitesimale: quando una relazione generale, ristretta al caso semplice, restituisce una legge già nota, è un buon segno che la derivazione è corretta.

Esempio: pressione con la profondità in acqua

Per l'acqua $\rho \approx 1000 \text{ kg/m}^3$ e $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$. La legge di Stevino dice che, per ogni 10 m di immersione, la pressione aumenta di

$$\Delta p = \rho g \Delta z \approx 1000 \cdot 9,8 \cdot 10 \approx 98\,000 \text{ Pa},$$

cioè circa un'atmosfera. È l'esperienza di chi fa immersioni subacquee: il continuo aumento di pressione con la profondità impone frequenti compensazioni fra la pressione interna dell'orecchio e quella esterna che agisce sul timpano. È anche il motivo per cui l'autonomia delle bombole diminuisce con la profondità: l'erogatore deve fornire aria alla pressione ambiente, sempre maggiore, e quindi a ogni atto respiratorio si consuma più massa d'aria.

2.5 Fluido in moto rigido: l'accelerazione conta

L'equazione fondamentale non richiede che il fluido sia fermo: basta che non si deformi. Quando $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, il termine $\rho \mathbf{a}$ modifica la distribuzione di pressione e, con essa, la forma delle superfici a pressione costante — in particolare della superficie libera.

Esercizio svolto: autocisterna in curva

Un'autocisterna trasporta un liquido che riempie per $2/3$ un cassone a forma di parallelepipedo, aperto in superficie, con sponde laterali di altezza H . Il veicolo percorre una curva circolare di raggio R a velocità costante U . Si calcoli la massima velocità con cui può affrontare la curva prima che il liquido tracimi. Dati: semilarghezza del cassone $l = 2,5$ m, $H = 2$ m, $R = 200$ m, livello iniziale $h = 2H/3$.

Soluzione. In un sistema di riferimento solidale con il veicolo, sul fluido agiscono la forza peso e la forza centrifuga (per unità di massa, U^2/R diretta radialmente verso l'esterno). Le equazioni della statica del fluido nel riferimento rotante sono

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho \frac{U^2}{R} = 0.$$

Il differenziale della pressione vale allora

$$dp = \frac{\partial p}{\partial z} dz + \frac{\partial p}{\partial r} dr = -\rho g dz + \rho \frac{U^2}{R} dr.$$

Sulla superficie libera la pressione è costante ($dp = 0$), da cui l'equazione della superficie libera:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{U^2}{Rg} \implies z(r) = \frac{U^2}{Rg} r + C.$$

La superficie libera è dunque un *piano inclinato*: il liquido si accumula sul lato esterno della curva. La condizione critica si ha quando $z(r=l) = H$; imponendo la conservazione della massa (il livello sull'asse scende di tanto quanto sale sul bordo) si ricava $C = 2h - H$ e infine

$$U = \sqrt{\frac{2Rg(H-h)}{l}} \approx 32,3 \text{ m/s}.$$

Oltre questa velocità, il liquido tracima dal bordo esterno.

Con l'equazione fondamentale e la legge di Stevino disponiamo degli strumenti per descrivere la distribuzione di pressione nei liquidi. Nel prossimo capitolo affrontiamo il caso dei gas, in cui la densità non può più considerarsi costante, e definiamo l'atmosfera standard.

Distribuzione di pressione nei gas e atmosfera standard

Nel capitolo precedente, integrando l'equazione fondamentale della fluidostatica, abbiamo ottenuto la legge di Stevino nell'ipotesi di densità costante — ipotesi legittima per i liquidi. Per i gas la situazione è diversa: la densità varia sensibilmente con la pressione e non può più essere portata fuori dall'integrale. Questo capitolo affronta la distribuzione di pressione nei gas, con particolare attenzione all'atmosfera terrestre, un argomento di rilevanza centrale per l'ingegneria aeronautica.

3.1 Perché nei gas la densità non è costante

Partiamo dal punto in cui eravamo rimasti, per un fluido fermo soggetto al solo peso:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

Nei gas il modulo di comprimibilità è molto più basso che nei liquidi. Per una trasformazione politropica $p/\rho^k = \text{cost.}$ si dimostra che il modulo di comprimibilità vale $E = k p$: dipende cioè dalla pressione stessa. Per l'aria a temperatura ambiente, in ipotesi isoterma, $E \approx 10^5$ Pa, cioè circa un'atmosfera. Basta allora una variazione di pressione di un decimo di atmosfera — una variazione modesta — perché essa raggiunga il 10 % del modulo di comprimibilità: la densità non può più considerarsi costante.

Per integrare l'equazione occorre dunque un legame esplicito fra ρ e p . Il caso più semplice si ottiene assumendo che il gas obbedisca all'equazione di stato dei gas perfetti.

3.2 Atmosfera isoterma: la legge esponenziale

Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ricava la densità in funzione della pressione:

$$\rho = \frac{p}{R T},$$

dove R è la costante specifica del gas (la costante universale divisa per il peso molecolare della specie chimica). Se supponiamo il gas *isoterma*, cioè T costante, sostituendo nell'equazione fondamentale otteniamo

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{R T} p \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R T} dz.$$

Integrando fra la quota di riferimento z_0 e una quota generica z :

$$\ln \frac{p(z)}{p(z_0)} = -\frac{g}{R T} (z - z_0),$$

da cui

Formula chiave**Atmosfera isoterma.**

$$p(z) = p(z_0) \exp \left[-\frac{g}{R T} (z - z_0) \right].$$

Nei gas isotermi la pressione decresce con la quota secondo un *esponenziale*, non in modo lineare come nei liquidi.

Osservazione

Il comportamento è qualitativamente diverso da quello della legge di Stevino. Nella legge di Stevino, lineare, incrementi di quota uguali producono variazioni di pressione uguali: che ci si immerga da 0 a 10 m o da 1000 a 1010 m, la variazione è sempre di circa un'atmosfera. Nell'esponenziale, invece, prendendo Δz costanti si ottengono decrementi di pressione via via più piccoli man mano che si sale.

La ragione fisica è intuitiva: la pressione a una quota è data dal peso della colonna di gas sovrastante, diviso per la superficie. Salendo, questo peso diminuisce per due motivi che si sommano: lo spessore di fluido sovrastante è minore, e il fluido stesso è meno denso perché meno compresso dagli strati superiori.

Osservazione

Dato il basso valore della densità dei gas, le variazioni di pressione dovute al peso proprio diventano apprezzabili solo per dislivelli dell'ordine delle centinaia o migliaia di metri. Applicando la legge esponenziale all'aria a temperatura ambiente, per una variazione di quota di 50 m si ottiene una variazione relativa di pressione di appena lo 0,59 %. Nessuno, salendo al quarto piano di un palazzo, si porta un giubbotto pesante temendo il freddo: la variazione è impercettibile. Diverso il caso di chi sale su una montagna di duemila o tremila metri.

3.3 L'ipotesi isoterma non basta: verso l'atmosfera reale

L'ipotesi di gas isoterma è affidabile solo finché le variazioni di quota restano nell'ordine delle decine, al massimo poche centinaia di metri. Ma tutti sappiamo che in montagna fa più freddo: la temperatura *non* è costante con la quota. Per descrivere l'atmosfera reale occorre quantificare come la temperatura vari con l'altezza.

Il problema è reso complicato dal fatto che la pressione al suolo dipende anche dalla latitudine e dalle condizioni meteorologiche («alta» e «bassa pressione»), risultando funzione del tempo oltre che dello spazio. Nell'ingegneria aeronautica, tuttavia, si devono progettare strutture, motori e velivoli sulla base di proprietà atmosferiche *standardizzate*, valide ovunque e in ogni momento come riferimento. A questo scopo è stata definita l'*atmosfera standard*.

3.4 L'atmosfera standard

Definizione: atmosfera standard

L'atmosfera standard è un insieme di condizioni di riferimento ottenute mediando, in un intero anno e sull'intero globo, le proprietà misurate alla latitudine di 45° nord (prossima a quella dell'Italia). Le misure — di temperatura, pressione, densità, umidità — sono state raccolte da stazioni al suolo e da palloni sonda strumentati che ne rilevano la variazione con la quota. I valori al suolo di riferimento sono

$$T_0 = 288,15 \text{ K} = 15^\circ \text{C}, \quad p_0 = 101\,325 \text{ Pa}.$$

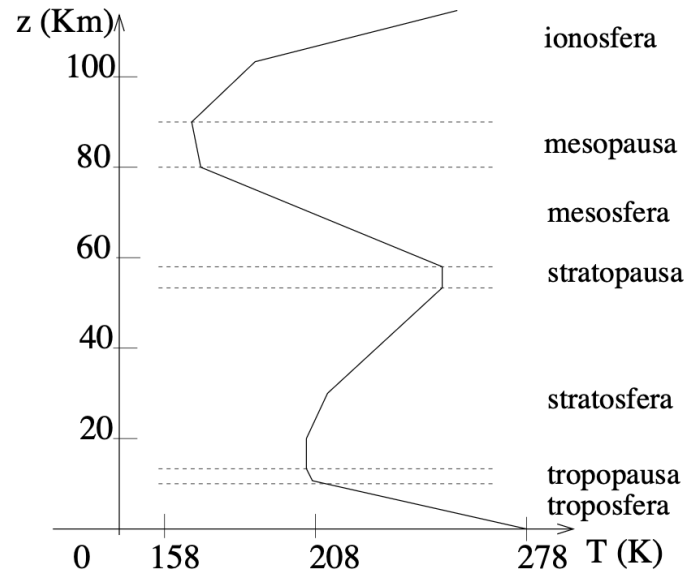


Figura 3.1. Andamento della temperatura con la quota nell'atmosfera: nella troposfera (0–11 km) la temperatura decresce linearmente; seguono tropopausa, stratosfera, mesosfera e ionosfera, ciascuna con un proprio gradiente termico.

Il dato che ci riguarda maggiormente è che negli strati densi dell'atmosfera — i primi $\sim 11\,000$ m, corrispondenti alla *troposfera* — la temperatura diminuisce *linearmente* con la quota, con un gradiente costante

$$\tau = 0,0065 \text{ K/m} \quad (\text{ossia } 6,5 \text{ K ogni } 1000 \text{ m}),$$

per cui

$$T(z) = T_0 - \tau z.$$

3.4.1 Distribuzione di pressione nella troposfera

Sostituiamo ora nella $dp/dz = -\rho g$ la densità ricavata dall'equazione di stato, tenendo conto che questa volta T è funzione di z :

$$\rho = \frac{p}{R T(z)} = \frac{p}{R (T_0 - \tau z)}.$$

Si ottiene

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g p}{R (T_0 - \tau z)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \frac{dz}{T_0 - \tau z}.$$

L'integrale a secondo membro si risolve facilmente con la sostituzione $y = T_0 - \tau z$, da cui $dy = -\tau dz$. Moltiplicando e dividendo per τ :

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{g}{R \tau} \ln \frac{T_0 - \tau z}{T_0},$$

e infine

Formula chiave

Pressione nell'atmosfera standard (troposfera).

$$\frac{p(z)}{p_0} = \left(\frac{T_0 - \tau z}{T_0} \right)^{\frac{g}{R \tau}}.$$

Note le condizioni al suolo p_0 e T_0 , questa relazione fornisce la pressione a qualunque quota fra 0 e 11 000 m. Dall'equazione di stato si ricava poi la densità $\rho(z)$.

Osservazione

Abbiamo ora tre distribuzioni di pressione da confrontare, per tre modelli diversi di fluido: la *legge di Stevino* (liquido, densità costante) è una retta a pendenza negativa; l'*atmosfera isoterma* (gas perfetto isoterma) è un esponenziale decrescente; l'*atmosfera standard* (gas perfetto con temperatura linearmente decrescente) è una legge di potenza, con un andamento *intermedio* fra i due precedenti. Fisicamente il comportamento intermedio si spiega così: il gas resta comprimibile, ma salendo si raffredda; raffreddandosi si comprime, cosicché la densità diminuisce meno rapidamente di quanto farebbe in un gas isoterma.

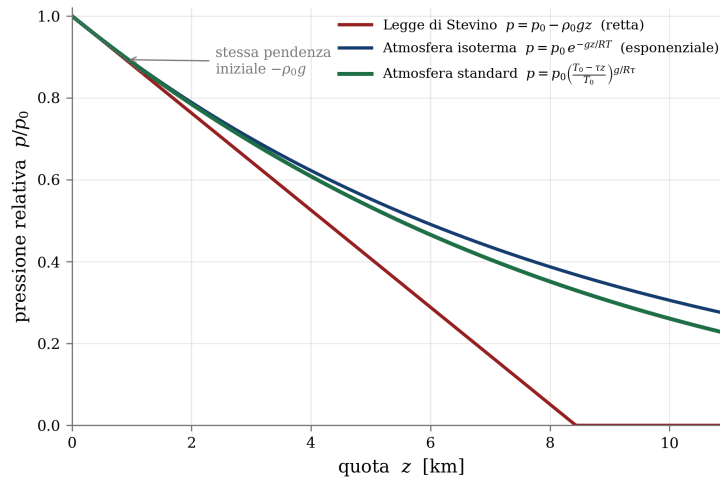


Figura 3.2. Confronto fra le distribuzioni di pressione con la quota: legge di Stevino (retta), atmosfera isoterma (esponenziale) e atmosfera standard (legge di potenza, andamento intermedio).

Osservazione tecnica: quota e pressurizzazione

Queste relazioni sono di grande utilità ingegneristica: a seconda della quota per cui si deve progettare, permettono di conoscere temperatura, pressione e densità di riferimento. Volando a $\sim 10\,000$ m la pressione esterna è così bassa che sarebbe impossibile respirare in autonomia; è per questo che le cabine dei velivoli da trasporto sono *pressurizzate*. La conoscenza precisa di $p(z)$ e $\rho(z)$ è inoltre indispensabile per il calcolo delle prestazioni: la portanza e la resistenza aerodinamiche dipendono direttamente dalla densità dell'aria, che in quota può ridursi a una frazione del valore al suolo.

Esercizio svolto: a che temperatura bolle l'acqua in montagna

Vogliamo cucinare la pasta a una quota di $z = 2500$ m (alta montagna). A che temperatura bolle l'acqua? L'ebollizione avviene quando la tensione di vapore del liquido eguaglia la pressione ambiente; il problema richiede quindi due passi: determinare la pressione a quella quota e trovare la temperatura a cui la tensione di vapore dell'acqua la raggiunge.

Passo 1 — pressione in quota. Con i dati dell'atmosfera standard ($T_0 = 288,15$ K, $p_0 = 101\,325$ Pa, $g = 9,8$ m/s², $R = 287$ J/(kg K), $\tau = 0,0065$ K/m) la formula della troposfera fornisce

$$p(2500 \text{ m}) \approx 74\,677 \text{ Pa},$$

cioè circa il 25 % in meno rispetto al suolo. La minore densità spiega anche la difficoltà di respirare in alta montagna.

Passo 2 — temperatura di ebollizione. La tensione di vapore dell'acqua in funzione della temperatura si esprime, tramite una forma dell'equazione di Antoine, come

$$p_v(T) = 610,8 \exp\left(\frac{17,27(T - 273,15)}{T - 35,85}\right),$$

con T in kelvin e p_v in pascal. Imponendo $p_v = 74\,677$ Pa e risolvendo per T (isolando l'esponenziale, prendendo il logaritmo e ricavando la temperatura) si ottiene

$$T \approx 364,5 \text{ K} \approx 91,4^\circ\text{C}.$$

Come ci si aspettava, a pressione minore l'acqua bolle a temperatura minore: ecco perché in alta montagna è difficile cuocere bene la pasta. Non è (solo) questione di abilità in cucina, ma di fisica.

Forze di pressione su superfici piane

Disponendo ora della legge che governa la distribuzione di pressione, possiamo affrontare il problema centrale per le applicazioni: calcolare il *sistema delle forze* che un fluido in quiete esercita su una superficie. In generale ciò richiede la determinazione della risultante $\mathbf{F}$ e della coppia $\mathbf{M}$.

4.1 Impostazione generale del problema

Consideriamo una superficie S e isoliamo un elemento d'area dS , abbastanza piccolo da poter considerare costante su di esso sia la normale $\hat{\mathbf{n}}$ sia la pressione. La forza elementare vale

$$d\mathbf{F} = -p \hat{\mathbf{n}} dS,$$

diretta in verso opposto alla normale uscente (dal lato in cui il fluido bagna la superficie). Integrando su tutta la superficie:

$$\mathbf{F} = \int_S -p \hat{\mathbf{n}} dS, \quad \mathbf{M} = \int_S -p \mathbf{x} \times \hat{\mathbf{n}} dS,$$

dove $\mathbf{x}$ unisce un polo O alla forza infinitesima.

Attenzione

Sebbene sul piano teorico questi integrali siano elementari, la loro valutazione pratica è spesso impossibile per via analitica. Le difficoltà possono derivare dalla complessità della superficie e dell'orientamento della normale, oppure dalla distribuzione della pressione, che in linea di principio potrebbe essere una funzione complicata dello spazio. Nella pratica si ricorre allora a metodi numerici: si discretizza la superficie in tanti elementi su ciascuno dei quali la pressione si ritiene costante, e gli integrali diventano sommatorie discrete — è l'approccio della fluidodinamica computazionale.

Vi sono tuttavia numerosi casi in cui la pressione è costante o varia linearmente con la quota (rispettivamente: nei gas per dislivelli limitati, e nei liquidi) e la superficie è piana o scomponibile in un numero finito di superfici piane. In queste ipotesi gli integrali si risolvono analiticamente e si ottengono formule risolutive di grande utilità.

4.2 Superficie piana, pressione costante

È il caso più semplice. Se la superficie è piana, la normale $\hat{\mathbf{n}}$ è unica e può uscire dall'integrale; se anche la pressione è costante, anch'essa esce, e resta $\int_S dS = S$. Dunque

$$\mathbf{F} = -pS \hat{\mathbf{n}}.$$

Formula chiave

Per una *superficie piana* soggetta a *pressione costante*, la risultante delle forze di pressione ha modulo $F = pS$, direzione data dalla normale, verso opposto a essa. Il punto di applicazione (*centro di pressione*) coincide con il *centroide* della superficie.

4.2.1 Il punto di applicazione: il centroide

Il modulo e la direzione non bastano: una forza è completamente determinata solo quando se ne conosce anche il *punto di applicazione*. Per trovarlo imponiamo che la risultante sia *equivalente* al sistema di forze elementari distribuite, ossia che ne riproduca lo stesso momento. Prendiamo i momenti rispetto all'asse y : la forza elementare $p \, dS$ ha braccio x , quindi il momento distribuito è $\int_S p x \, dS$. Uguagliandolo al momento della risultante, $p S x_R$, e semplificando la pressione (che è costante):

$$x_R = \frac{\int_S x \, dS}{S}.$$

Osservazione

Il risultato dice due cose importanti. Primo: il punto di applicazione *non dipende dalla pressione* (si è semplificata). Applicando 1 bar, 20 bar o 3 Pa, il centro di pressione è sempre lo stesso. Secondo: x_R è l'ascissa del *centroide*, una proprietà puramente geometrica della superficie. Il centroide non va confuso con il baricentro: il baricentro dipende dalla distribuzione delle masse, il centroide dipende solo dalla forma. Per un disco di materiale omogeneo i due coincidono al centro; ma se il disco fosse per metà d'acciaio e per metà di legno, il baricentro si sposterebbe verso l'acciaio mentre il centroide resterebbe al centro.

Esempio: la forza dell'atmosfera su una lavagna

Quanto vale la risultante delle forze di pressione atmosferica su una lavagna di $2 \, \text{m} \times 0,9 \, \text{m} = 1,8 \, \text{m}^2$?
Con $p_{\text{atm}} \approx 101 \, 325 \, \text{Pa}$:

$$F = p_{\text{atm}} S \approx 101 \, 325 \cdot 1,8 \approx 182 \, 000 \, \text{N},$$

ossia circa 18,6 tonnellate-forza. Una forza enorme, che demolirebbe il muro — se agisse da sola. In realtà un'aria a pressione ambiente si infila anche dietro la lavagna e produce una forza uguale e opposta: le due si bilanciano e la lavagna resta in equilibrio. Le forze di pressione atmosferica sono così grandi proprio perché agiscono sempre a coppie, annullandosi.

Esempio: il cibo sottovuoto

Quando si confeziona un affettato sottovuoto, si estrae l'aria dal sacchetto: dentro la pressione scende quasi a zero, fuori resta p_0 . Sui due lembi del sacchetto, di dimensioni simili a un foglio A4 ($0,3 \, \text{m} \times 0,2 \, \text{m} = 0,06 \, \text{m}^2$), agisce allora una forza non bilanciata

$$F \approx p_0 S \approx 10^5 \cdot 0,06 = 6000 \, \text{N},$$

cioè circa 600 chilogrammi-forza. È impossibile separare i due lembi a mani nude: occorrerebbe esercitare una trazione di seicento chili. Lo stesso schiacciamento è il motivo per cui le fette risultano compresse l'una sull'altra.

4.3 Superficie piana, distribuzione lineare di pressione

Passiamo al caso di una superficie piana immersa in un liquido, in cui la pressione cresce linearmente con la quota (legge di Stevino). La superficie sia comunque orientata, con inclinazione θ rispetto alla verticale; introduciamo un asse z' che corre lungo il piano della superficie, legato alla quota z da $z = z' \cos \theta$ (figura 4.1).

La pressione alla generica quota z' è la somma della pressione atmosferica p_0 (costante, già trattata nella sezione precedente) e del contributo idrostatico $\rho g z = \rho g z' \cos \theta$. Il contributo costante genera la forza $\mathbf{F}_0$

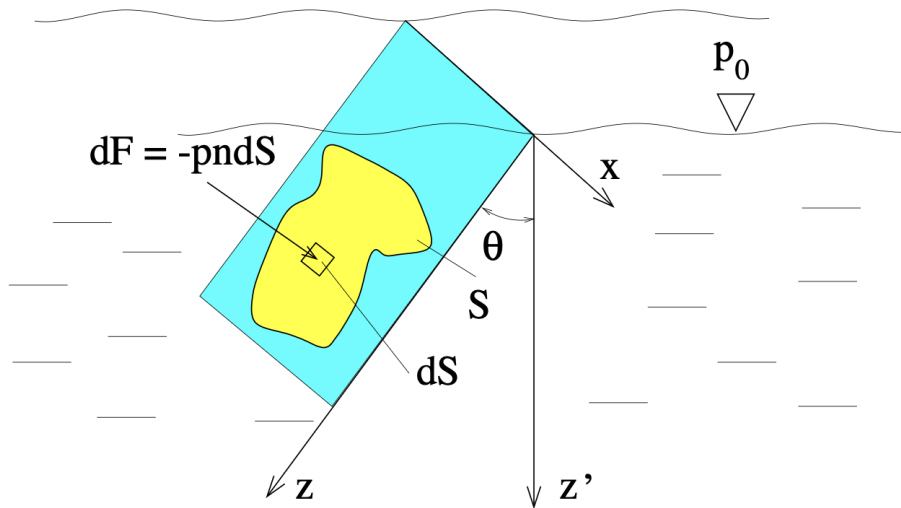


Figura 4.1. Superficie piana S immersa in un liquido e inclinata di θ rispetto alla verticale. La pressione cresce linearmente con la quota di immersione; z' è la coordinata misurata lungo il piano della superficie.

applicata nel centroide. Concentriamoci sul contributo idrostatico. La forza risultante vale

$$\mathbf{F}_i = -\rho g \hat{\mathbf{n}} \int_S z' \cos \theta \, dS = -\rho g \cos \theta \hat{\mathbf{n}} \int_S z' \, dS.$$

Ma $\int_S z' \, dS = z'_C S$, dove z'_C è la coordinata del centroide; e $z'_C \cos \theta = z_C$, la quota di immersione del centroide. Dunque

Formula chiave

Forza idrostatica su superficie piana. La componente dovuta alla variazione lineare di pressione ha modulo

$$F_i = \rho g z_C S = p_C S,$$

dove $p_C = \rho g z_C$ è la pressione idrostatica valutata *alla quota di immersione del centroide*. La forza è diretta in verso opposto alla normale uscente.

4.3.1 Dove è applicata la forza idrostatica: il momento di figura

Il punto di applicazione della forza idrostatica *non* coincide, in generale, con il centroide. Per determinarlo uguagliamo i momenti rispetto all'asse x . Il momento distribuito è

$$M = \int_S \rho g z z' \, dS = \rho g \cos \theta \int_S z'^2 \, dS,$$

mentre il momento della risultante è $M = F_i z'_R = \rho g z_C S z'_R$. Uguagliando e semplificando ρg (il che mostra, di nuovo, che il punto di applicazione non dipende né dalla densità né da g) e $\cos \theta$, si trova

$$z'_R = \frac{\int_S z'^2 \, dS}{z'_C S}.$$

L'integrale a numeratore è il *momento di figura* (o momento del secondo ordine) della superficie rispetto all'asse x :

$$I_x = \int_S z'^2 \, dS.$$

Attenzione

Il momento di figura I_x è l'analogo geometrico del momento d'inerzia, ma non va confuso con esso: I_x ha le dimensioni di una lunghezza alla quarta è una proprietà puramente geometrica; il momento d'inerzia meccanico contiene invece la massa. Alcuni testi chiamano I_x proprio «momento di figura» per evitare l'ambiguità.

Il momento I_x dipende dall'asse rispetto al quale si calcola. Fortunatamente il *teorema di Huygens* (o degli assi paralleli) permette di ricondurlo al momento I_{x_C} rispetto a un asse parallelo passante per il centroide, quantità tabulata per tutte le figure regolari:

$$I_x = I_{x_C} + z'_C{}^2 S.$$

Sostituendo nell'espressione di z'_R e semplificando:

Formula chiave**Punto di applicazione della risultante idrostatica.**

$$z'_R = z'_C + \frac{I_{x_C}}{z'_C S}.$$

La risultante è applicata *più in basso* del centroide, di una quantità pari a $I_{x_C}/(z'_C S)$, che dipende solo dalla geometria della superficie.

Osservazione

Il termine correttivo è sempre positivo, quindi $z'_R > z'_C$: la risultante idrostatica cade sempre *sotto* il centroide. Il motivo fisico è intuitivo: la pressione cresce con la profondità, quindi le forze elementari sono più intense nella parte bassa della superficie, e la loro risultante si sposta verso il basso. Inoltre, all'aumentare della profondità di immersione, z'_C cresce mentre I_{x_C} e S restano invariati: la correzione diminuisce e $z'_R \rightarrow z'_C$. Fisicamente, a grande profondità la variazione di pressione sulla superficie diventa trascurabile rispetto al valore medio, e la risultante si comporta come se la pressione fosse costante (applicata nel centroide).

Nota

Christiaan Huygens, autore del teorema degli assi paralleli, era olandese; in Olanda il suo cognome si pronuncia in un modo pressoché impronunciabile per un italiano. Se in Nord Europa citerete il «teorema di Huygens» pronunciandolo all'italiana, rischiate di non essere capiti: è un piccolo aneddoto che vale la pena ricordare.

Con le formule per superfici piane a pressione costante e a pressione linearmente variabile disponiamo dei mattoni fondamentali. Nel prossimo capitolo vedremo come combinarli per risolvere anche il caso delle superfici *curve*.

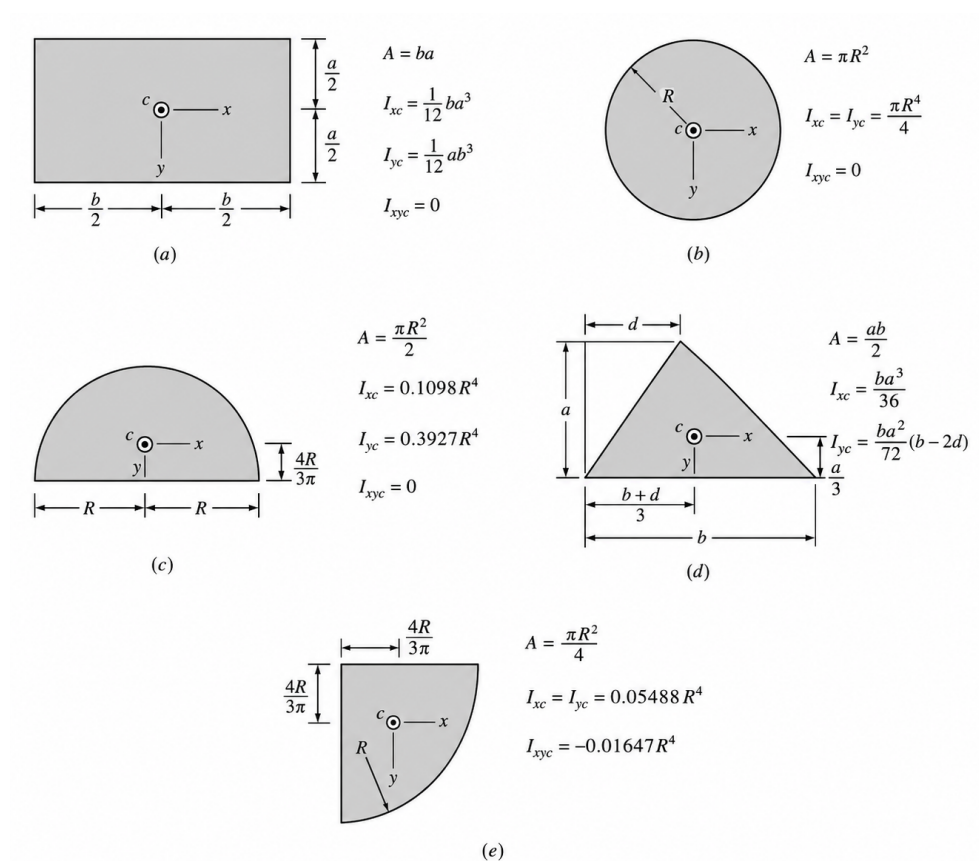


Figura 4.2. Momento di figura I_{xc} rispetto all'asse baricentrico per alcune figure geometriche regolari (rettangolo, triangolo, cerchio).

Forze di pressione su superfici curve

Nei problemi affrontati finora la superficie poteva essere contenuta interamente in un piano, e ciò ha permesso di ricavare formule generali. Vi sono però applicazioni in cui questa ipotesi non vale: la parete di un serbatoio a fondo bombato, una paratia curva, lo scafo di un natante. Anche in questi casi, sorprendentemente, è possibile calcolare la risultante delle forze di pressione *senza* valutare esplicitamente gli integrali generali, sfruttando i risultati già ottenuti per le superfici piane.

5.1 Il problema e il metodo del volume isolato

Su una superficie curva la normale uscente cambia da punto a punto: non è possibile portarla fuori dall'integrale $\mathbf{F} = - \int_S p \hat{\mathbf{n}} dS$, e la superficie generica non è definita analiticamente. Il problema, così posto, sembra irresolubile.

L'idea vincente è *isolare idealmente il volume di fluido* compreso fra la superficie curva e alcune superfici piane ausiliarie — tipicamente una orizzontale e una verticale (figura 5.1). Si considera poi l'equilibrio di questo volume di fluido.

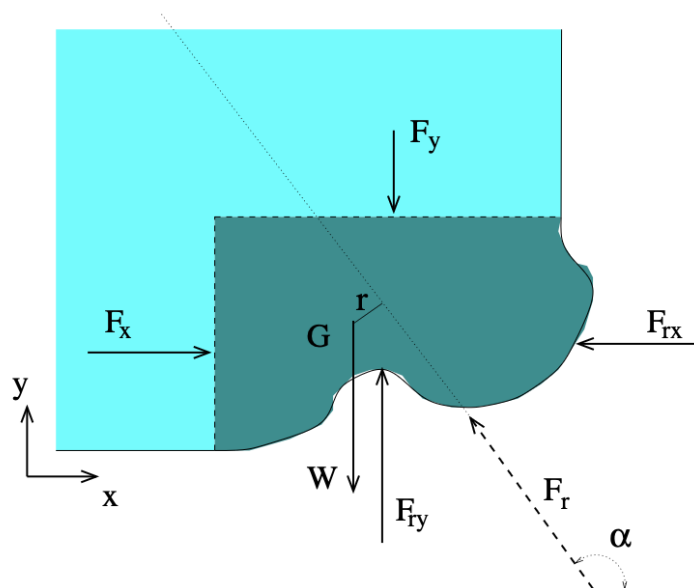


Figura 5.1. Metodo del volume isolato per il calcolo delle forze su una superficie curva. Sul volume di fluido racchiuso agiscono la forza orizzontale F_b , la forza verticale F_v , il peso proprio W e la reazione $\mathbf{F}$ della parete curva.

Se il volume è in equilibrio, la risultante delle forze applicate deve essere nulla. Le forze in gioco sono quattro:

- $\mathbf{F}_b$, forza sulla superficie piana *verticale*: pressione linearmente variabile, calcolabile con i metodi del capitolo precedente;
- $\mathbf{F}_v$, forza sulla superficie piana *orizzontale*: pressione costante (immersione costante), anch'essa nota;
- W , peso proprio del volume di fluido racchiuso, applicato nel suo baricentro G , con modulo $W = \rho g V$;

- $\mathbf{F}$, reazione che la parete curva esercita sul fluido. È l'opposto della forza che cerchiamo (la risultante delle pressioni sulla parete), e di essa, a priori, non conosciamo nulla: né modulo, né direzione, né punto di applicazione.

5.2 Determinazione di modulo e direzione

Imponiamo l'equilibrio alla traslazione. Lungo l'orizzontale, l'unica altra forza orizzontale è F_b , quindi la componente orizzontale di $\mathbf{F}$ la bilancia:

$$F \cos \alpha = F_b \quad \Rightarrow \quad F_{rx} = F_b.$$

Lungo la verticale, $\mathbf{F}$ deve bilanciare la somma di F_v e del peso W :

$$F \sin \alpha = F_v + W \quad \Rightarrow \quad F_{ry} = F_v + W.$$

Elevando al quadrato e sommando (con $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$) si ottengono modulo e direzione:

Formula chiave

Risultante su superficie curva.

$$F = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2} = \sqrt{F_b^2 + (F_v + W)^2}, \quad \alpha = \arctan \frac{F_v + W}{F_b}.$$

Osservazione

Il metodo dispensa dall'intuire in anticipo l'orientamento della forza incognita. Se ne disegna una componente in una direzione arbitraria e il calcolo restituisce automaticamente il segno corretto: se una componente risulta negativa, significa semplicemente che punta nel verso opposto a quello ipotizzato. Tutto è contenuto nella soluzione algebrica; non serve indovinare nulla.

5.3 Determinazione della retta di applicazione

Noti F e α , la forza non è ancora completamente determinata: qualunque forza su una retta parallela soddisfa l'equilibrio alla traslazione. Occorre l'equilibrio alla *rotazione*. Conviene scegliere come polo il baricentro G del volume di fluido, così da annullare il momento del peso W . Detti b , b_v , b_b i bracci rispettivamente di $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_v$, $\mathbf{F}_b$ rispetto a G , l'equilibrio dei momenti (raccogliendo a primo membro i momenti antiorari, a secondo i orari) fornisce

$$F b + F_b b_b = F_v b_v \quad \Rightarrow \quad b = \frac{F_v b_v - F_b b_b}{F}.$$

Osservazione

Anche qui il segno di b è informativo: se risulta positivo, la retta d'applicazione si trova dal lato ipotizzato rispetto a G ; se negativo, dal lato opposto. Non è necessario indovinarlo in partenza.

Attenzione

Il punto debole del metodo è il calcolo di W , che richiede l'area (e quindi il volume) della regione di fluido e la posizione del suo baricentro G . Per geometrie irregolari questi calcoli non sono immediati. Nella pratica professionale si affidano a un calcolatore: si approssima la forma con un poligono spezzato e si triangola la parte restante; più i triangoli sono piccoli, minore è l'errore, ma maggiore il numero di termini da sommare. Il baricentro si ottiene come media pesata (sulle aree) dei baricentri dei singoli triangoli e

rettangoli. Negli esercizi didattici ci limiteremo a geometrie semplici, per le quali area e baricentro si calcolano agevolmente.

Esercizio svolto: paratia a profilo di semiellisse

Una parete a profilo di *semiellisse* (semiasse orizzontale a , semiasse verticale b) trattiene dell'acqua; il lato piano superiore è inclinato di 45° e sopra di esso l'acqua raggiunge un'altezza H . Si vuole la risultante delle forze di pressione sulla superficie curva.

Impostazione. Si isola il volume di fluido racchiuso fra la superficie curva e le superfici piane ausiliarie. Su queste ultime le forze si calcolano con i metodi del Capitolo 4: la forza F_v sulla superficie orizzontale (pressione alla quota di immersione, moltiplicata per l'area) e la forza F_b sulla superficie verticale (pressione idrostatica alla quota del centroide, con punto di applicazione corretto dal momento di figura). Il peso proprio del fluido racchiuso è $W = \rho g V$, con volume V dato dall'area della sezione (somma dell'area del triangolo, a^2 , e della semiellisse, $\pi ab/2$) per la profondità. Il baricentro G si ottiene come media pesata dei baricentri del triangolo (sulla mediana) e della semiellisse (a distanza $4b/3\pi$ dal diametro, sull'asse di simmetria).

Soluzione. Con F_b , F_v e W noti, si ricavano

$$F = \sqrt{F_b^2 + (F_v + W)^2}, \quad \alpha = \arctan \frac{F_v + W}{F_b},$$

e infine la retta d'applicazione dall'equilibrio dei momenti rispetto a G . A titolo di esercitazione numerica si possono assumere $H = 2$ m, $a = 1$ m, $b = 0,6$ m, profondità 1,5 m, fluido acqua.

Osservazione: una scorciatoia

In molti casi il volume ausiliario si può racchiudere con un'unica superficie piana obliqua, anziché con un tratto orizzontale più uno verticale, purché su di essa sappiamo calcolare le forze. Se la geometria offre già una superficie piana comoda (come il lato inclinato a 45° dell'esempio), la si sfrutta direttamente: si riducono i termini da calcolare e si arriva alla soluzione con minore dispendio di energia. I due procedimenti, ovviamente, conducono allo stesso risultato.

In sintesi, aver imparato a calcolare le forze su superfici piane — a pressione costante e a pressione variabile — ci ha permesso di risolvere anche il problema, apparentemente più arduo, delle superfici curve, semplicemente isolando un opportuno volume di fluido e imponendone l'equilibrio.

Spinta di Archimede e stabilità del galleggiamento

Concludiamo lo studio delle forze di pressione con un caso di grande importanza: la forza che un fluido esercita su un corpo completamente o parzialmente immerso in esso. È la *spinta di Archimede*, o forza di galleggiamento, che permette a una nave di navigare, a un dirigibile di sollevarsi e a un batiscafo di risalire.

6.1 Derivazione della spinta

Consideriamo un corpo di forma qualunque immerso in un fluido. Individuiamo il *perimetro massimo* che circonda il corpo in un piano orizzontale e indichiamo con S la superficie da esso delimitata (figura 6.1). Per ogni elemento dS costruiamo un cilindro elementare a generatrici verticali, contenuto nel solido; esso interseca la superficie del corpo in due elementi, uno superiore e uno inferiore, di quote z_u e z_l .

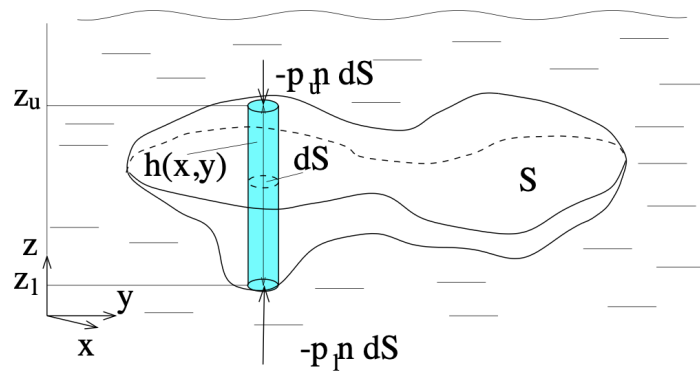


Figura 6.1. Forze di pressione su un corpo immerso. Per ogni elemento dS si costruisce un cilindro verticale; la differenza fra la pressione sulla faccia inferiore e quella superiore genera la spinta netta verso l'alto.

Ci interessa la *componente verticale* della forza di pressione. Sulla faccia superiore, di normale inclinata di θ rispetto alla verticale, la forza vale $p_u dS_u$ e la sua proiezione verticale è $-p_u dS_u \cos \theta = -p_u dS$, poiché $dS_u \cos \theta = dS$ (proiezione dell'elemento inclinato sul piano orizzontale). Analogamente, sulla faccia inferiore la proiezione verticale è $+p_l dS$. La risultante verticale sul cilindro elementare è dunque

$$dF_z = (p_l - p_u) dS.$$

Poiché la pressione è costante sui piani orizzontali, la differenza $(p_l - p_u)$ si calcola dall'equazione fondamentale $dp = -\rho g dz$:

$$p_l - p_u = - \int_{z_l}^{z_u} dp = \int_{z_l}^{z_u} \rho g dz.$$

Sostituendo e integrando su tutta la superficie S , l'integrale doppio (su S e fra z_l e z_u) diventa un integrale sul volume V del corpo:

$$F_z = \int_S (p_l - p_u) dS = \int_S \int_{z_l}^{z_u} \rho g dz dS = \int_V \rho g dV.$$

Formula chiave

Principio di Archimede. Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verticale diretta verso l'alto pari al *peso del volume di fluido spostato*:

$$F_z = \int_V \rho g \, dV.$$

Se la densità del fluido è costante,

$$F_z = \rho g V,$$

con V volume del corpo e ρ densità del *fluido* (non del corpo).

Osservazione

La formula *non* contiene alcuna informazione sul corpo: la spinta è la stessa che il corpo sia cavo, d'acciaio o di cemento. Ciò che determina se galleggi o affondi è il confronto fra la spinta e il peso proprio del corpo. Noto è anche l'espressione $F_z = \int_V (dp/dz) \, dV$: perché esista una spinta è *necessario* che la pressione vari lungo z . Se la pressione fosse rigorosamente costante fra la parte inferiore e superiore di un palloncino, non esisterebbe alcuna spinta. La variazione è minima — fra il fondo e la cima di un palloncino di 30–40 cm la pressione cambia di appena 1–2 Pa su oltre 10^5 Pa — ma senza di essa non potrebbero volare palloncini, mongolfiere, dirigibili, né alcun aerostato.

Nota

La celebre leggenda vuole che Archimede dovesse stabilire, per conto di un tiranno, se una corona fosse d'oro puro o di lega, senza danneggiarla. Al di là dell'aneddoto, il principio che ne porta il nome è uno dei risultati più antichi e fecondi della fluidostatica.

6.2 Corpo all'interfaccia fra due fluidi

Il ragionamento si estende a un corpo immerso parzialmente in un fluido e parzialmente in un altro, a densità diversa. Se la configurazione è stabile ($\rho_1 \geq \rho \geq \rho_2$), il corpo si dispone all'interfaccia in modo che la spinta complessiva bilanci il peso. Ogni fluido contribuisce per la porzione di volume che sposta: detti V_1 e V_2 i volumi immersi nei due fluidi ($V = V_1 + V_2$),

$$\int_{V_1} \rho_1 g \, dV + \int_{V_2} \rho_2 g \, dV = \rho g V,$$

ovvero, per fluidi incompressibili,

$$\rho_1 V_1 g + \rho_2 V_2 g = \rho g V.$$

Osservazione

A rigore questo vale anche quando i due fluidi sono acqua e aria, come per una nave. Tuttavia, avendo l'aria densità 600–800 volte minore dell'acqua, il suo contributo alla spinta è trascurabile e di norma non si considera: si assume che tutta la spinta provenga dall'acqua.

Esercizio svolto: cono galleggiante fra due fluidi

Un cono a base circolare (altezza h) galleggia all'interfaccia fra due fluidi di densità ρ_0 (in basso) e ρ_1 (in alto); il cono ha densità ρ . Determinare l'altezza h_0 della porzione immersa nel fluido inferiore. Dati: $\rho = 1,15 \text{ kg/dm}^3$, $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/dm}^3$, $\rho_1 = 0,98 \text{ kg/dm}^3$, $h = 0,4 \text{ m}$.

Soluzione. L'equilibrio al galleggiamento è $\rho_0 V_0 + \rho_1 V_1 = \rho V$, con $V_1 = V - V_0$, da cui

$$V_0(\rho_0 - \rho_1) = V(\rho - \rho_1).$$

I volumi valgono $V = \pi d^2 h/12$ e $V_0 = \pi d_0^2 h_0/12$; per la similitudine dei triangoli $d/h = d_0/h_0$. Sostituendo si ottiene

$$h_0^3 = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_0 - \rho_1} h^3 \quad \Rightarrow \quad h_0 \approx 0,367 \text{ m}.$$

6.3 Galleggiamento e stabilità: il metacentro

Quando un corpo è solo parzialmente immerso nascono questioni di *stabilità*. Il peso è applicato nel baricentro G del corpo (indipendente dall'immersione), mentre la spinta è applicata nel baricentro della regione di fluido spostata — detto *centro di spinta* S — che invece dipende dalla posizione del corpo rispetto alla superficie libera. Quando il corpo oscilla, il centro di spinta si sposta.

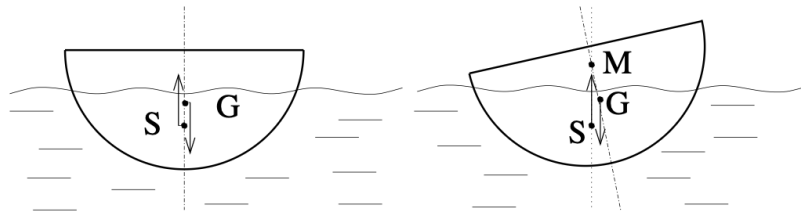


Figura 6.2. Stabilità alla rotazione. A sinistra, la configurazione di equilibrio; a destra, dopo una piccola rotazione il centro di spinta S si sposta e con il peso in G forma una coppia. Il metacentro M è l'intersezione fra la retta d'azione della spinta e l'asse di simmetria del corpo.

Definizione: metacentro

Per un corpo simmetrico, il *metacentro* M è il punto d'intersezione fra la retta d'azione della spinta (dopo una piccola rotazione) e l'asse di simmetria del corpo. Si può immaginare che, per piccole oscillazioni, il corpo ruoti attorno a un asse passante per M .

Formula chiave

Criterio di stabilità. La configurazione è *stabile* finché il baricentro G si trova *al di sotto* del metacentro M : in tal caso una piccola rotazione genera una *coppia stabilizzante*, che tende a riportare il corpo nella posizione iniziale. Se invece G sta sopra M , la configurazione è *instabile*.

Osservazione

Mentre la spinta e il suo punto di applicazione dipendono solo dall'immersione, la posizione di G dipende dalla distribuzione delle masse a bordo: si può quindi aumentare o diminuire la stabilità spostando dei pesi. Si consideri un piccolo natante con sei persone a bordo: se tutte si alzano in piedi, il baricentro si innalza, avvicinandosi al metacentro, e la stabilità diminuisce; se, caso estremo, si portassero tutte in cima a una scala a due o tre metri d'altezza, si avrebbe facilmente il ribaltamento. È lo stesso principio per cui, nella zavorra di una nave o di un dirigibile, i pesi vanno collocati in basso.

Con la spinta di Archimede e i criteri di stabilità abbiamo completato lo studio delle forze che un fluido in quiete esercita sui corpi. Il capitolo successivo applica questi principi a una classe di dispositivi di grande interesse pratico: i misuratori di pressione.

Misuratori di pressione

Le leggi della fluidostatica trovano un'applicazione diretta e ingegnosa negli strumenti di misura della pressione. In questo capitolo ne illustriamo i principi di funzionamento, mostrando come la legge di Stevino permetta di trasformare una misura di *lunghezza* (un dislivello di fluido) in una misura di *pressione*. Uno strumento di questo tipo è un *trasduttore*: converte una grandezza fisica in un'altra più facilmente leggibile.

7.1 Il barometro

Il primo dispositivo (figura 7.1a) è, per il suo impiego nella misura della pressione atmosferica, detto *barometro*. Un tubo chiuso a un estremo e riempito di fluido viene capovolto in un recipiente contenente lo stesso fluido; la colonna nel tubo scende fino a un'altezza h , dalla cui misura si risale alla pressione che insiste sulla superficie libera del recipiente. Applicando la legge di Stevino fra la superficie libera e la sommità chiusa del tubo, con fluido manometrico mercurio:

$$p_{\text{atm}} = \rho_{\text{Hg}} g h + p_{\text{Hg}},$$

dove p_{Hg} è la tensione di vapore del mercurio alla temperatura d'esercizio.

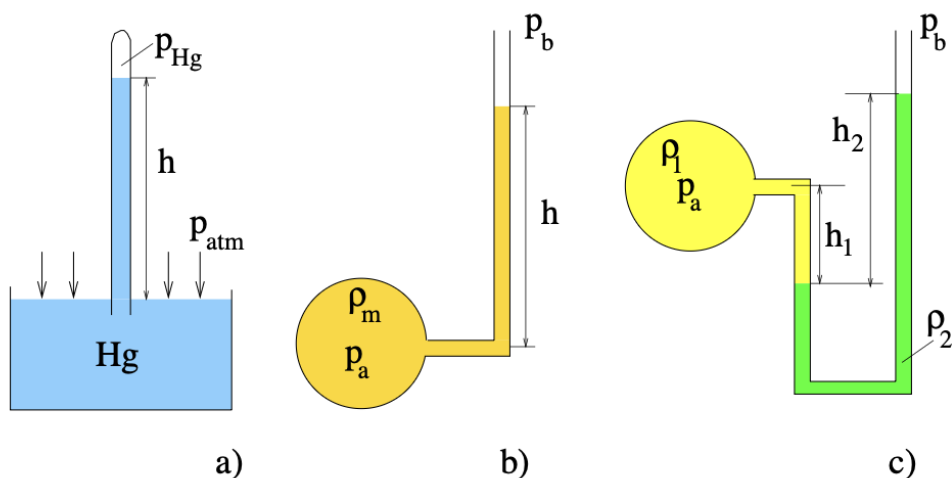


Figura 7.1. Schemi di funzionamento: a) barometro; b) manometro a tubo aperto; c) manometro a U.

Osservazione

Data la bassissima volatilità del mercurio si può porre $p_{\text{Hg}} \approx 0$, da cui il valore ben noto $h \approx 760$ mm per la pressione atmosferica standard. L'esperienza fu condotta per la prima volta da Evangelista Torricelli (1608–1647), allievo di Galileo: è il fondamento dell'unità di misura *torr*, pari appunto alla pressione di un millimetro di mercurio.

7.2 Il manometro a tubo aperto

Il dispositivo di figura 7.1b è simile al barometro, ma con l'estremità del tubo *aperta*. Dette p_a e p_b le pressioni alle due estremità, l'equilibrio idrostatico fornisce

$$p_a = \rho_m g h + p_b.$$

Noti p_a e h si ricava p_b ; oppure, con il solo h , la differenza $p_a - p_b$.

Attenzione

Questo strumento, pur semplicissimo, ha limitazioni notevoli: il fluido manometrico e quello di cui si misura la pressione devono essere *immiscibili*; il fluido nel tubo deve essere un liquido; e la pressione p_b non può scendere sotto un valore limite, pena la fuoriuscita del fluido manometrico dal tubo.

7.3 Il manometro a U

Lo strumento di figura 7.1c risolve alcuni di questi problemi. Il tubo ha forma di U e fra il fluido a densità ρ_1 e quello ambiente si inserisce un terzo fluido a densità ρ_2 : non è più necessario che i primi due siano immiscibili. Dall'equilibrio delle pressioni:

$$p_a + \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 + p_b.$$

Osservazione

La massima differenza di pressione misurabile non dipende più solo dalla lunghezza del tubo, ma anche dal valore di ρ_2 , che si può quindi scegliere per aumentare la sensibilità o la portata dello strumento. Con un dispositivo a U si può anche misurare una pressione incognita p_A collegando il ramo ad essa: si parla allora di *manometro differenziale* quando ai due rami si applicano due pressioni p_A e p_B , particolarmente utile per misurarne la differenza.

7.4 Il manometro inclinato

Dai casi precedenti è evidente che il principio comune è la conversione di una lunghezza h in un valore di pressione, tramite $\Delta p = \rho_m g h$. Per aumentare la sensibilità occorre rendere massimo h a parità di Δp . A prima vista si potrebbe agire solo sulla densità ρ_m , cercando fluidi leggeri (alcool, benzina); ma h è la lunghezza della colonna *nella direzione di g* . Se si *inclina* il tubo di un angolo θ , la lunghezza l misurata lungo l'asse del tubo diventa

$$h = l \sin \theta,$$

e può crescere a piacere diminuendo l'inclinazione. L'equilibrio per il manometro inclinato (figura 7.2) è

$$p_a + \rho_1 g h_1 = \rho_2 g l \sin \theta + p_b.$$

Osservazione

Per $\theta = 90^\circ$ si ritrova il manometro ordinario; man mano che θ tende a zero, a parità di dislivello verticale, la lunghezza l letta sulla scala si amplifica quanto si vuole. È una vera e propria *leva trigonometrica*, che rende leggibili anche piccole differenze di pressione altrimenti impercettibili.

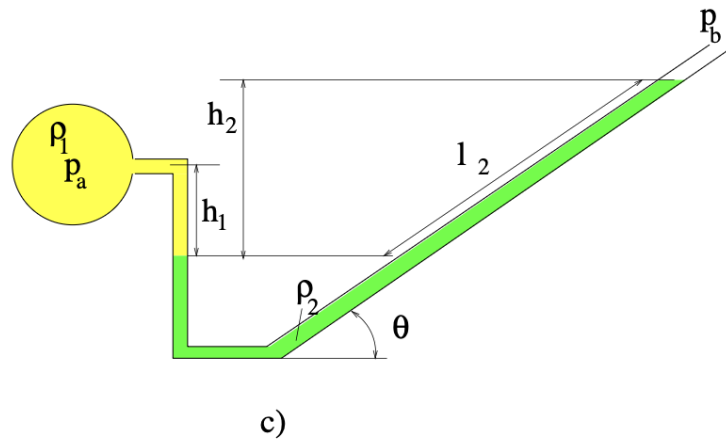


Figura 7.2. Manometro inclinato: inclinando il tubo, a parità di dislivello verticale $h = l \sin \theta$ si legge una lunghezza l amplificata, aumentando la sensibilità.

7.5 Manometri meccanici ed elettronici

I manometri a colonna di fluido sono semplici ed economici, ma non permettono letture precise, non misurano pressioni elevate e, a causa dell'inerzia della colonna, non sono adatti a pressioni rapidamente variabili nel tempo. Per questo, nelle applicazioni pratiche, si impiegano dispositivi basati sulla *deformazione di una superficie* sotto l'azione della pressione.

- **Manometri meccanici.** La superficie è generalmente una membrana che costituisce la parete di una camera stagna a pressione nota; la sua deflessione, letta meccanicamente, misura la pressione esterna. Il manometro di Bourdon, con il suo tubicino ricurvo che si raddrizza al crescere della pressione, ne è l'esempio classico.
- **Trasduttori elettronici.** Sfruttano l'*effetto piezoelettrico*: alcuni cristalli (per esempio il quarzo) generano una differenza di potenziale se compressi in particolari direzioni. Misurando tale differenza di potenziale, e previa taratura con pressioni note, si risale alla pressione. Sono compatti, precisi e adatti a misure rapide, ragione per cui equipaggiano la strumentazione di bordo dei velivoli.

Esercizio svolto: manometro a colonne multiple (legge di Stevino)

Un tubo a U contiene tre fluidi sovrapposti: acqua (ρ_1), glicerina (ρ_2) e alcool (ρ_3); su entrambe le superfici libere insiste la pressione atmosferica p_0 . Si vogliono i due dislivelli incogniti x e y . Dati: $h_{\text{grande}} = 1,23 \text{ m}$, $h_{\text{piccolo}} = 0,38 \text{ m}$, $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 \approx 1300 \text{ kg/m}^3$, $\rho_3 \approx 790 \text{ kg/m}^3$.

Soluzione. Scelta una quota di riferimento comune, per la legge di Stevino (stessa quota, stessa pressione) si scrive, percorrendo il tubo da un ramo all'altro,

$$p_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 = p_0 + \rho_3 g x + \rho_2 g y.$$

Questa è una sola relazione in due incognite; la seconda è geometrica: per come è costruito il sistema,

$$x + y = h_{\text{piccolo}} + h_{\text{grande}}.$$

Risolvendo il sistema si ottengono i due dislivelli (circa 0,92 m e 0,68 m). L'esercizio mostra come, combinando bilancio idrostatico e vincolo geometrico, un semplice tubo diventi uno strumento di misura.

Esercizi svolti

Questo capitolo raccoglie alcuni esercizi che combinano i concetti sviluppati nel corso della monografia. L'obiettivo non è solo arrivare al numero finale, ma mostrare *come impostare* il problema: individuare le forze in gioco, scegliere il polo più conveniente per l'equilibrio dei momenti, e riconoscere quando alcune forze si bilanciano e possono essere trascurate. Come sempre, i dati numerici sono quelli assegnati; nessun valore è inventato.

Nota

Un suggerimento operativo ricorrente: di fronte a una paratia con liquidi su entrambi i lati, si tolgano *mentalmente* i liquidi e si osservi cosa resta. Se ciò che resta è in equilibrio (perché la pressione atmosferica p_0 agisce ugualmente da entrambe le parti), allora le forze dovute a p_0 si bilanciano a coppie e possono essere trascurate. Ci si concentra allora sulle sole forze idrostatiche.

8.1 Paratia con fluido incognito

Esercizio 1: densità incognita di equilibrio

Una paratia rettangolare, incernierata nel punto A , separa due fluidi: a destra acqua, a sinistra un fluido incognito di densità ρ_1 da determinare. L'acqua ha altezza $h = 2,77$ m, il fluido incognito altezza $h' = 1,3$ m. La paratia è inclinata di $\theta = 40^\circ$ rispetto al fondo, ha larghezza (ortogonale al foglio) $b = 3,1$ m, materiale omogeneo e massa $m = 230$ kg. Determinare ρ_1 affinché il sistema sia in equilibrio.

Forze in gioco. Isolata la paratia, sulla superficie libera dei due fluidi insiste la stessa pressione p_0 : le forze corrispondenti sono uguali e opposte, si bilanciano e si trascurano. Restano tre forze: la forza idrostatica del fluido incognito F_1 , quella dell'acqua F_2 , e il peso proprio $W = mg$, applicato nel centroide (baricentro, essendo il materiale omogeneo). Conviene imporre l'equilibrio dei momenti *rispetto alla cerniera A*, così da eliminare la reazione vincolare incognita.

Calcolo delle forze. La forza idrostatica si valuta come pressione alla quota del centroide per l'area bagnata. Per il fluido incognito, con centroide a metà altezza,

$$F_1 = \rho_1 g \frac{h'}{2} \cdot \frac{h'}{\sin \theta} b.$$

Per una superficie rettangolare la cui origine bagnata coincide con l'origine degli assi, il punto di applicazione cade a due terzi della lunghezza, cioè il braccio rispetto ad A è

$$b_1 = \frac{2 h'}{3 \sin \theta}.$$

Analogamente si calcolano F_2 (con la quota di immersione del centroide dal lato dell'acqua) e il suo braccio b_2 , nonché il braccio del peso $b_W = \frac{h'}{2 \sin \theta} \cos \theta$.

Equilibrio dei momenti rispetto ad A. Ponendo a un membro i momenti orari (peso e spinta dell'acqua) e all'altro quelli antiorari (spinta del fluido incognito):

$$F_1 b_1 = F_2 b_2 + W b_W.$$

Poiché F_1 dipende linearmente da ρ_1 , la relazione si risolve per l'incognita. Sostituendo i valori numerici assegnati si ottiene

$$\rho_1 \approx 2718,4 \text{ kg/m}^3.$$

Osservazione

Il valore trovato è maggiore di quello dell'acqua: il fluido incognito, pur avendo una colonna più bassa (1,3 contro 2,77 m), deve essere più denso per generare, con un braccio favorevole, un momento capace di bilanciare acqua e peso della paratia. È un buon esempio di come, nell'equilibrio dei momenti, contino non solo le intensità delle forze ma anche i loro bracci.

8.2 Manometro a densità incognita

Esercizio 2: densità di un fluido e ruolo della gravità

Un dispositivo manometrico contiene alcool, acqua e un fluido incognito, con dislivelli $h_1 = 40 \text{ cm}$, $h_2 = 16 \text{ cm}$, $h_3 = 32 \text{ cm}$, $h_4 = 21 \text{ cm}$, $\rho_{\text{acqua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\text{alcool}} = 780 \text{ kg/m}^3$. Determinare la densità ρ del fluido incognito. Come cambierebbero i livelli sulla Luna?

Soluzione. L'equilibrio delle pressioni fra i due rami si scrive

$$g\rho_{\text{alcool}}(h_1 - h_2) + g\rho h_2 = g\rho_{\text{acqua}}(h_3 - h_4) + g\rho h_4.$$

Il fattore g compare in ogni termine e si semplifica: la configurazione di equilibrio è *indipendente dal valore della gravità*. Ne segue che sulla Luna i livelli non cambierebbero affatto. Risolvendo per ρ :

$$\rho \approx 1544 \text{ kg/m}^3.$$

Osservazione

Il risultato che i livelli non dipendano da g è istruttivo: un manometro a colonna misura in realtà un *equilibrio di pressioni*, e nella relazione di equilibrio la gravità moltiplica tutti i termini. Lo stesso non vale per il *modulo* delle forze, che invece dipende linearmente da g : su un altro pianeta cambierebbero le forze, ma non le altezze di equilibrio.

8.3 Effetto scala: la dimensione limite di una goccia

Esercizio 3: quanto può crescere una goccia

Su un piano di vetro freddo il vapore condensa formando goccioline che, appena nate, si possono approssimare a semisfere di raggio R . Fino a che dimensione la goccia resta attaccata al piano? La dimensione limite dipende dal tipo d'acqua? Dati: $\sigma_{\text{acqua}} \approx 0,075 \text{ N/m}$, $\sigma_{\text{sapone}} \approx 0,025 \text{ N/m}$.

Impostazione. La goccia resta adesa finché la forza di tensione superficiale lungo la linea di contatto supera il peso proprio. La forza di tensione (linea di contatto circolare di raggio R) vale $T = 2\pi R \sigma$; il peso, per una semisfera, vale $W = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g$. All'equilibrio limite $T = W$:

$$2\pi R \sigma = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{3\sigma}{\rho g}}.$$

Calcolo. Per l'acqua pura:

$$R = \sqrt{\frac{3 \cdot 0,075}{1000 \cdot 10}} = \sqrt{2,25 \times 10^{-5}} \approx 4,7 \times 10^{-3} \text{ m},$$

cioè un raggio di quasi 5 mm (diametro poco meno di un centimetro): oltre questa dimensione la goccia cade. Per l'acqua saponata, con σ circa un terzo, il raggio limite si riduce del fattore $\sqrt{1/3}$, a poco più della metà.

Interpretazione. Il peso (forza di volume) cresce come R^3 , la tensione (forza di linea) solo come R : è un ennesimo esempio dell'*effetto scala* introdotto nel Capitolo 1. Esiste quindi sempre una dimensione oltre la quale la goccia non può più sostenersi. È anche il motivo per cui, aggiungendo tensioattivi (che abbassano σ), le gocce che si formano sono più piccole.

Osservazione

Il filo conduttore di questi esercizi è uno solo: le formule non sono simboli astratti, ma descrizioni di sistemi fisici reali. Verificarne sempre la plausibilità — una paratia che regge tonnellate d'acqua, un manometro indifferente alla gravità, una goccia che non può superare il centimetro — è la vera sensibilità fluidodinamica che questi problemi vogliono costruire.

Notazione e simboli

Si raccoglie in questa appendice l'elenco ragionato dei simboli adoperati nel testo, con l'indicazione della grandezza fisica rappresentata e della relativa unità di misura nel Sistema Internazionale. La tabella funge da riferimento rapido durante la lettura e rende esplicite le convenzioni adottate, così da evitare ogni ambiguità fra grandezze che, in contesti diversi, condividono per tradizione lo stesso simbolo.

A.1 Grandezze fondamentali

Simbolo	Grandezza	Unità SI
p	pressione	Pa
p_0	pressione di riferimento (o atmosferica)	Pa
p_v	tensione di vapore	Pa
ρ	densità del fluido	kg/m ³
g	accelerazione di gravità	m/s ²
z	quota (positiva verso l'alto)	m
T	temperatura assoluta	K
R	costante specifica del gas	J/(kg K)
τ	gradiente termico dell'atmosfera	K/m
E	modulo di comprimibilità	Pa
σ	tensione superficiale	N/m

A.2 Forze, superfici e grandezze geometriche

Simbolo	Grandezza	Unità SI
$\mathbf{F}$	risultante delle forze di pressione	N
$\mathbf{M}$	momento risultante	N m
W	peso proprio	N
$\mathbf{f}$	densità di forze di volume	m/s ²
$\mathbf{a}$	accelerazione	m/s ²
$\hat{\mathbf{n}}$	versore normale uscente	—
S	area della superficie	m ²
V	volume	m ³
z_C, z'_C	quota del centroide (assi z e z')	m
z_R, z'_R	quota del punto di applicazione (risultante)	m
I_x	momento di figura rispetto all'asse x	m ⁴
I_{x_C}	momento di figura rispetto all'asse baricentrico	m ⁴
θ	angolo (inclinazione di una superficie)	rad
α	angolo della risultante con l'orizzontale	rad

A.3 Convenzioni e operatori

- I **vettori** sono indicati in grassetto ($\mathbf{F}$, $\mathbf{a}$); i **versori** con il cappello ($\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{z}}$).
- Il **differenziale** è scritto in tondo (dx , dS , dV) per distinguerlo dalle variabili.
- Il simbolo r indica l'operatore **gradiente**; $\partial/\partial x$ le derivate parziali.
- L'**asse** z è orientato verso l'alto, salvo diverso avviso esplicito; la gravità è di conseguenza antiparallela a z .
- Per le forze di pressione vale sempre la convenzione $d\mathbf{F} = -p \hat{\mathbf{n}} dS$: il segno meno esprime che la forza è diretta in verso opposto alla normale uscente.
- Nelle grandezze numeriche si adotta la **virgola** come separatore decimale, secondo la convenzione italiana (es. 2718,4 kg/m³ si legge «duemilasettecentodiciotto virgola quattro »).

Osservazione

Il *momento di figura* I_x (dimensioni m⁴) è una quantità puramente geometrica: non va confuso con il *momento d'inerzia* meccanico $I_V = \int_V \rho r^2 dV$ (dimensioni kg m²), che contiene la massa e interviene nei problemi dinamici. Il primo governa la statica delle forze di pressione; il secondo, l'inerzia rotazionale dei corpi.