

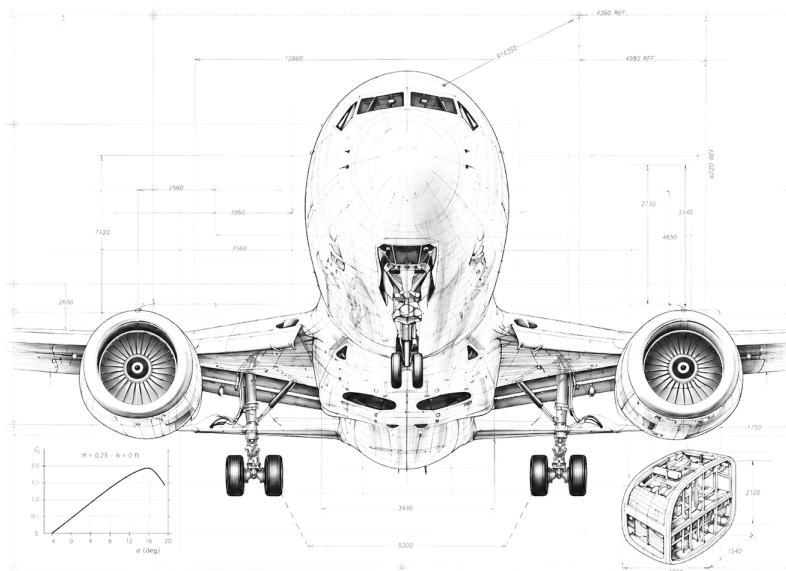
COLLANA DIDATTICA DI COSTRUZIONI AERONAUTICHE

FLUIDODINAMICA

Lo strato limite e la resistenza aerodinamica

Teoria ed esercizi svolti passo passo

Dal numero di Reynolds allo strato limite di Blasius
e alla resistenza aerodinamica dei corpi



Prof. Ing. Biagio Raucci

ITIS «E. Majorana» — Somma Vesuviana (NA)

Articolazione: Costruzione del Mezzo Aeronautico

Edizione 22 luglio 2026

Indice

I	Fondamenti: viscosità, Reynolds e strato limite	I
1.1	La viscosità di un fluido	1
1.2	Il numero di Reynolds	2
1.2.1	Reynolds locale e Reynolds globale	3
1.3	Lo strato limite	3
1.3.1	Gli spessori integrali: spostamento e quantità di moto	4
1.3.2	Strato limite laminare e turbolento	5
1.4	Lo strato limite laminare: la soluzione di Blasius	6
1.5	L'equazione integrale di von Kármán	7
1.6	Lo strato limite turbolento	7
1.7	Gradiente di pressione e separazione	8
1.8	La resistenza aerodinamica	9
2	Dati di riferimento e metodo di calcolo	II
2.1	Aria tipo (ISA) al livello del mare	II
2.2	Aria tipo in quota	II
2.3	Il metodo di attacco in cinque passi	12
3	Esercizi svolti passo passo	13
3.1	Esercizio 1 — Lastra piana laminare	13
3.2	Esercizio 2 — Lastra con transizione laminare-turbolento	14
3.3	Esercizio 3 — Resistenza di una sfera in acqua	15
3.4	Esercizio 4 — Resistenza di un cilindro in olio	15
3.5	Esercizio 5 — Lastra in regime turbolento	16
3.6	Esercizio 6 — Lastra laminare: analisi completa	17
3.7	Esercizio 7 — Ascissa di transizione e resistenza mista	17
3.8	Esercizio 8 — Sfera in aria ad alta velocità	18
3.9	Esercizio 9 — Cilindro in galleria aerodinamica	19
3.10	Esercizio 10 — Lastra a Reynolds assegnato	19
3.11	Esercizio 11 — Numero di Reynolds di un'ala in quota	20
A	Formulario e quadro riassuntivo	21
A.1	Formulario essenziale	21
A.2	Quadro riassuntivo dei risultati	22

Fondamenti: viscosità, Reynolds e strato limite

Dove stiamo andando

In questo capitolo costruiamo, con ordine, tutti gli strumenti concettuali necessari per affrontare gli esercizi. Partiamo dalla *viscosità*, introduciamo il *numero di Reynolds* come misura del peso relativo fra forze d'inerzia e forze viscosi, definiamo lo *strato limite* e ne studiamo la struttura interna attraverso gli spessori integrali. Ricaviamo poi lo spessore e lo sforzo a parete nei regimi laminare e turbolento, analizziamo il ruolo del gradiente di pressione e il fenomeno del distacco, e infine scomponiamo la *resistenza aerodinamica* in attrito e forma. Ogni formula sarà giustificata: nessun risultato «cadrà dal cielo».

1.1 La viscosità di un fluido

Un fluido reale, a differenza di un fluido ideale, oppone resistenza allo scorrimento relativo dei suoi strati. Questa proprietà si chiama *viscosità*. L'esperienza fondamentale è quella di Newton: due lastre piane parallele, distanti h , con il fluido interposto; la lastra inferiore è ferma, quella superiore trascinata a velocità U costante. Per mantenere il moto occorre applicare una forza tangenziale: il fluido «frena» la lastra in moto e «trascina» quella ferma.

Misurando, si trova che lo sforzo tangenziale τ (forza per unità di area) necessario è proporzionale al *gradiente di velocità* trasversale:

Legge di Newton della viscosità

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.1)$$

dove $u(y)$ è la velocità del fluido alla quota y dalla parete e μ è la *viscosità dinamica* del fluido, misurata in $\text{Pa s} = \text{kg}/(\text{m s})$.

I fluidi che obbediscono alla (1.1) con μ costante si dicono *newtoniani*; aria e acqua lo sono con ottima approssimazione.

Viscosità cinematica

Il rapporto fra viscosità dinamica e densità si chiama *viscosità cinematica*:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad [\nu] = \text{m}^2/\text{s}. \quad (1.2)$$

Essa rappresenta la «diffusività della quantità di moto»: quanto rapidamente una perturbazione di velocità si propaga trasversalmente per effetto viscoso.

Osservazione

Attenzione all'apparente paradosso: l'aria ha viscosità *dinamica* μ molto minore dell'acqua (circa 55 volte), ma viscosità *cinematica* ν molto maggiore (circa 15 volte), perché è anche molto meno densa. È ν che governa lo spessore dello strato limite: per questo, a parità di velocità e dimensione, lo strato limite in aria risulta più «spesso» che in acqua.

La dipendenza della viscosità dalla temperatura

Nei gas la viscosità dinamica *cresce* con la temperatura, perché l'agitazione molecolare aumenta il trasporto trasversale di quantità di moto. La dipendenza è ben descritta dalla legge di Sutherland:

$$\mu(T) = \mu_{\text{rif}} \left(\frac{T}{T_{\text{rif}}} \right)^{3/2} \frac{T_{\text{rif}} + S}{T + S},$$

con, per l'aria, $S \approx 110,4 \text{ K}$, $\mu_{\text{rif}} = 1,716 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$ a $T_{\text{rif}} = 273,15 \text{ K}$. Nei liquidi, al contrario, la viscosità *diminuisce* con la temperatura (le forze coesive si allentano): è il motivo per cui l'olio caldo scorre più facilmente.

1.2 Il numero di Reynolds

Consideriamo un corpo di dimensione caratteristica L investito da una corrente di velocità V . Nel moto del fluido competono due tipi di forze:

- le *forze d'inerzia*, legate all'accelerazione delle particelle, di ordine $\rho V^2/L$ per unità di volume;
- le *forze viscose*, legate agli attriti interni, di ordine $\mu V/L^2$ per unità di volume.

Perché proprio questi ordini di grandezza

La forza d'inerzia per unità di volume è ρ (accelerazione). L'accelerazione convettiva ha ordine $V \cdot (V/L) = V^2/L$, da cui $\rho V^2/L$. La forza viscosa per unità di volume è la derivata dello sforzo, $d\tau/dy \sim \mu (V/L)/L = \mu V/L^2$. Il loro rapporto è un numero puro.

Il rapporto fra queste due grandezze definisce il numero di Reynolds:

Numero di Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze viscose}} = \frac{\rho V^2/L}{\mu V/L^2} = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu}. \quad (1.3)$$

Re è *adimensionale*: un numero puro, indipendente dal sistema di unità scelto.

Il significato fisico è immediato: se Re è *grande*, dominano le forze d'inerzia e il moto tende a essere *turbolento* (disordinato, con vortici); se Re è *piccolo*, dominano le forze viscose e il moto è *laminare* (ordinato, a lamine parallele).

La lunghezza di riferimento va sempre dichiarata

Il numero di Reynolds ha senso solo se si specifica *quale* lunghezza L si è usata. Per una lastra investita lungo il lato ℓ si usa ℓ ; per un profilo alare la corda c ; per una sfera o un cilindro il diametro D . Cambiando lunghezza di riferimento cambia il valore di Re: non ha senso confrontare due numeri di Reynolds costruiti su lunghezze diverse.

Reynolds e similitudine dinamica

Il vero motivo per cui il numero di Reynolds è così importante è la *similitudine dinamica*. Due flussi geometricamente simili (stessa forma, scala diversa) sono anche *dinamicamente* simili — cioè hanno lo stesso campo di velocità adimensionale, gli stessi coefficienti C_D , C_f — se e solo se hanno lo stesso numero di Reynolds. È questo il principio che consente di provare in galleria del vento un modello in scala ridotta e trasferire i risultati al velivolo reale: basta riprodurre il Reynolds di volo. Per un modello più piccolo occorre, a pari fluido, una velocità maggiore o una densità maggiore (gallerie pressurizzate).

1.2.1 Reynolds locale e Reynolds globale

Su una lastra piana investita di taglio, la corrente «vede» una lunghezza che cresce man mano che si procede dal bordo d'attacco. È utile allora definire un *numero di Reynolds locale*, costruito sulla distanza x dal bordo d'attacco:

$$\text{Re}_x = \frac{Vx}{\nu}, \quad (1.4)$$

e un *numero di Reynolds globale* costruito sull'intera lunghezza bagnata ℓ :

$$\text{Re}_\ell = \frac{V\ell}{\nu}. \quad (1.5)$$

Il primo governa ciò che accade *in un punto* (spessore locale dello strato limite, sforzo a parete locale); il secondo governa le grandezze *integrate* sull'intera lastra (resistenza totale).

1.3 Lo strato limite

Strato limite

Lo *strato limite* è la sottile regione di fluido, aderente alla superficie del corpo, entro la quale la velocità passa dal valore nullo alla parete (condizione di aderenza) fino a (praticamente) il valore V della corrente indisturbata. All'interno di esso si esaurisce completamente l'azione viscosa del fluido sul corpo; all'esterno il fluido può essere ritenuto ideale.

L'idea, dovuta a Prandtl (1904), è tanto semplice quanto rivoluzionaria: gli effetti viscosi, per numeri di Reynolds elevati, non sono diffusi in tutto il campo ma *confinati* in uno straterello sottile. Fuori da esso vale la teoria del fluido ideale (Bernoulli, correnti a potenziale); dentro, e solo dentro, agisce la viscosità che genera la resistenza di attrito.

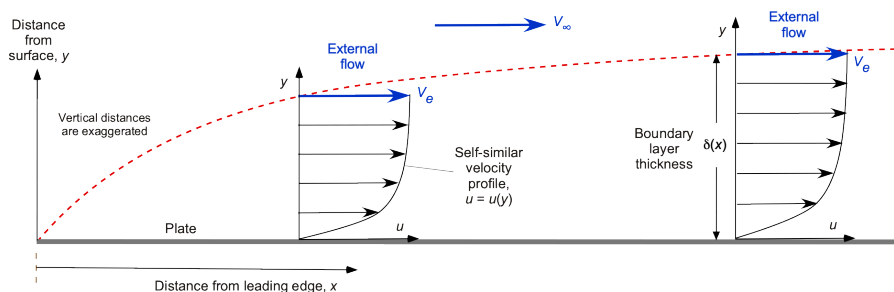


Figura 1.1. Crescita dello strato limite su una lastra piana. Lo spessore $\delta(x)$ aumenta procedendo verso valle; in ogni stazione il profilo di velocità passa da zero alla parete al valore V al bordo dello strato limite.

Spessore convenzionale

Lo spessore δ dello strato limite è la distanza dalla parete alla quale la velocità raggiunge il 99 % della velocità esterna V . È una convenzione: la transizione fra strato limite e corrente esterna è graduale, ma il criterio del 99 % fornisce una misura operativa e universalmente accettata.

1.3.1 Gli spessori integrali: spostamento e quantità di moto

Lo spessore convenzionale δ è comodo ma un po' arbitrario (perché proprio il 99 %?). Due misure fisicamente più significative sono gli *spessori integrali*, che quantificano l'effetto dello strato limite sulla corrente esterna.

Spessore di spostamento

Lo spessore di spostamento δ^* è definito da

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{V}\right) dy. \quad (1.6)$$

Esso misura di quanto la parete «apparente» si sposta verso l'esterno a causa del rallentamento del fluido nello strato limite: la corrente esterna si comporta come se il corpo fosse più spesso di δ^* .

Interpretazione fisica di δ^*

A causa dell'attrito, entro lo strato limite passa *meno* portata di quella che passerebbe se il fluido fosse ovunque a velocità V . Il deficit di portata, per unità di larghezza, è $\rho \int_0^\infty (V - u) dy = \rho V \delta^*$. Per «recuperare» quella portata mancante la corrente esterna deve scostarsi dalla parete di δ^* : da qui il nome. Nel progetto di prese d'aria e condotti, δ^* è la correzione da applicare alla sezione geometrica per ottenere quella «effettiva» vista dal flusso.

Spessore di quantità di moto

Lo spessore di quantità di moto θ è definito da

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{V} \left(1 - \frac{u}{V}\right) dy. \quad (1.7)$$

Esso misura il deficit di quantità di moto della corrente dovuto all'attrito ed è *direttamente* legato alla resistenza di attrito, come vedremo con l'equazione di von Kármán.

Fattore di forma

Il rapporto fra i due spessori integrali,

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}, \quad (1.8)$$

si chiama *fattore di forma* del profilo di velocità. Esso caratterizza la «pienezza» del profilo: vale $H \approx 2,59$ per lo strato limite laminare di Blasius e $H \approx 1,3-1,4$ per quello turbolento (profilo più pieno). Un aumento di H verso valori $\gtrsim 3,5$ segnala l'imminente separazione.

Un legame che sarà cruciale

Anticipiamo qui un risultato che dimostreremo tra poco: la resistenza di attrito di una faccia della lastra, per unità di larghezza, è esattamente $\rho V^2 \theta(\ell)$, dove $\theta(\ell)$ è lo spessore di quantità di moto valutato al

bordo d'uscita. In altre parole, *tutta* la storia dell'attrito lungo la lastra è riassunta da un unico numero: lo spessore di quantità di moto finale. È uno dei risultati più eleganti della teoria dello strato limite.

1.3.2 Strato limite laminare e turbolento

A seconda che il moto delle particelle entro lo strato limite sia ordinato o disordinato si distinguono due regimi:

- **strato limite laminare:** le particelle si muovono su lamine parallele, senza mescolamento trasversale; si ha per Re_x piccoli;
- **strato limite turbolento:** il moto è caotico, con intenso rimescolamento trasversale; si ha per Re_x grandi.

Il passaggio dall'uno all'altro non è brusco ma avviene attraverso una *zona di transizione*. Convenzionalmente, per la lastra piana, si assume che la transizione avvenga in corrispondenza di un valore critico del numero di Reynolds locale:

Reynolds critico di transizione (lastra piana)

$$Re_{cr} = \frac{V x_{tr}}{\nu} \approx 5 \cdot 10^5. \quad (1.9)$$

L'ascissa x_{tr} a cui avviene la transizione si ricava invertendo:

$$x_{tr} = \frac{Re_{cr} \nu}{V} = \frac{5 \cdot 10^5 \nu}{V}. \quad (1.10)$$

Attenzione

Il valore $Re_{cr} \approx 5 \cdot 10^5$ è indicativo: dipende dalla turbolenza della corrente, dalla rugosità della superficie e dal gradiente di pressione. In galleria a bassa turbolenza può salire fino a $\sim 3 \cdot 10^6$; in presenza di disturbi può scendere. In questa monografia adottiamo sempre $Re_{cr} = 5 \cdot 10^5$.

Che cosa innesca la transizione

La transizione nasce dall'amplificazione di piccole perturbazioni presenti nella corrente. Nello strato limite laminare, oltre un certo Reynolds, alcune onde (dette di *Tollmien-Schlichting*) non vengono più smorzate dalla viscosità ma si amplificano, si deformano in tre dimensioni e degenerano in turbolenza. Fattori che anticipano la transizione: rugosità della superficie, turbolenza della corrente incidente, gradiente di pressione avverso. Fattori che la ritardano: superfici lisce, gradiente di pressione favorevole (accelerazione della corrente), aspirazione dello strato limite. Sul progetto dei profili «laminari» si gioca gran parte del risparmio di resistenza degli alianti e dei velivoli efficienti.

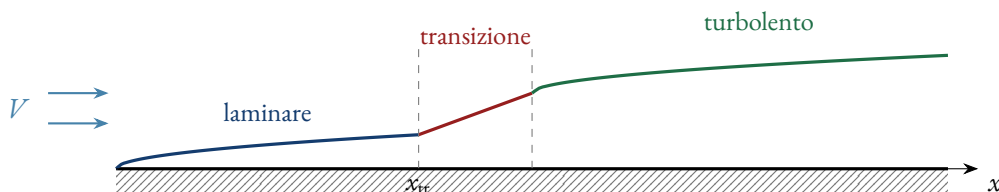


Figura 1.2. I tre regimi lungo la lastra: strato limite laminare, zona di transizione (ad ascissa x_{tr}), strato limite turbolento. Il turbolento è più spesso e cresce più rapidamente.

1.4 Lo strato limite laminare: la soluzione di Blasius

Per lo strato limite laminare su lastra piana (gradiente di pressione nullo, fluido incompressibile), le equazioni di Prandtl ammettono una soluzione *autosimile*: il profilo di velocità, opportunamente riscalato, è lo stesso in ogni stazione x . Introducendo la variabile di similitudine $\eta = y\sqrt{V/(vx)}$, le equazioni alle derivate parziali si riducono a un'unica equazione differenziale ordinaria (l'equazione di Blasius), risolta numericamente nel 1908. Da essa discendono le formule operative che useremo.

Spessore – regime laminare (Blasius)

$$\delta_x = \frac{4,92 x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad \text{valida per } \text{Re}_x < 5 \cdot 10^5. \quad (1.11)$$

Come leggere questa formula

Poiché $\text{Re}_x = Vx/\nu$, si ha $\delta_x = 4,92 x / \sqrt{Vx/\nu} = 4,92 \sqrt{\nu x/V}$: lo spessore cresce come $\sqrt{x}$ (non linearmente!) e come $1/\sqrt{V}$ (più veloce la corrente, più sottile lo strato). Il coefficiente 4,92 (talvolta approssimato a 5,0) è la costante di Blasius.

Per lo stesso profilo, gli spessori integrali valgono

$$\delta^* = \frac{1,721 x}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad \theta = \frac{0,664 x}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad H = \frac{\delta^*}{\theta} = 2,59. \quad (1.12)$$

Sforzo a parete – regime laminare (Blasius)

Lo sforzo tangenziale locale a parete vale

$$\tau_w = 0,332 \frac{\rho V^2}{\sqrt{\text{Re}_x}} = 0,332 \sqrt{\frac{\rho \mu V^3}{x}}. \quad (1.13)$$

Le due forme dello sforzo a parete coincidono

Le due scritture in (1.13) sono identiche. Partendo dalla prima e sostituendo $\text{Re}_x = \rho Vx/\mu$:

$$\tau_w = 0,332 \rho V^2 \sqrt{\frac{\mu}{\rho Vx}} = 0,332 \sqrt{\rho^2 V^4 \cdot \frac{\mu}{\rho Vx}} = 0,332 \sqrt{\frac{\rho \mu V^3}{x}}.$$

Verifica dimensionale della seconda forma: $[\rho \mu V^3/x]$ ha unità $(\text{kg}/\text{m}^3)(\text{Pa s})(\text{m}^3/\text{s}^3)/\text{m}$. Ricordando $\text{Pa} = \text{kg}/(\text{m s}^2)$, il radicando ha unità Pa^2 , dunque la radice ha unità Pa : corretto. Raccomandazione operativa: usare *sempre* unità SI coerenti dentro il radicale.

Integrando lo sforzo a parete su tutta la lunghezza si ottiene la resistenza di attrito, che si esprime tramite un *coefficiente di attrito globale*:

Coefficiente d'attrito – lastra laminare

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_\ell}}. \quad (1.14)$$

La resistenza di attrito su *una faccia* della lastra è allora

$$D_f = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_f, \quad S = L \cdot \ell, \quad (1.15)$$

con S area della superficie bagnata (L lato maggiore, ℓ lato minore investito dalla corrente).

Convenzione adottata nella monografia

Il coefficiente $C_f = 1,328/\sqrt{\text{Re}_\ell}$ è riferito a *una* faccia della lastra. Quando la lastra è lambita su entrambe le facce (come un profilo sottile investito di taglio) la resistenza totale è il doppio. In tutti gli esercizi indicheremo esplicitamente a quante facce ci riferiamo, per evitare ogni ambiguità.

1.5 L'equazione integrale di von Kármán

Il legame fra spessore di quantità di moto e resistenza, anticipato prima, si dimostra con un bilancio di quantità di moto sullo strato limite. Il risultato è l'*equazione integrale di von Kármán*, valida sia in regime laminare sia turbolento.

Equazione integrale di von Kármán (gradiente di pressione nullo)

$$\frac{\tau_w}{\rho V^2} = \frac{d\theta}{dx}. \quad (1.16)$$

Lo sforzo a parete, adimensionalizzato, è pari alla velocità di crescita dello spessore di quantità di moto lungo la lastra.

Dimostrazione del legame resistenza–quantità di moto

Il coefficiente di attrito locale è $c_f = \tau_w/(\frac{1}{2}\rho V^2)$. Dalla (1.16), $c_f = 2 d\theta/dx$. La resistenza di attrito su una faccia, per unità di larghezza, è l'integrale dello sforzo:

$$\frac{D_f}{b} = \int_0^\ell \tau_w dx = \int_0^\ell \rho V^2 \frac{d\theta}{dx} dx = \rho V^2 \theta(\ell),$$

avendo usato $\theta(0) = 0$. Dividendo per $\frac{1}{2}\rho V^2 \ell$ si ottiene il coefficiente globale $C_f = 2 \theta(\ell)/\ell$. Sostituendo il valore di Blasius $\theta(\ell) = 0,664 \ell/\sqrt{\text{Re}_\ell}$ si ritrova esattamente

$$C_f = \frac{2 \times 0,664}{\sqrt{\text{Re}_\ell}} = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_\ell}},$$

in accordo con la (1.14). Il cerchio si chiude: la costante 1,328 non è un numero empirico, ma il doppio di 0,664.

1.6 Lo strato limite turbolento

Quando Re_ℓ supera il valore critico, gran parte della lastra è in regime turbolento. Non esiste una soluzione esatta come quella di Blasius: si ricorre a un modello semi-empirico. Assumendo per il profilo di velocità la legge di potenza «a 1/7», $u/V = (y/\delta)^{1/7}$, e una correlazione sperimentale per lo sforzo a parete, l'equazione di von Kármán fornisce le formule seguenti.

Strato limite turbolento (legge 1/7)

$$\delta_x = \frac{0,37 x}{\text{Re}_x^{1/5}} = \frac{0,37 x}{\sqrt[5]{\text{Re}_x}}, \quad (1.17)$$

$$C_f = \frac{0,148}{\text{Re}_x^{1/5}} = \frac{0,148}{\sqrt[5]{\text{Re}_x}}. \quad (1.18)$$

Valide per $5 \cdot 10^5 \leq \text{Re} \leq 10^7$.

Confronto fra i due regimi

Due differenze fondamentali. Primo, la *crescita*: lo spessore turbolento va come $x^{4/5}$, quasi lineare, contro $x^{1/2}$ del laminare; lo strato turbolento è più spesso e cresce più in fretta. Secondo, la *resistenza*: $C_f \propto \text{Re}^{-1/5}$ decresce molto più lentamente di $\text{Re}^{-1/2}$ del laminare. A pari Reynolds, dunque, il turbolento produce più attrito. Da qui il compromesso di progetto: mantenere il flusso laminare il più a lungo possibile riduce l'attrito, ma il flusso turbolento resiste meglio alla separazione (paragrafo seguente).

Attenzione

Per $\text{Re} > 10^7$ (alta turbolenza) le (1.17)–(1.18) non sono più valide: occorrono formule diverse, ad esempio la legge logaritmica di Schlichting $C_f = 0,455/(\log_{10} \text{Re})^{2,58}$. Negli esercizi resteremo sempre nel campo di validità dichiarato.

1.7 Gradiente di pressione e separazione

Finora abbiamo trattato la lastra piana, dove la pressione esterna è costante. Su un corpo curvo (profilo alare, sfera, cilindro) la corrente esterna accelera e decelera, e con essa varia la pressione: per Bernoulli, dove la corrente accelera la pressione cala (*gradiente favorevole*), dove decelera la pressione risale (*gradiente avverso*).

Separazione dello strato limite

La *separazione* (o distacco) è il fenomeno per cui lo strato limite abbandona la superficie del corpo. Avviene in presenza di un gradiente di pressione avverso sufficientemente intenso: il fluido vicino alla parete, già rallentato dall'attrito, non ha energia sufficiente per risalire il gradiente, si arresta e inverte il moto. A valle del punto di distacco si forma una *scia* di fluido ricircolante.

Perché il turbolento resiste meglio

Nel punto di separazione lo sforzo a parete si annulla, $\tau_w = \mu(du/dy)_{y=0} = 0$: il profilo di velocità ha tangente verticale alla parete. Lo strato limite turbolento, grazie al rimescolamento, trasporta verso la parete quantità di moto dalla corrente esterna: il fluido vicino alla parete è più «energico» e resiste più a lungo al gradiente avverso. Per questo la separazione turbolenta è ritardata rispetto a quella laminare. È il meccanismo alla base della *crisi della resistenza* di sfere e cilindri, e la ragione delle fossette sulle palle da golf.

Le due nature della resistenza

La distinzione fra gradiente favorevole e avverso spiega la duplice origine della resistenza:

- **resistenza di attrito** (*skin friction*): dovuta agli sforzi tangenziali τ_w integrati sulla superficie;

domina nei corpi affusolati (lastre, profili sottili, ali), dove la separazione è assente o minima.

- **resistenza di forma** (*pressure drag*): dovuta alla distribuzione asimmetrica di pressione causata dalla separazione e dalla scia; domina nei corpi tozzi (sfere, cilindri).

Un corpo affusolato «taglia» il gradiente avverso su una lunga distanza, mantenendo lo strato limite attaccato: ecco perché le forme aerodinamiche sono allungate e rastremate a poppa.

1.8 La resistenza aerodinamica

Un corpo immerso in una corrente subisce una forza; la sua componente parallela alla velocità è la *resistenza* D (*drag*). Si esprime sempre nella forma adimensionalizzata:

Resistenza aerodinamica

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D, \quad (1.19)$$

dove C_D è il *coefficiente di resistenza* (adimensionale) e S è un'area di riferimento (da specificare).

Quale area di riferimento?

La scelta di S è convenzionale ma *deve accompagnare* il valore di C_D :

- per una **lastra piana** (attrito): $S = L \cdot \ell$, superficie bagnata;
- per una **sfera**: $S = \pi D^2/4$, area della sezione frontale;
- per un **cilindro** (apertura infinita): $S = D \cdot L$, area frontale (diametro per lunghezza).

Un valore di C_D ha senso solo se si sa a quale S è riferito.

La curva $C_D = f(\text{Re})$ e la crisi della resistenza

Per sfere e cilindri il C_D non si calcola con una formula ma si legge da grafici sperimentali $C_D = f(\text{Re})$. Tali curve presentano una brusca *caduta* attorno a $\text{Re} \approx 3-5 \cdot 10^5$: è la *crisi della resistenza*. A quel Reynolds lo strato limite diventa turbolento *prima* del punto di massimo spessore del corpo; essendo più energetico, ritarda il distacco e restringe la scia. La scia più stretta significa meno resistenza di forma: per la sfera il C_D crolla da $\sim 0,5$ (subcritico) a $\sim 0,1-0,2$ (supercritico). Sapere su quale ramo della curva ci si trova — prima o dopo la crisi — è essenziale per leggere il C_D corretto.

Il senso di tutto questo

Abbiamo ora tutti gli strumenti. Per ogni esercizio la strategia sarà sempre la stessa: (1) identificare la geometria e la lunghezza di riferimento; (2) calcolare Re ; (3) stabilire il regime (laminare, turbolento, misto) confrontando con Re_{cr} , e — per i corpi tozzi — su quale ramo della curva $C_D = f(\text{Re})$ ci si trova; (4) scegliere la formula o la lettura giusta; (5) calcolare la grandezza richiesta con unità SI coerenti. Nel prossimo capitolo applichiamo questo metodo, passo per passo.

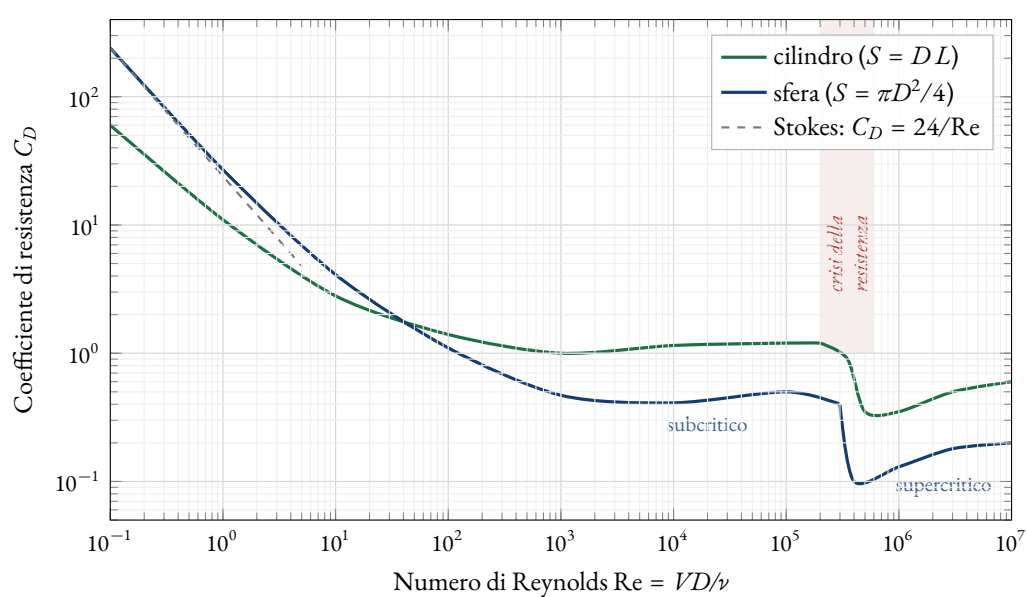


Figura 1.3. Coefficiente di resistenza C_D in funzione del numero di Reynolds per la sfera e il cilindro (scala doppio-logaritmica). A bassi Re domina la viscosità e C_D decresce secondo la legge di Stokes ($C_D = 24/Re$ per la sfera). Nella regione $Re \approx 3-5 \cdot 10^5$ si osserva la *crisi della resistenza*: la transizione dello strato limite a turbolento ritarda il distacco, restringe la scia e fa crollare C_D . Occorre stabilire su quale ramo — subcritico o supercritico — ci si trova prima di leggere il valore.

Dati di riferimento e metodo di calcolo

Dove stiamo andando

Questo breve capitolo raccoglie i dati dell'atmosfera standard che useremo negli esercizi e fissa lo schema di risoluzione in cinque passi. Tutti i calcoli sono svolti nel Sistema Internazionale.

2.1 Aria tipo (ISA) al livello del mare

Tabella 2.1. Aria tipo internazionale (ISA) al livello del mare, $z = 0$ m.

Grandezza	Simbolo	Valore
Temperatura	T_0	288,15 K = 15 °C
Pressione	p_0	101 325 Pa
Densità	ρ_0	1,225 kg/m ³
Viscosità dinamica	μ_0	$1,7932 \times 10^{-5}$ Pa s
Viscosità cinematica	ν_0	$1,453 \times 10^{-5}$ m ² /s

Osservazione

Il legame $\nu = \mu/\rho$ è coerente con i valori tabellati: $\mu_0/\rho_0 = 1,7932 \cdot 10^{-5}/1,225 = 1,464 \cdot 10^{-5}$ m²/s, in buon accordo con ν_0 . Nei singoli esercizi useremo il valore di ν esplicitamente fornito dalla traccia, quando presente.

2.2 Aria tipo in quota

Per gli esercizi in quota useremo i valori dell'atmosfera standard riportati nella Tabella 2.2.

Tabella 2.2. Atmosfera standard internazionale (ISA) ad alcune quote.

z [m]	T [K]	ρ [kg/m ³]	μ [Pa s]	ν [m ² /s]
0	288,15	1,225	$1,793 \cdot 10^{-5}$	$1,453 \cdot 10^{-5}$
5000	255,65	0,7364	$1,628 \cdot 10^{-5}$	$2,211 \cdot 10^{-5}$

La viscosità cinematica cresce con la quota

Salendo di quota la densità cala più rapidamente della viscosità dinamica, quindi la viscosità *cinematica* $\nu = \mu/\rho$ *aumenta*. A parità di velocità e dimensione, ciò comporta un numero di Reynolds *minore* in quota: lo stesso profilo alare «vede» un Reynolds che diminuisce salendo.

2.3 Il metodo di attacco in cinque passi

Ogni esercizio verrà risolto seguendo lo stesso schema, che invitiamo lo studente a fare proprio:

Metodo in cinque passi

1. **Dati e geometria.** Elencare i dati, convertirli in SI, identificare la lunghezza di riferimento.
2. **Numero di Reynolds.** Calcolare Re con (1.3).
3. **Regime.** Confrontare con $Re_{cr} = 5 \cdot 10^5$ (lastre) o individuare il ramo della curva $C_D = f(Re)$ (corpi tozzi).
4. **Formula.** Scegliere la relazione appropriata (Blasius, Prandtl–von Kármán, o grafico $C_D = f(Re)$).
5. **Calcolo e verifica.** Sostituire, calcolare, verificare le unità e l'ordine di grandezza del risultato.

Il senso di tutto questo

Il metodo non è un rituale: serve a non sbagliare. Il passo 3 (il regime) è il più importante e il più trascurato: usare una formula laminare in campo turbolento (o viceversa), o leggere il C_D sul ramo sbagliato della curva, è l'errore più comune. Prima si guarda Re , poi si sceglie la formula.

Esercizi svolti passo passo

Dove stiamo andando

Applichiamo il metodo dei cinque passi a una serie di esercizi di complessità crescente: lastre piane in regime laminare, misto e turbolento; corpi tozzi (sfere e cilindri) in aria, acqua e olio; e infine il calcolo del numero di Reynolds di un'ala in quota. Ogni esercizio è risolto integralmente e commentato, spiegando le ragioni di ciascuna scelta.

Salvo diversa indicazione, adottiamo per l'aria tipo a quota zero (Tabella 2.1): $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1,7932 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$, $\nu = 1,453 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

3.1 Esercizio 1 — Lastra piana laminare

Esercizio 1

Una lastra piana sottile è investita da una corrente d'aria con incidenza $\alpha = 0^\circ$ lungo la direzione del lato minore. Dati: $V = 60 \text{ km/h}$; lato maggiore $L = 2,5 \text{ m}$; lato minore (investito) $\ell = 0,38 \text{ m}$; aria tipo a $z = 0$. Calcolare: (1) lo spessore dello strato limite al bordo d'uscita e a 120 mm dal bordo d'attacco; (2) lo sforzo tangenziale negli stessi punti; (3) la resistenza di attrito.

Passo 1 — Dati e geometria. Convertiamo la velocità in SI:

$$V = \frac{60}{3,6} = 16,67 \text{ m/s}.$$

La corrente investe la lastra lungo il lato minore $\ell = 0,38 \text{ m}$: questa è la lunghezza lungo cui si sviluppa lo strato limite, quindi la lunghezza di riferimento per il Reynolds globale.

Passo 2 — Numero di Reynolds. Al bordo d'uscita ($x = \ell$):

$$\text{Re}_\ell = \frac{V\ell}{\nu} = \frac{16,67 \times 0,38}{1,453 \cdot 10^{-5}} = 4,36 \cdot 10^5.$$

Passo 3 — Regime. Essendo $\text{Re}_\ell = 4,36 \cdot 10^5 < 5 \cdot 10^5 = \text{Re}_{\text{cr}}$, l'intera lastra è in regime *laminare*: useremo le formule di Blasius.

Passo 4-5 — Calcolo. (1) *Spessore.* Al bordo d'uscita:

$$\delta_\ell = \frac{4,92 \ell}{\sqrt{\text{Re}_\ell}} = \frac{4,92 \times 0,38}{\sqrt{4,36 \cdot 10^5}} = 2,83 \times 10^{-3} \text{ m} = 2,83 \text{ mm}.$$

A $x = 0,12 \text{ m}$ calcoliamo prima il Reynolds locale:

$$\text{Re}_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{16,67 \times 0,12}{1,453 \cdot 10^{-5}} = 1,377 \cdot 10^5,$$

ancora laminare, quindi:

$$\delta_x = \frac{4,92 \times 0,12}{\sqrt{1,377 \cdot 10^5}} = 1,59 \times 10^{-3} \text{ m} = 1,59 \text{ mm}.$$

(2) *Sforzo a parete*, dalla (1.13). Al bordo d'uscita ($x = \ell$):

$$\tau_w(\ell) = 0,332 \sqrt{\frac{1,225 \times 1,7932 \cdot 10^{-5} \times 16,67^3}{0,38}} = 0,172 \text{ Pa.}$$

A $x = 0,12 \text{ m}$:

$$\tau_w(x) = 0,332 \sqrt{\frac{1,225 \times 1,7932 \cdot 10^{-5} \times 16,67^3}{0,12}} = 0,306 \text{ Pa.}$$

Osservazione

Lo sforzo è *maggiore* vicino al bordo d'attacco (0,306 Pa a 12 cm) che al bordo d'uscita (0,172 Pa): coerente con $\tau_w \propto 1/\sqrt{x}$. Dove lo strato limite è più sottile, il gradiente di velocità a parete è più ripido e l'attrito più intenso.

(3) *Resistenza di attrito*. Coefficiente d'attrito laminare (1.14) riferito a una faccia:

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_\ell}} = \frac{1,328}{\sqrt{4,36 \cdot 10^5}} = 2,01 \cdot 10^{-3}.$$

Superficie $S = L\ell = 2,5 \times 0,38 = 0,95 \text{ m}^2$. Resistenza (una faccia):

$$D_f = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_f = \frac{1}{2} \times 1,225 \times 16,67^2 \times 0,95 \times 2,01 \cdot 10^{-3} = 0,325 \text{ N.}$$

Se la lastra è lambita su entrambe le facce, la resistenza totale è il doppio: 0,650 N.

3.2 Esercizio 2 — Lastra con transizione laminare–turbolento

Esercizio 2

Una lastra piana sottile è investita lungo il lato minore, con $\alpha = 0^\circ$, da un vento $V = 200 \text{ km/h}$. Dati: $L = 3,5 \text{ m}$; $\ell = 0,35 \text{ m}$; $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$; $\nu = 1,4638 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Calcolare l'ascissa del punto di transizione e la resistenza di attrito.

Passo 1 — Dati. $V = 200/3,6 = 55,56 \text{ m/s}$; lunghezza di riferimento $\ell = 0,35 \text{ m}$.

Passo 2 — Reynolds.

$$\text{Re}_\ell = \frac{V\ell}{\nu} = \frac{55,56 \times 0,35}{1,4638 \cdot 10^{-5}} = 1,33 \cdot 10^6.$$

Passo 3 — Regime. $\text{Re}_\ell = 1,33 \cdot 10^6 > 5 \cdot 10^5$: la lastra *non* è tutta laminare. Esiste un punto di transizione; a monte lo strato limite è laminare, a valle turbolento. Il regime è *misto*.

Passo 4 — Ascissa di transizione. Dalla (1.10):

$$x_{\text{tr}} = \frac{\text{Re}_{\text{cr}} \nu}{V} = \frac{5 \cdot 10^5 \times 1,4638 \cdot 10^{-5}}{55,56} = 0,1317 \text{ m.}$$

In percentuale della lunghezza: $x_{\text{tr}}/\ell = 0,1317/0,35 = 0,376$: la transizione avviene al 37,6 % della corda (circa un terzo di lastra laminare, due terzi turbolenta).

Passo 5 — Resistenza. Per una lastra in regime misto si usa una formula di attrito globale che corregge il contributo turbolento sottraendo il tratto laminare iniziale:

$$C_f = \frac{0,148}{\sqrt[5]{\text{Re}_\ell}} - \frac{A}{\text{Re}_\ell}, \quad (3.1)$$

dove la costante A dipende dal Reynolds di transizione; per $Re_{cr} = 5 \cdot 10^5$ si ha $A \approx 1050$. Calcoliamo:

$$\frac{0,148}{\sqrt[3]{1,33 \cdot 10^6}} = \frac{0,148}{16,77} = 8,82 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{1050}{1,33 \cdot 10^6} = 0,79 \cdot 10^{-3},$$

$$C_f = 8,82 \cdot 10^{-3} - 0,79 \cdot 10^{-3} = 8,03 \cdot 10^{-3}.$$

Con $S = L\ell = 3,5 \times 0,35 = 1,225 \text{ m}^2$ (una faccia):

$$D_f = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_f = \frac{1}{2} \times 1,225 \times 55,56^2 \times 1,225 \times 8,03 \cdot 10^{-3} = 18,6 \text{ N}.$$

Perché la correzione

La formula puramente turbolenta assume l'intera lastra turbolenta fin dal bordo d'attacco; ma il primo tratto (fino a x_{tr}) è in realtà laminare, e il laminare produce meno attrito. Il termine correttivo $-A/Re_\ell$ sottrae proprio quell'eccesso. Trascurare la correzione (cioè usare il solo termine turbolento) sovrastima la resistenza.

3.3 Esercizio 3 — Resistenza di una sfera in acqua

Esercizio 3

Calcolare la resistenza incontrata da una sfera di diametro $D = 330 \text{ mm}$ che si muove a $V = 40 \text{ km/h}$ in una vasca piena d'acqua a $t = 15^\circ \text{C}$. Per l'acqua a 15°C : $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1,146 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Passo 1 — Dati. $V = 40/3,6 = 11,11 \text{ m/s}$; $D = 0,33 \text{ m}$. Per la sfera la lunghezza di riferimento è il diametro D .

Passo 2 — Reynolds.

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{11,11 \times 0,33}{1,146 \cdot 10^{-6}} = 3,20 \cdot 10^6.$$

Passo 3 — Regime e scelta del C_D . Per un corpo tozzo come la sfera la resistenza è prevalentemente di forma: il C_D non si calcola con una formula ma si legge dalla curva sperimentale $C_D = f(Re)$ (Figura 1.3). A $Re \approx 3,2 \cdot 10^6$ siamo *oltre* la crisi della resistenza (regime supercritico), dove la curva fornisce

$$C_D \approx 0,165.$$

Passo 4–5 — Calcolo. Area di riferimento: sezione frontale $S = \pi D^2/4 = \pi \times 0,33^2/4 = 0,0855 \text{ m}^2$. Resistenza:

$$R = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D = \frac{1}{2} \times 999 \times 11,11^2 \times 0,0855 \times 0,165 = 870 \text{ N}.$$

Osservazione

Si noti la differenza enorme rispetto alle lastre degli esercizi precedenti: la sfera in acqua, corpo tozzo in fluido denso, subisce una resistenza di quasi 900 N, mentre le lastre in aria ne subivano frazioni di newton. Densità del fluido, area frontale e coefficiente di forma fanno la differenza.

3.4 Esercizio 4 — Resistenza di un cilindro in olio

Esercizio 4

Un cilindro di apertura (lunghezza) infinita è posto in una corrente d'olio. Dati: $V = 5 \text{ km/h}$; diametro

$D = 0,4$ m; lunghezza $L = 3,5$ m; olio con $\nu = 1,31 \times 10^{-4}$ m²/s e $\rho \approx 900$ kg/m³. Calcolare la resistenza.

Passo 1 — Dati. $V = 5/3,6 = 1,39$ m/s; per il cilindro la lunghezza di riferimento del Reynolds è il diametro $D = 0,4$ m. L'olio è molto più viscoso dell'acqua (ν due ordini di grandezza maggiore).

Passo 2 — Reynolds.

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{1,39 \times 0,4}{1,31 \cdot 10^{-4}} = 4,24 \cdot 10^3.$$

Passo 3 — Regime e C_D . $\text{Re} \approx 4,2 \cdot 10^3$: regime *subcritico* del cilindro (scia larga di von Kármán, prima della crisi). Dalla curva $C_D = f(\text{Re})$ per il cilindro (Figura 1.3):

$$C_D \approx 1,0.$$

Passo 4–5 — Calcolo. Area frontale $S = D \cdot L = 0,4 \times 3,5 = 1,4$ m².

$$R = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D = \frac{1}{2} \times 900 \times 1,39^2 \times 1,4 \times 1,0 = 1217 \text{ N}.$$

Osservazione

Nonostante la velocità bassissima (5 km/h), la resistenza è ragguardevole: è l'altissima viscosità dell'olio, unita all'ampia area frontale e al $C_D \approx 1$ tipico del cilindro subcritico, a produrla.

3.5 Esercizio 5 — Lastra in regime turbolento

Esercizio 5

Una lamina piana di piccolo spessore, $L = 5$ m, $\ell = 1,2$ m, è investita lungo il lato minore da un vento $V = 360$ km/h con $\alpha = 0^\circ$, in aria tipo a quota zero. Calcolare la resistenza di attrito e lo spessore dello strato limite al bordo d'uscita.

Passo 1 — Dati. $V = 360/3,6 = 100$ m/s; $\ell = 1,2$ m; $\rho = 1,225$ kg/m³; $\nu = 1,453 \times 10^{-5}$ m²/s.

Passo 2 — Reynolds.

$$\text{Re}_\ell = \frac{V\ell}{\nu} = \frac{100 \times 1,2}{1,453 \cdot 10^{-5}} = 8,26 \cdot 10^6.$$

Passo 3 — Regime. $\text{Re}_\ell = 8,26 \cdot 10^6$: molto oltre Re_{cr} e compreso nell'intervallo di validità delle formule turbolente «1/7» ($5 \cdot 10^5 \leq \text{Re} \leq 10^7$). Il tratto laminare iniziale è trascurabile: trattiamo la lastra come *tutta turbolenta*.

Passo 4–5 — Calcolo. Coefficiente d'attrito turbolento (1.18):

$$C_f = \frac{0,148}{\sqrt[5]{\text{Re}_\ell}} = \frac{0,148}{(8,26 \cdot 10^6)^{1/5}} = 6,12 \cdot 10^{-3}.$$

Superficie $S = L\ell = 5 \times 1,2 = 6$ m². Resistenza (una faccia):

$$D_f = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_f = \frac{1}{2} \times 1,225 \times 100^2 \times 6 \times 6,12 \cdot 10^{-3} = 225 \text{ N}.$$

Spessore al bordo d'uscita, formula turbolenta (1.17):

$$\delta_\ell = \frac{0,37 \ell}{\sqrt[5]{\text{Re}_\ell}} = \frac{0,37 \times 1,2}{(8,26 \cdot 10^6)^{1/5}} = 0,0184 \text{ m} = 18,4 \text{ mm}.$$

Turbolento contro laminare

Notare lo spessore: 18,4 mm, molto maggiore dei pochi millimetri degli esercizi laminari. Lo strato limite turbolento è più spesso perché il rimescolamento trasporta quantità di moto lontano dalla parete, ed è anche più «resistente»: $C_f \propto Re^{-1/5}$ decresce più lentamente di $Re^{-1/2}$ del laminare.

3.6 Esercizio 6 — Lastra laminare: analisi completa**Esercizio 6**

Per una lastra piana di piccolo spessore, $L = 2,2$ m, $\ell = 0,34$ m, investita lungo il lato minore da un vento $V = 68$ km/h ($\alpha = 0^\circ$) in aria tipo a $z = 0$, calcolare: (1) lo spessore dello strato limite al bordo d'uscita; (2) lo spessore a metà lastra; (3) i corrispondenti sforzi tangenziali; (4) la resistenza di attrito.

Passo 1 — Dati. $V = 68/3,6 = 18,89$ m/s; $\ell = 0,34$ m; $\rho = 1,225$ kg/m³; $\mu = 1,7932 \times 10^{-5}$ Pa s; $\nu = 1,453 \times 10^{-5}$ m²/s.

Passo 2 — Reynolds.

$$Re_\ell = \frac{V\ell}{\nu} = \frac{18,89 \times 0,34}{1,453 \cdot 10^{-5}} = 4,42 \cdot 10^5.$$

Passo 3 — Regime. $Re_\ell = 4,42 \cdot 10^5 < 5 \cdot 10^5$: lastra interamente *laminare*. Formule di Blasius.

Passo 4–5 — Calcolo. (1) Spessore al bordo d'uscita ($x = \ell$):

$$\delta_\ell = \frac{4,92 \ell}{\sqrt{Re_\ell}} = \frac{4,92 \times 0,34}{\sqrt{4,42 \cdot 10^5}} = 2,52 \text{ mm}.$$

(2) Spessore a metà lastra ($x = \ell/2 = 0,17$ m):

$$Re_x = \frac{V(\ell/2)}{\nu} = \frac{18,89 \times 0,17}{1,453 \cdot 10^{-5}} = 2,21 \cdot 10^5, \quad \delta_{\ell/2} = \frac{4,92 \times 0,17}{\sqrt{2,21 \cdot 10^5}} = 1,78 \text{ mm}.$$

(3) Sforzi tangenziali, (1.13). Al bordo d'uscita:

$$\tau_w(\ell) = 0,332 \sqrt{\frac{1,225 \times 1,7932 \cdot 10^{-5} \times 18,89^3}{0,34}} = 0,219 \text{ Pa};$$

a metà lastra:

$$\tau_w(\ell/2) = 0,332 \sqrt{\frac{1,225 \times 1,7932 \cdot 10^{-5} \times 18,89^3}{0,17}} = 0,310 \text{ Pa}.$$

(4) Resistenza di attrito (una faccia):

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{4,42 \cdot 10^5}} = 2,00 \cdot 10^{-3}, \quad S = L\ell = 0,748 \text{ m}^2,$$

$$D_f = \frac{1}{2} \times 1,225 \times 18,89^2 \times 0,748 \times 2,00 \cdot 10^{-3} = 0,327 \text{ N}.$$

3.7 Esercizio 7 — Ascissa di transizione e resistenza mista**Esercizio 7**

Una lastra piana sottile $L = 4$ m, $\ell = 0,4$ m è investita lungo il lato minore da un vento $\alpha = 0^\circ$, $V =$

160 km/h. Dati: $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$; $\nu = 1,4638 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Calcolare l'ascissa di transizione e la resistenza di attrito.

Passo 1 — Dati. $V = 160/3,6 = 44,44 \text{ m/s}$; $\ell = 0,4 \text{ m}$.

Passo 2 — Reynolds.

$$\text{Re}_\ell = \frac{V\ell}{\nu} = \frac{44,44 \times 0,4}{1,4638 \cdot 10^{-5}} = 1,21 \cdot 10^6.$$

Passo 3 — Regime. $\text{Re}_\ell = 1,21 \cdot 10^6 > 5 \cdot 10^5$: regime *misto*, transizione interna alla lastra.

Passo 4 — Ascissa di transizione.

$$x_{\text{tr}} = \frac{\text{Re}_{\text{cr}} \nu}{V} = \frac{5 \cdot 10^5 \times 1,4638 \cdot 10^{-5}}{44,44} = 0,165 \text{ m},$$

cioè $x_{\text{tr}}/\ell = 0,41$ (41 % della corda).

Passo 5 — Resistenza. Con la formula del regime misto (3.1) ($A \approx 1050$):

$$\frac{0,148}{\sqrt[5]{1,21 \cdot 10^6}} = \frac{0,148}{16,48} = 8,98 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{1050}{1,21 \cdot 10^6} = 0,86 \cdot 10^{-3},$$

$$C_f = 8,98 \cdot 10^{-3} - 0,86 \cdot 10^{-3} = 8,12 \cdot 10^{-3}.$$

Con $S = L\ell = 1,6 \text{ m}^2$ (una faccia):

$$D_f = \frac{1}{2} \times 1,225 \times 44,44^2 \times 1,6 \times 8,12 \cdot 10^{-3} = 15,7 \text{ N}.$$

Osservazione

L'ascissa di transizione è il risultato «esatto» dell'esercizio, ottenuto per via puramente analitica dalla (1.10). La resistenza, invece, dipende dal modello di attrito misto adottato: modelli diversi (o la lettura da grafici sperimentali) possono dare valori leggermente differenti. È bene distinguere sempre i risultati analitici da quelli basati su correlazioni empiriche.

3.8 Esercizio 8 — Sfera in aria ad alta velocità

Esercizio 8

Una sfera di raggio $r = 250 \text{ mm}$ è posta in una corrente d'aria tipo a $z = 0 \text{ m}$ con $V = 480 \text{ km/h}$. Calcolare la resistenza della sfera.

Passo 1 — Dati. $V = 480/3,6 = 133,3 \text{ m/s}$; $D = 2r = 0,5 \text{ m}$; $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$; $\nu = 1,453 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Lunghezza di riferimento: il diametro D .

Passo 2 — Reynolds.

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{133,3 \times 0,5}{1,453 \cdot 10^{-5}} = 4,59 \cdot 10^6.$$

Passo 3 — C_D dalla curva. A $\text{Re} \approx 4,6 \cdot 10^6$ la sfera è ampiamente in regime *supercritico* (oltre la crisi della resistenza): dalla curva $C_D = f(\text{Re})$ (Figura 1.3) si legge un valore basso,

$$C_D \approx 0,115.$$

Passo 4–5 — Calcolo. $S = \pi D^2/4 = \pi \times 0,5^2/4 = 0,1963 \text{ m}^2$.

$$R = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D = \frac{1}{2} \times 1,225 \times 133,3^2 \times 0,1963 \times 0,115 = 246 \text{ N}.$$

La lettura della curva determina il risultato

Se per errore si leggesse il C_D del regime subcritico ($\approx 0,47$), la resistenza sarebbe quadruplicata. Ecco perché il passo 3 (stabilire su quale ramo della curva ci si trova, guardando Re) è cruciale: la crisi della resistenza cambia il risultato di un fattore 4.

3.9 Esercizio 9 — Cilindro in galleria aerodinamica**Esercizio 9**

Un cilindro di apertura infinita, diametro $D = 100$ mm, è investito da una corrente $V = 250$ km/h in aria tipo a $z = 0$ m. La prova è condotta in una galleria con camera a sezione quadrata di lato 1,5 m, e il cilindro l'attraversa da parete a parete. Trascurando gli effetti di parete, calcolare la resistenza.

Passo 1 — Dati. $V = 250/3,6 = 69,44$ m/s; $D = 0,1$ m; la lunghezza del cilindro coincide con il lato della camera, $L = 1,5$ m; $\rho = 1,225$ kg/m³; $\nu = 1,453 \times 10^{-5}$ m²/s.

Osservazione

La geometria della camera fissa la lunghezza del cilindro ($L = 1,5$ m) e giustifica l'ipotesi di apertura infinita (assenza di flusso attorno alle estremità). Trascuriamo gli effetti di bloccaggio (*blockage*) come richiesto.

Passo 2 — Reynolds.

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{69,44 \times 0,1}{1,453 \cdot 10^{-5}} = 4,78 \cdot 10^5.$$

Passo 3 — C_D dalla curva. $Re \approx 4,8 \cdot 10^5$ colloca il cilindro appena *prima* della crisi (regime subcritico ai limiti superiori): dalla curva $C_D = f(Re)$ per il cilindro (Figura 1.3),

$$C_D \approx 1,05.$$

Passo 4–5 — Calcolo. Area frontale $S = D \cdot L = 0,1 \times 1,5 = 0,15$ m².

$$R = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D = \frac{1}{2} \times 1,225 \times 69,44^2 \times 0,15 \times 1,05 = 465 \text{ N}.$$

Osservazione

A $Re \approx 5 \cdot 10^5$ il cilindro è proprio sull'orlo della crisi: un piccolo aumento di velocità potrebbe far crollare il C_D . È una regione delicata, dove la scelta del valore sulla curva va fatta con attenzione.

3.10 Esercizio 10 — Lastra a Reynolds assegnato**Esercizio 10**

Per una lastra piana posta in una corrente con numero di Reynolds $Re_\ell = 10^6$, investita lungo il lato minore con $\alpha = 0^\circ$ in aria tipo a quota zero, calcolare la resistenza di attrito e lo spessore dello strato limite al 50 % di ℓ . Dimensioni: $L = 2$ m, $\ell = 0,8$ m.

Passo 1 — Dati e velocità implicita. Qui il Reynolds è *dato* ($Re_\ell = 10^6$) e la velocità va ricavata. Con $\ell = 0,8$ m e $\nu = 1,453 \times 10^{-5}$ m²/s:

$$V = \frac{Re_\ell \nu}{\ell} = \frac{10^6 \times 1,453 \cdot 10^{-5}}{0,8} = 18,16 \text{ m/s}.$$

Passo 2–3 — Regime. $Re_\ell = 10^6$ è oltre $Re_{cr} = 5 \cdot 10^5$: siamo in regime turbolento (formule «1/7», valide fino a 10^7). La porzione laminare iniziale è modesta a questo Reynolds; trattiamo la lastra come turbolenta.

Passo 4–5 — Calcolo. Coefficiente d'attrito turbolento:

$$C_f = \frac{0,148}{\sqrt[5]{10^6}} = \frac{0,148}{15,85} = 9,34 \cdot 10^{-3}.$$

Superficie $S = L\ell = 2 \times 0,8 = 1,6 \text{ m}^2$. Resistenza (una faccia):

$$D_f = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_f = \frac{1}{2} \times 1,225 \times 18,16^2 \times 1,6 \times 9,34 \cdot 10^{-3} = 3,02 \text{ N}.$$

Spessore al 50 % di ℓ ($x = 0,4 \text{ m}$). Reynolds locale $Re_x = 18,16 \times 0,4/1,453 \cdot 10^{-5} = 5,0 \cdot 10^5$;

$$\delta_{\ell/2} = \frac{0,37 x}{\sqrt[5]{Re_x}} = \frac{0,37 \times 0,4}{(5,0 \cdot 10^5)^{1/5}} = 10,7 \text{ mm}.$$

Osservazione

Quando il Reynolds è dato invece della velocità, il primo passo è «invertire» la definizione $Re = V\ell/\nu$ per ricavare V . Da lì il procedimento è quello consueto. Si noti che lo spessore turbolento (10,7 mm) è ben maggiore di quello che si avrebbe in laminare allo stesso x .

3.11 Esercizio 11 — Numero di Reynolds di un'ala in quota

Esercizio 11

Calcolare il numero di Reynolds per un'ala a pianta rettangolare di superficie $S = 18 \text{ m}^2$ e apertura $b = 15 \text{ m}$ che vola alla quota $z = 5000 \text{ m}$ a $V = 630 \text{ km/h}$, con incidenza $\alpha = 0^\circ$.

Passo 1 — Dati e lunghezza di riferimento. Per un'ala la lunghezza di riferimento del Reynolds è la *corda media*. Per pianta rettangolare:

$$c = \frac{S}{b} = \frac{18}{15} = 1,2 \text{ m}.$$

Velocità: $V = 630/3,6 = 175 \text{ m/s}$.

Passo 2 — Proprietà dell'aria a 5000 m. Dalla Tabella 2.2: $\rho = 0,7364 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1,628 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$, da cui

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1,628 \cdot 10^{-5}}{0,7364} = 2,211 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Passo 3–5 — Calcolo del Reynolds.

$$Re = \frac{Vc}{\nu} = \frac{175 \times 1,2}{2,211 \cdot 10^{-5}} = 9,50 \cdot 10^6.$$

Osservazione

Il Reynolds di crociera dell'ala è dell'ordine di 10^7 : lo strato limite sull'ala è in larga parte turbolento, come è tipico dei velivoli reali. Si ricordi (Tabella 2.2) che in quota ν è maggiore che al livello del mare, il che tende ad abbassare il Reynolds rispetto a un volo alla stessa velocità a bassa quota.

Formulario e quadro riassuntivo

A.1 Formulario essenziale

Numero di Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{VL}{\nu}, \quad \text{Re}_x = \frac{Vx}{\nu}, \quad \text{Re}_\ell = \frac{V\ell}{\nu}.$$

Spessori integrali

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{V}\right) dy, \quad \theta = \int_0^\infty \frac{u}{V} \left(1 - \frac{u}{V}\right) dy, \quad H = \frac{\delta^*}{\theta}.$$

Strato limite laminare (Blasius), $\text{Re}_x < 5 \cdot 10^5$

$$\delta_x = \frac{4,92 x}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad \delta^* = \frac{1,721 x}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad \theta = \frac{0,664 x}{\sqrt{\text{Re}_x}},$$

$$\tau_w = 0,332 \sqrt{\frac{\rho \mu V^3}{x}}, \quad C_f = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_\ell}}.$$

Strato limite turbolento, $5 \cdot 10^5 \leq \text{Re} \leq 10^7$

$$\delta_x = \frac{0,37 x}{\sqrt[5]{\text{Re}_x}}, \quad C_f = \frac{0,148}{\sqrt[5]{\text{Re}}}.$$

Regime misto: $C_f = \frac{0,148}{\sqrt[5]{\text{Re}}} - \frac{A}{\text{Re}}$, con $A \approx 1050$ per $\text{Re}_{\text{cr}} = 5 \cdot 10^5$.

Transizione, von Kármán e resistenza

$$x_{\text{tr}} = \frac{5 \cdot 10^5 \nu}{V}, \quad \frac{\tau_w}{\rho V^2} = \frac{d\theta}{dx}, \quad D_f = \rho V^2 \theta(\ell),$$

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D, \quad D_f = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_f.$$

Aree di riferimento: lastra $S = L\ell$; sfera $S = \pi D^2/4$; cilindro $S = DL$.

Tabella A.1. Sintesi dei risultati degli esercizi (unità SI). Le resistenze delle lastre sono riferite a una faccia.

Es.	Corpo	Re	Risultato principale
1	lastra (lam.)	$4,36 \cdot 10^5$	$\delta_\ell = 2,83 \text{ mm}; D_f = 0,325 \text{ N}$
2	lastra (mista)	$1,33 \cdot 10^6$	$x_{tr} = 0,132 \text{ m}; D_f = 18,6 \text{ N}$
3	sfera in acqua	$3,20 \cdot 10^6$	$R = 870 \text{ N}$
4	cilindro in olio	$4,24 \cdot 10^3$	$R = 1217 \text{ N}$
5	lastra (turb.)	$8,26 \cdot 10^6$	$\delta_\ell = 18,4 \text{ mm}; D_f = 225 \text{ N}$
6	lastra (lam.)	$4,42 \cdot 10^5$	$\delta_\ell = 2,52 \text{ mm}; D_f = 0,327 \text{ N}$
7	lastra (mista)	$1,21 \cdot 10^6$	$x_{tr} = 0,165 \text{ m}; D_f = 15,7 \text{ N}$
8	sfera in aria	$4,59 \cdot 10^6$	$R = 246 \text{ N}$
9	cilindro (gall.)	$4,78 \cdot 10^5$	$R = 465 \text{ N}$
10	lastra (turb.)	$1,00 \cdot 10^6$	$\delta_{\ell/2} = 10,7 \text{ mm}; D_f = 3,02 \text{ N}$
11	ala in quota	$9,50 \cdot 10^6$	(calcolo del solo Re)

A.2 Quadro riassuntivo dei risultati

Come usare questo quadro

La tabella permette un colpo d'occhio sul legame fra tipo di corpo, ordine di grandezza del Reynolds e regime. Si osservi la progressione: le lastre affusolate hanno resistenze piccole (attrito puro); i corpi tozzi (sfera, cilindro) resistenze grandi (forma); il fluido denso (acqua, olio) amplifica tutto. È la sintesi visiva dell'intera monografia.

Riferimenti

- [1] J. D. Anderson, *Introduction to Flight*, McGraw-Hill.
- [2] H. Schlichting, K. Gersten, *Boundary-Layer Theory*, Springer.
- [3] H. Blasius, *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*, Z. Math. Phys., 1908.
- [4] F. M. White, *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill.