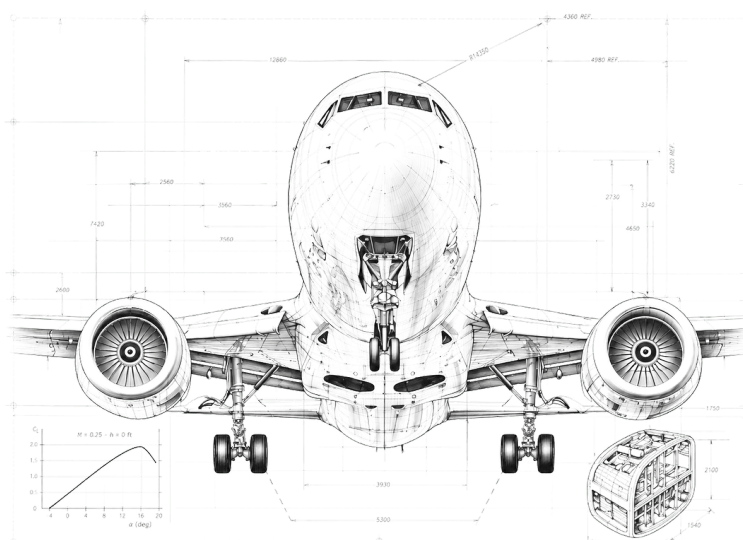


Aerotecnica · Meccanica del Volo

Il velivolo a reazione

Prestazioni, propulsione a getto e regimi di salita
Esercizi svolti e commentati



Sommario

Questa monografia raccoglie e sviluppa un gruppo organico di esercizi sul *velivolo a reazione*: dal tracciamento della curva di resistenza in funzione della velocità fino alla determinazione delle quote di tangenza, dei tempi di salita e dei consumi. Ogni problema è preceduto dai richiami teorici indispensabili e seguito da uno svolgimento *commentato*, pensato per mettere in luce non solo il risultato numerico ma soprattutto la *strategia risolutiva* generale, così che lo studente impari a riconoscere la struttura logica comune a tutti i problemi di prestazioni.

Prof. Ing. Biagio Raucci

2 luglio 2026

raucci.net · github.com/brauucci/SCSI

Indice

1	Introduzione	2
2	Notazione e convenzioni	2
3	Richiami teorici	4
3.1	Equilibrio del velivolo	4
3.2	La polare del velivolo	4
3.3	Efficienza e efficienza massima	4
3.4	La velocità in volo orizzontale	5
3.5	La curva di resistenza $D(V)$	5
3.6	Numero di Mach critico e velocità critica	5
3.7	La propulsione a getto: la spinta	5
3.7.1	Il principio di reazione	5
3.7.2	Il bilancio di quantità di moto su un volume di controllo	6
3.7.3	Getto adattato, getto non adattato e razzo	6
3.7.4	Spinta o rendimento? Il compromesso fondamentale	7
3.7.5	Le potenze in gioco e il rendimento propulsivo	7
3.7.6	Un esempio: due propulsori a confronto	8
3.7.7	La spinta del turboreattore: regime, quota e velocità	9
3.8	Il volo in salita: velocità ascensionale e angolo di rampa	9
3.9	Quota di tangenza teorica e pratica	9
3.10	Tempo di salita	10
3.11	Consumo e autonomia	10
4	Esercizi svolti	10
4.1	Esercizio 1 — Curva di resistenza a quota assegnata	10
4.2	Esercizio 2 — Effetto della quota e velocità critica	12
4.3	Esercizio 3 — Minima resistenza, incidenza e velocità	13
4.4	Esercizio 4 — Velocità minima e massima con propulsione a razzo	14
4.5	Esercizio 5 — Aliante con razzi: salita, rampa e consumo	15
4.6	Esercizio 6 — Odografa V_z-V_x con turboreattore	16
4.7	Esercizio 7 — Prestazioni complete del velivolo a reazione	17
4.8	Esercizio 8 — Spinta necessaria per una salita assegnata	19
4.9	Esercizio 9 — Angolo di rampa per approssimazioni successive	20
4.10	Esercizio 10 — Quota di tangenza teorica	20
4.11	Esercizio 11 — Tempo di salita per intervalli	21
4.12	Esercizio 12 — Spinta e consumo specifico in funzione di V	22
4.13	Esercizio 13 — Consumo di combustibile in crociera	23
5	Ulteriori esercizi svolti	24
5.1	Esercizio 14 — Curva di resistenza a quota assegnata	24
5.2	Esercizio 15 — Effetto della quota e velocità critica	24
5.3	Esercizio 16 — Minima resistenza, incidenza e velocità	25
5.4	Esercizio 17 — Velocità minima e massima con razzi in quota	26
5.5	Esercizio 18 — Aereo con razzi: salita in alta quota	27
5.6	Esercizio 19 — Odografa V_z-V_x a bassa quota	27
5.7	Esercizio 20 — Prestazioni complete a quota zero	28
5.8	Esercizio 21 — Spinta necessaria per una salita assegnata	29
5.9	Esercizio 22 — Angolo di rampa per approssimazioni successive	30

5.10	Esercizio 23 — Quota di tangenza teorica	30
5.11	Esercizio 24 — Tempo di salita e successiva planata	31
5.12	Esercizio 25 — Spinta e consumo in funzione della quota	32
5.13	Esercizio 26 — Consumo e distanza in crociera	33
6	Formulario riassuntivo	33
A	Le funzioni caratteristiche del turbogetto	33
A.1	Spinta e regime: la funzione $\varphi_1(n)$	34
A.2	Spinta e velocità: la funzione $\chi_1(V_o)$	35
A.3	Spinta e quota: la funzione $\psi_1(z)$	36
A.4	Consumo e regime: la funzione $\varphi_2(n)$	36
A.5	Consumo e velocità: la funzione $\chi_2(V_o)$	37
A.6	Composizione delle funzioni: un esempio	39

I Introduzione

Il “velivolo a reazione” è, nel linguaggio dell’aerotecnica classica, il velivolo la cui trazione è fornita da un sistema propulsivo a getto: il *turboreattore*, oppure, in casi particolari, il *razzo*. Rispetto al velivolo a elica, la differenza di fondo non è tanto aerodinamica quanto *propulsiva*: cambia il modo in cui la spinta dipende dalla velocità, dalla quota e dal regime del motore, e con essa cambiano le prestazioni.

Tutti gli esercizi che seguono ruotano attorno a un unico schema logico:

1. si scrive l'**equilibrio del velivolo** (in volo orizzontale o in salita);
2. si traduce l'equilibrio in una **relazione tra i coefficienti aerodinamici** C_L , C_D e la velocità V , tramite la **polare**;
3. si confronta la **resistenza** disponibile con la **spinta** del propulsore per ricavare la prestazione richiesta (velocità limite, velocità ascensionale, angolo di rampa, quota di tangenza, consumo).

Chi padroneggia questo schema risolve, con piccole varianti, l'intera famiglia di problemi. Per questo motivo lo svolgimento di ciascun esercizio non si limita al calcolo, ma è accompagnato da un commento che generalizza il procedimento.

Osservazione — Notazione e verifiche

Si adotta la notazione internazionale della meccanica del volo (vedi §2). Tutti i risultati sono verificati per coerenza fisica e dimensionale; dove un valore numerico richiede attenzione (ordini di grandezza, posizione della virgola decimale, congruenza con l'equilibrio) la verifica è resa esplicita e, se necessario, evidenziata in un riquadro rosso di **attenzione**.

2 Notazione e convenzioni

Si adotta la notazione internazionale della meccanica del volo. La tabella seguente raccoglie i simboli usati nel seguito con il rispettivo significato.

Nota — Sistema di unità

Salvo diverso avviso i pesi e le spinte sono in newton [N], le velocità in m/s (talvolta convertite in km/h), le superfici in m^2 , le densità in kg/m^3 . Il fattore numerico 1,277 che comparirà spesso deriva da $\sqrt{2/\rho_o} = \sqrt{2/1,225} = 1,2778$ e presuppone il carico alare in N/m^2 . I valori di $1/\sqrt{\sigma}$, di ρ e di a sono quelli dell'*atmosfera standard* (ISA); le funzioni caratteristiche del turboreattore $\varphi(n)$, $\psi(z)$, $\chi(V)$ si leggono sulle curve caratteristiche del propulsore e sono riportate di volta in volta.

Grandezza	Simbolo	Significato
Peso	W	peso totale del velivolo
Spinta	T	spinta del propulsore (getto o razzo)
Resistenza	D	resistenza aerodinamica
Portanza	L	portanza
Coeff. di portanza	C_L	coefficiente di portanza
Coeff. di resistenza	C_D	coefficiente di resistenza
Resistenza a portanza nulla	C_{D_0}	coeff. di resistenza minimo (parassita)
Efficienza	E	$E = L/D = C_L/C_D$
Allungamento alare	AR	$AR = b^2/S$
Superficie / apertura alare	S, b	superficie e apertura alare
Carico alare	W/S	peso su superficie
Densità e suo rapporto	ρ, σ	$\sigma = \rho/\rho_0$, con $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$
Velocità di volo	V, V_0	velocità indisturbata (TAS)
Velocità ascensionale	V_z	rateo di salita (componente verticale di V)
Comp. orizzontale di V	V_x	$V_x = V \cos \gamma$
Angolo di rampa	γ	angolo della traiettoria sull'orizzonte
Portata massica del getto	$\dot{m}$	portata di massa espulsa
Velocità di efflusso	V_e	velocità di scarico del gas
Numero di Mach critico	Ma_{cr}	$Ma_{cr} = V_{cr}/a$
Velocità del suono	a	velocità del suono alla quota
Consumo specifico	k	consumo per unità di spinta e di tempo
Combustibile consumato	m_c	massa di combustibile

Tabella 1. Notazione adottata nella monografia.

3 Richiami teorici

3.1 Equilibrio del velivolo

In **volo rettilineo orizzontale uniforme** le forze si bilanciano a due a due: la portanza equilibra il peso e la spinta equilibra la resistenza,

$$L = W, \quad T = D. \quad (1)$$

In **volo rettilineo in salita** con angolo di rampa γ (traiettoria inclinata di γ sull'orizzonte, velocità costante) l'equilibrio si scrive proiettando le forze lungo la traiettoria e ad essa perpendicolarmente:

$$T = D + W \sin \gamma, \quad L = W \cos \gamma. \quad (2)$$

La prima delle (2) mostra il concetto chiave di tutta la salita: per salire occorre una *spinta in eccesso* ($T - D$) capace di “sollevare” la componente del peso lungo la traiettoria, $W \sin \gamma$. Se $T = D$ la salita è impossibile ($\gamma = 0$); se $T < D$ il velivolo scende.

3.2 La polare del velivolo

La *polare* lega C_D a C_L . Nella forma parabolica (polare di Prandtl) essa è

$$C_D = C_{D0} + \frac{i C_L^2}{\pi AR}, \quad (3)$$

dove C_{D0} è la resistenza a portanza nulla (attrito e forma) e il secondo termine è la *resistenza indotta*, che cresce con il quadrato di C_L e diminuisce all'aumentare dell'allungamento AR . Il coefficiente $i \geq 1$ è un *fattore di correzione* che tiene conto della distribuzione di portanza non ellittica: è legato al fattore di Oswald e dalla relazione $i = 1/e$. Quando non è assegnato si assume $i = 1$ (ala idealmente ellittica).

Osservazione — Perché la polare è “parabolica”?

Fisicamente, produrre portanza costa resistenza: l'ala devia verso il basso una massa d'aria e i vortici di estremità generano la scia indotta. Raddoppiare C_L quadruplica la resistenza indotta. Ecco perché la curva $C_D(C_L)$ è una parabola con il vertice in $C_L = 0$: esiste sempre un assetto “ottimo” che bilancia resistenza parassita e indotta, e quell'assetto è il cuore di quasi tutte le prestazioni.

3.3 Efficienza e efficienza massima

L'efficienza aerodinamica è il rapporto portanza/resistenza, $E = L/D = C_L/C_D$. Cercando il massimo di E dalla (3) (con $i = 1$) si trova che esso si realizza quando la resistenza indotta uguaglia quella parassita:

$$C_L^* = \sqrt{\pi AR C_{D0}}, \quad C_D^* = 2 C_{D0}, \quad (4)$$

$$E_{\max} = \frac{C_L^*}{C_D^*} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi AR}{C_{D0}}} = 0,886 \sqrt{\frac{AR}{C_{D0}}} \quad (5)$$

(il coefficiente $0,886 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$). L'assetto di $E_{\max}$ è quello di *minima resistenza* a peso assegnato: in volo orizzontale $D_{\min} = W/E_{\max}$.

Osservazione — Significato pratico di $E_{\max}$

Un velivolo con $E_{\max} = 18$ “percorre” 18 m in orizzontale per ogni metro di quota perduta a motore spento: è la pendenza del miglior planata. La stessa condizione, in volo motorizzato, è quella in cui il motore “fatica” meno, ed è perciò il riferimento per la massima autonomia chilometrica e per la quota di tangenza.

3.4 La velocità in volo orizzontale

Dalla condizione $L = W$, cioè $C_L \frac{1}{2} \rho S V^2 = W$, si ricava la velocità corrispondente ad ogni assetto C_L :

$$V = \sqrt{\frac{2(W/S)}{\rho C_L}} = 1,277 \sqrt{\frac{W/S}{C_L}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \quad (6)$$

avendo posto $\rho = \rho_o \sigma$ con $\rho_o = 1,225 \text{ kg/m}^3$. La (6) è la “formula pratica della velocità”: fissato il carico alare, ad ogni assetto C_L corrisponde *una* velocità di volo orizzontale, tanto più alta quanto minore è C_L (assetto “picchiato”) e quanto maggiore è la quota ($1/\sqrt{\sigma}$ cresce salendo).

3.5 La curva di resistenza $D(V)$

Nota la polare, la resistenza in funzione della velocità è

$$D = \frac{1}{2} \rho S C_D V^2. \quad (7)$$

Combinando (6) e (7) si costruisce, punto per punto, la curva $D(V)$: la sua forma “a secchio” (alta a bassa velocità per la resistenza indotta, alta ad alta velocità per quella parassita, minima in mezzo) è la protagonista di quasi tutti i diagrammi che seguono. Il minimo della curva è $D_{\min} = W/E_{\max}$.

Osservazione — Effetto della quota sulla curva $D(V)$

A parità di assetto (C_L e quindi C_D fissati), un punto della curva a quota zero (V_o, D_o) si trasforma, alla quota z , nel punto

$$D_z = D_o, \quad V_z^{(\text{punto})} = V_o \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \Big|_z. \quad (8)$$

La resistenza *non cambia* (a C_D fissato), mentre la velocità si *dilata* del fattore $1/\sqrt{\sigma}$: la curva di quota è la stessa, traslata verso destra. Questo semplice fatto permette di ricavare le curve di tutte le quote da una sola, senza rifare i conti aerodinamici.

3.6 Numero di Mach critico e velocità critica

Al crescere della velocità compaiono, sul dorso del profilo, zone di flusso localmente sonico: il *numero di Mach critico* Ma_{cr} è il valore del Mach di volo in corrispondenza del quale ciò avviene per la prima volta. La *relativa velocità critica* alla quota è

$$V_{cr} = a Ma_{cr}, \quad (9)$$

con a velocità del suono alla quota. Poiché a diminuisce salendo, *anche V_{cr} diminuisce con la quota*: è un limite superiore pratico alla velocità utile del velivolo, da riportare sui diagrammi di resistenza.

3.7 La propulsione a getto: la spinta

Ogni propulsore aeronautico — elica, turboreattore, razzo — ottiene la spinta in un unico modo: *accelerando all'indietro una massa di fluido*. Alla variazione di quantità di moto impressa al fluido corrisponde, per il terzo principio della dinamica, una reazione uguale e contraria applicata al velivolo: è la spinta. Cambiano il fluido e il modo di accelerarlo — l'elica muove molta aria con piccolo incremento di velocità, il razzo poca massa con enorme incremento — ma il principio è sempre lo stesso.

3.7.1 Il principio di reazione

Definizione — Propulsione a reazione

Un propulsore a reazione genera spinta scaricando all'indietro un getto di fluido a velocità maggiore di quella con cui il fluido è stato acquisito. La spinta è la reazione alla *portata di quantità di moto* ceduta al getto.

Il legame fra forza e quantità di moto è la seconda legge di Newton nella forma adatta ai sistemi a massa fluente: la forza risultante su un volume di fluido eguaglia la *portata netta di quantità di moto* che ne esce. In regime stazionario, se il motore elabora una portata massica $\dot{m}$ portandola dalla velocità di ingestione V_o alla velocità di efflusso V_e , la quantità di moto immessa nel fluido nell'unità di tempo è $\dot{m} V_e - \dot{m} V_o$, e la reazione su di esso è la spinta.

Nota — Notazione di stazione

Con $V_o = V_\infty$ indichiamo la velocità di volo (aria indisturbata, sezione di ingresso “o”); con $V_e = V_8$ la velocità di efflusso alla sezione di uscita dell'ugello (stazione “8” nella numerazione dei motori a getto). Salvo diverso avviso ci poniamo nel *referimento solidale al velivolo*: il motore è fermo, l'aria arriva a V_o ed esce a V_e .

3.7.2 Il bilancio di quantità di moto su un volume di controllo

Per ricavare la spinta in modo rigoroso si isola il motore con una superficie di controllo che intercetta il tubo di flusso elaborato (Figura 1): a monte, la sezione di ingresso “o” dove l'aria entra a V_o e pressione p_o ; a valle, la sezione di uscita “e” dove il getto esce a V_e , pressione p_e e area A_e .

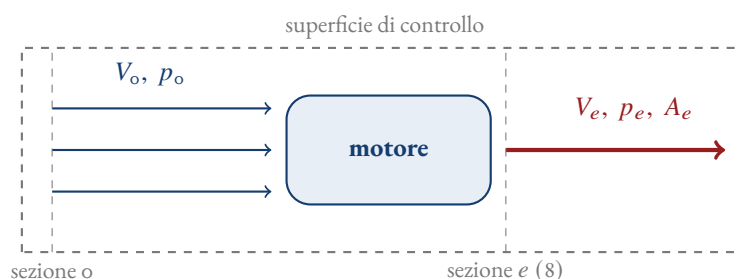


Figura 1. Volume di controllo attorno al motore: l'aria entra alla sezione o con velocità V_o ed esce dalla sezione e (stazione 8) con velocità V_e .

Proiettando sull'asse di volo il bilancio di quantità di moto e sommando le forze di pressione sulle sezioni terminali, la spinta risulta

$$T = \dot{m}_e V_e - \dot{m}_a V_o + (p_e - p_o) A_e, \quad (10)$$

dove $\dot{m}_a$ è la portata d'aria ingerita e $\dot{m}_e = \dot{m}_a + \dot{m}_f$ quella scaricata, maggiore per la portata di combustibile $\dot{m}_f$. Nei turboreattori $\dot{m}_f$ è piccola rispetto a $\dot{m}_a$ (dell'ordine dell'1–2%): posto $\dot{m}_e \approx \dot{m}_a \equiv \dot{m}$, la (10) si riduce alla forma di uso corrente

$$T = \dot{m} (V_e - V_o) + (p_e - p_o) A_e. \quad (11)$$

Osservazione — Spinta lorda e resistenza di presa

La (10) distingue due contributi. Il termine $\dot{m}_e V_e + (p_e - p_o) A_e$ è la *spinta lorda*: la quantità di moto (più la spinta di pressione) che esce dall'ugello. Il termine $\dot{m}_a V_o$ è la *resistenza di presa (ram drag)*: la quantità di moto che l'aria possedeva già entrando. La spinta netta è la differenza. È questo secondo termine a far *diminuire* la spinta al crescere della velocità di volo: l'aria entra sempre più “lanciata”, e va sottratta.

3.7.3 Getto adattato, getto non adattato e razzo

Quando l'ugello è *adattato*, cioè scarica alla pressione ambiente ($p_e = p_o$), il termine di pressione si annulla e resta la sola spinta di quantità di moto:

$$T = \dot{m} (V_e - V_o). \quad (12)$$

È la relazione fondamentale che useremo negli esercizi. Il **razzo** è il caso limite in cui non vi è aria ingerita (V_o di ingestione nullo perché la massa espulsa è tutta propellente imbarcato):

$$T = \dot{m} V_e. \quad (13)$$

Attenzione — Ugello non adattato

Se l'ugello non è adattato, il getto esce a pressione diversa da quella ambiente e il termine $(p_e - p_o)A_e$ non è trascurabile. Con ugello *sotto-espanso* ($p_e > p_o$) esso *aggiunge* spinta; con ugello *sovra-espanso* ($p_e < p_o$) la *sottrae*. Nella pratica di volo subsonico l'ugello semplice lavora vicino all'adattamento e la (12) è un'ottima approssimazione; il termine di pressione diventa essenziale nei regimi supersonici e nei razzi in quota.

3.7.4 Spinta o rendimento? Il compromesso fondamentale

La (12) mostra che una *stessa* spinta T può essere ottenuta in infiniti modi: con una grande portata $\dot{m}$ e un piccolo salto di velocità $(V_e - V_o)$, oppure con una piccola portata e un grande salto. I due estremi corrispondono a filosofie propulsive diverse:

- l'**elica** (e il turboelica) muovono *molta* aria con incremento di velocità *modesto*: $\dot{m}$ grande, $(V_e - V_o)$ piccolo;
- il **turboreattore** puro muove *poca* aria con incremento di velocità *elevato*: $\dot{m}$ piccola, $(V_e - V_o)$ grande.

La scelta non è indifferente: come vedremo, a parità di spinta il primo modo è molto più efficiente del secondo. È questa la ragione per cui, alle velocità subsoniche, dominano turboelica e turboventola (*turbofan*) ad alto rapporto di diluizione.

Osservazione — Getto contro elica: la forma dei diagrammi

La (12) chiarisce perché la spinta del turboreattore vari *poco* con la velocità di volo (curva quasi piatta, con un minimo a velocità intermedie e una lieve risalita ad alta velocità per l'effetto dinamico della presa), mentre l'elica tende a erogare *potenza* pressoché costante, cioè spinta *decrescente* con V . È la chiave di lettura dei diagrammi di spinta che useremo negli esercizi.

3.7.5 Le potenze in gioco e il rendimento propulsivo

Per confrontare le due filosofie serve un bilancio *energetico*. La **potenza propulsiva** è quella effettivamente spesa per far avanzare il velivolo, cioè la spinta per la velocità di volo:

$$\Pi_p = T V_o = \dot{m} (V_e - V_o) V_o. \quad (14)$$

Il motore, però, per produrre quella spinta deve conferire al fluido un incremento di energia cinetica: nell'unità di tempo la variazione di energia cinetica del getto vale

$$\Pi_j = \frac{1}{2} \dot{m} (V_e^2 - V_o^2), \quad (15)$$

ed è la potenza *meccanica* che il propulsore cede alla corrente. Non tutta si traduce in avanzamento: parte resta come energia cinetica nel getto che, visto da terra, si allontana ancora rispetto all'aria ferma alla velocità $(V_e - V_o)$. Questa quota è *persa* nella scia:

$$\Pi_{\text{persa}} = \Pi_j - \Pi_p = \frac{1}{2} \dot{m} (V_e^2 - V_o^2) - \dot{m} (V_e - V_o) V_o = \frac{1}{2} \dot{m} (V_e - V_o)^2. \quad (16)$$

Strategia risolutiva — Dalla spinta al rendimento propulsivo

Il *rendimento propulsivo* misura la frazione della potenza ceduta al getto che diventa potenza utile:

$$\eta_p = \frac{\Pi_p}{\Pi_j} = \frac{\dot{m} (V_e - V_o) V_o}{\frac{1}{2} \dot{m} (V_e - V_o)(V_e + V_o)}.$$

Semplificando $\dot{m}$ e il fattore comune $(V_e - V_o)$:

$$\eta_p = \frac{2V_o}{V_e + V_o} \quad (17)$$

La dimostrazione mostra due cose. Primo: $\eta_p \rightarrow 1$ quando $V_e \rightarrow V_o$, cioè quando il getto esce quasi alla stessa velocità con cui è entrato — nessuna energia sprecata nella scia. Secondo: in quel limite, però, $(V_e - V_o) \rightarrow 0$ e per mantenere la spinta $T = \dot{m}(V_e - V_o)$ occorre $\dot{m} \rightarrow \infty$. *Non si può avere alta spinta e alto rendimento con poca aria*: è il compromesso che governa la scelta del propulsore.

Introdotta la relazione V_o/V_e , la (17) si scrive $\eta_p = 2(V_o/V_e)/[1 + (V_o/V_e)]$: il rendimento cresce monotonicamente man mano che la velocità di efflusso si avvicina a quella di volo (Figura 2).

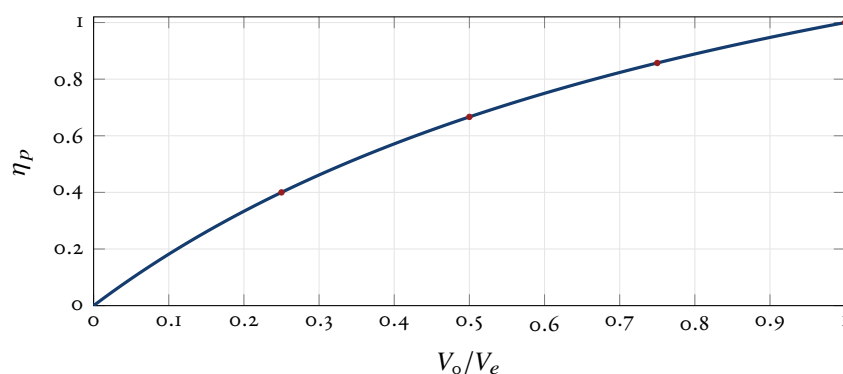


Figura 2. Rendimento propulsivo ideale $\eta_p = 2V_o/(V_e + V_o)$: tende a 1 quando $V_e \rightarrow V_o$, ma in quel limite la spinta si annulla se $\dot{m}$ resta finita.

3.7.6 Un esempio: due propulsori a confronto

Consideriamo, a titolo di esempio, due propulsori che devono fornire la *stessa* spinta $T = 20\,000$ N alla *stessa* velocità di volo $V_o = 200$ m/s, ma con velocità di efflusso diverse. Dalla (12) si ricava la portata necessaria, $\dot{m} = T/(V_e - V_o)$, e dalla (17) il rendimento.

Propulsore	V_e [m/s]	$\dot{m}$ [kg/s]	η_p
tipo “getto” (poca aria, molto veloce)	600	50	0,50
tipo “elica” (molta aria, poco veloce)	300	200	0,80

Tabella 2. Esempio illustrativo: stessa spinta $T = 20\,000$ N a $V_o = 200$ m/s, ottenuta in due modi.

Entrambi producono 20 000 N, ma il secondo muove quattro volte più aria con un salto di velocità quattro volte minore, e ha rendimento $\eta_p = 0,80$ contro 0,50. È la traduzione quantitativa del principio enunciato sopra: *a parità di spinta, muovere molta aria lentamente conviene*. Su questa idea si fondano il turboelica e il turbofan.

Nota — Valori dell'esempio

I valori numerici della Tabella 2 sono *illustrativi*, scelti tondi per rendere trasparente il calcolo; non rappresentano un motore specifico. La relazione fisica che illustrano — il legame fra portata, velocità di efflusso e rendimento — è invece esatta.

3.7.7 La spinta del turboreattore: regime, quota e velocità

Nel funzionamento reale la spinta del turboreattore dipende contemporaneamente dal regime di rotazione n , dalla quota z e dalla velocità di volo V . È comodo esprimerla come prodotto della *spinta statica di riferimento* $T_{s,o}$ (misurata al banco, a quota zero, alla velocità nulla e al regime di progetto n_o) per tre funzioni adimensionali, ciascuna pari a 1 nella condizione di riferimento:

$$T = T_{s,o} \varphi_1(n) \psi_1(z) \chi_1(V), \quad (18)$$

dove φ_1 è la funzione del regime (n/n_o), ψ_1 la funzione della quota e χ_1 la funzione della velocità. In modo del tutto analogo il *consumo specifico* k si scrive

$$k = k_{s,o} \varphi_2(n) \psi_2(z) \chi_2(V). \quad (19)$$

Le cinque funzioni caratteristiche $\varphi_1, \chi_1, \psi_1, \varphi_2, \chi_2$ — con la loro formula, la tabella completa e il diagramma — sono raccolte nell'Appendice A: sono lo strumento che, negli esercizi, permette di passare dai dati di targa alle prestazioni in una qualunque condizione di volo.

Osservazione — Turboelica: due getti in uno

Nel turboelica la spinta nasce da *due* flussi: il getto propulsivo dell'elica (portata $\dot{m}_1$, velocità V_{e1}) e il getto caldo dello scarico (portata $\dot{m}_2$, velocità V_{e2}). La spinta totale è la somma dei due bilanci di quantità di moto,

$$T = \dot{m}_1 (V_{e1} - V_o) + \dot{m}_2 (V_{e2} - V_o),$$

con V_{e1} prossima a V_o (molta aria, poco accelerata: elevato rendimento) e V_{e2} più elevata. Torneremo su questo schema nel capitolo dedicato al turboelica.

3.8 Il volo in salita: velocità ascensionale e angolo di rampa

Dalla prima delle (2), dividendo per il peso, si ottiene

$$\sin \gamma = \frac{T - D}{W} \quad \Rightarrow \quad V_z = V \sin \gamma = \frac{(T - D) V}{W}, \quad V_x = V \cos \gamma. \quad (20)$$

Le (20) sono la “macchina” di tutti gli esercizi di salita:

- l'**angolo di rampa** dipende dalla *spinta in eccesso* ($T - D$): è massimo dove ($T - D$) è massimo;
- la **velocità ascensionale** V_z dipende dal *prodotto* ($T - D$) V : è massima dove è massimo tale prodotto, che in genere cade a una velocità *maggiore* di quella di massima rampa.

Osservazione — Il diagramma V_z - V_x (odografa)

Riportando in ascissa $V_x = V \cos \gamma$ e in ordinata $V_z = V \sin \gamma$ si ottiene l'*odografa* della salita: ogni suo punto ha per distanza dall'origine la velocità di volo V e per pendenza il $\tan \gamma$. Il punto più alto della curva individua la *massima velocità ascensionale*; la tangente condotta dall'origine individua il *massimo angolo di rampa*. Un solo diagramma riassume dunque tutte le prestazioni di salita a quella quota.

3.9 Quota di tangenza teorica e pratica

Salendo, la densità cala: la spinta disponibile diminuisce (ψ_1 decresce) mentre la resistenza minima $D_{\min} = W/E_{\max}$ resta la stessa. La spinta in eccesso, e con essa $V_{z,\max}$, si riduce quota dopo quota fino ad annullarsi.

La **quota di tangenza teorica** è la quota a cui $V_{z,\max} = 0$: la spinta massima disponibile eguaglia appena la resistenza minima. Imponendo $T_{\max}(z) = D_{\min}$ e usando la (18) si ottiene la condizione operativa

$$\psi_1(z) = 1,16 \frac{W}{E_{\max}} \frac{1}{T_{s,o}}, \quad (21)$$

da cui, letta ψ_1 sulla relativa curva, si ricava la quota z .

Osservazione — Da dove viene il fattore 1,16?

La (21) nasce da $T_{s,o} \psi_1(z) \chi_1(V) = W/E_{\max}$. Alla velocità di miglior salita la funzione della velocità vale $\chi_1 \approx 0,86$ (la spinta è un po' minore di quella statica per l'effetto della velocità), e $1/\chi_1 \approx 1,16$. Il coefficiente 1,16, lungi dall'essere "magico", è dunque la traduzione numerica del fatto che il velivolo sale non da fermo ma a una certa velocità.

La **quota di tangenza pratica** è, per convenzione, la quota a cui la massima velocità ascensionale scende a $V_{z,\max} = 0,5$ m/s: al di sopra la salita è così lenta da risultare priva di interesse operativo.

3.10 Tempo di salita

Il tempo per salire dalla quota z_1 alla quota z_2 si ottiene integrando il reciproco della velocità ascensionale:

$$t = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{V_{z,\max}(z)}. \quad (22)$$

Nella pratica si procede *per intervalli finiti*, assumendo in ciascun intervallo $V_{z,\max}$ costante e pari alla sua media (semisomma dei valori agli estremi):

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{(V_{z,\max})_m}, \quad (V_{z,\max})_m = \frac{(V_{z,\max})_i + (V_{z,\max})_{i+1}}{2}. \quad (23)$$

3.11 Consumo e autonomia

La massa di combustibile bruciata in un tempo t è

$$m_c = k T t, \quad (24)$$

con k consumo specifico [kg/(N h)] e T spinta erogata. In crociera orizzontale la spinta eguaglia la resistenza, $T = D = W/E$; il tempo di volo su una distanza s è $t = s/V$. La corrispondente *diminuzione di peso* del velivolo è $\Delta W = m_c g$.

Strategia risolutiva — Schema comune a tutti i problemi

Quasi ogni esercizio che segue si risolve percorrendo, in tutto o in parte, questa catena:

$$\underbrace{\text{equilibrio}}_{(1) \text{ o } (2)} \rightarrow \underbrace{C_L \text{ (o } E)}_{(6), (5)} \rightarrow \underbrace{C_D \text{ via polare}}_{(3)} \rightarrow \underbrace{D = \frac{1}{2} \rho S C_D V^2}_{(7)} \\ \rightarrow \underbrace{\text{confronto con } T}_{(12)-(18)} \rightarrow \text{prestazione.}$$

Tenere a mente questa sequenza è più importante che ricordare le singole formule.

4 Esercizi svolti

Gli esercizi sono numerati progressivamente. Ciascuno è composto dal *testo* (riquadro azzurro), dallo *svolgimento* commentato e, dove opportuno, da riquadri di *strategia*, *osservazione* o *attenzione*.

4.1 Esercizio 1 — Curva di resistenza a quota assegnata**Esercizio 1**

Tracciare il diagramma della resistenza in funzione della velocità alla quota $z = 3\,000$ m per un velivolo di peso totale $W = 105\,000$ N e superficie alare $S = 42$ m². È assegnata la polare:

C_L	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,3	1,2
C_D	0,018	0,020	0,025	0,041	0,062	0,096	0,135	0,170	0,230

Inquadramento. È il problema “madre”: costruire la curva $D(V)$ a partire dalla polare. Ogni riga della polare è un *assetto*; ad ogni assetto corrispondono, per la (6) e la (7), una velocità e una resistenza. Basta quindi tabulare.

Svolgimento. Il carico alare è $W/S = 105\,000/42 = 2\,500 \text{ N/m}^2$. Alla quota di 3 000 m le Tabelle Dati di Aerotecnica danno $1/\sqrt{\sigma} = 1,160\,9$ e $\rho = 0,909\,5 \text{ kg/m}^3$. La (6) diventa allora

$$V = 1,277 \sqrt{\frac{2500}{C_L}} \cdot 1,160\,9 = \frac{74,12}{\sqrt{C_L}} \quad [\text{m/s}],$$

mentre la (7) si specializza in

$$D = \frac{1}{2} \rho S C_D V^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,909\,5 \cdot 42 \cdot C_D V^2 = 19,1 C_D V^2 \quad [\text{N}].$$

Sostituendo assetto per assetto si ottiene la tabella:

C_L	C_D	$V \text{ [m/s]}$	$D \text{ [N]}$
0,0	0,018	∞	∞
0,2	0,020	165,73	10 492
0,4	0,025	117,19	6 558
0,6	0,041	95,69	7 170
0,8	0,062	82,87	8 132
1,0	0,096	74,12	10 073
1,2	0,135	67,66	11 804
1,3	0,170	65,01	13 723
1,2	0,230	67,66	20 110

Tabella 3. Esercizio 1: costruzione punto per punto della curva $D(V)$ a 3 000 m. L'ultima riga corrisponde all'assetto oltre lo stallo (stesso C_L , C_D più elevato).

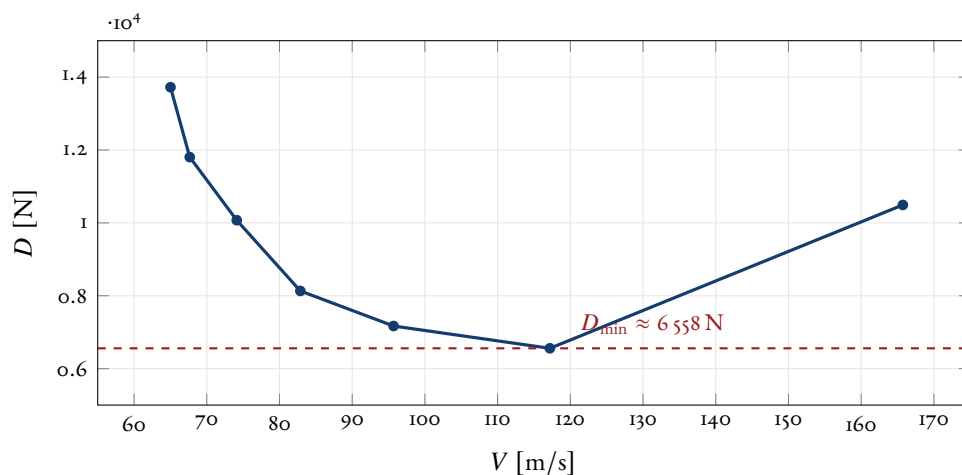


Figura 3. Esercizio 1: diagramma della resistenza a 3 000 m. La curva “a secchio” ha il minimo attorno a $V \approx 117 \text{ m/s}$, in prossimità dell'assetto di massima efficienza.

Strategia risolutiva — Costruire la curva $D(V)$ da una polare

1. calcolare W/S e leggere $1/\sqrt{\sigma}$ e ρ alla quota;
2. per ogni C_L della polare: $V = 1,277\sqrt{(W/S)/C_L} / \sqrt{\sigma}$;
3. per lo stesso assetto: $D = \frac{1}{2}\rho S C_D V^2$;
4. riportare le coppie (V, D) e unirle: il minimo è $D_{\min} = W/E_{\max}$.

4.2 Esercizio 2 — Effetto della quota e velocità critica**Esercizio 2**

Per un aereo a reazione è nota la curva di resistenza in funzione della velocità a quota zero. Tracciare, per lo stesso aereo, le curve alle quote $z_1 = 3\,000\text{ m}$, $z_2 = 6\,000\text{ m}$, $z_3 = 9\,000\text{ m}$, e indicare i punti corrispondenti alle velocità critiche, supponendo $Ma_{cr} = 0,8$. Curva a quota zero:

$D\text{ [N]}$	13 650	6 586	5 733	5 753	5 958	6 566
$V_0\text{ [m/s]}$	194	119	97	84	75	69

Inquadramento. Qui non serve rifare l'aerodinamica: basta la (8). A parità di assetto la resistenza resta la stessa e la velocità si dilata di $1/\sqrt{\sigma}$. Ogni curva di quota è dunque la curva base traslata verso destra.

Svolgimento. Dalle Tabelle: $1/\sqrt{\sigma} = 1,160\,9$ (3 000 m), $1,362\,9$ (6 000 m), $1,621\,2$ (9 000 m). Moltiplicando ciascuna V_0 per il fattore della quota (la D resta invariata) si ottiene:

$D\text{ [N]}$	V_0	$V_1\text{ (3 km)}$	$V_2\text{ (6 km)}$	$V_3\text{ (9 km)}$
13 650	194	225,21	264,40	314,51
6 586	119	138,15	162,19	192,92
5 733	97	112,61	132,20	157,26
5 753	84	97,52	114,48	136,18
5 958	75	87,07	102,22	121,59
6 566	69	80,10	94,04	111,86

Tabella 4. Esercizio 2: le velocità (in m/s) si dilatano di $1/\sqrt{\sigma}$; la resistenza è la stessa a tutte le quote.

Velocità critiche. Dalla (9), $V_{cr} = a Ma_{cr}$. Con $a = (340,5; 328,8; 316,6; 303,9)\text{ m/s}$ alle quote (0; 3; 6; 9) km e $Ma_{cr} = 0,8$:

$$V_{cr} = (272,4; 263,0; 253,3; 243,1)\text{ m/s}.$$

Si noti che V_{cr} *diminuisce* con la quota, perché a cala: il limite di comprimibilità si fa più stringente salendo.

Osservazione — Perché basta una sola curva

Traslare in orizzontale, invece di ricalcolare, funziona perché *la resistenza a C_D fissato non dipende dalla quota*: infatti in $D = \frac{1}{2}\rho S C_D V^2$ la diminuzione di ρ è esattamente compensata dall'aumento di V^2 necessario a mantenere la portanza. È lo stesso motivo per cui, a parità di assetto, si vola “più veloci” in quota.

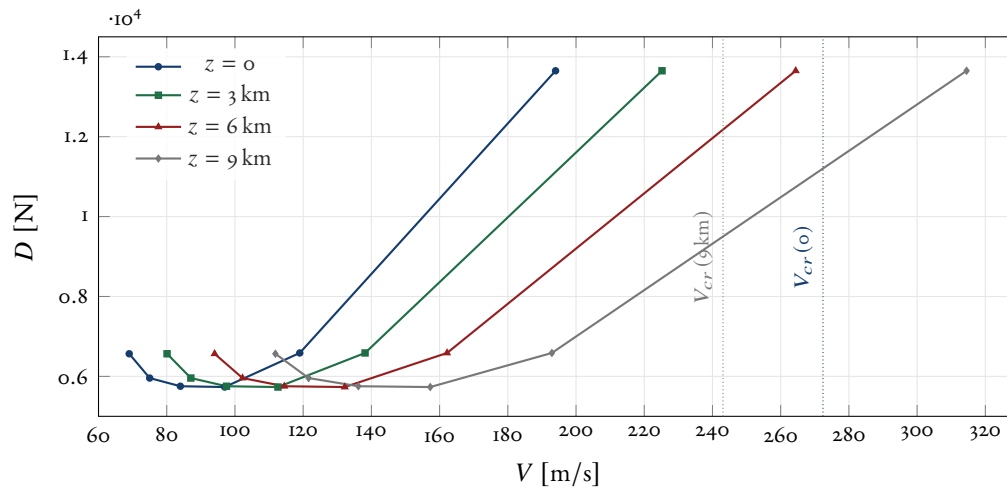


Figura 4. Esercizio 2: curve di resistenza alle quattro quote (stessa D , velocità dilatate) con le velocità critiche, che si stringono salendo.

4.3 Esercizio 3 — Minima resistenza, incidenza e velocità

Esercizio 3

Determinare la resistenza minima, l'incidenza e la velocità di volo corrispondenti per un aereo in volo orizzontale uniforme alla quota di 3 000 m, con: peso $W = 100\,000$ N, carico alare $W/S = 2\,850$ N/m², allungamento $AR = 9,3$, $C_{D0} = 0,021$, pendenza della retta di portanza $a_\infty = 5,1$ /rad.

Inquadramento. “Minima resistenza” significa massima efficienza: si lavora nell’assetto di $E_{\max}$, (4)–(5). Da lì discendono resistenza, coefficiente di portanza (e quindi incidenza) e velocità.

Svolgimento. Efficienza massima e resistenza minima:

$$E_{\max} = 0,886 \sqrt{\frac{AR}{C_{D0}}} = 0,886 \sqrt{\frac{9,3}{0,021}} = 18,65, \quad D_{\min} = \frac{W}{E_{\max}} = \frac{100\,000}{18,65} = 5\,362 \text{ N}.$$

Assetto di massima efficienza:

$$C_L^* = \sqrt{\pi AR C_{D0}} = \sqrt{\pi \cdot 9,3 \cdot 0,021} = 0,7833.$$

La pendenza della retta di portanza *referita all'allungamento finito* si ottiene correggendo quella di profilo:

$$a = \frac{a_\infty}{1 + \frac{a_\infty}{\pi AR}} = \frac{5,1}{1 + \frac{5,1}{\pi \cdot 9,3}} = 4,3421 \text{ /rad}.$$

L'incidenza di volo è dunque

$$\alpha = \frac{C_L^*}{a} = \frac{0,7833}{4,3421} = 0,1804 \text{ rad} = 10^\circ 20' 12''.$$

Infine la velocità, con $1/\sqrt{\sigma} = 1,1609$ a 3 000 m:

$$V = 1,277 \sqrt{\frac{W/S}{C_L^*}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} = 1,277 \sqrt{\frac{2\,850}{0,7833}} \cdot 1,1609 = 89,42 \text{ m/s} = 322 \text{ km/h}.$$

Osservazione — Due “pendenze” da non confondere

Il dato a_∞ è la pendenza del *profilo* (allungamento infinito): un’ala reale, per l’effetto dei vortici di estremità, “rende” meno, e la sua pendenza a è minore. Trascurare la correzione avrebbe portato a una incidenza sbagliata (troppo piccola). È un errore frequente: la retta di portanza dell’ala non è quella del profilo.

4.4 Esercizio 4 — Velocità minima e massima con propulsione a razzo**Esercizio 4**

Determinare la velocità minima e la velocità massima in volo orizzontale uniforme alla quota di 3 000 m per un aereo dotato di due razzi, sapendo che la portata massica del gas espulso da ciascuno è $\dot{m} = 2,2 \text{ kg/s}$ e la velocità di efflusso è $V_e = 1\,800 \text{ m/s}$. Caratteristiche: $W = 112\,700 \text{ N}$, $C_{D_0} = 0,018$, $AR = 6,3$, $W/S = 2\,450 \text{ N/m}^2$.

Inquadramento. In volo orizzontale l’equilibrio impone $T = D$ e $L = W$. Nota la spinta (costante, perché il razzo non “sente” la velocità), la condizione $T = D$ fissa l’efficienza $E = W/T$ e, tramite la polare, *due* valori di C_L : il più grande dà la velocità minima, il più piccolo la velocità massima. Il diagramma $D(V)$ intersecato con la retta $T = \text{cost.}$ ha infatti due punti.

Svolgimento. Spinta dei due razzi, dalla (13):

$$T = 2 \dot{m} V_e = 2 \cdot 2,2 \cdot 1\,800 = 7\,920 \text{ N.}$$

Efficienza richiesta:

$$E = \frac{W}{T} = \frac{112\,700}{7\,920} = 14,23.$$

Poiché $E = C_L/C_D$ e $C_D = C_{D_0} + C_L^2/(\pi AR)$, eliminando C_D :

$$\frac{C_L}{E} = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi AR} \implies 0,0505 C_L^2 - 0,0702 C_L + 0,018 = 0,$$

le cui radici sono

$$C_L = \frac{0,0702 \pm \sqrt{0,0702^2 - 4 \cdot 0,0505 \cdot 0,018}}{2 \cdot 0,0505} = \begin{cases} 0,3392 & (\text{vel. massima}) \\ 1,0503 & (\text{vel. minima}). \end{cases}$$

Con $1/\sqrt{\sigma} = 1,1609$ a 3 000 m, dalla (6):

$$V_{\min} = 1,277 \sqrt{\frac{2\,450}{1,0503}} \cdot 1,1609 = 71,6 \text{ m/s} = 257,7 \text{ km/h},$$

$$V_{\max} = 1,277 \sqrt{\frac{2\,450}{0,3392}} \cdot 1,1609 = 126 \text{ m/s} = 453,5 \text{ km/h}.$$

Strategia risolutiva — Velocità limite in orizzontale: la doppia radice

Quando la spinta è nota, l’involuppo di volo orizzontale nasce da un’equazione di *secondo grado* in C_L :

$$\frac{C_L}{E} = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi AR}, \quad E = \frac{W}{T}.$$

Le due radici sono i due assetti di equilibrio. Radice *grande* $\rightarrow$ volo lento e portato ($V_{\min}$); radice *piccola* $\rightarrow$ volo veloce e picchiato ($V_{\max}$). Se il discriminante è negativo la spinta è insufficiente: il volo orizzontale è impossibile.

Osservazione — Il razzo e la velocità

La spinta del razzo, $T = \dot{m}V_e$, non dipende dalla velocità di volo: non c'è aria da ingerire, il termine $-\dot{m}V_0$ della (12) è assente. Questo rende il razzo ideale per la spinta “pura” (decolli assistiti, salite rapide), ma pessimo in autonomia, perché deve portarsi a bordo anche l'ossidante.

4.5 Esercizio 5 — Aliante con razzi: salita, rampa e consumo**Esercizio 5**

Un aliante viene lanciato con un verricello da un campo al livello del mare. È dotato di due razzi accesi simultaneamente allo sgancio, alla quota di 200 m; ogni razzo fornisce una spinta costante di 830 N per 50 s. Caratteristiche: $W = 3\,820$ N, $W/S = 245$ N/m², $C_{D0} = 0,015$, $AR = 16$, $C_{L,max} = 1,6$. Supponendo che all'accensione l'aliante si porti istantaneamente all'assetto di massima salita, determinare: (1) la massima velocità ascensionale; (2) l'angolo di rampa corrispondente; (3) la quota raggiunta al termine del volo propulso; (4) la diminuzione di peso per consumo del propellente, con velocità di scarico $V_e = 2\,000$ m/s.

Inquadramento. È il primo esercizio di salita “vera”. Si applica la (20): $V_z = (T - D) V / W$. Poiché la spinta è costante, V_z dipende solo da come (D, V) variano con l'assetto: si tabula V_z al variare di C_L e se ne cerca il massimo.

Svolgimento. Spinta totale (due razzi): $T = 2 \cdot 830 = 1\,660$ N. Superficie: $S = W / (W/S) = 3\,820 / 245 = 15,6$ m². Alla quota di 200 m: $1/\sqrt{\sigma} = 1,009\,7$, $\rho = 1,202\,3$ kg/m³. Quindi

$$V = 1,277\sqrt{245} \cdot 1,009\,7 \frac{1}{\sqrt{C_L}} = \frac{20,182}{\sqrt{C_L}}, \quad D = \frac{1}{2} \rho S C_D V^2 = 9,378 C_D V^2,$$

con $C_D = C_{D0} + C_L^2 / (\pi AR) = 0,015 + C_L^2 / 50,265\,5$. Tabulando $V_z = (T - D) V / W$:

C_L	C_D	V	D [N]	$(T - D)/W$	V_z [m/s]
0,05	0,015 05	90,26	1 150	0,133 5	12,05
0,10	0,015 20	63,82	581	0,282 5	18,03
0,15	0,015 45	52,11	393	0,331 7	17,28
0,20	0,015 80	45,13	302	0,355 5	16,04

Tabella 5. Esercizio 5: velocità ascensionale al variare dell'assetto. Il massimo cade attorno a $C_L \approx 0,10$, ben lontano dallo stallo ($C_{L,max} = 1,6$).

Dalla curva $V_z(C_L)$, il massimo (poco sopra il punto tabulato a $C_L = 0,10$) vale

$$V_{z,max} \approx 18,13 \text{ m/s} \quad (V \approx 63,9 \text{ m/s}).$$

Angolo di rampa corrispondente:

$$\sin \gamma = \frac{V_{z,max}}{V} = \frac{18,13}{63,86} = 0,283\,9 \implies \gamma = 16^\circ 29' 36''.$$

Quota al termine del volo propulso ($\Delta t = 50$ s, partenza a $z_0 = 200$ m, $V_{z,max}$ assunta costante):

$$z_1 = z_0 + V_{z,max} \Delta t = 200 + 18,13 \cdot 50 = 1\,106,5 \text{ m}.$$

Diminuzione di peso. La portata massica complessiva si ricava dalla (13), $T = \dot{m}V_e$:

$$\dot{m} = \frac{T}{V_e} = \frac{2 \cdot 830}{2\,000} = 0,83 \text{ kg/s}, \quad \Delta W = \dot{m} \Delta t g = 0,83 \cdot 50 \cdot 9,8 = 406,7 \text{ N},$$

pari a circa 41,5 kg di propellente.

Osservazione — Rampa massima e velocità ascensionale massima non coincidono

Il massimo di V_z cade a $C_L \approx 0,10$, non all'assetto di massima rampa. Con spinta costante, $\sin \gamma = (T - D)/W$ è massimo dove D è minimo (cioè a $E_{\max}$); ma $V_z = (T - D)V/W$ contiene anche V , e conviene “pagare” un po’ di resistenza in più per volare più forte. È la ragione per cui, in generale, *si sale più in fretta a una velocità maggiore di quella di massima pendenza*.

4.6 Esercizio 6 — Odografa V_z - V_x con turboreattore**Esercizio 6**

Tracciare il diagramma V_z - V_x alla quota $z = 3\,000$ m per un velivolo con turboreattore che a quota zero fornisce la spinta:

V [m/s]	65	80	100	140	180
T_0 [N]	7 100	7 056	7 056	7 497	8 036

Caratteristiche: $C_{D0} = 0,022$, $AR = 6,5$, $W = 61\,750$ N, $S = 24$ m², fattore di correzione $i = 1,1$.

Inquadramento. La spinta è data a quota zero: va riportata alla quota moltiplicandola per la funzione $\psi_1(z)$. Poi, per ciascuna velocità assegnata, si calcola C_L (da $L = W$), quindi C_D (dalla polare) e D ; infine $V_z = (T - D)V/W$ e $V_x = V \cos \gamma$.

Svolgimento. Alla quota di 3 000 m: $\psi_1(z) = 0,782$, $\rho = 0,909\,5$ kg/m³. La spinta di quota è $T = \psi_1 T_0$. Il coefficiente di portanza per volo orizzontale è

$$C_L = \frac{2W}{\rho S V^2} = \frac{2 \cdot 61\,750}{0,909\,5 \cdot 24 \cdot V^2} = \frac{5\,657,87}{V^2},$$

la polare dà $C_D = 0,022 + 0,053\,87 C_L^2$ e la resistenza $D = \frac{1}{2} \rho S C_D V^2 = 10,914 C_D V^2$.

V	T [N]	C_L	C_D	D [N]	$\sin \gamma$	V_x	V_z [m/s]
65	5 552	1,340 5	0,118 8	5 478	0,001 20	65,00	0,078
80	5 518	0,884 9	0,064 2	4 484	0,016 7	79,99	1,336
100	5 518	0,566 3	0,039 3	4 289	0,019 9	99,98	1,990
140	5 863	0,289 0	0,026 5	5 669	0,003 1	140,00	0,434
180	6 284	0,174 8	0,023 6	8 345	-0,033 4	179,90	-6,012

Tabella 6. Esercizio 6: costruzione dell'odografa a 3 000 m. A $V = 180$ m/s la resistenza supera la spinta: $V_z < 0$, il velivolo non può più salire (è oltre la velocità massima orizzontale).

Osservazione — Come si legge l'odografa

Ogni punto della curva “vive” a distanza $V = \sqrt{V_x^2 + V_z^2}$ dall'origine. Il vertice individua la salita più rapida; la retta per l'origine tangente alla curva individua la salita più ripida (massimo γ). Dove la curva incontra l'asse orizzontale ($V_z = 0$) si hanno le velocità limite del volo livellato: sotto la prima e sopra la seconda, $V_z < 0$.

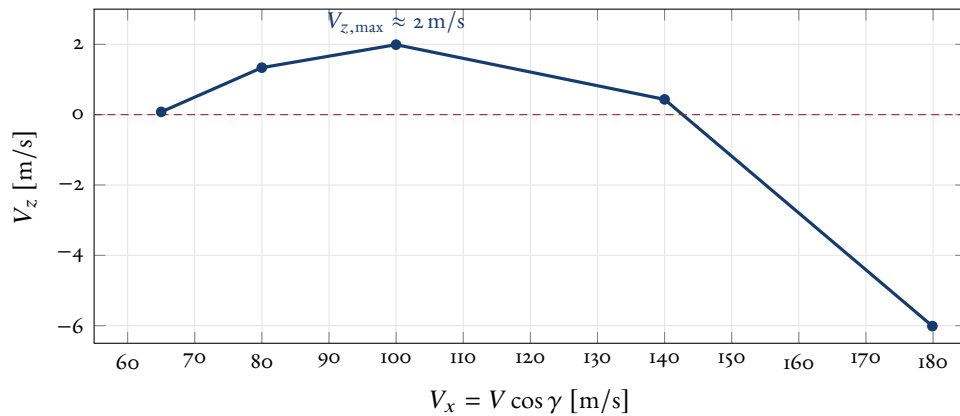


Figura 5. Esercizio 6: odografa della salita. Il punto più alto dà la massima velocità ascensionale; le intersezioni con l'asse $V_z = 0$ delimitano l'intervallo di volo orizzontale possibile.

4.7 Esercizio 7 — Prestazioni complete del velivolo a reazione

Esercizio 7

Un aereo di peso $W = 102\,000$ N e superficie $S = 41,6$ m² vola a $z = 5\,000$ m; è dotato di *due* turboreattori, ciascuno dei quali a quella quota fornisce:

V [m/s]	60	80	100	120	140
T_1 [N]	6 278	5 935	5 788	5 984	6 376

Polare:

C_L	0,21	0,30	0,48	0,80	1,12	1,40	1,50
C_D	0,042	0,044	0,050	0,070	0,106	0,158	0,194

Determinare: velocità minima e massima in volo orizzontale; massima velocità ascensionale; velocità di salita rapida e di salita ripida; massimo angolo di rampa.

Inquadramento. È l'esercizio "completo", che riunisce tutti i mattoni: curva $D(V)$ dalla polare, curva di spinta $T(V)$ (doppia, per i due motori), loro intersezioni ($V_{\min}$, $V_{\max}$), e poi il diagramma di $V_z(V)$ per le prestazioni di salita.

Svolgimento — resistenza e spinta. A $5\,000$ m: $1/\sqrt{\sigma} = 1,2902$, $\rho = 0,7363$ kg/m³; $W/S = 102\,000/41,6 = 2\,452$ N/m². Dalle (6) e (7):

$$V = 81,6 \frac{1}{\sqrt{C_L}}, \quad D = \frac{1}{2} \rho S C_D V^2 = 15,315 C_D V^2.$$

La spinta disponibile è quella dei *due* motori, $T = 2T_1$:

$$T = (12\,556; 11\,870; 11\,576; 11\,968; 12\,752) \text{ N} \quad \text{per } V = (60; 80; 100; 120; 140) \text{ m/s}.$$

Sovrapponendo $D(V)$ e $T(V)$ (Fig. 6), le due intersezioni danno

$$V_{\min} = 67,5 \text{ m/s} = 243 \text{ km/h}, \quad V_{\max} = 131 \text{ m/s} = 471,6 \text{ km/h}.$$

Svolgimento — salita. Nell'intervallo di volo si legge $(T - D)$ e si calcola $V_z = (T - D)V/W$:
Dalla tabella e dal diagramma:

C_L	C_D	V [m/s]	D [N]
0,21	0,042	178,06	20 394
0,30	0,044	148,98	14 956
0,48	0,050	117,78	10 623
0,80	0,070	91,23	8 923
1,12	0,106	77,10	9 650
1,40	0,158	68,96	11 507
1,50	0,194	66,63	13 190

Tabella 7. Esercizio 7: curva di resistenza a 5 000 m.

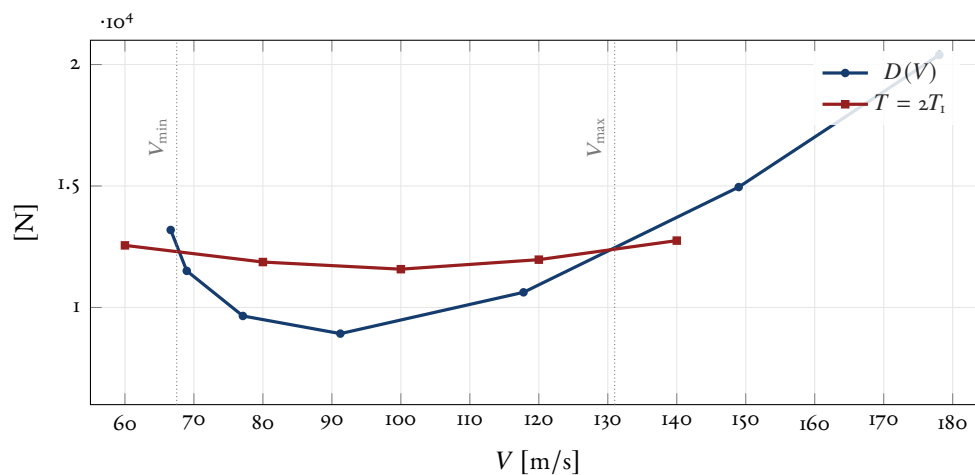


Figura 6. Esercizio 7: resistenza e spinta (due motori). Le intersezioni fissano l'involuppo di volo orizzontale $[V_{\min}, V_{\max}]$; tra esse la spinta è in eccesso e il volo in salita è possibile.

V	67,5	70	80	90	100	110	120	131
$T - D$ [N]	0	1 030	2 452	2 472	2 403	1 864	1 030	0
V_z [m/s]	0	0,71	1,92	2,18	2,36	2,01	1,21	0

Tabella 8. Esercizio 7: prestazioni di salita a 5 000 m.

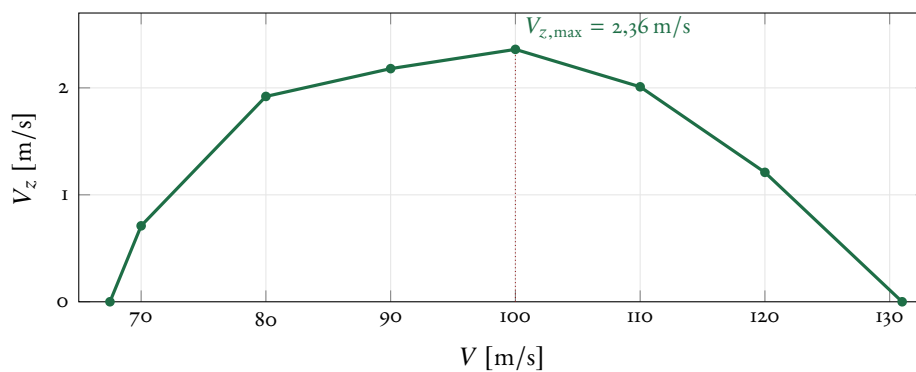


Figura 7. Esercizio 7: velocità ascensionale in funzione della velocità. Il massimo (salita rapida) cade a $V = 100$ m/s.

- **massima velocità ascensionale** $V_{z,\max} = 2,36 \text{ m/s}$, a cui corrisponde la **velocità di salita rapida** $V = 100 \text{ m/s} = 360 \text{ km/h}$;
- **salita ripida** (massimo $T - D$, quindi massimo γ): il picco di $(T - D) = 2\,472 \text{ N}$ cade a $V \approx 90 \text{ m/s}$;
- **massimo angolo di rampa**

$$\sin \gamma_{\max} = \frac{(T - D)_{\max}}{W} = \frac{2\,472}{102\,000} = 0,024\,24 \implies \gamma_{\max} = 1^\circ 23' 18''.$$

Strategia risolutiva — La “mappa” delle prestazioni a quota fissa

1. costruire $D(V)$ dalla polare;
2. sovrapporre $T(V)$ (moltiplicata per il numero di motori): le intersezioni sono $V_{\min}$ e $V_{\max}$;
3. nell'intervallo, $V_z = (T - D)V/W$: il suo massimo dà la salita rapida;
4. il massimo di $(T - D)$ (non di V_z !) dà la salita ripida e $\gamma_{\max}$.

Distinguere “rapida” (massimo V_z) da “ripida” (massimo γ) è il punto in cui più spesso si sbaglia.

4.8 Esercizio 8 — Spinta necessaria per una salita assegnata

Esercizio 8

Determinare la spinta che il turboreattore deve fornire affinché il velivolo voli a $z = 5\,000 \text{ m}$ alla velocità $V = 490 \text{ km/h}$ su traiettoria rettilinea in salita con angolo di rampa $\gamma = 11^\circ$. Caratteristiche: $W = 52\,500 \text{ N}$, $W/S = 3\,240 \text{ N/m}^2$, $AR = 5,9$, $C_{D0} = 0,023$.

Inquadramento. Problema “diretto”: assegnati velocità e rampa, si chiede la spinta. Si usa la prima delle (2), $T = D + W \sin \gamma$; per calcolare D serve C_L , che si ottiene dalla *seconda* equazione di equilibrio, $L = W \cos \gamma$.

Svolgimento. Dall'equilibrio perpendicolare alla traiettoria, $L = W \cos \gamma$, con $V = 490 \text{ km/h} = 136,11 \text{ m/s}$ e $\rho = 0,736\,3 \text{ kg/m}^3$ a $5\,000 \text{ m}$:

$$C_L = \frac{2(W/S) \cos \gamma}{\rho V^2} = \frac{2 \cdot 3\,240 \cdot 0,9816}{0,736\,3 \cdot 136,11^2} = 0,466\,3.$$

Polare:

$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR} = 0,023 + \frac{0,466\,3^2}{\pi \cdot 5,9} = 0,034\,73.$$

Superficie $S = W/(W/S) = 52\,500/3\,240 = 16,20 \text{ m}^2$, quindi

$$D = \frac{1}{2} \rho S C_D V^2 = 0,034\,73 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,736\,3 \cdot 16,20 \cdot 136,11^2 = 3\,837 \text{ N}.$$

Infine la spinta:

$$T = D + W \sin \gamma = 3\,837 + 52\,500 \cdot 0,190\,8 = 13\,854 \text{ N}.$$

Osservazione — Chi domina la spinta in salita?

Dei $13\,854 \text{ N}$ richiesti, oltre $10\,000$ servono solo a “sollevare” la componente del peso $W \sin \gamma$; la resistenza aerodinamica pesa per circa un quarto. In salita ripida è dunque il *peso*, non la resistenza, a dettare la spinta necessaria: è il motivo per cui la salita è la fase più esigente per il propulsore.

4.9 Esercizio 9 — Angolo di rampa per approssimazioni successive

Esercizio 9

Un aereo vola in salita rettilinea a $z = 7\,000$ m, con assetto $C_L = 0,3$; la spinta è $T = 12\,260$ N. Determinare l'angolo di rampa. Caratteristiche: $W = 83\,400$ N, $W/S = 2\,355$ N/m², $C_{D0} = 0,021$, $AR = 7,7$.

Inquadramento. Qui l'incognita γ compare in *due* punti: nella velocità (tramite $\cos \gamma$ nell'equilibrio $L = W \cos \gamma$) e nel bilancio delle spinte. Si procede per **approssimazioni successive**: si parte da $\cos \gamma \approx 1$, si trova un primo γ , lo si reinserisce e si affina.

Prima approssimazione. La velocità in salita è $V = 1,277 \sqrt{(W/S)/C_L} (1/\sqrt{\sigma}) \sqrt{\cos \gamma}$. A $7\,000$ m: $1/\sqrt{\sigma} = 1,4419$. Ponendo $\cos \gamma = 1$:

$$V = 1,277 \sqrt{\frac{2\,355}{0,3}} \cdot 1,4419 = 163,14 \text{ m/s.}$$

Polare e resistenza ($\rho = 0,5896$ kg/m³, $S = 83\,400/2\,355 = 35,41$ m²):

$$C_D = 0,021 + \frac{0,3^2}{\pi \cdot 7,7} = 0,02472, \quad D = \frac{1}{2} \rho S C_D V^2 = 6\,867 \text{ N.}$$

Quindi

$$\sin \gamma = \frac{T - D}{W} = \frac{12\,260 - 6\,867}{83\,400} = 0,0647 \implies \gamma = 3^\circ 42' 33''.$$

Seconda approssimazione. Reinserendo $\cos \gamma$ con il valore appena trovato:

$$V = 163,14 \sqrt{\cos 3^\circ 42' 33''} = 162,97 \text{ m/s,} \quad D = 6\,853 \text{ N,}$$

$$\sin \gamma = \frac{12\,260 - 6\,853}{83\,400} = 0,06483 \implies \boxed{\gamma = 3^\circ 43' 1''}.$$

Osservazione — Quando conviene iterare

La correzione tra prima e seconda approssimazione è di appena $28''$: per angoli piccoli $\cos \gamma \approx 1$ e la prima stima è già ottima. L'iterazione diventa necessaria solo per rampe ripide (grandi γ), dove $\cos \gamma$ si discosta sensibilmente dall'unità. Riconoscere *quando* un'approssimazione è sufficiente fa parte del mestiere dell'ingegnere.

4.10 Esercizio 10 — Quota di tangenza teorica

Esercizio 10

Determinare la quota di tangenza teorica per un velivolo di peso $W = 52\,000$ N, sapendo che il turboreattore fornisce a quota zero la spinta statica continuativa $T_{s,0} = 21\,580$ N. Caratteristiche: $C_{D0} = 0,021$, apertura $b = 14,3$ m, superficie $S = 28$ m².

Inquadramento. Alla quota di tangenza teorica la salita si annulla: la spinta massima disponibile eguaglia appena la resistenza minima. Si usa la (21), che richiede soltanto l'efficienza massima e la spinta statica.

Svolgimento. Allungamento ed efficienza massima:

$$AR = \frac{b^2}{S} = \frac{14,3^2}{28} = 7,30, \quad E_{\max} = 0,886 \sqrt{\frac{AR}{C_{D0}}} = 0,886 \sqrt{\frac{7,30}{0,021}} = 16,52.$$

Dalla (21):

$$\psi_1(z) = 1,16 \frac{W}{E_{\max}} \frac{1}{T_{s,0}} = 1,16 \cdot \frac{52\,000}{16,52} \cdot \frac{1}{21\,580} = 0,169.$$

Entrando con questo valore nella curva $\psi_1(z)$ (o per interpolazione lineare sulle Tabelle) si ricava

$$z \approx 15\,800 \text{ m.}$$

Osservazione — Che cosa fissa il “tetto”?

La quota di tangenza cresce se il velivolo è *leggero* (piccolo W), *efficiente* (grande $E_{\max}$) e *ben spinto* (grande $T_{s,0}$): tutti e tre compaiono nella (21). È il motivo per cui i velivoli da alta quota hanno ali molto allungate ($E_{\max}$ elevata) e carichi contenuti.

4.11 Esercizio 11 — Tempo di salita per intervalli

Esercizio 11

Determinare il tempo necessario a un turboreattore per raggiungere la quota di tangenza pratica $z_p = 11\,300 \text{ m}$, sapendo che le massime velocità ascensionali in funzione della quota sono:

z [km]	0	2	4	6	8	10
$V_{z,\max}$ [m/s]	18	16,4	14,2	11,5	8,7	4,8

Inquadramento. Il tempo di salita è l'integrale (22) di $1/V_{z,\max}$. Poiché $V_{z,\max}$ è nota solo per punti, si integra *per intervalli* (23), con $V_{z,\max}$ media in ciascuno. Il dato chiave è che alla quota di tangenza pratica, per definizione, $V_{z,\max} = 0,5 \text{ m/s}$.

Svolgimento. Si aggiunge il punto ($z_p = 11,3 \text{ km}$, $V_{z,\max} = 0,5 \text{ m/s}$) e si costruisce la tabella per intervalli:

Intervallo [km]	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–11,3
Δz [m]	2 000	2 000	2 000	2 000	2 000	1 300
$(V_{z,\max})_m$ [m/s]	17,2	15,3	12,85	10,1	6,75	2,65
Δt [s]	116,3	130,7	155,6	198,0	296,3	490,6
t cumulato [s]	116,3	247,0	402,6	600,7	897,0	1 387,5

Tabella 9. Esercizio 11: integrazione per intervalli del tempo di salita.

Il tempo per raggiungere la quota di tangenza pratica è

$$t = 1\,387,5 \text{ s} = 23' 8''.$$

Osservazione — Perché l'ultimo tratto “costa” tanto tempo

Nell'ultimo intervallo la velocità ascensionale media è appena $2,65 \text{ m/s}$: bastano $1\,300 \text{ m}$ per assorbire quasi 491 s , oltre un terzo del tempo totale. Avvicinandosi al “tetto” la salita diventa asintoticamente lenta: è questa la ragione pratica per cui si definisce una tangenza *pratica* ($V_{z,\max} = 0,5 \text{ m/s}$) invece di inseguire la tangenza teorica, che richiederebbe tempo infinito.

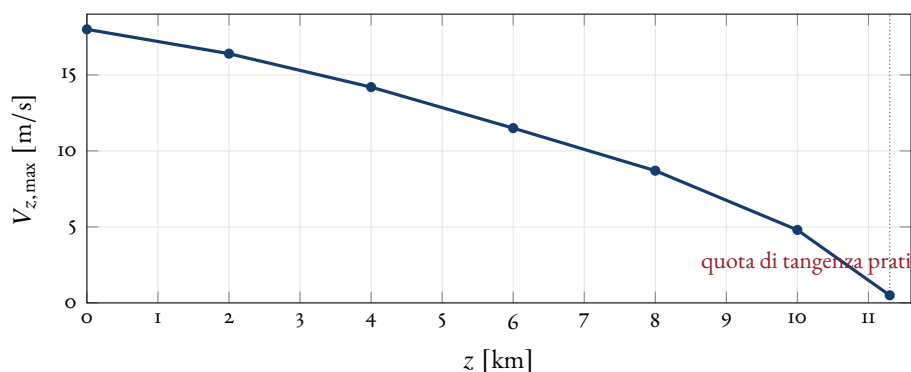


Figura 8. Esercizio 11: la velocità ascensionale massima decresce con la quota e si annulla (convenzionalmente a 0,5 m/s) alla tangenza pratica. Il tempo di salita è l'area sotto la curva $1/V_{z,max}$.

4.12 Esercizio 12 — Spinta e consumo specifico in funzione di V

Esercizio 12

Tracciare il diagramma della spinta e del consumo specifico di un turboreattore in funzione della velocità, alla quota $z = 6\,000\text{ m}$ e al regime $n = 9\,500\text{ giri/min}$. Dati del motore: spinta statica a quota zero al numero di giri di progetto $T_{s,o} = 44\,150\text{ N}$; consumo specifico statico corrispondente $k_{s,o} = 0,102\text{ kg/(N h)}$; giri di progetto $n_o = 10\,000\text{ giri/min}$.

Inquadramento. È l'applicazione diretta delle (18) e (19). Si valutano una volta per tutte i fattori di regime φ e di quota ψ (costanti al variare di V); la dipendenza dalla velocità resta affidata alle sole funzioni $\chi(V)$, tabulate.

Spinta. Rapporto di giri $n/n_o = 9\,500/10\,000 = 0,95$. Dalla curva φ_1 : $\varphi_1(0,9) = 0,6916$, $\varphi_1(1) = 1$; per interpolazione lineare $\varphi_1(0,95) = 0,8458$. Funzione di quota $\psi_1(6\,000\text{ m}) = 0,6003$. Quindi

$$T = T_{s,o} \varphi_1 \psi_1 \chi_1(V) = 44\,150 \cdot 0,8458 \cdot 0,6003 \chi_1(V) = 22\,414 \chi_1(V).$$

V [m/s]	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
$\chi_1(V)$	1	0,9624	0,9297	0,9018	0,8787	0,8604	0,8468	0,8379	0,8333	0,8327	0,8358
T [N]	22414	21571	20838	20213	19695	19285	18980	18780	18678	18664	18734

Tabella 10. Esercizio 12: spinta del turboreattore a 6 000 m, $n = 9\,500\text{ giri/min}$.

Consumo specifico. Analogamente, con $\varphi_2(0,95) = 1,00615$ e $\psi_2(6\,000\text{ m}) = 0,8966$:

$$k = k_{s,o} \varphi_2 \psi_2 \chi_2(V) = 0,102 \cdot 1,00615 \cdot 0,8966 \chi_2(V) = 0,09202 \chi_2(V).$$

V [m/s]	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
$\chi_2(V)$	1	1,04	1,08	1,12	1,16	1,20	1,24	1,28	1,32	1,36	1,40
k [kg/(N h)]	0,09202	0,09570	0,09938	0,10306	0,10674	0,11042	0,11410	0,11778	0,12146	0,12514	0,12882

Tabella 11. Esercizio 12: consumo specifico a 6 000 m, $n = 9\,500\text{ giri/min}$.

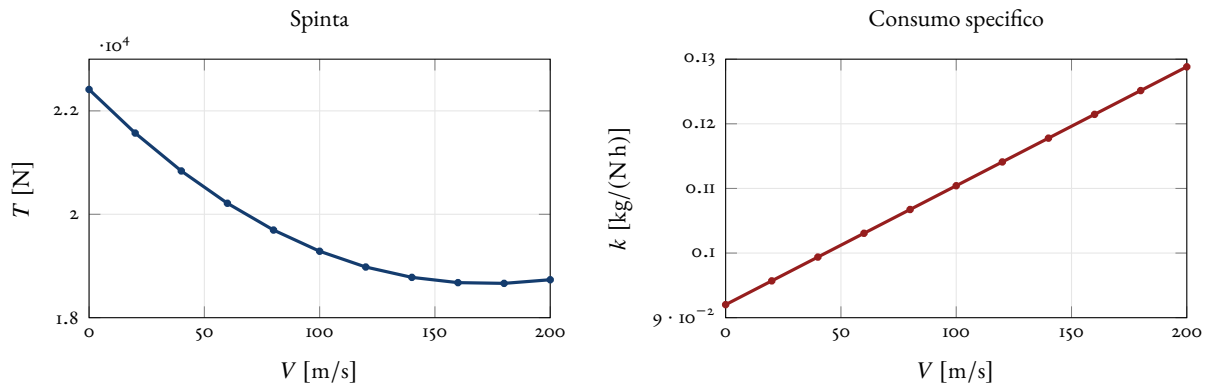


Figura 9. Esercizio 12: spinta (a sinistra) e consumo specifico (a destra) del turboreattore in funzione della velocità. La spinta cala dolcemente e poi risale; il consumo specifico cresce quasi linearmente con V .

Osservazione — Due tendenze opposte

Salendo in velocità la spinta *diminuisce* (fino a risalire per l'effetto dinamico della presa d'aria), mentre il consumo specifico *aumenta*: volare più veloci costa di più per ogni newton di spinta. È il compromesso che governa la scelta della velocità di crociera economica.

4.13 Esercizio 13 — Consumo di combustibile in crociera

Esercizio 13

Un turboreattore vola a $z = 5\,500$ m in volo orizzontale uniforme alla velocità $V = 360$ km/h, con $n = 6\,000$ giri/min. Trascurando la variazione di peso, calcolare il consumo su un percorso di 250 km. Caratteristiche: $W = 76\,500$ N, $W/S = 2\,260$ N/m², $C_{D0} = 0,021$, $AR = 8,9$, $k_{s,0} = 0,11$ kg/(N h), $n_o = 5\,000$ giri/min.

Inquadramento. Il combustibile consumato è $m_c = k T t$ (24). Servono tre cose: il consumo specifico k alle condizioni di volo (funzioni φ, ψ, χ); la spinta erogata, che in crociera è la resistenza $T = D = W/E$; il tempo di volo $t = s/V$.

Consumo specifico. $V = 360$ km/h = 100 m/s; $n/n_o = 6\,000/5\,000 = 1,2$. Dalle curve: $\varphi_2(1,2) = 1,027\,8$, $\psi_2(5\,500\text{ m}) = 0,905\,35$ (media tra 5 000 e 6 000 m), $\chi_2(100\text{ m/s}) = 1,2$. Quindi

$$k = k_{s,0} \varphi_2 \psi_2 \chi_2 = 0,11 \cdot 1,027\,8 \cdot 0,905\,35 \cdot 1,2 = 0,122\,83 \text{ kg/(N h)}.$$

Spinta (= resistenza) in crociera. $S = W/(W/S) = 76\,500/2\,260 = 33,85$ m²; $\rho = 0,697\,3$ kg/m³ a 5 500 m. Assetto di crociera:

$$C_L = \frac{2(W/S)}{\rho V^2} = \frac{2 \cdot 2\,260}{0,697\,3 \cdot 100^2} = 0,648\,2, \quad C_D = 0,021 + \frac{0,648\,2^2}{\pi \cdot 8,9} = 0,036,$$

$$E = \frac{C_L}{C_D} = \frac{0,648\,2}{0,036} = 18, \quad T = D = \frac{W}{E} = \frac{76\,500}{18} = 4\,250 \text{ N}.$$

Tempo e consumo. $t = s/V = 250\,000/100 = 2\,500$ s = 0,694 4 h. Quindi

$$m_c = k T t = 0,122\,83 \cdot 4\,250 \cdot 0,694\,4 = 362,5 \text{ kg},$$

corrispondenti a una diminuzione di peso $\Delta W = m_c g \approx 3\,556$ N.

Attenzione — Verifica dell'ordine di grandezza

È facile, in questo calcolo, sbagliare la posizione della virgola decimale e scrivere 3 625 kg al posto di 362,5 kg. La riprova è immediata attraverso il peso: $m_c g = 362,5 \cdot 9,8 \approx 3\,556$ N, del tutto compatibile con un velivolo da 76 500 N; il valore errato darebbe invece $\Delta W \approx 35\,550$ N, quasi metà del peso totale, chiaramente assurdo per una tratta di soli 250 km. Verificare sempre la congruenza del combustibile consumato con il peso del velivolo.

Strategia risolutiva — Il consumo in crociera in tre passi

$$k = k_{s,o} \varphi_2 \psi_2 \chi_2 \longrightarrow T = D = \frac{W}{E} \longrightarrow m_c = k T \frac{s}{V}.$$

In crociera la spinta *non* è un dato del motore ma la resistenza del velivolo: prima si trova l'assetto di volo (C_L , poi E), poi D , infine il consumo. È l'ossatura del calcolo di autonomia e durata.

5 Ulteriori esercizi svolti

La numerazione prosegue in modo naturale. Questi esercizi riprendono e consolidano le tecniche introdotte nei precedenti, applicandole a configurazioni e quote diverse.

5.1 Esercizio 14 — Curva di resistenza a quota assegnata**Esercizio 14**

Tracciare la curva di resistenza $D(V)$ a $z = 5\,000$ m per un turboreattore con $W = 225\,630$ N, $W/S = 3\,140$ N/m², $C_{D0} = 0,021$, $AR = 8,6$; l'assetto di stallo è $C_{L,st} = 1,4$.

Svolgimento. Non essendo assegnata una polare per punti, si usa la polare parabolica $C_D = C_{D0} + C_L^2 / (\pi AR) = 0,021 + C_L^2 / 27,018$. A 5 000 m l'atmosfera standard dà $1/\sqrt{\sigma} = 1,289\,6$, $\rho = 0,736\,4$ kg/m³; inoltre $S = W / (W/S) = 71,86$ m². Le relazioni operative sono

$$V = 1,277 \sqrt{\frac{W/S}{C_L}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} = \frac{92,28}{\sqrt{C_L}}, \quad D = \frac{1}{2} \rho S C_D V^2 = 26,46 C_D V^2.$$

C_L	C_D	V [m/s]	D [N]
0,2	0,022 5	206,4	25 341
0,4	0,026 9	145,9	15 165
0,6	0,034 3	119,1	12 883
0,8	0,044 7	103,2	12 593
1,0	0,058 0	92,28	13 074
1,2	0,074 3	84,24	13 952
1,4	0,093 5	78,0	15 058

Tabella 12. Esercizio 14: curva di resistenza a 5 000 m, dall'assetto efficiente fino allo stallo $C_{L,st} = 1,4$.

5.2 Esercizio 15 — Effetto della quota e velocità critica**Esercizio 15**

Tracciare $D(V)$ alle quote $z = 0; 2000; 4000; 6000$ m e indicare le velocità critiche, con $W = 81\,420$ N, $W/S = 3\,040$ N/m², $AR = 9$, $C_{D0} = 0,021$, $Ma_{cr} = 0,85$.

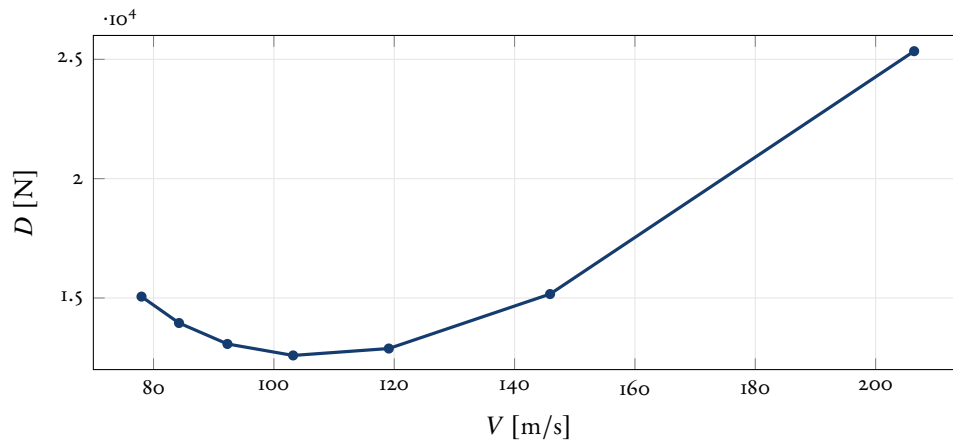


Figura 10. Esercizio 14: la resistenza minima $D_{\min} = W/E_{\max} \approx 12\,580\text{ N}$ (con $E_{\max} = 0,886\sqrt{AR/C_{D0}} = 17,93$) cade attorno a $V \approx 105\text{ m/s}$.

Svolgimento. Si costruisce la curva base a quota zero con $C_D = 0,021 + C_L^2/28,274$, $S = 26,78\text{ m}^2$:

$$V_0 = \frac{70,42}{\sqrt{C_L}}, \quad D = 16,40 C_D V_0^2.$$

Alle altre quote la resistenza è invariata e la velocità si dilata di $1/\sqrt{\sigma}$ (1,103 2 a 2 000 m, 1,222 6 a 4 000 m, 1,362 5 a 6 000 m).

C_L	D [N]	V_0	V_{2000}	V_{4000}	V_{6000}
0,2	9 109	157,4	173,6	192,4	214,4
0,4	5 416	111,3	122,8	136,1	151,6
0,6	4 571	90,9	100,3	111,1	123,9
0,8	4 433	78,7	86,8	96,2	107,2
1,0	4 584	70,42	77,7	86,1	95,9
1,2	4 877	64,3	70,9	78,6	87,6

Tabella 13. Esercizio 15: curve di resistenza alle quattro quote (velocità in m/s).

Velocità critiche. Con $a = (340,3; 332,5; 324,6; 316,5)\text{ m/s}$ alle quote (0; 2; 4; 6) km e $V_{cr} = a Ma_{cr}$:

$$V_{cr} = (289,3; 282,6; 275,9; 269,0)\text{ m/s}.$$

5.3 Esercizio 16 — Minima resistenza, incidenza e velocità

Esercizio 16

In volo orizzontale a 5 000 m determinare incidenza, velocità e resistenza di minima resistenza. $W = 215\,820\text{ N}$, $S = 80\text{ m}^2$, $b = 22\text{ m}$, $C_{D0} = 0,022$, pendenza di profilo $a_\infty = 5,32/\text{rad}$.

Svolgimento. Allungamento $AR = b^2/S = 484/80 = 6,05$. Efficienza massima e resistenza minima:

$$E_{\max} = 0,886\sqrt{\frac{6,05}{0,022}} = 14,69, \quad D_{\min} = \frac{W}{E_{\max}} = \frac{215\,820}{14,69} = 14\,692\text{ N}.$$

Assetto di massima efficienza e pendenza corretta per l'allungamento:

$$C_L^* = \sqrt{\pi AR C_{D0}} = 0,6467, \quad a = \frac{a_\infty}{1 + a_\infty/(\pi AR)} = \frac{5,32}{1,2799} = 4,157/\text{rad}.$$

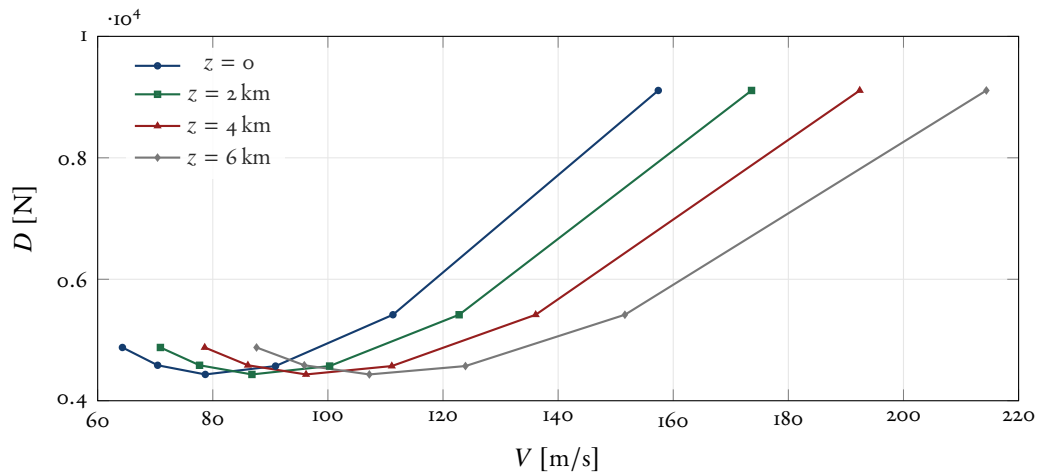


Figura 11. Esercizio 15: al crescere della quota la curva trasla verso destra (stessa D); le velocità critiche (269–289 m/s) si collocano oltre il ramo veloce e decrescono salendo.

Incidenza:

$$\alpha = \frac{C_L^*}{a} = \frac{0,6467}{4,157} = 0,1556 \text{ rad} = 8^\circ 54' 54''.$$

Velocità ($W/S = 2697,75 \text{ N/m}^2$, $1/\sqrt{\sigma} = 1,2896$):

$$V = 1,277 \sqrt{\frac{2697,75}{0,6467}} \cdot 1,2896 = 106,4 \text{ m/s} = 383 \text{ km/h}.$$

Osservazione — Verifica di coerenza

Il valore $E_{\max} = 14,69$ è tipico di un jet di linea con $AR \approx 6$: controllare l'ordine di grandezza dell'efficienza è il primo modo per accorgersi di un errore nei dati o nei calcoli.

5.4 Esercizio 17 — Velocità minima e massima con razzi in quota

Esercizio 17

Determinare $V_{\min}$ e $V_{\max}$ a 12 000 m per un aereo con due razzi di portata in *peso* complessiva $\dot{G} = 24,5 \text{ N/s}$ e $V_e = 1700 \text{ m/s}$. $W = 53955 \text{ N}$, $W/S = 3041 \text{ N/m}^2$, $C_{D0} = 0,019$, $AR = 7,4$.

Svolgimento. La portata è data in peso: la portata massica è $\dot{m} = \dot{G}/g = 24,5/9,8 = 2,5 \text{ kg/s}$. Spinta ed efficienza richiesta:

$$T = \dot{m} V_e = 2,5 \cdot 1700 = 4250 \text{ N}, \quad E = \frac{W}{T} = \frac{53955}{4250} = 12,70.$$

Equazione di equilibrio $C_L/E = C_{D0} + C_L^2/(\pi AR)$:

$$0,043015 C_L^2 - 0,078740 C_L + 0,019 = 0 \implies C_L = \begin{cases} 0,2860 & (V_{\max}) \\ 1,5446 & (V_{\min}). \end{cases}$$

Con $1/\sqrt{\sigma} = 1,9852$ a 12 000 m:

$$V_{\min} = 1,277 \sqrt{\frac{3041}{1,5446}} \cdot 1,9852 = 112,5 \text{ m/s} = 405 \text{ km/h},$$

$$V_{\max} = 1,277 \sqrt{\frac{3041}{0,2860}} \cdot 1,9852 = 261,4 \text{ m/s} = 941 \text{ km/h}.$$

Attenzione — Limite di comprimibilità

A 12 000 m la velocità del suono vale $a \approx 295$ m/s, quindi $V_{\max}$ corrisponde a $Ma \approx 0,89$: siamo in regime transonico, oltre il numero di Mach critico tipico. Il risultato va inteso come limite *aerodinamico* teorico; in pratica interverrebbe prima la resistenza d'onda, non descritta dalla polare parabolica.

5.5 Esercizio 18 — Aereo con razzi: salita in alta quota**Esercizio 18**

Un aereo, portato a 12 000 m, accende due razzi da 1177 N ciascuno per 7 s. Determinare $V_{z,\max}$, l'angolo di rampa, la quota raggiunta e la perdita di peso, con $V_e = 200$ m/s, $W = 9\,025$ N, $W/S = 1\,766$ N/m², $C_{D0} = 0,015$, $AR = 15$.

Svolgimento. Spinta $T = 2 \cdot 1177 = 2\,354$ N; $S = 5,11$ m². A 12 000 m: $1/\sqrt{\sigma} = 1,9852$, $\rho = 0,3108$ kg/m³. Quindi

$$V = \frac{106,5}{\sqrt{C_L}}, \quad D = \frac{1}{2} \rho S C_D V^2 = 0,7942 C_D V^2, \quad C_D = 0,015 + \frac{C_L^2}{47,124}.$$

Tabulando $V_z = (T - D)V/W$:

C_L	V [m/s]	D [N]	V_z [m/s]
0,10	336,8	1370	36,7
0,15	275,0	930	43,4
0,20	238,2	714	43,3
0,30	194,5	508	39,8

Tabella 14. Esercizio 18: velocità ascensionale al variare dell'assetto.

Il massimo è $V_{z,\max} \approx 43,4$ m/s ($C_L \approx 0,15$, $V \approx 275$ m/s); ne segue

$$\sin \gamma = \frac{V_{z,\max}}{V} = \frac{43,4}{275} = 0,1578 \Rightarrow \gamma = 9^\circ 4',$$

$$z_1 = z_0 + V_{z,\max} \Delta t = 12\,000 + 43,4 \cdot 7 = 12\,304 \text{ m}.$$

Perdita di peso ($\dot{m} = T/V_e = 2\,354/200 = 11,77$ kg/s):

$$\Delta W = \dot{m} \Delta t g = 11,77 \cdot 7 \cdot 9,8 = 807 \text{ N} \quad (\approx 82,4 \text{ kg}).$$

Attenzione — Dati schematici, regime transonico

La bassa velocità di efflusso ($V_e = 200$ m/s) rende il consumo di propellente molto elevato; inoltre le velocità di volo risultanti ($V \gtrsim 275$ m/s a 12 000 m, $Ma \gtrsim 0,9$) sono al limite di validità della polare incomprimibile. L'esercizio va inteso come applicazione schematica del metodo, non come caso di volo realistico.

5.6 Esercizio 19 — Odografia V_z – V_x a bassa quota**Esercizio 19**

Tracciare l'odografia V_z – V_x a 2 000 m per un velivolo con turboreattore che a quota zero fornisce:

V [m/s]	60	80	100	120	140	160
T_0 [N]	14 320	14 125	14 125	14 520	15 000	16 100

$W = 117\,720$ N, $W/S = 2\,550$ N/m², $AR = 5,9$, $C_{D0} = 0,021$.

Svolgimento. La spinta a 2 000 m si ottiene da quella a quota zero tramite la funzione di quota ψ_1 ; sulla curva normalizzata del turbogetto (con $\psi_1(0) = 1$ e $\psi_1(3\,000\text{ m}) = 0,782$) si legge $\psi_1(2\,000\text{ m}) \approx 0,855$, da cui $T = 0,855 T_0$. Con $\rho = 1,0066\text{ kg/m}^3$ e $S = 46,16\text{ m}^2$:

$$C_L = \frac{2W}{\rho S V^2} = \frac{5\,067,6}{V^2}, \quad C_D = 0,021 + \frac{C_L^2}{18,535}, \quad D = \frac{1}{2} \rho S C_D V^2 = 23,23 C_D V^2.$$

V	T [N]	C_L	C_D	V_x	V_z [m/s]
60	12 244	1,4077	10 697	60,00	0,788
80	12 077	0,7918	8 151	79,96	2,668
100	12 077	0,5068	8 097	99,94	3,381
120	12 415	0,3519	9 260	119,96	3,216
140	12 825	0,2586	11 204	139,99	1,928
160	13 766	0,1980	13 738	160,00	0,038

Tabella 15. Esercizio 19: costruzione dell'odografa a 2 000 m.

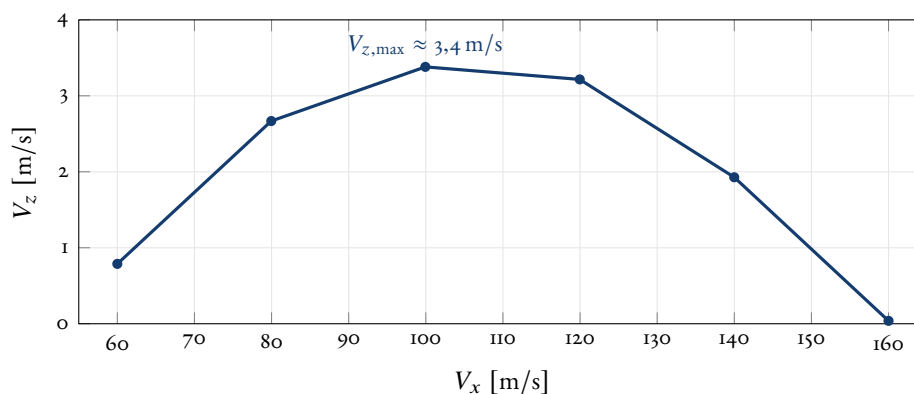


Figura 12. Esercizio 19: odografa della salita a 2 000 m. Il vertice individua la salita più rapida ($V \approx 100\text{ m/s}$); l'estremo destro ($V \approx 160\text{ m/s}$) è prossimo alla velocità massima orizzontale.

Nota — Sulla funzione di quota

Il valore $\psi_1(2\,000\text{ m}) \approx 0,855$ è letto sulla curva normalizzata di variazione della spinta con la quota del turbogetto; sostituendo il valore effettivo della curva del motore in uso, la tabella si aggiorna in modo immediato senza modificare il procedimento.

5.7 Esercizio 20 — Prestazioni complete a quota zero

Esercizio 20

Determinare $V_{\min}$, $V_{\max}$, la massima velocità ascensionale, le velocità di salita rapida e ripida e l'angolo di rampa massimo, a quota zero. $W = 150\,100\text{ N}$, $W/S = 2\,550\text{ N/m}^2$, $AR = 8,3$, $C_{D0} = 0,021$, $C_{L,st} = 1,8$. Spinta:

V [m/s]	50	60	70	80	90	100	110	120
T [N]	10 900	10 500	10 250	10 150	10 300	10 645	11 035	11 480

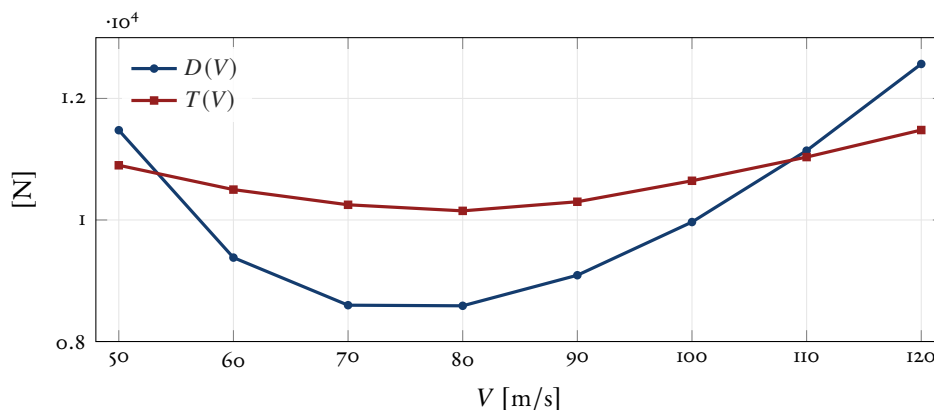
Svolgimento — resistenza e inviluppo. A quota zero $\rho = 1,225\text{ kg/m}^3$, $S = 58,86\text{ m}^2$. In volo orizzontale $C_L = 2(W/S)/(\rho V^2) = 4\,163/V^2$, $C_D = 0,021 + C_L^2/26,075$, $D = \frac{1}{2} \rho S C_D V^2 = 36,05 C_D V^2$.

V [m/s]	50	60	70	80	90	100	110	120
D [N]	11 477	9 381	8 598	8 588	9 091	9 966	11 141	12 567
T [N]	10 900	10 500	10 250	10 150	10 300	10 645	11 035	11 480

Tabella 16. Esercizio 20: resistenza e spinta a quota zero.

Le due intersezioni $D = T$ danno

$$V_{\min} \approx 53 \text{ m/s} = 191 \text{ km/h}, \quad V_{\max} \approx 109 \text{ m/s} = 392 \text{ km/h}.$$

**Figura 13.** Esercizio 20: resistenza e spinta a quota zero; le intersezioni fissano $V_{\min}$ e $V_{\max}$.

Svolgimento — salita. Nell'intervallo di volo si valuta $V_z = (T - D)V/W$:

V [m/s]	60	70	80	90	100
$T - D$ [N]	1 119	1 652	1 562	1 209	679
V_z [m/s]	0,447	0,770	0,833	0,725	0,452

Tabella 17. Esercizio 20: prestazioni di salita a quota zero.

Quindi: $V_{z,\max} = 0,833 \text{ m/s}$ alla **velocità di salita rapida** $V = 80 \text{ m/s} = 288 \text{ km/h}$; la **salita ripida** (massimo $T - D = 1 652 \text{ N}$) cade a $V = 70 \text{ m/s}$, con

$$\sin \gamma_{\max} = \frac{1 652}{150 100} = 0,011 006 \implies \gamma_{\max} = 0^\circ 37' 50''.$$

Osservazione — Prestazioni di salita modeste

L'eccesso di spinta è piccolo rispetto al peso ($T - D \lesssim 1 650 \text{ N}$ contro $W = 150 100 \text{ N}$): ne risultano $V_z < 1 \text{ m/s}$ e $\gamma_{\max} < 1^\circ$. È il comportamento tipico a quota zero di un velivolo pesante e poco spinto: le prestazioni di salita migliorano se si alleggerisce il velivolo o si aumenta la spinta installata.

5.8 Esercizio 21 — Spinta necessaria per una salita assegnata

Esercizio 21

Calcolare la spinta necessaria a salire a 9 300 m con velocità 630 km/h e angolo di rampa $\gamma = 13^\circ 25'$, per un velivolo con $W = 93 200 \text{ N}$, $W/S = 3 040 \text{ N/m}^2$, $AR = 6,1$, $C_{D0} = 0,021$.

Svolgimento. $V = 175 \text{ m/s}$; $\cos \gamma = 0,97270$, $\sin \gamma = 0,23205$; a 9300 m $\rho = 0,4497 \text{ kg/m}^3$, $S = 30,66 \text{ m}^2$.
Dalla prima equazione della salita $L = W \cos \gamma$:

$$C_L = \frac{2(W/S) \cos \gamma}{\rho V^2} = \frac{2 \cdot 3040 \cdot 0,97270}{0,4497 \cdot 175^2} = 0,42942,$$

$$C_D = 0,021 + \frac{C_L^2}{\pi \cdot 6,1} = 0,030622, \quad D = \frac{1}{2} \rho S C_D V^2 = 6465 \text{ N}.$$

Dalla seconda equazione $T = D + W \sin \gamma$:

$$T = 6465 + 93200 \cdot 0,23205 = 6465 + 21627 = 28092 \text{ N}.$$

Strategia risolutiva — Spinta di salita in due contributi

La spinta necessaria in salita è sempre la somma di due termini: la *resistenza* D (contro cui vince anche il volo orizzontale) e la *componente del peso lungo la traiettoria* $W \sin \gamma$. Qui il secondo contributo (21 627 N) domina il primo (6 465 N): a rampe ripide è il peso, non la resistenza, a chiedere la spinta.

5.9 Esercizio 22 — Angolo di rampa per approssimazioni successive

Esercizio 22

A 3200 m un velivolo sale con $C_L = 0,25$ e spinta $T = 14715 \text{ N}$. Determinare l'angolo di rampa. $W = 48100 \text{ N}$, $W/S = 2750 \text{ N/m}^2$, $C_{D0} = 0,022$, $AR = 8,4$.

Svolgimento. Poiché γ è incognito, e $L = W \cos \gamma$ dipende da esso, si procede per approssimazioni successive. A 3200 m $1/\sqrt{\sigma} = 1,1729$, $\rho = 0,8905 \text{ kg/m}^3$, $S = 17,49 \text{ m}^2$; inoltre $C_D = 0,022 + 0,25^2/(\pi \cdot 8,4) = 0,024368$.
Prima approssimazione ($\cos \gamma \approx 1$):

$$V = 1,277 \sqrt{\frac{2750}{0,25}} \cdot 1,1729 = 157,1 \text{ m/s}, \quad D = \frac{1}{2} \rho S C_D V^2 = 4684 \text{ N},$$

$$\sin \gamma = \frac{T - D}{W} = \frac{14715 - 4684}{48100} = 0,20855 \Rightarrow \gamma \approx 12^\circ 2'.$$

Seconda approssimazione ($\cos \gamma = 0,978$, quindi $V = 157,1 \sqrt{0,978} = 155,4 \text{ m/s}$):

$$D = 4584 \text{ N}, \quad \sin \gamma = \frac{14715 - 4584}{48100} = 0,21063 \Rightarrow \boxed{\gamma \approx 12^\circ 10'}.$$

Una terza iterazione lascia γ invariato al primo minuto: il procedimento è convergente.

Osservazione — Perché iterare

Trascurare $\cos \gamma$ sovrastima leggermente la velocità e la resistenza; qui la correzione sposta γ di circa $8'$. Per rampe modeste una sola iterazione basta; per rampe ripide ($\gamma > 20^\circ$) le iterazioni diventano indispensabili perché $\cos \gamma$ si discosta sensibilmente da 1.

5.10 Esercizio 23 — Quota di tangenza teorica

Esercizio 23

Determinare la quota di tangenza teorica di un velivolo con $W = 82400 \text{ N}$, $C_{D0} = 0,016$, $b = 14 \text{ m}$, $S = 28 \text{ m}^2$, spinta a quota zero $T_{s,0} = 9465 \text{ N}$.

Svolgimento. Allungamento $AR = b^2/S = 196/28 = 7,0$; efficienza massima

$$E_{\max} = 0,886 \sqrt{\frac{7,0}{0,016}} = 18,53.$$

Alla tangenza teorica la spinta disponibile eguaglia la resistenza minima; con il coefficiente 1,16 che tiene conto dell'assetto di salita si richiede

$$\psi_1(z) = 1,16 \frac{W/E_{\max}}{T_{s,0}} = 1,16 \cdot \frac{82\,400/18,53}{9\,465} = 0,545.$$

Sulla curva normalizzata di variazione della spinta con la quota ($\psi_1 \approx \sigma^{0,82}$, che riproduce i valori noti a 3 000 e 6 000 m) l'uguaglianza $\psi_1 = 0,545$ dà $\sigma \approx 0,479$, cioè

$$z_{\text{teorica}} \approx 7\,000 \text{ m}.$$

Osservazione — Lettura del risultato

La quota di tangenza teorica è quella a cui $V_{z,\max} \rightarrow 0$: il velivolo può avvicinarsi solo asintoticamente. La *tangenza pratica* (dove $V_{z,\max} = 0,5 \text{ m/s}$) si colloca qualche centinaio di metri più in basso ed è la quota operativa di riferimento.

5.11 Esercizio 24 — Tempo di salita e successiva planata

Esercizio 24

Un velivolo ha tangenza pratica $z_p = 4\,200 \text{ m}$ e la seguente $V_{z,\max}$ in funzione della quota:

$z \text{ [m]}$	0	1000	2000	3000	4000
$V_{z,\max} \text{ [m/s]}$	9,9	8,4	6,3	3,9	1,2

Calcolare il tempo di salita fino a z_p ; quindi, spenti i motori a z_p , la massima distanza raggiungibile planando fino al campo posto a 350 m, con $C_{D_0} = 0,019$, $AR = 9,3$.

Svolgimento — tempo di salita. Il tempo si ottiene integrando $dt = dz/V_z$ per intervalli, con V_z medio su ciascun tratto (a z_p si assume $V_{z,\max} = 0,5 \text{ m/s}$, per definizione di tangenza pratica):

Tratto [m]	$\bar{V}_z \text{ [m/s]}$	$\Delta z \text{ [m]}$	$\Delta t \text{ [s]}$
0 $\rightarrow$ 1000	9,15	1 000	109,3
1000 $\rightarrow$ 2000	7,35	1 000	136,1
2000 $\rightarrow$ 3000	5,10	1 000	196,1
3000 $\rightarrow$ 4000	2,55	1 000	392,2
4000 $\rightarrow$ 4200	0,85	200	235,3
$t = 1\,069,0$			

Tabella 18. Esercizio 24: integrazione per intervalli del tempo di salita.

Dunque $t = 1\,069 \text{ s} = 17' 49''$.

Svolgimento — planata. A motori spenti la massima distanza è $x = E_{\max} \Delta h$, con $\Delta h = z_p - 350 \text{ m} = 3\,850 \text{ m}$ e

$$E_{\max} = 0,886 \sqrt{\frac{9,3}{0,019}} = 19,60 \implies x = 19,60 \cdot 3\,850 \approx 75,5 \text{ km}.$$

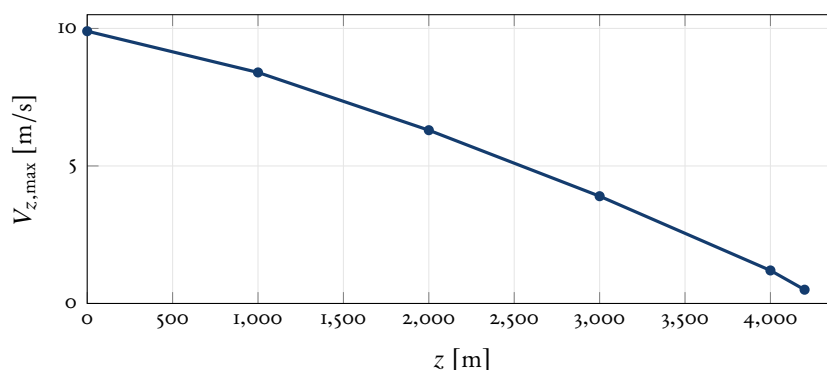


Figura 14. Esercizio 24: la velocità ascensionale massima decresce con la quota e si annulla (praticamente) alla tangenza; l'area sottesa da $1/V_{z,max}$ — non da $V_{z,max}$ — misura il tempo di salita, che perciò cresce rapidamente presso la tangenza.

Osservazione — Dove si spende il tempo

Oltre metà del tempo (≈ 627 s sui 1069) si consuma negli ultimi 1200 m, dove $V_{z,max}$ crolla: presso la tangenza salire diventa lentissimo. È la ragione pratica per cui si vola in crociera a quote inferiori alla tangenza teorica.

5.12 Esercizio 25 — Spinta e consumo in funzione della quota

Esercizio 25

Tracciare spinta e consumo specifico in funzione della quota, a velocità costante $V = 540$ km/h e regime $n = 7700$ rpm ($n_o = 7000$ rpm), per un turbogetto con $T_{s,o} = 22560$ N e $k_{s,o} = 0,109$.

Impostazione. Spinta e consumo di un turbogetto si compongono di tre effetti indipendenti — regime n/n_o , velocità V e quota z — tramite le funzioni caratteristiche normalizzate:

$$T(z) = \underbrace{T_{s,o} \varphi_1(n/n_o)}_{\text{costante}} \chi_1(V) \psi_1(z), \quad k(z) = \underbrace{k_{s,o} \varphi_2(n/n_o)}_{\text{costante}} \chi_2(V) \psi_2(z).$$

Con $V = 150$ m/s e $n/n_o = 1,10$ i fattori dipendenti da V valgono $\chi_1 \approx 0,836$ e $\chi_2 = 1 + 0,002V = 1,30$; il fattore di regime del consumo è $\varphi_2(1,10) \approx 1,019$. La dipendenza dalla quota è tutta nei fattori $\psi_1(z)$ e $\psi_2(z)$: il primo fa *decrescere* la spinta con la quota (meno aria), il secondo modula debolmente il consumo. Adottando per la spinta la legge normalizzata $\psi_1 \approx \sigma^{0,82}$ si ottiene l'andamento:

z [m]	σ	$\psi_1(z) \approx \sigma^{0,82}$
0	1,000 0	1,000
3 000	0,742 2	0,782
6 000	0,538 9	0,601
9 000	0,381 3	0,449
11 000	0,297 1	0,365

Tabella 19. Esercizio 25: andamento normalizzato della spinta con la quota. La spinta effettiva è $T(z) = T_{s,o} \varphi_1(1,10) 0,836 \cdot \psi_1(z)$.

Attenzione — Chiusura numerica

La curva assoluta di spinta richiede il fattore di regime $\varphi_1(n/n_o)$ letto a $n/n_o = 1,10$, e la curva del consumo richiede la funzione di quota $\psi_2(z)$; entrambi si leggono sulle curve caratteristiche del motore in uso e

non sono deducibili dai soli dati dell'enunciato. Fornite quelle due letture, le due colonne di $T(z)$ e $k(z)$ si completano moltiplicando i fattori costanti sopra indicati per $\psi_1(z)$ e $\psi_2(z)$.

5.13 Esercizio 26 — Consumo e distanza in crociera

Esercizio 26

In crociera a 7 200 m, $V = 620$ km/h, regime $n = 9\,300$ rpm ($n_0 = 10\,000$ rpm), determinare la distanza percorsa e il combustibile consumato in 10 min. $W = 156\,000$ N, $W/S = 3\,040$ N/m², $C_{D0} = 0,021$, $AR = 9,3$, $k_{s,0} = 0,103$.

Svolgimento — distanza e spinta. $V = 172,22$ m/s, $t = 600$ s; la distanza è

$$x = V t = 172,22 \cdot 600 = 103,3 \text{ km.}$$

A 7 200 m $\rho = 0,5761$ kg/m³, $S = 51,32$ m²; in crociera

$$C_L = \frac{2(W/S)}{\rho V^2} = 0,35584, \quad C_D = 0,021 + \frac{C_L^2}{\pi \cdot 9,3} = 0,025334,$$

$$E = \frac{C_L}{C_D} = 14,046, \quad T = D = \frac{W}{E} = \frac{156\,000}{14,046} = 11\,106 \text{ N.}$$

Svolgimento — consumo. Il consumo specifico è $k = k_{s,0} \varphi_2(n/n_0) \psi_2(z) \chi_2(V)$. Con $n/n_0 = 0,93$ si ha $\varphi_2 \approx 1,004$; a $V = 172,2$ m/s, $\chi_2 = 1 + 0,002V = 1,344$; per la quota si assume $\psi_2(7\,200 \text{ m}) \approx 0,90$ (il fattore di quota del consumo varia lentamente ed è prossimo al valore a 6 000 m). Quindi

$$k \approx 0,103 \cdot 1,004 \cdot 0,90 \cdot 1,344 = 0,1251 \left[\frac{\text{kg}}{\text{N h}} \right],$$

$$m_c = k T t = 0,1251 \cdot 11\,106 \cdot \frac{600}{3\,600} \approx 232 \text{ kg.}$$

Attenzione — Sul fattore di quota del consumo

Il valore $\psi_2(7\,200 \text{ m}) \approx 0,90$ è stimato per continuità dalla curva del motore; il combustibile m_c va quindi inteso come stima d'ordine di grandezza. La distanza (103 km) e la spinta (11 106 N) sono invece esatte, perché discendono solo dalla geometria del volo e dall'aerodinamica. Con il valore effettivo di $\psi_2(7\,200 \text{ m})$ letto sulla curva del motore, m_c si aggiorna immediatamente.

6 Formulario riassuntivo

— fine della monografia —

Le figure prodotte sono generate nativamente in pgfplots dai dati degli esercizi e sono quindi modificabili direttamente nel sorgente.

A Le funzioni caratteristiche del turbogetto

La spinta e il consumo specifico di un turbogetto non sono costanti: dipendono dal regime di rotazione n , dalla velocità di volo V_0 e dalla quota z . Per non dover ricostruire ogni volta il ciclo termodinamico, la pratica progettuale riassume queste dipendenze in un insieme di *funzioni caratteristiche adimensionali*, ciascuna *normalizzata a 1 nella condizione di riferimento*. Note la spinta statica al banco $T_{s,0}$ e il consumo specifico statico $k_{s,0}$ (misurati a quota zero, velocità nulla e regime di progetto n_0), la spinta e il consumo in una qualunque condizione di volo si ottengono per semplice prodotto:

$$T = T_{s,0} \varphi_1\left(\frac{n}{n_0}\right) \chi_1(V_0) \psi_1(z), \quad k = k_{s,0} \varphi_2\left(\frac{n}{n_0}\right) \chi_2(V_0). \quad (25)$$

Grandezza / condizione	Relazione
Equilibrio orizzontale	$L = W, \quad T = D$
Equilibrio in salita	$T = D + W \sin \gamma, \quad L = W \cos \gamma$
Polare (Prandtl)	$C_D = C_{D0} + \frac{i C_L^2}{\pi AR}$
Efficienza massima	$E_{\max} = 0,886 \sqrt{AR/C_{D0}}, \quad C_L^* = \sqrt{\pi AR C_{D0}}$
Velocità (oriz.)	$V = 1,277 \sqrt{(W/S)/C_L} / \sqrt{\sigma}$
Resistenza	$D = \frac{1}{2} \rho S C_D V^2, \quad D_{\min} = W/E_{\max}$
Effetto quota su $D(V)$	$D_z = D_0, \quad V_z^{(\text{punto})} = V_0 / \sqrt{\sigma}$
Velocità critica	$V_{cr} = a Ma_{cr}$
Spinta a getto	$T = \dot{m}(V_e - V_0) [+(p_e - p_0)A_e]; \quad \text{razzo: } T = \dot{m}V_e$
Spinta turboreattore	$T = T_{s,0} \varphi_1(n) \psi_1(z) \chi_1(V)$
Consumo specifico	$k = k_{s,0} \varphi_2(n) \psi_2(z) \chi_2(V)$
Salita	$\sin \gamma = (T - D)/W, \quad V_z = (T - D)V/W, \quad V_x = V \cos \gamma$
Quota di tangenza teorica	$\psi_1(z) = 1,16 \frac{W}{E_{\max}} \frac{1}{T_{s,0}}$
Tangenza pratica	$V_{z,\max} = 0,5 \text{ m/s}$
Tempo di salita	$\Delta t = \Delta z / (V_{z,\max})_m$
Consumo	$m_c = k T t, \quad t = s/V, \quad T = D = W/E$

Tabella 20. Formule di uso ricorrente negli esercizi sul velivolo a reazione.

Osservazione — Perché il metodo funziona

Le tre variabili — regime, velocità, quota — agiscono su meccanismi fisici distinti e in buona approssimazione indipendenti: il regime governa la portata d'aria e il rapporto di compressione, la velocità introduce la resistenza di presa dinamica (*ram drag*) e il recupero di pressione dinamica, la quota fissa densità e temperatura dell'aria ingerita. Poiché gli effetti si moltiplicano, ciascuno può essere tabulato una volta per tutte e riusato: è la stessa logica dei coefficienti correttivi che in aerodinamica separano l'effetto di α , di Ma e di Re .

Nota — Velocità di riferimento della correlazione

Nelle funzioni di velocità χ_1 e χ_2 compare una *velocità di riferimento* $V_R = 500 \text{ m/s}$, parametro empirico proprio del motore. Non va confusa con il peso W : è una scala di velocità che fissa la rapidità con cui gli effetti dinamici crescono con V_0 .

A.1 Spinta e regime: la funzione $\varphi_1(n)$

Definizione — Funzione di regime della spinta

$$\varphi_1(n) = \left(\frac{n}{n_0} \right)^{3,5}. \quad (26)$$

La spinta cresce con la potenza 3,5 del rapporto di giri: un aumento del regime dilata sia la portata d'aria (grosso modo proporzionale a n) sia il rapporto di compressione (che scala con n^2), e i due effetti si combinano nell'esponente empirico 3,5. La crescita è quindi molto ripida: portare il regime dal 90 % al 110 % di n_0 più che raddoppia la spinta (da 0,6916 a 1,3960).

n/n_o	φ_1	n/n_o	φ_1
0,5	0,088 4	1,1	1,396 0
0,6	0,167 3	1,2	1,892 9
0,7	0,287 0	1,3	2,505 0
0,8	0,457 9	1,4	3,246 7
0,9	0,691 6	1,5	4,133 5
1,0	1,000 0		

Tabella 21. Funzione di regime della spinta $\varphi_1(n) = (n/n_o)^{3.5}$.

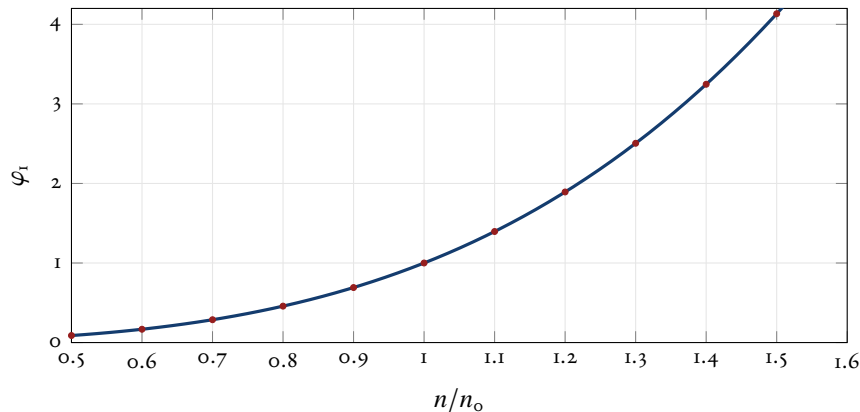


Figura 15. $\varphi_1(n)$: la spinta cresce con $n^{3.5}$; i punti riproducono la Tabella 21.

A.2 Spinta e velocità: la funzione $\chi_1(V_o)$

Definizione — Funzione di velocità della spinta

$$\chi_1(V_o) = 1 - \frac{V_o}{V_R} + \frac{1}{2} \frac{\rho_o}{p_o} V_o^2 \left[1 - \left(\frac{V_o}{V_R} \right)^4 \right], \quad V_R = 500 \text{ m/s.} \quad (27)$$

Il termine $-V_o/V_R$ è la *resistenza di presa*: l'aria entra già dotata di quantità di moto, che va sottratta a quella espulsa, e la spinta netta cala. Il termine con $\frac{1}{2} \rho_o V_o^2 / p_o = q_o / p_o$ è il *recupero di pressione dinamica* in presa: a velocità elevata la compressione a monte del compressore restituisce parte della spinta. La combinazione dà una curva *decescente* fino a un minimo intorno a $V_o \approx 170 \text{ m/s}$ ($\chi_1 \approx 0,8325$), oltre il quale il recupero dinamico prevale e χ_1 risale lievemente.

V_o [m/s]	χ_1	V_o [m/s]	χ_1
0	1,000 0	110	0,853 0
10	0,980 6	120	0,846 8
20	0,962 4	130	0,841 8
30	0,945 4	140	0,837 9
40	0,929 7	150	0,835 0
50	0,915 1	160	0,833 3
60	0,901 8	170	0,832 5
70	0,889 6	180	0,832 7
80	0,878 7	190	0,833 9
90	0,869 0	200	0,835 8
100	0,860 4		

Tabella 22. Funzione di velocità della spinta $\chi_1(V_o)$ (ρ_o/p_o valutato a quota zero).

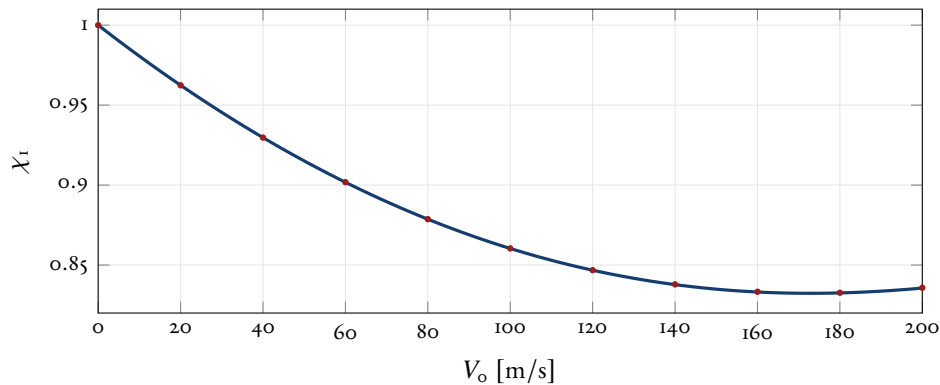


Figura 16. $\chi_1(V_0)$: la spinta cala con la velocità (resistenza di presa), con minimo attorno a 170 m/s e leggera risalita per recupero dinamico.

A.3 Spinta e quota: la funzione $\psi_1(z)$

Definizione — Funzione di quota della spinta

$$\psi_1(z) = \frac{p}{p_o} \left(\frac{T_o}{T} \right)^{1.75}, \quad (28)$$

con p, T pressione e temperatura dell'atmosfera standard alla quota z .

La spinta diminuisce con la quota perché scende la densità dell'aria ingerita: domina il rapporto di pressione p/p_o . Il fattore $(T_o/T)^{1.75}$ attenua in parte la caduta, perché l'aria più fredda in quota è più densa a parità di pressione. Al di sopra della tropopausa (11 km) la temperatura resta costante e la pressione decade in modo esponenziale: la curva cambia pendenza (si nota il ginocchio a 11 km) e la spinta crolla più rapidamente.

z [km]	ψ_1	z [km]	ψ_1
0	1,000 0	11	0,384 3
1	0,923 2	12	0,314 1
2	0,850 5	13	0,268 3
3	0,782 1	14	0,229 1
4	0,717 8	15	0,195 8
5	0,657 2	16	0,167 1
6	0,600 3	17	0,142 7
7	0,547 2	18	0,121 9
8	0,497 5	19	0,104 1
9	0,451 1	20	0,089 0
10	0,407 9		

Tabella 23. Funzione di quota della spinta $\psi_1(z) = (p/p_o)(T_o/T)^{1.75}$.

A.4 Consumo e regime: la funzione $\varphi_2(n)$

Definizione — Funzione di regime del consumo specifico

$$\varphi_2(n) = 1 + \left(\frac{n_o}{n} - 1 \right)^2. \quad (29)$$

Il consumo specifico è *minimo al regime di progetto* $n = n_o$, dove $\varphi_2 = 1$: è lì che il motore lavora nel punto di massimo rendimento. Ogni scostamento — in difetto o in eccesso di giri — peggiora il rendimento e fa salire

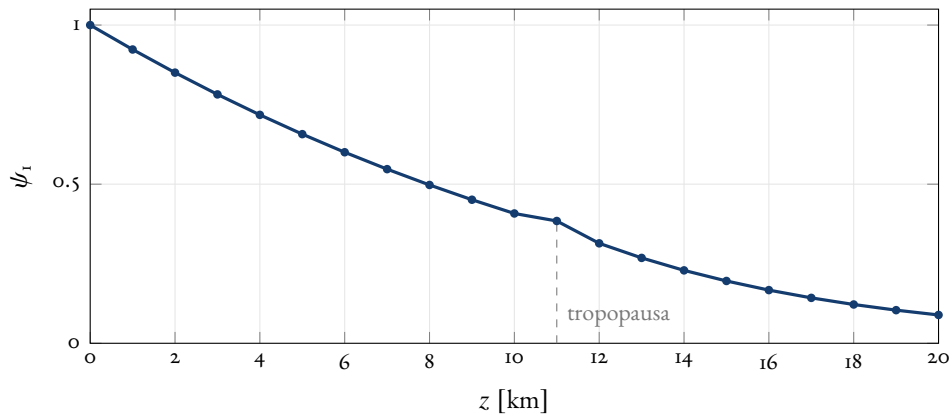


Figura 17. $\psi_1(z)$: la spinta decade con la quota; oltre la tropopausa (11 km) la caduta si fa più ripida.

φ_2 ; la penalizzazione è però fortemente asimmetrica, molto più severa ai bassi regimi (a $n = 0,5 n_0$ il consumo raddoppia) che agli alti.

n/n_0	φ_2	n/n_0	φ_2
0,5	2,000 0	1,1	1,008 3
0,6	1,444 4	1,2	1,027 8
0,7	1,183 7	1,3	1,053 3
0,8	1,062 5	1,4	1,081 6
0,9	1,012 3	1,5	1,111 1
1,0	1,000 0		

Tabella 24. Funzione di regime del consumo specifico $\varphi_2(n) = 1 + (n_0/n - 1)^2$.

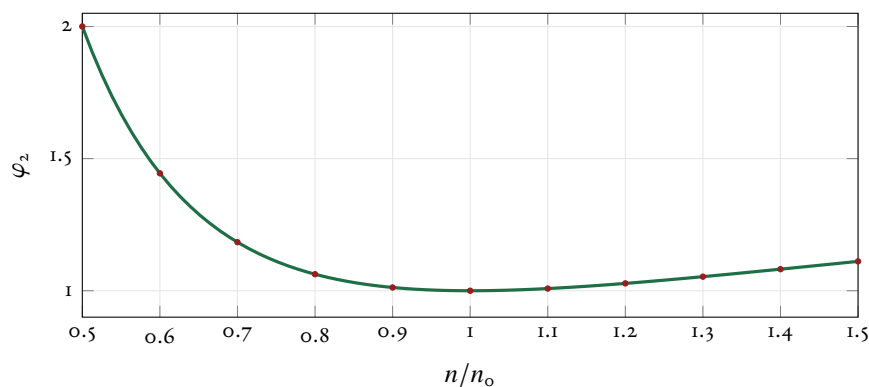


Figura 18. $\varphi_2(n)$: minimo al regime di progetto, con penalizzazione asimmetrica (più severa ai bassi regimi).

A.5 Consumo e velocità: la funzione $\chi_2(V_0)$

Definizione — Funzione di velocità del consumo specifico

$$\chi_2(V_0) = 1 + \frac{V_0}{V_R}, \quad V_R = 500 \text{ m/s.} \quad (30)$$

Il consumo specifico cresce *linearmente* con la velocità di volo. La lettura è coerente con χ_1 : a velocità crescente la spinta netta diminuisce (per la resistenza di presa) mentre la portata di combustibile resta pressoché invariata, sicché il combustibile speso per unità di spinta e di tempo aumenta. La pendenza è $1/V_R$; una velocità di riferimento diversa (ad esempio $V_R = 550 \text{ m/s}$) darebbe una retta meno inclinata.

V_o [m/s]	χ_2	V_o [m/s]	χ_2
0	1,00	110	1,22
10	1,02	120	1,24
20	1,04	130	1,26
30	1,06	140	1,28
40	1,08	150	1,30
50	1,10	160	1,32
60	1,12	170	1,34
70	1,14	180	1,36
80	1,16	190	1,38
90	1,18	200	1,40
100	1,20		

Tabella 25. Funzione di velocità del consumo specifico $\chi_2(V_o) = 1 + V_o/V_R$.

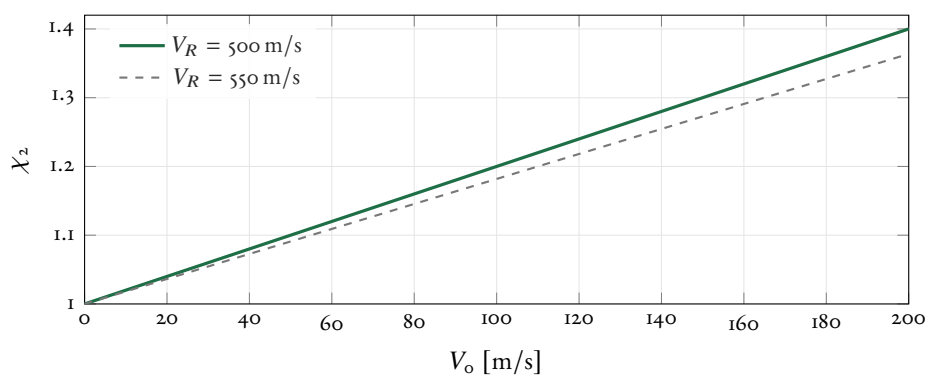


Figura 19. $\chi_2(V_o)$: crescita lineare del consumo specifico con la velocità; la pendenza dipende dalla velocità di riferimento V_R .

A.6 Composizione delle funzioni: un esempio

Le cinque funzioni si compongono secondo la (25). Un esempio numerico chiarisce l'uso.

Strategia risolutiva — Spinta e consumo in una condizione di volo

Un turbogetto con $T_{s,o} = 40\,000\text{ N}$ e $k_{s,o} = 0,09\text{ kg}/(\text{N h})$ vola a $V_o = 150\text{ m/s}$, $z = 6\text{ km}$, regime $n/n_o = 1,10$. Dalle tabelle: $\varphi_1 = 1,396\,0$, $\chi_1 = 0,835\,0$, $\psi_1 = 0,600\,3$; $\varphi_2 = 1,008\,3$, $\chi_2 = 1,30$. Quindi

$$T = 40\,000 \cdot 1,396\,0 \cdot 0,835\,0 \cdot 0,600\,3 \approx 27\,990\text{ N},$$

$$k = 0,09 \cdot 1,008\,3 \cdot 1,30 \approx 0,118\text{ kg}/(\text{N h}).$$

I valori sono ottenuti *senza* ricalcolare il ciclo: bastano le funzioni caratteristiche e le due grandezze statiche di riferimento.

Osservazione — Ordine di lettura consigliato

Nei problemi di prestazione conviene sempre partire da regime e velocità (fattori φ e χ , che restano costanti in crociera a velocità e giri fissi) e affidare alla sola $\psi_1(z)$ la dipendenza dalla quota: è così che, ad esempio, si costruiscono le curve di spinta disponibile alle varie quote da sovrapporre alla curva di resistenza del velivolo.