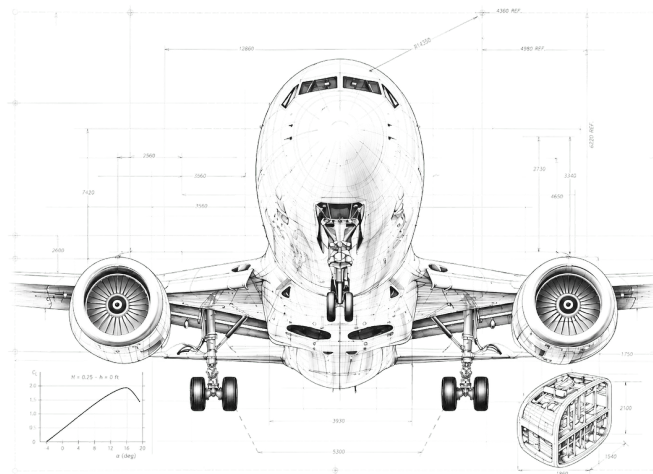


Il volo librato

Planata, autonomia ed influenza del vento



Prof. Ing. Biagio Raucci

Istituto Tecnico – Trasporti e Logistica
Costruzione Aeronautiche

Indice

1	Introduzione: il volo senza propulsione	2
2	Le equazioni di equilibrio del volo librato	2
3	L'angolo di planata e l'efficienza aerodinamica	4
4	La velocità di planata	4
5	La velocità verticale di discesa (rateo di discesa)	5
6	L'autonomia di distanza in aria calma	6
7	Gli assetti caratteristici della planata	7
7.1	Massima autonomia di distanza: l'assetto di massima efficienza	7
7.2	Massima autonomia di durata: l'assetto di minima potenza	8
8	La curva odografa (polare delle velocità)	8
9	Effetto del peso sulla curva odografa	10
10	Discesa a velocità equivalente costante: il tempo di planata	10
11	L'influenza del vento sull'autonomia di distanza	12
12	L'influenza del vento sulla curva odografa	13
13	Effetto del peso in presenza di vento	15
14	Quadro riassuntivo operativo	15
	Appendice – Formulario e notazione	17

1 Introduzione: il volo senza propulsione

Si definisce *volo librato* (o *volo planato*, in inglese *gliding flight*) la condizione di volo rettilineo, uniforme e *non propulso*: il velivolo discende lungo una traiettoria inclinata sull'orizzontale con velocità costante in modulo e direzione, mentre l'impianto propulsivo non eroga alcuna spinta. È la condizione tipica dell'aliante, ma riguarda da vicino anche il velivolo a motore in tutte le fasi in cui la manetta è chiusa: la discesa di avvicinamento, la fase finale prima dell'atterraggio e, soprattutto, la condizione di emergenza che segue una piantata di motore. Per questa ragione il volo librato è un argomento al tempo stesso *teorico* e profondamente *operativo*: comprenderlo significa saper rispondere a domande concrete come “da questa quota, e con questo velivolo, fin dove posso arrivare planando?” oppure “per restare in aria il più a lungo possibile, quale assetto devo tenere?”.

Il punto di partenza naturale è la trattazione del volo in salita. In una salita stabilizzata, con traiettoria inclinata di un angolo θ sull'orizzontale, l'equilibrio delle forze lungo e perpendicolarmente alla traiettoria si scrive

$$T = D + W \sin \theta, \quad L = W \cos \theta, \quad (1)$$

dove T è la spinta, D la resistenza, L la portanza e W il peso. In salita la spinta non deve soltanto vincere la resistenza, ma sostenere anche una componente del peso: ecco perché salire “costa” in termini di spinta. Il volo librato si ottiene da queste stesse equazioni nel *caso limite* in cui la spinta si annulla,

$$T = 0. \quad (2)$$

Quando questo accade, l'angolo di traiettoria diventa *negativo* (il velivolo scende) e il ruolo che in salita era della spinta passa interamente alla componente del peso lungo la traiettoria: è la gravità, ora, a “trascinare in avanti” il velivolo e a vincere la resistenza aerodinamica. Studiare il volo librato significa dunque studiare come un velivolo trasforma la propria energia potenziale (la quota) in lavoro contro la resistenza, mantenendo intanto la portanza necessaria a sostenersi.

Perché il volo librato è un caso “pulito”

L'assenza di propulsione elimina dal problema l'unica variabile difficile da modellare con precisione, cioè la spinta disponibile, che dipende dal motore, dal regime, dalla quota e dalla velocità. Restano in gioco soltanto tre forze — peso, portanza, resistenza — e la pura aerodinamica del velivolo. Per questo il volo librato consente di ricavare risultati *in forma chiusa*, eleganti e di grande valore concettuale: come vedremo, l'angolo di discesa dipende soltanto dall'efficienza aerodinamica, e la distanza percorsa al suolo in aria calma è addirittura indipendente dal peso.

2 Le equazioni di equilibrio del volo librato

Consideriamo il velivolo come un punto materiale e adottiamo una terna di assi vento, con un asse diretto lungo la traiettoria di volo (direzione della velocità V) e l'altro ad essa perpendicolare. Sul velivolo agiscono soltanto il peso W (verticale, rivolto verso il basso), la portanza L (perpendicolare alla velocità) e la resistenza D (parallela alla velocità e di verso opposto al moto). Indichiamo con γ_d l'angolo che la traiettoria forma con l'orizzontale; per convenzione, in discesa esso è *negativo*:

$$\gamma_d < 0 \quad (\text{angolo di planata}). \quad (3)$$

Ponendo $T = 0$ nelle equazioni di equilibrio della salita (1) e ricordando che ora l'angolo di traiettoria è γ_d , otteniamo le due equazioni cardine del volo librato:

Equilibrio del volo librato

$$L = W \cos \gamma_d, \quad D = -W \sin \gamma_d. \quad (4)$$

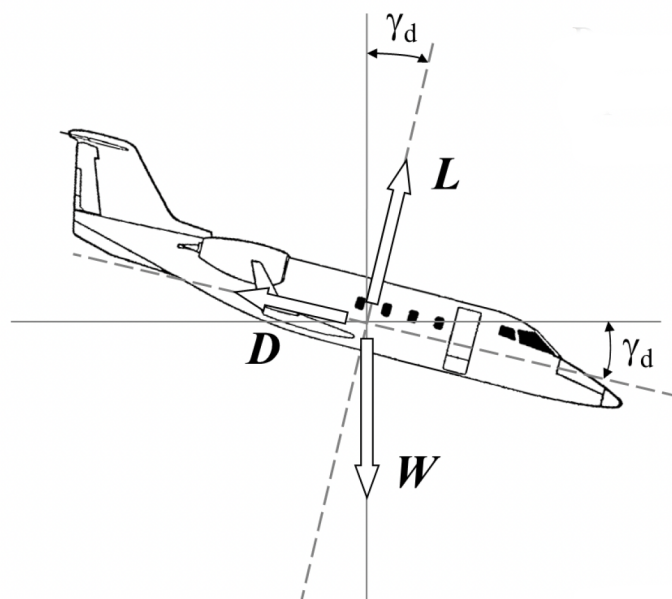


Figura 1. Schema delle forze nel volo librato: peso W , portanza L e resistenza D su un velivolo in discesa con angolo di planata $\gamma_d < 0$. La portanza è perpendicolare alla velocità V , la resistenza è ad essa parallela.

Soffermiamoci sul significato fisico di queste due relazioni, perché in esse è racchiusa l'intera fisica del problema.

La prima equazione, $L = W \cos \gamma_d$. La portanza non equilibra l'intero peso, ma soltanto la sua componente perpendicolare alla traiettoria. Poiché in planata gli angoli sono piccoli (tipicamente pochi gradi), $\cos \gamma_d \approx 1$ e dunque, con ottima approssimazione, $L \approx W$: il velivolo in planata si sostiene quasi esattamente come in volo livellato. Questo è un punto importante e talvolta controintuitivo per lo studente: anche se “sta cadendo”, l'aliante è perfettamente sostenuto dall'aria, esattamente come un velivolo in crociera.

La seconda equazione, $D = -W \sin \gamma_d$. Poiché $\gamma_d < 0$, il termine $-\sin \gamma_d$ è positivo e l'uguaglianza ha senso fisico: la resistenza aerodinamica è equilibrata dalla componente del peso lungo la traiettoria. È questa componente, e non un motore, a “spingere” il velivolo. Tanto più ripida è la discesa (cioè tanto più grande è $|\gamma_d|$), tanto maggiore è la componente di peso disponibile a vincere la resistenza.

La polare in traiettoria inclinata si usa “come in volo livellato”

Si potrebbe obiettare che, essendo $L = W \cos \gamma_d < W$, il coefficiente di portanza richiesto, e con esso la resistenza indotta, siano leggermente diversi rispetto al volo livellato alla stessa velocità. Il calcolo mostra però che, per gli angoli tipici della planata ($|\gamma_d| < 10^\circ \div 15^\circ$), la correzione introdotta dal fattore $\cos^2 \gamma_d$ sulla resistenza indotta è dell'ordine del $2 \div 3\%$: una differenza ingegneristicamente trascurabile. Possiamo perciò impiegare la *stessa* polare aerodinamica parabolica del volo livellato,

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi A R e},$$

dove C_{D_0} è il coefficiente di resistenza a portanza nulla, AR l'allungamento alare ed e il fattore di Oswald. Questa semplificazione è alla base di tutte le formule che seguono.

3 L'angolo di planata e l'efficienza aerodinamica

Dividendo membro a membro le due equazioni di equilibrio (4) otteniamo immediatamente

$$\frac{D}{L} = \frac{-W \sin \gamma_d}{W \cos \gamma_d} = -\tan \gamma_d. \quad (5)$$

Per i piccoli angoli tipici della planata possiamo confondere la tangente con l'argomento, $\tan \gamma_d \simeq \gamma_d$, e ricordando che l'efficienza aerodinamica è il rapporto $E = L/D = C_L/C_D$, si arriva alla relazione più importante di tutta la trattazione:

Angolo di planata ed efficienza

$$\tan \gamma_d \simeq \gamma_d = -\frac{D}{L} = -\frac{1}{E}. \quad (6)$$

Il risultato è notevole per la sua semplicità: *l'angolo di planata dipende soltanto dall'efficienza aerodinamica*. Non dipende dal peso, non dipende dalla quota, non dipende dalla superficie alare; dipende unicamente dall'assetto al quale si vola, perché è l'assetto (cioè l'angolo d'attacco, e quindi C_L) a fissare il valore di E . Volare al massimo dell'efficienza significa planare con l'angolo più dolce possibile.

Due velivoli a confronto

Per fissare le idee con dei numeri, immaginiamo due velivoli con efficienze molto diverse e calcoliamo l'angolo di planata corrispondente al loro assetto di massima efficienza (i valori sono assunti come puramente indicativi, a scopo didattico).

- Un aliante da prestazione con $E_{\max} = 40$: $\gamma_d = -\frac{1}{40} = -0,025 \text{ rad} \simeq -1,4^\circ$.
- Un piccolo velivolo da turismo con $E_{\max} = 10$: $\gamma_d = -\frac{1}{10} = -0,10 \text{ rad} \simeq -5,7^\circ$.

L'aliante scende lungo una traiettoria quasi orizzontale; il velivolo da turismo, a parità di assetto ottimale, scende quattro volte più ripido. È esattamente la differenza che si percepisce osservando un aliante che "galleggia" nell'aria rispetto a un monomotore che, a motore spento, "viene giù" deciso.

L'efficienza è una proprietà dell'assetto, non del peso

È utile insistere su questo punto perché è fonte di errori frequenti. Due velivoli identici nella forma ma di peso diverso, volando *allo stesso assetto* (stesso C_L , quindi stesso C_D e stessa E), planano con *lo stesso angolo*. Ciò che cambia con il peso non è l'angolo, ma la *velocità* alla quale quell'assetto viene tenuto: il velivolo più pesante deve volare più veloce per generare la portanza necessaria, come vedremo nel prossimo paragrafo.

4 La velocità di planata

Vogliamo ora determinare a quale velocità il velivolo percorre la traiettoria di discesa. Partiamo dalla prima equazione di equilibrio, $L = W \cos \gamma_d$, esplicitando la portanza con la sua definizione $L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L$:

$$\frac{1}{2} \rho V^2 S C_L = W \cos \gamma_d. \quad (7)$$

Risolvendo rispetto alla velocità si ottiene

Velocità di planata

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{\cos \gamma_d}{C_L}}. \quad (8)$$

La struttura della formula merita di essere letta con attenzione, perché ricorre, identica, nel volo livellato (dove $\cos \gamma_d = 1$):

- la velocità cresce con il *carico alare* W/S : a parità di assetto, un velivolo più carico (o con ali più piccole) vola più veloce. È la ragione per cui un aliante da competizione, che imbarca acqua come zavorra, plana più veloce ma con lo *stesso* angolo;
- la velocità diminuisce all'aumentare della *densità* ρ , dunque, a parità di tutto il resto, cresce con la quota (dove ρ è minore);
- la velocità è governata dall'*assetto* attraverso C_L : assetti “cabrati” (alto C_L) corrispondono a planate lente, assetti “picchiati” (basso C_L) a planate veloci.

Poiché $\cos \gamma_d \approx 1$, nella pratica la velocità di planata coincide con ottima approssimazione con la velocità di sostentamento del volo livellato allo stesso assetto.

5 La velocità verticale di discesa (rateo di discesa)

Mentre la velocità V è diretta lungo la traiettoria, ciò che interessa al pilota — e all'ingegnere che dimensiona una manovra — è spesso la sua componente *verticale*, cioè la rapidità con cui il velivolo perde quota. Si definisce *velocità verticale di discesa* o *rateo di discesa* (in inglese *rate of descent*, R/D) la quantità

$$v_d = V \sin \gamma_d, \quad (9)$$

negativa perché la quota diminuisce. Sostituendo l'espressione (8) della velocità di planata otteniamo

$$v_d = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{\cos \gamma_d}{C_L}} \sin \gamma_d. \quad (10)$$

Per i piccoli angoli vale $\cos \gamma_d \approx 1$ e $\sin \gamma_d \approx \gamma_d = -1/E$; introducendo queste approssimazioni si arriva a una forma molto espressiva:

Rateo di discesa

$$v_d \approx -\sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S}} \frac{1}{E \sqrt{C_L}} = -\sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S}} \frac{C_D}{C_L^{3/2}}. \quad (11)$$

L'ultima uguaglianza si ottiene osservando che $\frac{1}{E \sqrt{C_L}} = \frac{C_D}{C_L} \cdot \frac{1}{\sqrt{C_L}} = \frac{C_D}{C_L^{3/2}}$, e mette in evidenza un raggruppamento di coefficienti aerodinamici, $C_L^{3/2}/C_D$, che giocherà un ruolo centrale nel paragrafo sugli assetti caratteristici.

Il rateo di discesa è una potenza per unità di peso

Moltiplicando la (9) per il peso si ottiene $W v_d = W V \sin \gamma_d = -D V$, avendo usato $D = -W \sin \gamma_d$. Il primo membro è la rapidità con cui il velivolo perde energia potenziale; il secondo è, a meno del segno, la potenza dissipata dalla resistenza, $\Pi_{\text{diss}} = D V$. In altre parole, *l'energia potenziale persa nell'unità*

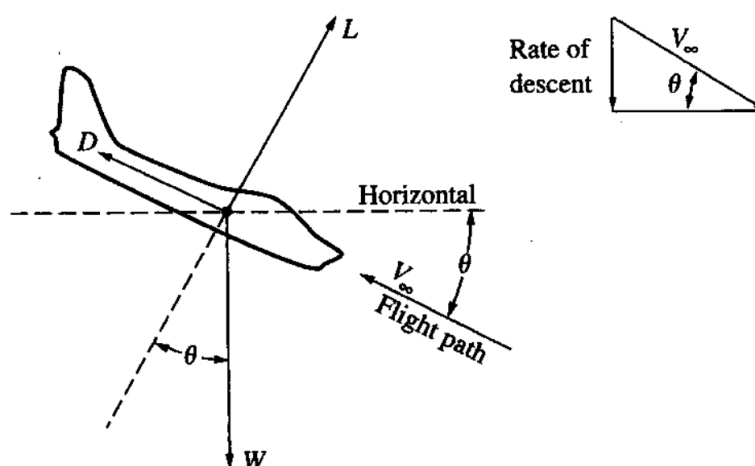


Figura 2. Velocità lungo la traiettoria V e sue componenti: orizzontale (V_{hor}) e verticale (il rateo di discesa v_d , R/D). L'angolo fra V e l'orizzontale è l'angolo di planata γ_d .

di tempo serve esattamente a compensare la potenza dissipata aerodinamicamente: il volo librato è la più limpida illustrazione del bilancio energetico di un velivolo. Minimizzare il rateo di discesa equivale dunque a minimizzare la potenza necessaria al volo.

6 L'autonomia di distanza in aria calma

Affrontiamo ora la domanda operativa per eccellenza: *partendo da una certa quota, quanto spazio si percorre al suolo planando?* Indichiamo con R la distanza orizzontale percorsa (*range*) e con h la quota. Lungo la traiettoria, il rapporto fra la variazione di quota e la variazione di distanza è la pendenza della traiettoria stessa:

$$\frac{dh}{dR} = \tan \gamma_d \approx \gamma_d = -\frac{D}{L} = -\frac{1}{E}. \quad (12)$$

Poiché in planata stabilizzata l'assetto (e quindi E) è costante, la pendenza è costante e la traiettoria è una retta. Integrando fra la quota iniziale h_{in} e quella finale h_{fin} si ottiene un risultato di grande pulizia concettuale:

Autonomia di distanza in aria calma

$$R = (h_{\text{in}} - h_{\text{fin}}) E = \Delta h E. \quad (13)$$

Il risultato (13) afferma che, in aria calma, *lo spazio percorso al suolo dipende soltanto dalla perdita di quota e dall'efficienza aerodinamica*. Non compare il peso, non compare la superficie, non compare la densità dell'aria. Due velivoli geometricamente identici ma di peso diverso, lasciati planare dalla stessa quota allo stesso assetto, atterrano *nello stesso punto*. Ciò che cambia, per effetto del peso, è la velocità di planata (8) e quindi il rateo di discesa (11), e di conseguenza il *tempo* impiegato: il più pesante arriva prima, ma alla stessa distanza.

Quanto lontano si arriva?

Assumiamo, a scopo didattico, un velivolo con efficienza $E = 20$ che subisce un'avaria al motore alla quota di 2 000 m sul terreno. Trascurando il vento, la massima distanza teoricamente raggiungibile (planando all'assetto di massima efficienza) è

$$R = \Delta h E = 2\,000 \text{ m} \times 20 = 40\,000 \text{ m} = 40 \text{ km}.$$

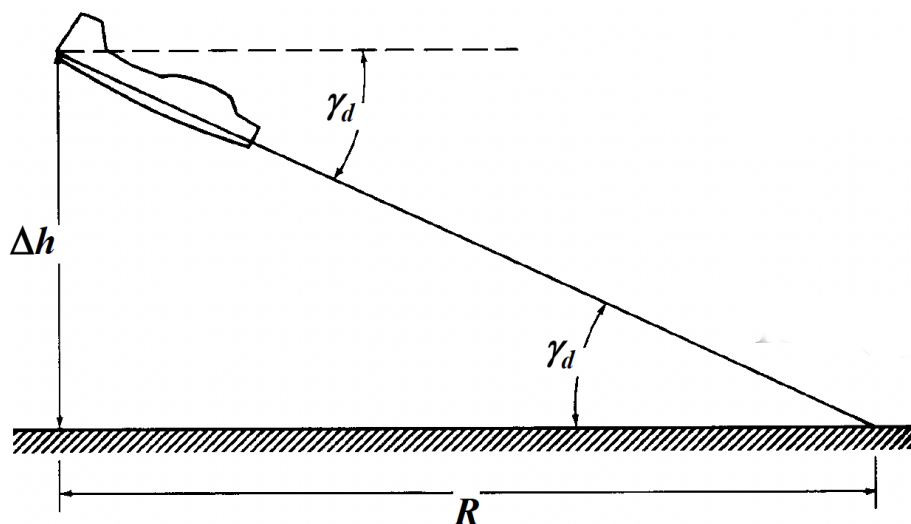


Figura 3. Geometria della planata in aria calma. La distanza percorsa al suolo R è il prodotto della perdita di quota Δh per l'efficienza E ; l'angolo di planata γ_d è costante lungo tutta la discesa.

Un aliante di efficienza $E = 50$, dalla stessa quota, percorrerebbe invece $2\,000\text{ m} \times 50 = 100\text{ km}$. Si noti come il calcolo, una volta nota l'efficienza, sia immediato: è proprio questa semplicità a rendere l'efficienza il parametro di prestazione più citato per gli alianti.

7 Gli assetti caratteristici della planata

Le formule ricavate ci dicono che, scegliendo l'assetto (cioè C_L), il pilota può privilegiare obiettivi diversi. I due obiettivi fondamentali sono la *massima autonomia di distanza* (arrivare il più lontano possibile) e la *massima autonomia di durata* (restare in aria il più a lungo possibile). A ciascuno corrisponde un assetto preciso.

7.1 Massima autonomia di distanza: l'assetto di massima efficienza

Dalla (13), $R = \Delta h E$, segue immediatamente che, fissata la quota di partenza, la distanza è massima quando è massima l'efficienza:

Massima autonomia di distanza

$$R_{\max} = \Delta h E_{\max} \quad (\text{assetto di massima efficienza}). \quad (14)$$

L'assetto di massima efficienza è quello che rende massimo il rapporto C_L/C_D . Per la polare parabolica $C_D = C_{D_0} + k C_L^2$, con $k = 1/(\pi A R e)$, possiamo determinarlo analiticamente. Posto

$$E = \frac{C_L}{C_{D_0} + k C_L^2},$$

si annulla la derivata dE/dC_L :

$$\frac{dE}{dC_L} = \frac{(C_{D_0} + k C_L^2) - C_L (2k C_L)}{(C_{D_0} + k C_L^2)^2} = \frac{C_{D_0} - k C_L^2}{(C_{D_0} + k C_L^2)^2} = 0 \implies C_L^* = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{k}}.$$

In corrispondenza di tale assetto la resistenza indotta $k C_L^2$ *eguaglia* la resistenza di profilo C_{D_0} : la massima efficienza si ottiene quando i due contributi di resistenza sono uguali. Sostituendo si trova il valore massimo

dell'efficienza,

$$E_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{k} C_{D_0}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi AR e}{C_{D_0}}}, \quad (15)$$

relazione che evidenzia il ruolo dell'allungamento alare: ali più allungate (grande AR) e profili più puliti (piccolo C_{D_0}) producono efficienze più elevate. È la ragione strutturale per cui gli alianti hanno ali molto sottili e di grande apertura.

7.2 Massima autonomia di durata: l'assetto di minima potenza

Per restare in aria il più a lungo possibile occorre minimizzare la rapidità di perdita di quota, cioè il modulo del rateo di discesa (11):

$$|v_d| = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{C_D}{C_L^{3/2}}}.$$

A parità di quota e carico alare, $|v_d|$ è minimo quando è minimo il rapporto $C_D/C_L^{3/2}$, ossia quando è *massimo* il suo reciproco $C_L^{3/2}/C_D$ (equivalentemente, quando è massimo $E\sqrt{C_L}$):

Massima autonomia di durata

$$|v_d|_{\min} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{(E\sqrt{C_L})_{\max}}} \quad (\text{assetto di minima potenza}). \quad (16)$$

Anche questo assetto si determina analiticamente con la polare parabolica. Massimizzare $C_L^{3/2}/C_D = C_L^{3/2}/(C_{D_0} + kC_L^2)$ equivale ad annullarne la derivata, da cui

$$\frac{3}{2} C_L^{1/2} (C_{D_0} + kC_L^2) - C_L^{3/2} (2kC_L) = 0 \implies 3C_{D_0} = kC_L^2 \implies C_L^{**} = \sqrt{\frac{3C_{D_0}}{k}}.$$

Qui la resistenza indotta è *trippla* di quella di profilo. Confrontando con l'assetto di massima efficienza, dove $C_L^* = \sqrt{C_{D_0}/k}$, vediamo che

$$\frac{C_L^{**}}{C_L^*} = \sqrt{3} \simeq 1,73 :$$

l'assetto di minima potenza richiede un coefficiente di portanza più alto, dunque un angolo d'attacco maggiore e una velocità di volo *minore*, rispetto all'assetto di massima distanza. È un risultato di immediata utilità pratica: per "stiracchiare" il tempo di volo si vola un po' più lenti (cabrati) rispetto a quando si cerca di arrivare lontano.

Due obiettivi, due velocità diverse

È fondamentale che lo studente non confonda i due assetti. La *massima distanza* si ottiene alla velocità di massima efficienza; la *massima durata* a una velocità inferiore (assetto più cabrato, minimo rateo di discesa). Volare alla velocità di minima potenza per "arrivare lontano" è un errore: si resta in aria più a lungo, ma si percorre meno spazio al suolo.

8 La curva odografa (polare delle velocità)

Un modo molto efficace di rappresentare tutte le condizioni di planata di un velivolo è la *curva odografa* (o *polare delle velocità*): si riportano in ascissa la componente orizzontale della velocità V_{hor} e in ordinata (rivolta verso il basso) il rateo di discesa v_d (R/D). Ogni punto della curva rappresenta una possibile condizione di

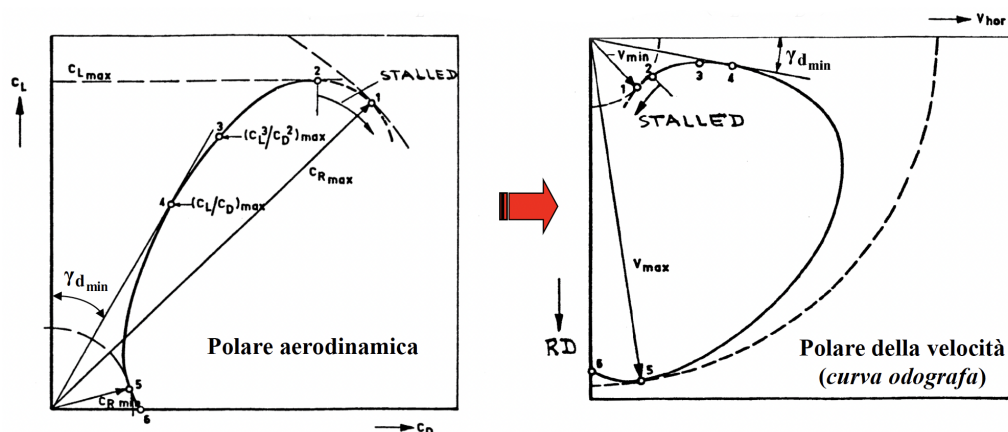


Figura 4. Polare aerodinamica del velivolo con l'individuazione dei punti caratteristici: l'assetto di massima efficienza $(C_L/C_D)_{\max}$ (tangente dall'origine) e l'assetto di minima potenza $(C_L^{3/2}/C_D)_{\max}$, oltre a $C_{L,\max}$ (stallo) e $C_{R,\min}$.

planata stabilizzata, cioè un possibile assetto; il segmento che congiunge l'origine al punto ha lunghezza pari alla velocità V e forma con l'orizzontale proprio l'angolo di planata γ_d .

Per ricavare l'equazione della curva conviene esprimere il modulo della velocità lungo la traiettoria in funzione del solo *coefficiente di forza risultante* C_R . La forza aerodinamica risultante ha modulo $R_a = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_R$ con $C_R = \sqrt{C_L^2 + C_D^2}$ ed equilibra, in volo librato, l'intero peso (poiché L e D sono le componenti di tale risultante e la loro somma vettoriale bilancia W). Imponendo $R_a = W$ si ricava

Velocità lungo la traiettoria e curva odografa

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{C_R}} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{(C_L^2 + C_D^2)^{1/2}}}. \quad (17)$$

Al variare dell'assetto, la coppia $(V_{\text{hor}}, v_d) = (V \cos \gamma_d, V \sin \gamma_d)$ descrive la curva odografa.

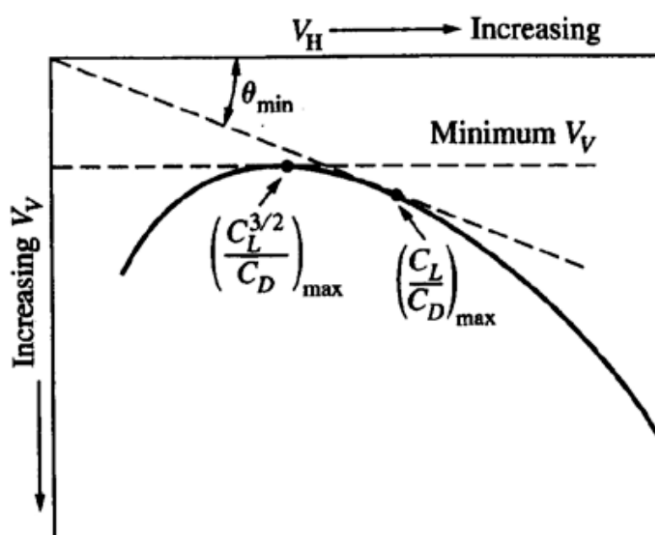


Figura 5. Costruzione della curva odografa (polare delle velocità) a partire dalla polare aerodinamica. La tangente condotta dall'origine individua l'angolo di planata minimo $\gamma_{d,\min}$, cioè l'assetto di massima efficienza; il punto più "alto" della curva (minimo $|v_d|$) è l'assetto di minima potenza.

Sulla curva odografa si leggono a colpo d'occhio tutti gli assetti caratteristici:

- la **tangente condotta dall'origine** tocca la curva nel punto di *minimo angolo di planata*, cioè l'assetto di *massima efficienza* (massima autonomia di distanza);
- il punto in cui l'odografa raggiunge il suo *minimo rateo di discesa* (il “tetto” della curva, punto più vicino all'asse orizzontale) è l'assetto di *minima potenza* (massima autonomia di durata);
- gli assetti ad alta incidenza sono limitati dallo *stallo* ($C_{L_{\max}}$);
- all'estremo opposto, l'assetto a portanza nulla ($C_L = 0$, $\gamma_d = -90^\circ$) corrisponde alla *velocità in affondata* (caduta verticale), il cui modulo è

$$V_{\text{aff}} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{C_{D_0}}},$$

poiché in tale condizione la resistenza è la sola resistenza di profilo.

Velocità rispetto all'aria e rispetto al suolo

Le grandezze V_{hor} e v_d qui rappresentate sono le componenti della velocità del velivolo *rispetto al suolo*. Esse coincidono con le componenti della velocità *rispetto all'aria* soltanto in *aria calma*. In presenza di vento, come vedremo, occorre comporre vettorialmente la velocità rispetto all'aria con quella del vento: è il passaggio chiave per capire come il vento modifichi l'autonomia.

9 Effetto del peso sulla curva odografa

Domandiamoci come cambi l'odografa al variare del peso (a parità di forma e di assetti, cioè a parità di polare). Dalla (17) si vede che, fissato l'assetto, la velocità è proporzionale alla radice del carico alare: $V \propto \sqrt{W/S}$. Pertanto, passando da un peso W_1 a un peso W_2 (a parità di superficie S), *ogni* punto dell'odografa — a parità di assetto, e quindi di angolo di planata — si sposta a una velocità scalata del fattore

Scalatura dell'odografa con il peso

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{W_2}{W_1}}. \quad (18)$$

Geometricamente, l'aumento del peso (o del carico alare) produce una *trasformazione omotetica* della curva odografa: la curva si dilata radialmente, con centro nell'origine, del fattore $\sqrt{W_2/W_1}$. Poiché l'omotetia conserva le direzioni delle rette uscenti dall'origine, *ogni punto mantiene il proprio angolo di planata* (che dipende solo dall'efficienza), ma vi corrisponde una velocità maggiore.

Questa è la traduzione grafica di quanto già osservato: il peso non cambia l'angolo di planata né — in aria calma — la distanza percorsa, ma aumenta le velocità (e quindi i ratei di discesa), riducendo i tempi di volo.

10 Discesa a velocità equivalente costante: il tempo di planata

Affrontiamo ora un calcolo di livello superiore, particolarmente formativo perché mette in gioco il modello di atmosfera standard: la determinazione *in forma chiusa* del tempo di discesa. In assenza di vento, si può calcolare il tempo impiegato per scendere fra due quote assumendo costanti l'assetto e la *velocità equivalente* V_{EAS} (cioè, di fatto, fissando una condizione di volo ben precisa lungo tutta la discesa).

Ricordiamo che velocità vera e velocità equivalente sono legate dal rapporto di densità $\sigma = \rho/\rho_0$ tramite $V = V_{\text{EAS}}/\sqrt{\sigma}$. Partiamo dalla definizione di rateo di discesa, $v_d = V \sin \gamma_d = dh/dt$, da cui

$$dt = \frac{dh}{V \sin \gamma_d} = \frac{\sqrt{\sigma} dh}{V_{\text{EAS}} \sin \gamma_d}. \quad (19)$$

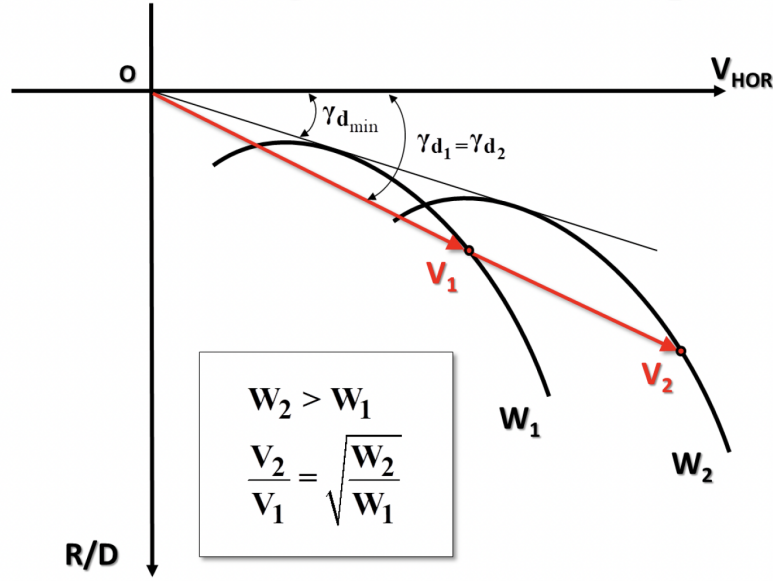


Figura 6. Effetto del peso sulla curva odografa: l'aumento del peso da W_1 a $W_2 > W_1$ produce una dilatazione omotetica della curva (fattore $\sqrt{W_2/W_1}$). Gli angoli di planata restano invariati ($\gamma_{d1} = \gamma_{d2}$), mentre le velocità aumentano.

Il tempo per passare dalla quota h_1 alla quota h_2 è dunque

$$t_{1-2} = \frac{1}{V_{EAS} \sin \gamma_d} \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{\sigma} \, dh. \quad (20)$$

Per svolgere l'integrale conviene cambiare variabile da h alla temperatura T . Limitandoci alla *troposfera*, dove la temperatura varia linearmente con la quota con gradiente termico costante $T_h = -dT/dh > 0$, si ha $dh = -dT/T_h$. Inoltre, sempre in troposfera, il rapporto di densità si esprime in funzione della sola temperatura,

$$\sqrt{\sigma} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_o}} = \left(\frac{T}{T_o} \right)^{\frac{g - RT_h}{2RT_h}}, \quad (21)$$

dove g è l'accelerazione di gravità, R la costante dell'aria e T_o la temperatura al livello del mare nel modello standard. Sostituendo nella (20):

$$t_{1-2} = -\frac{1}{V_{EAS} \sin \gamma_d} \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T_h} \left(\frac{T}{T_o} \right)^{\frac{g - RT_h}{2RT_h}} dT. \quad (22)$$

L'integrale di una potenza si risolve elementarmente. Posto per brevità $\alpha = \frac{g - RT_h}{2RT_h}$, si ha $\int (T/T_o)^\alpha dT = T_o \frac{(T/T_o)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, e poiché

$$\alpha + 1 = \frac{g - RT_h}{2RT_h} + 1 = \frac{g + RT_h}{2RT_h},$$

si perviene alla formula chiusa del tempo di discesa:

Tempo di discesa a V_{EAS} costante (troposfera)

$$t_{1-2} = -\frac{1}{V_{EAS} \sin \gamma_d} \left(\frac{T_o}{T_h} \right) \left(\frac{2RT_h}{g + RT_h} \right) \left[\left(\frac{T_2}{T_o} \right)^{\frac{g + RT_h}{2RT_h}} - \left(\frac{T_1}{T_o} \right)^{\frac{g + RT_h}{2RT_h}} \right]. \quad (23)$$

Lettura della formula e semplificazione

Pur nella sua apparente complessità, la (23) è frutto di una semplice integrazione di una potenza. Si osservi che il prodotto $(T_o/T_h)(2RT_h/(g + RT_h)) = 2RT_o/(g + RT_h)$ non dipende più da T_h a denominatore: la formula si compatta in

$$t_{1-2} = -\frac{2RT_o}{V_{EAS} \sin \gamma_d (g + RT_h)} \left[\left(\frac{T_2}{T_o} \right)^{\frac{g+RT_h}{2RT_h}} - \left(\frac{T_1}{T_o} \right)^{\frac{g+RT_h}{2RT_h}} \right].$$

Il segno complessivo è positivo perché $\sin \gamma_d < 0$ in discesa. Il messaggio formativo è duplice: da un lato si vede come l'atmosfera standard entri in modo essenziale in un calcolo di prestazioni; dall'altro si apprezza il metodo — cambio di variabile verso la temperatura — che ricorre in molti problemi di meccanica del volo.

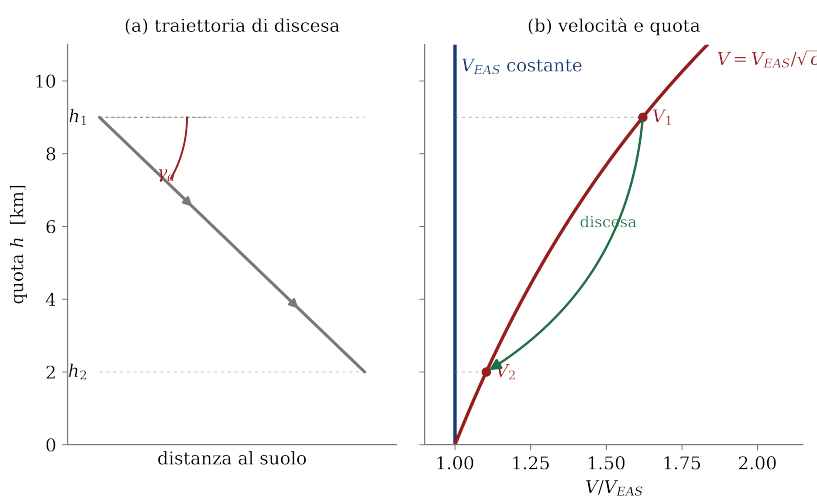


Figura 7. Profilo di discesa a velocità equivalente costante in troposfera. La velocità vera V aumenta al diminuire della quota (poiché cresce σ), mentre V_{EAS} resta costante; il tempo si ottiene integrando lungo la traiettoria.

II L'influenza del vento sull'autonomia di distanza

Finora abbiamo ragionato in *aria calma*. Nella realtà operativa il vento è quasi sempre presente, e la sua influenza sul volo librato è tanto importante quanto, a prima vista, sorprendente. Il punto di partenza è la composizione vettoriale delle velocità: la velocità del velivolo rispetto al suolo, $\vec{V}_g$, è la somma della velocità rispetto all'aria $\vec{V}$ (quella che l'anemometro misura) e della velocità del vento $\vec{V}_w$:

Composizione delle velocità

$$\vec{V}_g = \vec{V} + \vec{V}_w. \quad (24)$$

A parità di quota, assetto e carico alare, l'anemometro segna *sempre la stessa* velocità rispetto all'aria V ; ciò che cambia, per effetto del vento, è la velocità rispetto al suolo V_g e quindi l'angolo che la traiettoria *reale* (rispetto al terreno) forma con l'orizzontale. È questo angolo, e non quello rispetto all'aria, a determinare la distanza percorsa al suolo. Scomponiamo allora il vento in una componente orizzontale u_w e una verticale w_w , con le seguenti convenzioni di segno:

- $u_w > 0$ vento a favore (*tailwind*); $u_w < 0$ vento contrario (*headwind*);

- $w_w > 0$ ascendenza (*updraft*); $w_w < 0$ discendenza (*downdraft*).

L'angolo di planata *rispetto al suolo* in presenza di vento, che indichiamo con γ_d^w , è il rapporto fra la velocità verticale e quella orizzontale rispetto al suolo:

$$\tan \gamma_d^w = \frac{V \sin \gamma_d + w_w}{V \cos \gamma_d + u_w}. \quad (25)$$

Introducendo le consuete approssimazioni di piccolo angolo, ossia $V \sin \gamma_d \simeq -V/E$ e $V \cos \gamma_d \simeq V$, si ottiene la forma operativa

Angolo di planata con vento

$$\begin{aligned} \gamma_d^w &\simeq \frac{-V/E + w_w}{V + u_w}, \\ R^w &= -\frac{\Delta h}{\tan \gamma_d^w} \simeq -\frac{\Delta h}{\gamma_d^w}. \end{aligned} \quad (26)$$

Discutiamo i quattro casi elementari, che si possono leggere direttamente sui triangoli di velocità.

- **Vento contrario** ($u_w < 0$): il denominatore diminuisce, l'angolo $|\gamma_d^w|$ aumenta, la traiettoria al suolo è più ripida e l'autonomia diminuisce, $R^w < R$.
- **Vento a favore** ($u_w > 0$): il denominatore aumenta, l'angolo si addolcisce, l'autonomia cresce, $R^w > R$.
- **Discendenza** ($w_w < 0$): il numeratore diventa più negativo, la traiettoria è più ripida, $R^w < R$.
- **Ascendenza** ($w_w > 0$): il numeratore diventa meno negativo, la traiettoria si addolcisce, $R^w > R$; se l'ascendenza è abbastanza forte, γ_d^w può addirittura diventare *positivo* e il velivolo, pur planando rispetto all'aria, *guadagna quota* rispetto al suolo.

In sintesi:

$$\begin{aligned} \gamma_d^w > \gamma_d &\Rightarrow R^w < R \quad (\text{vento contrario e/o discendenza}), \\ \gamma_d^w < \gamma_d &\Rightarrow R^w > R \quad (\text{vento favorevole e/o ascendenza}). \end{aligned}$$

Vento contrario in finale

Si consideri il caso pratico, ben noto ai piloti, dell'avvicinamento con forte vento contrario. Poiché $u_w < 0$, la (26) mostra che la traiettoria rispetto al suolo si fa più ripida: a parità di velocità indicata, il velivolo “scende prima”. Per questo, con vento contrario forte, conviene tenere una velocità rispetto all'aria un po' più elevata (assetto leggermente picchiato): si riduce così il tempo durante il quale il vento agisce, e si recupera parte della distanza persa. È l'applicazione operativa diretta della teoria.

12 L'influenza del vento sulla curva odografa

L'effetto del vento si visualizza in modo particolarmente elegante sulla curva odografa. Poiché la velocità rispetto al suolo è $\vec{V}_g = \vec{V} + \vec{V}_w$, valutare gli effetti del vento equivale a *traslare l'origine degli assi* di una quantità pari all'intensità del vento, ma con verso opposto. La curva odografa (che rappresenta la velocità rispetto all'aria) resta immutata; cambia il punto da cui si conducono le rette che individuano l'angolo di planata rispetto al suolo.

La lettura grafica conferma e arricchisce i risultati analitici:

- con **vento a favore** l'origine si sposta “indietro” (verso le ascisse negative): la tangente alla curva tocca l'odografa in un punto a velocità *maggiore*, dunque per sfruttare al meglio il vento favorevole conviene volare un po' più veloci dell'assetto di massima efficienza in aria calma;

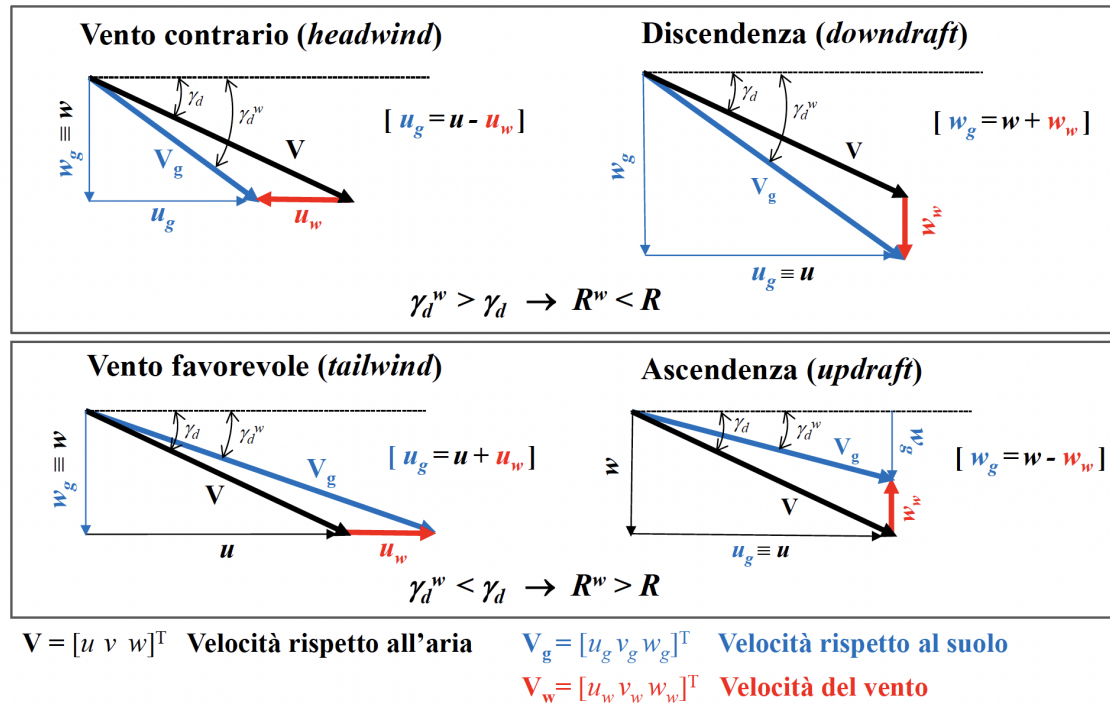


Figura 8. I quattro triangoli di velocità: vento contrario (*headwind*), vento favorevole (*tailwind*), discendenza (*down-draft*) e ascendenza (*updraft*). In ogni caso $\vec{V}_g = \vec{V} + \vec{V}_w$; l'angolo γ_d^w rispetto al suolo differisce da quello γ_d rispetto all'aria.

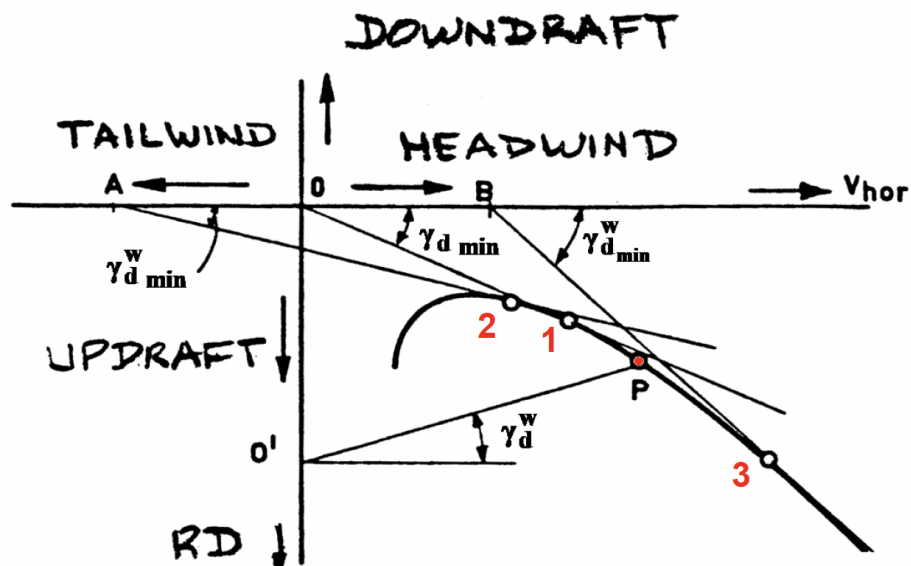


Figura 9. Effetto del vento sulla curva odografa. L'origine viene tralata in verso opposto al vento: il punto 1 è l'assetto di massima autonomia in aria calma ($E_{\max}$), il punto 2 con vento a favore, il punto 3 con vento contrario. Con ascendenza sufficiente la tangente dall'origine tralata individua traiettorie in salita ($\gamma_d^w > 0$).

- con **vento contrario** l'origine si sposta "avanti": l'assetto ottimo si sposta verso velocità *maggiori*, coerentemente con quanto detto nell'esempio precedente;
- con **ascendenza** l'origine si abbassa: in un certo intervallo di velocità la tangente dall'origine traslata individua *traiettorie in salita* ($\gamma_d^w > 0$).

Il segreto del veleggiamento

Quest'ultima osservazione spiega il fenomeno che rende possibile il volo a vela: *in presenza di correnti ascensionali, un aliante può guadagnare quota pur essendo, rispetto all'aria, sempre in planata*. L'aliante non "smette di scendere" rispetto all'aria che lo circonda; è la massa d'aria stessa a salire più rapidamente di quanto l'aliante scenda al suo interno. È l'effetto sfruttato sistematicamente nelle fasi di veleggiamento, sotto le nubi cumuliformi o lungo i pendii esposti al vento.

13 Effetto del peso in presenza di vento

Abbiamo visto che in aria calma il peso non influenza l'autonomia di distanza. In presenza di vento le cose cambiano radicalmente, e il peso torna a contare. La ragione è tutta nella (18): il velivolo più pesante vola, a parità di assetto, a velocità maggiore ($V \propto \sqrt{W}$). Ma se V è grande rispetto all'intensità del vento V_w , allora il rapporto V_w/V è piccolo, e la correzione che il vento introduce sull'angolo di planata (26) è minore. In altre parole:

Sensibilità al vento e peso

a parità di vento, il velivolo più pesante è *meno sensibile* alla sua presenza. (27)

Questo si traduce, sulla curva odografa, nel fatto che la traslazione dell'origine (di entità fissa, pari al vento) incide *relativamente* meno su una curva più "grande", quella del velivolo più pesante. Ne discende un risultato di notevole importanza operativa, che ordina le autonomie nei due scenari tipici:

- con **vento contrario** ($W_1 < W_2$): $\gamma_{d_1}^w > \gamma_{d_2}^w > \gamma_d$ e quindi $R_1^w < R_2^w < R$;
- con **vento favorevole** ($W_1 < W_2$): $\gamma_{d_1}^w < \gamma_{d_2}^w < \gamma_d$ e quindi $R_1^w > R_2^w > R$.

In presenza di vento contrario, dunque, il velivolo più pesante conserva un'autonomia maggiore (è meno penalizzato); con vento a favore, viceversa, è il più leggero a trarre il vantaggio maggiore. In entrambi i casi resta valido il principio: *più si è pesanti, meno il vento sposta la prestazione rispetto al valore di aria calma*. È, fra l'altro, una delle ragioni per cui gli alianti da competizione imbarcano zavorra d'acqua nelle giornate ventose e turbolente: maggiore peso significa maggiore velocità di crociera e minore sensibilità al vento.

14 Quadro riassuntivo operativo

Raccogliamo in forma sintetica i risultati, distinguendo ciò che vale in aria calma da ciò che cambia con il vento.

- **Angolo di planata.** Dipende solo dall'efficienza: $\gamma_d = -1/E$. È minimo (planata più dolce) all'assetto di massima efficienza.
- **Autonomia di distanza, aria calma.** $R = \Delta h E$: dipende solo da quota ed efficienza, *non* dal peso. Massima all'assetto di massima efficienza.
- **Autonomia di durata.** Governata dal minimo rateo di discesa, $|v_d|_{\min}$, all'assetto di *minima potenza* $(C_L^{3/2}/C_D)_{\max}$: velocità minore (assetto più cabrato) rispetto a quello di massima distanza.

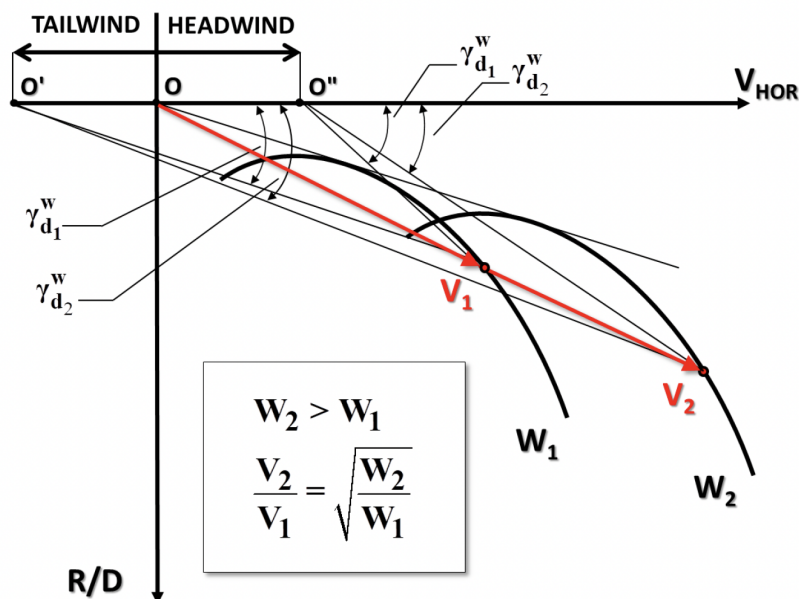


Figura 10. Curva odografa: effetto combinato di peso e vento. La dilatazione omotetica con il peso ($V_2/V_1 = \sqrt{W_2/W_1}$) e la traslazione dell'origine con il vento mostrano graficamente perché il velivolo più pesante sia meno sensibile al vento.

- **Peso, aria calma.** Non cambia angolo né distanza; aumenta velocità e rateo di discesa ($V \propto \sqrt{W}$), riducendo i tempi.
- **Vento.** Modifica l'angolo della traiettoria *rispetto al suolo* e rende l'autonomia *funzione anche del peso*. In particolare, non è più vero che la massima autonomia si ottenga alla velocità di massima efficienza:

$$\gamma_{d_{\min}}^w \neq \gamma_{d_{\min}} = -\frac{I}{E_{\max}}.$$

- **Regola pratica.** Con vento contrario (o discendenza) conviene volare un po' più veloci; con vento a favore (o ascendenza), un po' più lenti.
- **Veleggiamento.** Con ascendenza sufficiente la traiettoria rispetto al suolo può essere in salita ($\gamma_d^w > 0$): è il principio del volo a vela.

Strumento di calcolo online

Per esercitarsi con il calcolo delle velocità caratteristiche e con la costruzione della polare e della curva odografa è disponibile l'applicazione didattica online all'indirizzo <https://raucci.net>. È utile per verificare “a mano” i risultati di questa monografia su casi concreti, variando carico alare, polare e quota.

Appendice – Formulario e notazione

Simboli

Simbolo	Significato
V	velocità del velivolo rispetto all'aria (lungo la traiettoria)
V_g	velocità rispetto al suolo
V_w	velocità del vento; u_w componente orizzontale, w_w verticale
V_{EAS}	velocità equivalente
v_d	velocità verticale di discesa (rateo di discesa, R/D)
γ_d	angolo di planata in aria calma (< 0)
γ_d^w	angolo di planata in presenza di vento
W	peso; W/S carico alare
L, D	portanza, resistenza
C_L, C_D	coefficienti di portanza e resistenza
C_R	coefficiente di forza risultante, $C_R = \sqrt{C_L^2 + C_D^2}$
E	efficienza aerodinamica, $E = L/D = C_L/C_D$
AR	allungamento alare
ρ, σ	densità dell'aria e rapporto di densità $\sigma = \rho/\rho_0$
Π	potenza

Relazioni fondamentali

$$L = W \cos \gamma_d, \quad D = -W \sin \gamma_d, \quad (28)$$

$$\gamma_d \simeq -\frac{1}{E}, \quad (29)$$

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{\cos \gamma_d}{C_L}}, \quad (30)$$

$$v_d \simeq -\sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{C_D}{C_L^{3/2}}}, \quad (31)$$

$$R = \Delta h E, \quad R_{\max} = \Delta h E_{\max}, \quad (32)$$

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{\sqrt{C_L^2 + C_D^2}}} \quad (\text{odografa}), \quad (33)$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{W_2}{W_1}}, \quad (34)$$

$$\gamma_d^w \simeq \frac{-V/E + w_w}{V + u_w}, \quad R^w = -\frac{\Delta h}{\gamma_d^w}. \quad (35)$$