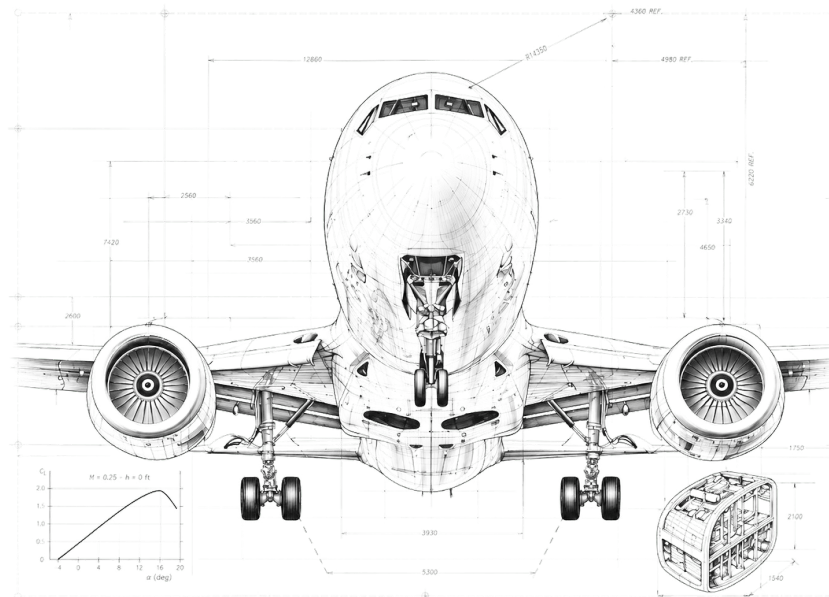


Volo rettilineo uniforme orizzontale

*Calcolo delle velocità di volo livellato
approccio grafico, analitico e involuppo di volo*



Prof. Ing. Biagio Raucci

Costruzioni Aeronautiche

30 giugno 2026

Indice

1	Introduzione: le prestazioni di volo	3
2	L'equilibrio in volo rettilineo uniforme orizzontale	3
2.1	Le terne di riferimento e l'ipotesi di volo simmetrico	3
2.2	Le quattro forze e le equazioni di equilibrio	4
3	La spinta necessaria al volo livellato	5
3.1	La forma $T_{no} = AV^2 + B/V^2$	5
3.2	Il carico di apertura alare	6
3.3	La curva della spinta necessaria	6
4	La potenza necessaria al volo livellato	6
5	Velocità e assetti caratteristici	9
5.1	P_2 – Minima spinta e massima efficienza	9
5.2	P_1 – Minimo rapporto T_{no}/V e massimo prodotto VE	9
5.3	P_3 – Minima potenza e massimo rapporto E/V	9
5.4	P_4 – Velocità di stallo	10
5.5	Quadro riassuntivo	10
6	Influenza della quota sulle caratteristiche necessarie	11
6.1	Spinta necessaria: invarianza con la quota	11
6.2	Potenza necessaria: scala con $1/\sqrt{\sigma}$	12
7	Le caratteristiche disponibili e il grado di ammissione	12
7.1	Il grado di ammissione	13
7.2	Spinta disponibile del velivolo a getto	13
7.3	Potenza disponibile del velivolo ad elica	13
8	Determinazione grafica di V_{min} e V_{max}	14
8.1	Velivoli a getto	14
8.2	Velivoli ad elica	15
8.3	Lettura del diagramma e numero di intersezioni	15
9	Effetti di comprimibilità sulla resistenza	16
9.1	Mach critico, Mach di divergenza e resistenza d'onda	16
9.2	Stima del Mach critico e del Mach di divergenza	16

9.3	Il modello lineare di incremento della resistenza	17
10	Determinazione analitica – velivoli a getto	18
10.1	Dall'equilibrio all'equazione biquadratica	18
10.2	Forma con la pressione dinamica	18
10.3	La formula chiusa per la velocità	19
10.4	La condizione di equilibrio e la velocità del punto E	20
10.5	Metodo alternativo: via efficienza	20
10.6	Correzione per comprimibilità	21
11	Determinazione analitica – velivoli ad elica	21
11.1	Procedura iterativa per motori a pistoncini	22
11.2	Procedura per motori turboelica	22
11.3	Convergenza e osservazioni pratiche	23
12	Variazione di $V_{\min}$ e $V_{\max}$ con la quota	23
12.1	Motoeliche	23
12.2	Turbogetti	23
13	L'involuppo di volo livellato	25
13.1	Costruzione e quota di tangenza teorica	25
13.2	Velocità minima: stallo o limite di spinta?	25
13.3	Rappresentazioni in TAS, CAS e Mach	25
13.4	L'involuppo realistico e le limitazioni operative	27
14	Crociera e parametri di progetto T/W e W/S	29
15	Quadro riassuntivo e formulario	30
15.1	Le relazioni fondamentali	30
15.2	Sintesi concettuale	31
A	Notazione e simboli	31

I Introduzione: le prestazioni di volo

Lo studio delle prestazioni di un velivolo consiste nel determinare, una volta noti i dati *geometrici*, di *massa*, *aerodinamici* e *propulsivi*, il comportamento dell'aeromobile nelle diverse fasi del volo. Il punto di partenza è l'osservazione che, in ogni istante, le forze aerodinamiche e propulsive, insieme alle forze d'inerzia legate alle accelerazioni, devono costituire un equilibrio dinamico. Risolvere questo equilibrio, istante per istante, significa prevedere quanto velocemente, quanto in alto e quanto a lungo un velivolo possa volare.

È utile distinguere fin da subito due grandi famiglie di prestazioni.

- **Prestazioni in volo non accelerato** (accelerazioni nulle nelle equazioni del moto): velocità massima in volo livellato, velocità di crociera (a grado di ammissione ridotto, ad esempio 0,75), velocità di stallo, rateo e angolo di salita, quota di tangenza teorica e pratica, tempo di salita, volo librato, autonomia oraria e di distanza.
- **Prestazioni in presenza di accelerazioni**: corsa di decollo, atterraggio, virata, manovra nel piano longitudinale (cabrata).

In questa monografia ci occupiamo della prima delle prestazioni in volo non accelerato e, in un certo senso, della più fondamentale: il **calcolo delle velocità di volo livellato**. Si tratta di rispondere alla domanda apparentemente semplice “a quale velocità vola il mio aeroplano?”, che in realtà racchiude l'intera fisica dell'equilibrio fra ciò che l'aria *chiede* (la resistenza, cioè la spinta necessaria) e ciò che il motore *offre* (la spinta o la potenza disponibile).

Nota

Per affrontare il problema servono due ingredienti, già costruiti separatamente: le *caratteristiche necessarie* (la spinta o la potenza che il velivolo richiede per equilibrare la resistenza al variare della velocità) e le *caratteristiche disponibili* (la spinta o la potenza che l'impianto propulsivo riesce a fornire al variare di quota, velocità e grado di ammissione). Il calcolo delle velocità di volo livellato non è altro che la ricerca dei punti in cui queste due curve si incontrano.

2 L'equilibrio in volo rettilineo uniforme orizzontale

2.1 Le terne di riferimento e l'ipotesi di volo simmetrico

Per scrivere correttamente le equazioni di equilibrio occorre fissare un sistema di riferimento. Si introducono due terne solidali concettualmente diverse: la terna *assi corpo* $X_B Y_B Z_B$, rigidamente vincolata al velivolo, e la terna *assi vento* $X_W Y_W Z_W$, il cui asse X_W è diretto secondo la velocità V del velivolo rispetto all'aria.

I tre angoli che legano le terne all'orizzonte e fra loro sono l'**angolo di beccheggio** Θ (fra l'asse X_B e l'orizzonte), l'**angolo della traiettoria** γ (fra la velocità e l'orizzonte) e l'**angolo d'attacco** α (fra l'asse X_B e la velocità), legati dalla relazione $\alpha = \Theta - \gamma$.

Nota

La terna assi vento *non* è solidale al velivolo. Solo nelle condizioni di volo **simmetrico** ($\beta = 0$, angolo di derapata nullo) e con **ali livellate** ($\Phi = 0$, angolo di rollio nullo) gli assi X_W e Z_W giacciono nel piano di simmetria del velivolo $X_B Z_B$. In questa monografia considereremo *sempre* condizioni di volo simmetriche: è questa l'ipotesi che rende lecito il semplice schema di forze che segue.

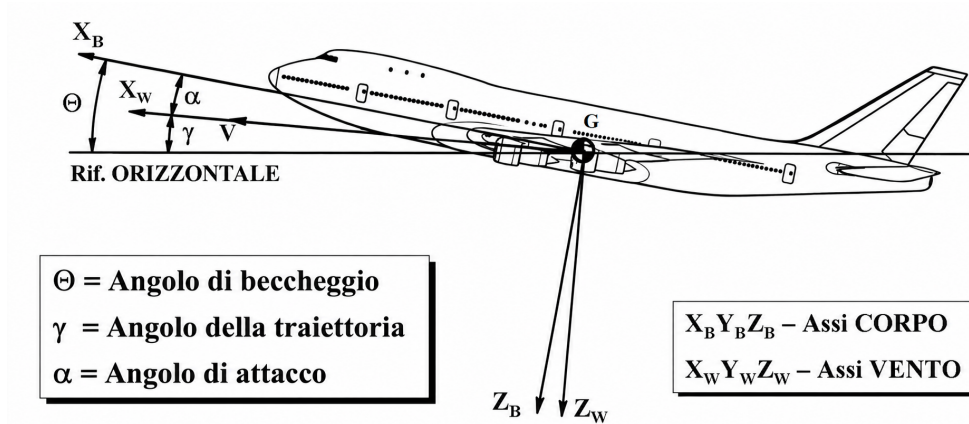


Figura 1. Terne di riferimento per il volo simmetrico con ali livellate. Sono indicati l'angolo di beccheggio Θ , l'angolo della traiettoria γ e l'angolo d'attacco α , con $\alpha = \Theta - \gamma$.

2.2 Le quattro forze e le equazioni di equilibrio

In volo livellato la traiettoria è orizzontale ($\gamma = 0$) e la velocità è costante (volo *uniforme*): le accelerazioni sono nulle. Le quattro forze in gioco sono la portanza L (verso l'alto, lungo $-Z_W$), il peso W (verso il basso), la spinta T_d e la resistenza D . Assumendo, come d'uso, che la spinta sia allineata con la direzione della velocità (asse X_W), l'equilibrio lungo le due direzioni della terna vento si scrive in forma elementare:

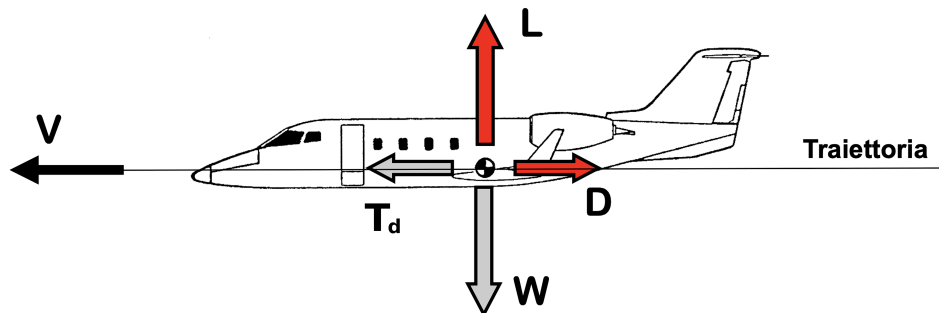


Figura 2. Schema delle quattro forze in volo rettilineo uniforme orizzontale: portanza L , peso W , spinta T_d e resistenza D . La spinta è supposta allineata con la velocità.

$$\begin{cases} L = W \\ T_d = D \end{cases} \quad (1)$$

La portanza uguaglia il peso e la spinta uguaglia la resistenza. La prima delle (1), esplicitando la portanza in funzione del coefficiente C_L , della pressione dinamica $q = \frac{1}{2}\rho V^2$ e della superficie alare S , fornisce la condizione di sostentamento:

$$L = C_L q S = C_L \frac{1}{2}\rho V^2 S = W. \quad (2)$$

La (2) ha una lettura fisica immediata e fondamentale: a una data quota e a peso fissato, a *ogni* velocità di volo corrisponde uno e un solo valore del coefficiente di portanza, e quindi un solo assetto (angolo d'attacco). A velocità elevate competono C_L bassi (assetto poco cabrati); a velocità basse competono C_L elevati (assetto cabrati). Esiste dunque un legame biunivoco fra velocità e assetto.

Dalla seconda delle (1), dividendo membro a membro la condizione di sostentamento $L = W$ per la condizione di propulsione $T_d = D$, si ottiene una delle relazioni più importanti della meccanica del volo:

$$E = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} = \frac{W}{T_d} = \frac{W}{T_{no}} \quad (3)$$

L'**efficienza aerodinamica** E è dunque, in volo livellato, il rapporto fra il peso e la spinta necessaria: volare con la minima spinta significa volare alla massima efficienza, e ciò avviene a un ben preciso assetto.

Nota

Convenzione sui simboli adottata nel seguito. Indichiamo con T_{no} la *spinta necessaria* al volo livellato orizzontale; essa coincide numericamente con la resistenza aerodinamica D ($T_{no} \equiv D$). Il pedice “no” sta per *necessaria orizzontale*; la stessa grandezza è spesso denotata anche con T_R (*thrust required*). Indichiamo con T_d la *spinta disponibile*. Analogamente Π_{no} e Π_d sono la potenza necessaria e disponibile. Useremo V per la velocità di volo (velocità vera, TAS), denotata anche $V_o = V_\infty$.

3 La spinta necessaria al volo livellato

La spinta necessaria T_{no} è, per definizione, la spinta che il propulsore deve erogare per equilibrare la resistenza aerodinamica nel volo livellato. Poiché $T_{no} \equiv D$, essa si calcola direttamente dalla resistenza:

$$T_{no} = D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D = \frac{1}{2} \rho V^2 S \left(C_{D_o} + \frac{C_L^2}{\pi A R e} \right), \quad (4)$$

dove si è adottato il **modello di polare parabolica** $C_D = C_{D_o} + K C_L^2$, con C_{D_o} coefficiente di resistenza a portanza nulla (resistenza parassita), $K = 1/(\pi A R e)$ fattore di resistenza indotta, $A R$ allungamento alare ed e fattore di Oswald.

3.1 La forma $T_{no} = A V^2 + B/V^2$

La (4) contiene ancora C_L , che però non è indipendente: la condizione di sostentamento (2) impone $C_L = \frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{V^2}$. Sostituendo questa espressione nella (4) e separando i due contributi si ottiene:

$$T_{no} = \underbrace{\left(\frac{1}{2} \rho S C_{D_o} \right) V^2}_{\text{resistenza parassita}} + \underbrace{\left(\frac{2}{\rho} \frac{W^2}{S} \frac{1}{\pi A R e} \right) \frac{1}{V^2}}_{\text{resistenza indotta}} = A V^2 + \frac{B}{V^2}. \quad (5)$$

$$\boxed{T_{no} = A V^2 + \frac{B}{V^2}} \quad A = \frac{1}{2} \rho S C_{D_o}, \quad B = \frac{2}{\rho} \frac{W^2}{S} \frac{1}{\pi A R e}. \quad (6)$$

I due termini hanno significato fisico opposto e complementare. Il termine $A V^2$ rappresenta la spinta necessaria a vincere la *resistenza parassita*, che cresce con il quadrato della velocità: domina alle alte velocità. Il termine B/V^2 rappresenta la spinta necessaria a vincere la *resistenza indotta* (dipendente dalla portanza), che

diminuisce con il quadrato della velocità: domina alle basse velocità, quando per sostenere il peso occorrono C_L elevati e quindi forti vortici di estremità.

3.2 Il carico di apertura alare

La costante B ammette una riscrittura istruttiva. Ricordando che $AR = b^2/S$ (con b apertura alare), si ha:

$$B = \frac{2}{\rho} \frac{W^2}{S} \frac{1}{\pi AR e} = \frac{2}{\rho \pi e} \left(\frac{W}{b} \right)^2 = \frac{2}{\rho \pi} \left(\frac{W}{b_e} \right)^2, \quad b_e = b\sqrt{e}. \quad (7)$$

La grandezza W/b è detta **carico di apertura alare** e W/b_e **carico di apertura alare efficace**, avendo introdotto l'*apertura efficace* $b_e = b\sqrt{e}$. La (7) mostra un fatto progettualmente cruciale: la resistenza indotta dipende non dalla superficie alare ma dall'*apertura*. È il carico di apertura, e non il carico alare W/S , a governare la resistenza indotta e quindi le prestazioni alle basse velocità (salita, autonomia, planata).

Nota

È questo il motivo profondo per cui gli alianti, le ali dei volatori a lungo raggio e i moderni velivoli da crociera efficiente hanno ali molto allungate: a parità di peso, aumentare l'apertura b (cioè b_e) abbassa la resistenza indotta. Il fattore di Oswald $e < 1$ "penalizza" l'apertura geometrica trasformandola in un'apertura efficace minore.

3.3 La curva della spinta necessaria

Diagrammando la (5) in funzione della velocità si ottiene una curva a forma di "conca" (Fig. 3): scende dal ramo della resistenza indotta (B/V^2 , alle basse velocità), raggiunge un minimo e risale lungo il ramo della resistenza parassita (AV^2 , alle alte velocità).

La curva separa naturalmente due **regimi** di volo:

- il **primo regime** (o regime veloce), a destra del minimo, dove a un aumento di spinta corrisponde un aumento di velocità: è il regime di funzionamento "intuitivo" e stabile;
- il **secondo regime** (o regime lento), a sinistra del minimo, dove paradossalmente per volare più lentamente serve più spinta, perché la resistenza indotta cresce vertiginosamente: è un regime di equilibrio instabile, tipico delle fasi a bassa velocità.

La curva $T_{no} = AV^2 + B/V^2$ è un *modello teorico*. Esso non tiene conto né dell'incremento di resistenza alle velocità più basse (avvicinandosi allo stallo, dove la polare cessa di essere parabolica), né della resistenza d'onda alle velocità più elevate (comprimibilità). Entrambi i fenomeni sono conseguenza dell'aver assunto la polare parabolica valida a tutte le velocità. Vedremo (§9) come correggere il modello ad alti numeri di Mach.

4 La potenza necessaria al volo livellato

Nel caso dei velivoli ad elica conviene ragionare in termini di *potenza* anziché di spinta, perché la combinazione motore+elica viene caratterizzata dalla potenza sviluppata all'albero. La **potenza necessaria** è semplicemente il prodotto della spinta necessaria per la velocità di volo:

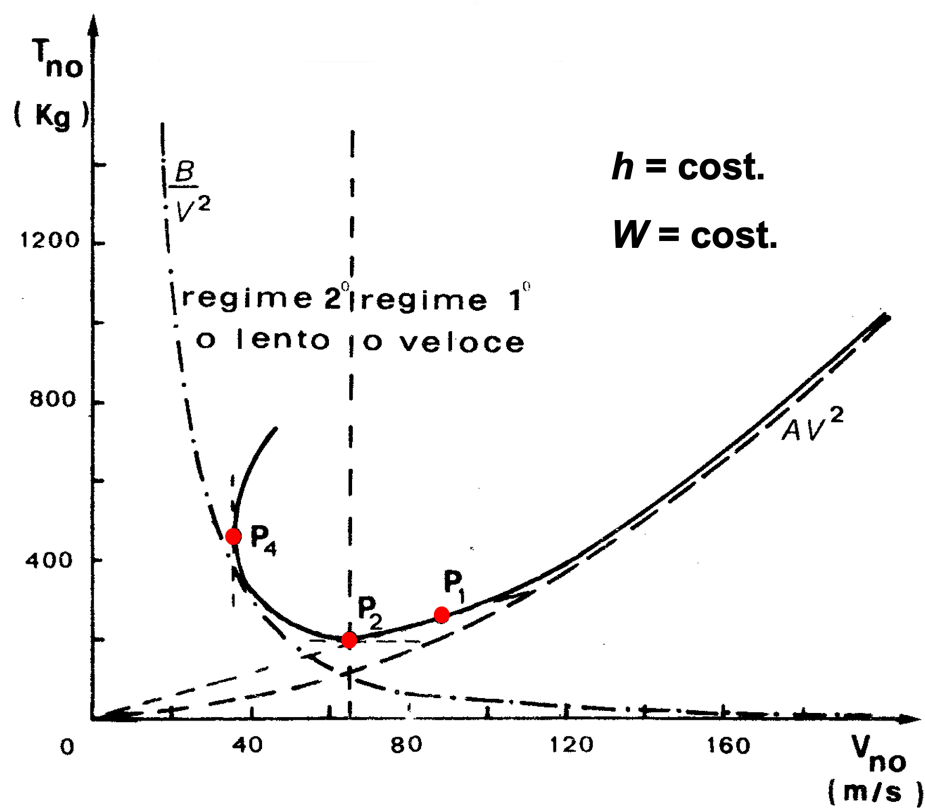


Figura 3. Spinta necessaria $T_{no} = AV^2 + B/V^2$ e suoi due contributi asintotici (resistenza parassita AV^2 e indotta B/V^2). Sono evidenziati i punti caratteristici P_2 (minima spinta / massima efficienza), P_1 ($(VE)_{\max}$) e P_4 (stallo). La regione a sinistra del minimo è il *secondo regime* (o regime lento), quella a destra il *primo regime* (o regime veloce).

$$\Pi_{no} = T_{no} V = \left(AV^2 + \frac{B}{V^2} \right) V = AV^3 + \frac{B}{V}. \quad (8)$$

$$\Pi_{no} = T_{no} V = AV^3 + \frac{B}{V} \quad (9)$$

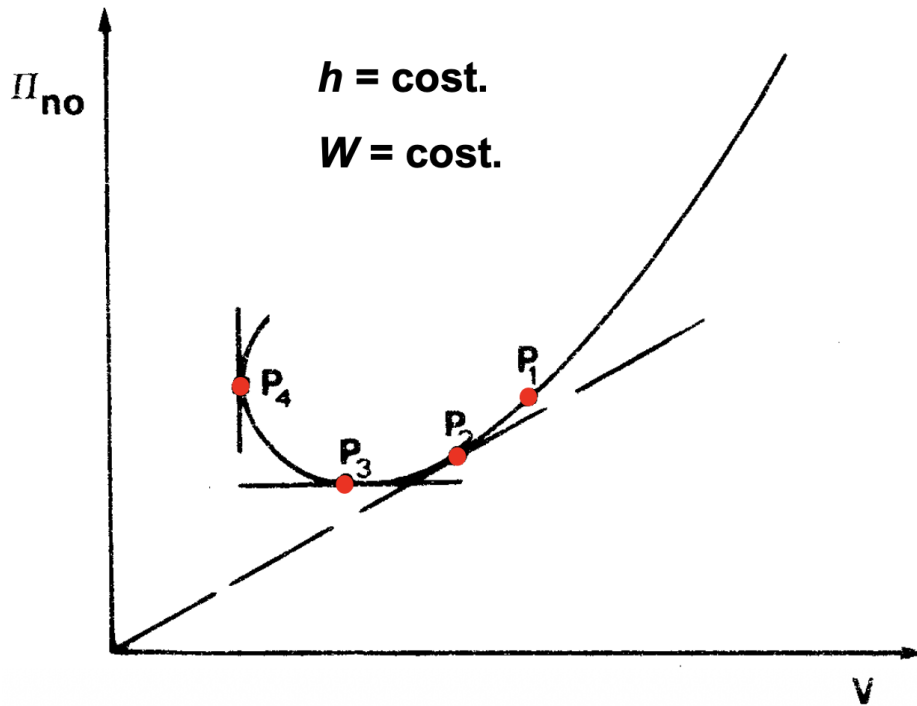


Figura 4. Potenza necessaria $\Pi_{no} = AV^3 + B/V$ in funzione della velocità. Oltre ai punti P_1, P_2, P_4 già definiti per la spinta, compare il punto P_3 di minima potenza (massimo rapporto E/V). La retta uscente dall'origine ha pendenza pari alla spinta T_{no} .

Anche la potenza necessaria ha andamento a conca, ma il minimo si colloca a una velocità *inferiore* rispetto al minimo della spinta. Ciò introduce un nuovo punto caratteristico, P_3 , di minima potenza, che approfondiamo nel paragrafo seguente. Si osservi inoltre che, poiché $\Pi_{no} = T_{no} V$, la spinta necessaria a una certa velocità si legge graficamente come la *pendenza* della retta che congiunge l'origine al punto corrispondente della curva di potenza.

Come per la spinta, anche la curva di potenza necessaria è valida nell'ambito del modello di polare parabolica: non descrive né l'incremento di resistenza in prossimità dello stallo, né la resistenza d'onda agli alti Mach.

5 Velocità e assetti caratteristici

Le espressioni (5) e (8) permettono di individuare alcuni assetti (e velocità) notevoli, definiti come punti di stazionarietà di opportune grandezze. Li ricaviamo per via analitica, annullando le derivate rispetto a V . Conviene tenere a mente la quota e il peso fissati ($h = \text{cost}$, $W = \text{cost}$), così che A e B siano costanti.

5.1 P_2 – Minima spinta e massima efficienza

Il minimo della spinta necessaria si trova annullando dT_{no}/dV :

$$\frac{dT_{no}}{dV} = \frac{d}{dV} \left(AV^2 + \frac{B}{V^2} \right) = 2AV - 2\frac{B}{V^3} = 0 \implies AV^2 = \frac{B}{V^2} \implies V|_{E_{\max}} = \sqrt[4]{\frac{B}{A}}. \quad (10)$$

La condizione $AV^2 = B/V^2$ ha un significato profondo: **al punto di minima spinta la resistenza parassita uguaglia la resistenza indotta**. Poiché $E = W/T_{no}$, dove la spinta è minima l'efficienza è massima: P_2 è l'assetto di **massima efficienza** $E_{\max}$. Sostituendo le espressioni di A e B nella (10) e usando $C_L = \frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{V^2}$ si ricava l'assetto corrispondente:

$$C_L|_{E_{\max}} = \sqrt{C_{D_0} \pi A R e}. \quad (11)$$

Dalla polare parabolica, la (11) implica $K C_L^2 = C_{D_0}$, cioè la resistenza indotta uguaglia quella parassita, e quindi $C_D = 2C_{D_0}$. Ne segue il valore della massima efficienza:

$$C_L|_{E_{\max}} = \sqrt{C_{D_0} \pi A R e}, \quad C_D = 2C_{D_0}, \quad E_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi A R e}{C_{D_0}}} \quad (12)$$

5.2 P_1 – Minimo rapporto T_{no}/V e massimo prodotto VE

Il punto P_1 è definito dal minimo del rapporto T_{no}/V (ovvero, equivalentemente, dal massimo del prodotto VE , importante per l'autonomia di distanza dei getti). Si annulla la derivata di T_{no}/V :

$$\frac{d}{dV} \left(\frac{T_{no}}{V} \right) = \frac{d}{dV} \left(AV + \frac{B}{V^3} \right) = A - 3\frac{B}{V^4} = 0 \implies V|_{(VE)_{\max}} = \sqrt[4]{\frac{3B}{A}} = \sqrt[4]{3} V|_{E_{\max}}. \quad (13)$$

La velocità di massimo VE è dunque $\sqrt[4]{3} \approx 1,316$ volte la velocità di massima efficienza. L'assetto corrispondente si ottiene sostituendo A e B :

$$C_L|_{(VE)_{\max}} = \sqrt{\frac{1}{3} C_{D_0} \pi A R e} = \frac{1}{\sqrt{3}} C_L|_{E_{\max}}, \quad C_D = \frac{4}{3} C_{D_0}, \quad E|_{(VE)_{\max}} = \frac{\sqrt{3}}{2} E_{\max}. \quad (14)$$

5.3 P_3 – Minima potenza e massimo rapporto E/V

Il punto P_3 corrisponde al minimo della potenza necessaria (massima autonomia oraria delle eliche) ed equivale al massimo del rapporto E/V . Si annulla $d\Pi_{no}/dV$:

$$\frac{d\Pi_{no}}{dV} = \frac{d}{dV} \left(AV^3 + \frac{B}{V} \right) = 3AV^2 - \frac{B}{V^2} = 0$$

$$\Rightarrow AV^2 = \frac{1}{3} \frac{B}{V^2} \Rightarrow V|_{\Pi_{\min}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3} \frac{B}{A}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} V|_{E_{\max}}.$$
(15)

La velocità di minima potenza è $1/\sqrt[4]{3} \approx 0,760$ volte quella di massima efficienza: la potenza minima si raggiunge *più lentamente* della spinta minima. L'assetto e l'efficienza valgono:

$$C_L|_{\Pi_{\min}} = \sqrt{3} C_{D_0} \pi AR e = \sqrt{3} C_L|_{E_{\max}}, \quad C_D = 4 C_{D_0}, \quad E|_{\Pi_{\min}} = \frac{\sqrt{3}}{2} E_{\max}.$$
(16)

Nota

Si noti la simmetria notevole: sia in P_1 ($(VE)_{\max}$) sia in P_3 ($\Pi_{\min}$) l'efficienza vale $\frac{\sqrt{3}}{2} E_{\max} \approx 0,866 E_{\max}$, pur trattandosi di assetti opposti (uno più veloce, l'altro più lento di $E_{\max}$). È una conseguenza diretta della struttura parabolica della polare.

5.4 P_4 – Velocità di stallo

Il punto P_4 è l'assetto di minima velocità aerodinamica, cioè la **velocità di stallo** V_S , raggiunta quando il coefficiente di portanza tocca il suo massimo $C_{L_{\max}}$. Dalla condizione di sostentamento $L = W$ con $C_L = C_{L_{\max}}$:

$$V_S = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{C_{L_{\max}}}}$$
(17)

La velocità di stallo cresce con il carico alare W/S e diminuisce all'aumentare di $C_{L_{\max}}$ (ipersostentatori) e della densità (quote basse). È la minima velocità *aerodinamicamente* possibile; vedremo che non sempre coincide con la minima velocità di *volo livellato*.

5.5 Quadro riassuntivo

La Tabella 1 raccoglie i quattro punti caratteristici e le loro relazioni reciproche, tutte espresse rispetto al punto di massima efficienza P_2 , preso come riferimento. Si tratta di relazioni puramente geometriche, indipendenti dal particolare velivolo, che vale la pena memorizzare.

Tabella 1. Punti caratteristici del volo livellato (modello di polare parabolica). Le velocità sono espresse come multipli di $V|_{E_{\max}} = \sqrt[4]{B/A}$.

Punto	Definizione	$V/V_{E_{\max}}$	$C_L/C_L _{E_{\max}}$	$E/E_{\max}$
P_3	Minima potenza $\Pi_{\min}$ ($(E/V)_{\max}$)	$1/\sqrt[4]{3} \approx 0,76$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/2$
P_2	Minima spinta T_{no} ($E_{\max}$)	1	1	1
P_1	Minimo T_{no}/V ($(VE)_{\max}$)	$\sqrt[4]{3} \approx 1,32$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/2$
P_4	Velocità di stallo V_S	—	$C_{L_{\max}}/C_L _{E_{\max}}$	—

Le relazioni della Tabella 1 sono *universali*: valgono per qualunque velivolo descritto da polare parabolica, indipendentemente dai suoi dati. Fissato l'assetto di massima efficienza P_2 , la velocità di massimo prodotto VE (punto P_1 , di interesse per l'autonomia di distanza dei getti) è sempre $\sqrt[3]{3} \approx 1,32$ volte quella di $E_{\max}$, mentre la velocità di minima potenza (punto P_3 , di interesse per l'autonomia oraria delle eliche) ne è circa il 76% ($1/\sqrt[3]{3}$). In entrambi questi assetti l'efficienza vale $\frac{\sqrt[3]{3}}{2} \approx 0,866$ volte la massima: ci si allontana dall'assetto ottimale di una stessa, ben precisa quantità, sia accelerando (P_1) sia rallentando (P_3). È un risultato puramente geometrico, conseguenza della struttura parabolica della polare.

6 Influenza della quota sulle caratteristiche necessarie

Come variano le curve necessarie al crescere della quota? La risposta è diversa per spinta e potenza, e merita attenzione perché è all'origine del comportamento dell'involuppo di volo.

6.1 Spinta necessaria: invarianza con la quota

A parità di *assetto* (cioè di C_L , quindi di C_D) e di *peso*, la condizione di sostentamento $L = C_L \frac{1}{2} \rho V^2 S = W$ impone che il prodotto ρV^2 resti costante. Ma allora anche la resistenza

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D$$

resta costante, perché dipende dallo stesso prodotto ρV^2 . Ne discende un risultato di grande eleganza:

$$\text{Assetto e peso costanti} \implies \rho V^2 = \text{cost} \implies D = T_{no} = \text{cost.} \quad (18)$$

La spinta necessaria al volo orizzontale, a parità di assetto e peso, non varia con la quota. Ciò che cambia è la velocità a cui quella spinta viene richiesta: salendo, la densità diminuisce e per mantenere $\rho V^2 = \text{cost}$ la velocità V deve aumentare. Sul piano $T_{no}-V$, le curve a quote crescenti sono “traslate” verso destra, ma il loro minimo (la minima spinta necessaria) resta allo stesso valore.

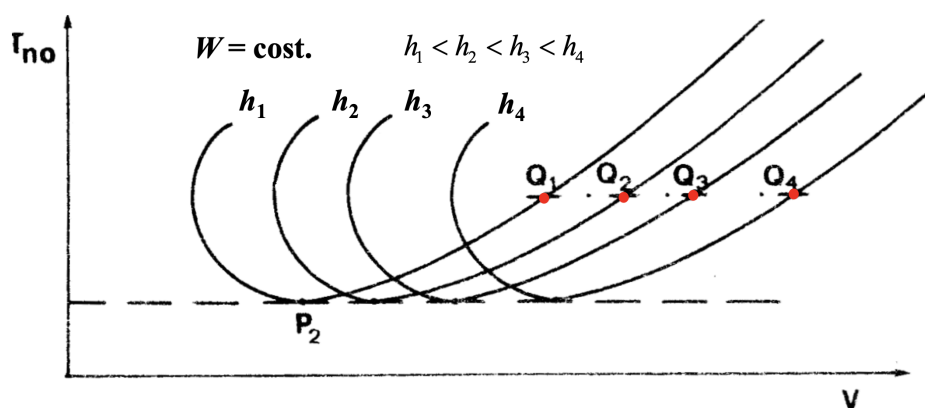


Figura 5. Curve di spinta necessaria a quote crescenti $h_1 < h_2 < h_3 < h_4$ (peso costante). I punti $Q_1, \dots, Q_4$ rappresentano lo stesso assetto a quote diverse: la spinta minima P_2 è la medesima a tutte le quote, mentre la velocità corrispondente cresce con la quota.

6.2 Potenza necessaria: scala con $1/\sqrt{\sigma}$

Per la potenza il discorso cambia, perché $\Pi_{no} = T_{no}V$ e, mentre T_{no} resta costante a pari assetto, la velocità aumenta con la quota. Consideriamo due quote h_1 e h_2 , a pari assetto e peso. Poiché $\rho V^2 = \text{cost}$, le velocità sono legate da:

$$\rho_1 V_1^2 = \rho_2 V_2^2 \implies \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{21}}}, \quad (19)$$

dove $\sigma_{21} = \rho_2/\rho_1$ è il rapporto delle densità fra le due quote. La potenza necessaria scala quindi nello stesso modo della velocità:

$$\frac{\Pi_{no,2}}{\Pi_{no,1}} = \frac{T_{no}V_2}{T_{no}V_1} = \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}. \quad (20)$$

$$\boxed{\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}, \quad \frac{\Pi_{no,2}}{\Pi_{no,1}} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}} \quad (21)$$

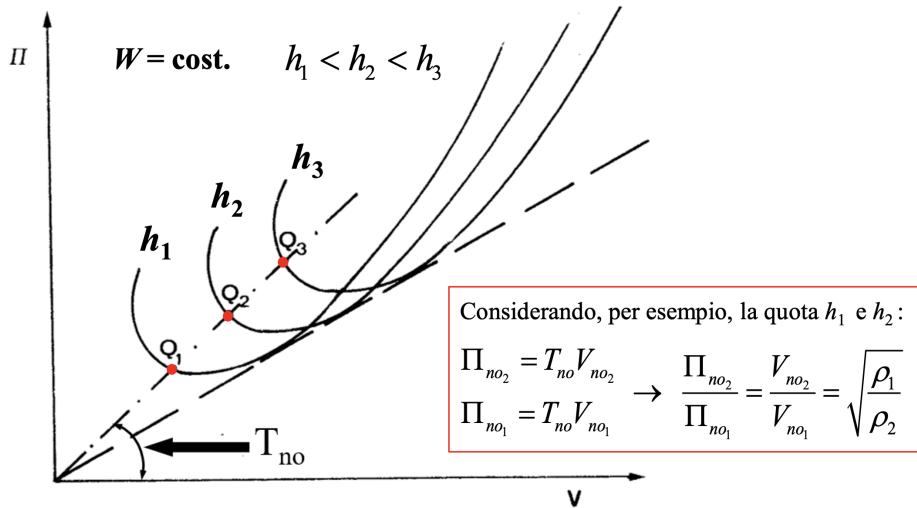


Figura 6. Curve di potenza necessaria a quote crescenti $h_1 < h_2 < h_3$ (peso costante). I punti Q_1, Q_2, Q_3 a pari assetto giacciono sulla stessa semiretta uscente dall'origine, di pendenza pari alla spinta necessaria $T_{no} = \text{cost}$. Salendo, sia la velocità sia la potenza necessaria aumentano come $1/\sqrt{\sigma}$.

In sintesi: la *spinta* necessaria minima è invariante con la quota, ma la *potenza* necessaria minima cresce salendo (come $1/\sqrt{\sigma}$). È per questo che un velivolo ad elica, la cui propulsione è caratterizzata dalla potenza, “soffre” la quota più di un getto: ad alta quota gli serve molta più potenza per volare alla stessa efficienza.

7 Le caratteristiche disponibili e il grado di ammissione

Per chiudere il problema dell'equilibrio occorre il secondo ingrediente: la spinta (o la potenza) che l'impianto propulsivo riesce effettivamente a fornire. Queste curve sono state ricavate nel dettaglio nello studio degli impianti propulsivi; ne richiamiamo qui i modelli essenziali, perché è la loro intersezione con le curve necessarie a fornire le velocità di equilibrio.

7.1 Il grado di ammissione

Il pilota regola la potenza erogata dai motori tramite la “manetta”, cui corrisponde il **grado di ammissione** φ (con $0 \leq \varphi \leq 1$). Nei motori alternativi il pilota agisce sulla MAP (*Manifold Absolute Pressure*), la pressione di alimentazione. A una data quota, variando φ il velivolo accelera o decelera fino a stabilizzarsi su una nuova velocità di equilibrio, in corrispondenza della quale spinta disponibile e necessaria tornano a uguagliarsi.

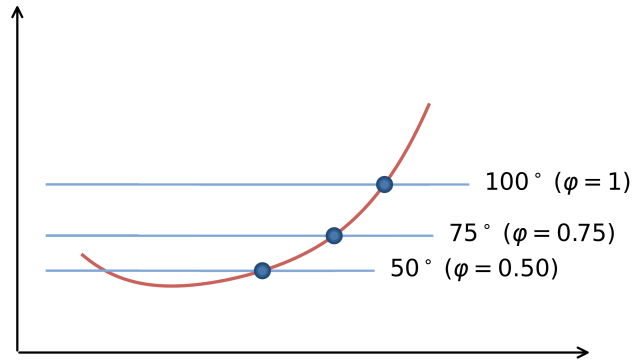


Figura 7. A quota fissata, il grado di ammissione φ regola il livello di spinta (o potenza) disponibile; ciascun livello individua una diversa velocità di equilibrio sull'intersezione con la curva necessaria.

7.2 Spinta disponibile del velivolo a getto

Per un turbofan ad alto rapporto di by-pass la spinta in crociera (*max cruise*) dipende dalla quota e, alle alte quote, risulta sostanzialmente *indipendente dalla velocità*. I modelli adottati sono:

$$T_d = 0,83 K_{MZ} T_o \varphi \quad (\text{max cruise}), \quad T_d = 0,71 \sigma T_o \varphi \quad (\text{alle alte quote}), \quad (22)$$

dove T_o è la spinta statica al livello del mare, $\sigma = \rho/\rho_o$ il rapporto di densità e K_{MZ} un fattore funzione del Mach. La seconda forma, valida ad alta quota, evidenzia l'indipendenza dalla velocità: sul piano T_d-V la spinta disponibile è una retta orizzontale, che scende al crescere della quota (perché diminuisce σ).

7.3 Potenza disponibile del velivolo ad elica

Per i velivoli ad elica la propulsione è caratterizzata dalla potenza all'albero Π_o , convertita in potenza propulsiva tramite il rendimento dell'elica η_p . Distinguiamo due casi:

$$\Pi_d = \Pi_o \eta_p \sigma \varphi \quad (\text{motore a pistoni}), \quad (23)$$

$$\Pi_d = \Pi_o \eta_p \sigma \varphi K_v(V) \quad (\text{motore turboelica}). \quad (24)$$

Nel caso del motore a pistoni la potenza all'albero è (in prima approssimazione) indipendente dalla velocità, e quindi sul piano Π_d-V la potenza disponibile è una retta orizzontale. Nel caso del turboelica interviene invece l'**effetto RAM**: l'aria che entra nella presa dinamica viene parzialmente compressa per effetto della velocità di volo, e la potenza all'albero cresce con la velocità secondo una legge approssimativamente parabolica, descritta dal fattore $K_v(V) > 1$. La potenza disponibile risulta allora leggermente crescente con la velocità.

Nota

La distinzione fra pistoni e turboelica non è accademica: il fattore K_v (incremento tipico del 10–20%) sposta verso destra la curva di potenza disponibile e quindi aumenta la velocità massima ottenibile, come si vedrà applicando la procedura iterativa (§11).

8 Determinazione grafica di $V_{\min}$ e $V_{\max}$

L'idea è diretta: sovrapponendo su uno stesso diagramma la curva necessaria e quella disponibile, le loro intersezioni individuano le velocità di equilibrio in volo livellato, per fissati peso e quota. Per i getti si usa il diagramma delle spinte; per le eliche quello delle potenze.

8.1 Velivoli a getto

Per un getto ad alta quota la spinta disponibile è una retta orizzontale ($T_d = 0,71 \sigma T_o \varphi$) che taglia la conca della spinta necessaria. Possono presentarsi due intersezioni: una sul ramo destro (primo regime, velocità alta) e una sul ramo sinistro (secondo regime, velocità bassa).

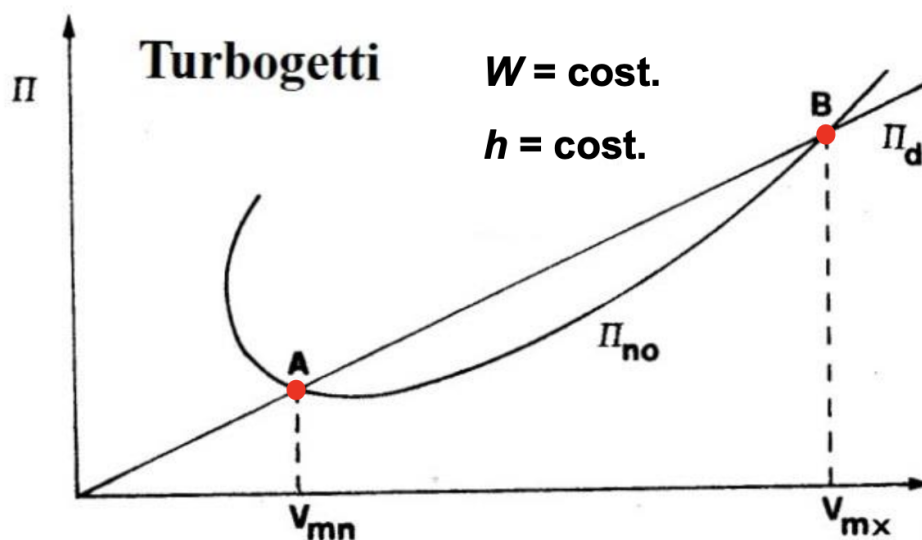


Figura 8. Equilibrio del velivolo a getto: la spinta disponibile (retta orizzontale) interseca la curva di spinta necessaria. Alle alte quote compaiono due intersezioni, $V_{\min}$ (ramo sinistro, instabile) e $V_{\max}$ (ramo destro, stabile).

L'intersezione sul ramo sinistro è una velocità di equilibrio *instabile* (secondo regime). Essa delimita la minima velocità di volo livellato possibile a quella quota. Attenzione: **la minima velocità di volo livellato non coincide necessariamente con la velocità di stallo**. Alle quote basse, dove la curva necessaria è “larga”, la minima velocità è quella di stallo V_S ; ma alle alte quote, dove la spinta disponibile scende, la minima velocità di volo livellato è fissata dal secondo punto di equilibrio (sul ramo sinistro), perché già alla velocità di stallo la spinta richiesta supererebbe quella disponibile.

Nell'interesse pratico, ci si concentra sulla *velocità massima* (intersezione di destra). Salendo di quota la retta della spinta disponibile si abbassa, finché a una certa quota essa diventa tangente al minimo della curva

necessaria: a quel punto le due intersezioni coincidono ($V_{\min} = V_{\max}$) e si raggiunge la quota di tangenza teorica.

8.2 Velivoli ad elica

Per le eliche si ragiona sulle potenze. La potenza disponibile (orizzontale per i pistoni, lievemente crescente per i turboelica) interseca la conca della potenza necessaria. La Fig. 9 confronta il comportamento di un'elica e di un getto: per il getto la potenza disponibile cresce linearmente con V (perché $\Pi_d = T_d V$ con T_d costante), mentre per l'elica resta pressoché costante.

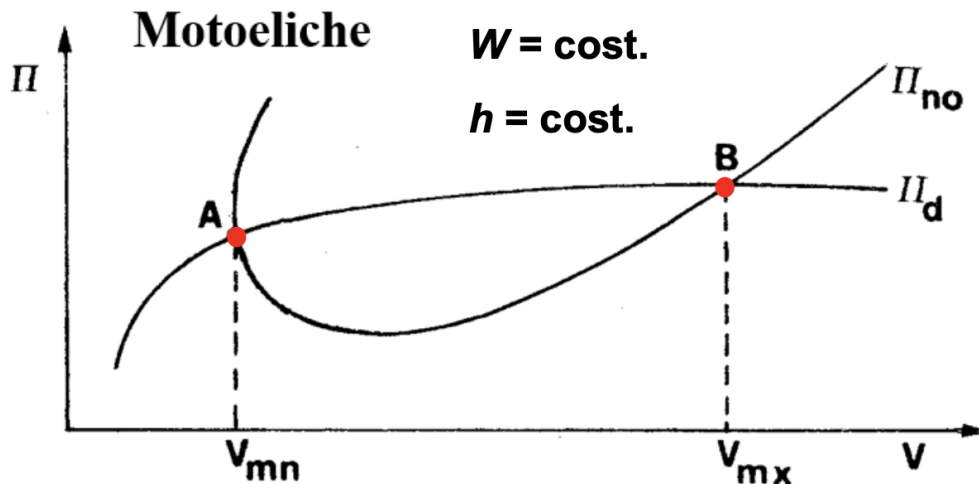


Figura 9. Confronto fra l'equilibrio di un velivolo ad elica (a sinistra) e di un getto (a destra) sul piano delle potenze. I punti A e B individuano la minima e la massima velocità di volo livellato.

8.3 Lettura del diagramma e numero di intersezioni

La sovrapposizione delle due curve si legge in modo immediato. Per un velivolo a getto ad alta quota, la spinta disponibile è una retta orizzontale che può tagliare la conca della spinta necessaria in *due* punti, in *uno* solo o in *nessuno*:

- **due intersezioni** (retta disponibile alta rispetto al minimo): il punto di destra è la velocità massima $V_{\max}$ (primo regime, stabile), quello di sinistra la velocità minima $V_{\min}$ di volo livellato (secondo regime, instabile);
- **una sola intersezione** (retta tangente al minimo): $V_{\min} = V_{\max}$, le due velocità coincidono nella velocità di massima efficienza; è la condizione di *quota di tangenza teorica*;
- **nessuna intersezione** (retta al di sotto del minimo): la spinta disponibile non basta a equilibrare nemmeno la spinta necessaria minima e il volo livellato è impossibile.

Salendo di quota la retta della spinta disponibile si abbassa (perché T_d scala con σ), mentre la conca della spinta necessaria mantiene invariato il proprio minimo $T_{no,\min} = W/E_{\max}$ ma trasla verso destra (le velocità crescono come $1/\sqrt{\sigma}$). Le due intersezioni si avvicinano via via, fino a coincidere alla quota di tangenza. È proprio questo meccanismo a determinare l'involuppo di volo (§13).

9 Effetti di comprimibilità sulla resistenza

Il modello di polare parabolica assume C_D funzione del solo C_L , indipendente dal Mach. Ciò è accettabile fino a numeri di Mach moderati, ma cessa di valere in prossimità del regime transonico.

9.1 Mach critico, Mach di divergenza e resistenza d'onda

Per ogni profilo esiste un **Mach critico** M_{cc} : il Mach di volo in corrispondenza del quale, in un punto del dorso, il flusso locale raggiunge per la prima volta la velocità del suono. Superato M_{cc} si formano onde d'urto locali sempre più intense; quando il Mach raggiunge il **Mach di divergenza della resistenza** M_{DD} , il coefficiente di resistenza inizia a crescere vertiginosamente per effetto della resistenza d'onda (*wave drag*). A valori ancora superiori si manifesta il *buffeting* (scuotimenti dovuti alla separazione del flusso a valle dell'onda d'urto), condizione insostenibile per il pilota.

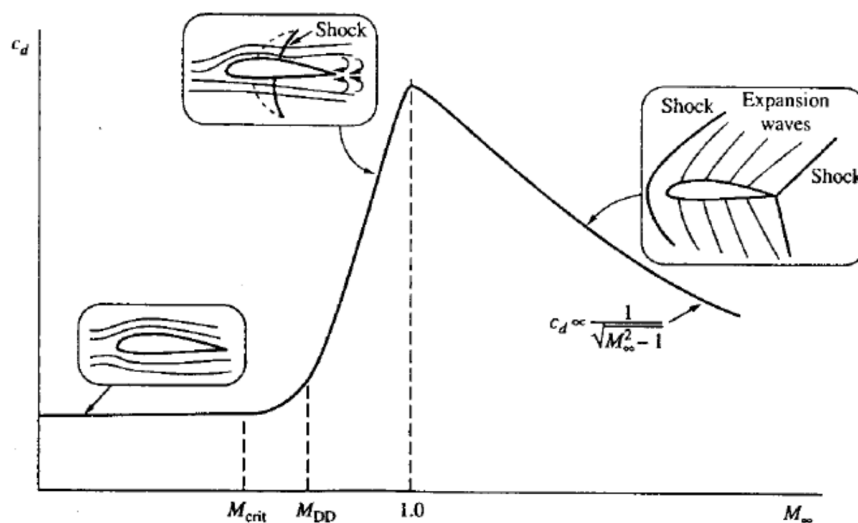


Figura 10. Coefficiente di resistenza in funzione del numero di Mach: si individuano il Mach critico M_{cc} e il Mach di divergenza M_{DD} (oltre il quale la resistenza d'onda cresce rapidamente).

9.2 Stima del Mach critico e del Mach di divergenza

Il Mach critico può essere stimato a partire dallo spessore percentuale medio del profilo, dal coefficiente di portanza in crociera e dall'angolo di freccia dell'ala (Fig. 11). Per profili supercritici il valore va aumentato di 0,03–0,04 (fino a 0,06 per profili supercritici “aggressivi”). I velivoli da trasporto a getto presentano tipicamente spessori percentuali medi del 10–12% e angoli di freccia compresi fra 20° e 28°.

Stimato M_{cc} , il Mach di divergenza si ricava dalla relazione:

$$M_{DD} = M_{cc} \left[1,02 + 0,08 (1 - \cos \Lambda) \right]. \quad (25)$$

che fornisce mediamente un Mach di divergenza superiore di circa il 3% rispetto al critico ($M_{DD} \approx 1,03 M_{cc}$). Negli esercizi il Mach di divergenza viene assegnato come dato di ingresso (tipicamente 0,80–0,86 per i velivoli da trasporto, spesso 0,81–0,84).

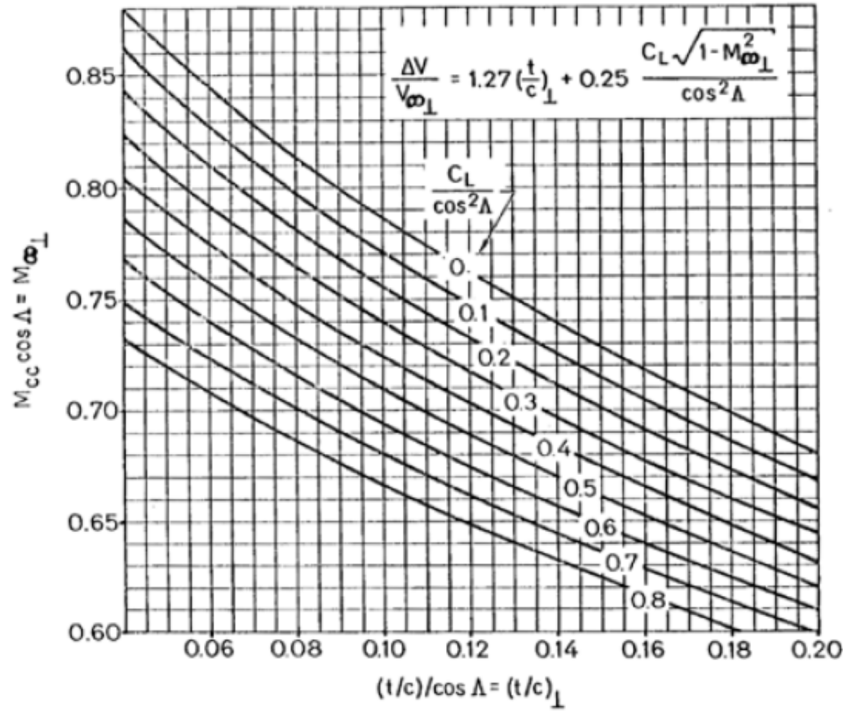


Figura 11. Abaco per la determinazione del Mach critico in funzione dello spessore percentuale $(t/c)/\cos \Lambda$ e del parametro $C_L/\cos^2 \Lambda$.

9.3 Il modello lineare di incremento della resistenza

Stimato il Mach di divergenza, un modo efficace e rapido per stimare la curva di resistenza reale consiste nell'assumere che la resistenza rimanga sostanzialmente invariata (polare parabolica) fino a M_{DD} , e che oltre M_{DD} cresca *linearmente* con il Mach. In particolare si assume un incremento di resistenza pari a 1,4 volte la resistenza D_{DD} (valutata a M_{DD} con la polare parabolica) per ogni 0,1 di incremento di Mach oltre M_{DD} :

$$T_{no} = D = D_{DD} + 1,4 D_{DD} (M - M_{DD}) \quad \text{per } M > M_{DD}. \quad (26)$$

A prima vista il coefficiente 1,4 nella (26) può sembrare un errore di stampa per 1,4. Non lo è. L'incremento di resistenza vale 1,4 D_{DD} per ogni 0,1 di Mach oltre M_{DD} . Su un eccesso di Mach $(M - M_{DD})$ generico, il numero di "passi" da 0,1 vale $(M - M_{DD})/0,1 = 10 (M - M_{DD})$, e dunque l'incremento totale è

$$1,4 D_{DD} \cdot 10 (M - M_{DD}) = 14 D_{DD} (M - M_{DD}).$$

Il coefficiente 14 è quindi corretto e coerente con la formulazione "1,4 volte per ogni 0,1 di Mach".

Applicando questo modello, la velocità (o il Mach) di equilibrio ottenuta con la polare parabolica viene "riportata alla realtà": se il calcolo non corretto fornisce un Mach superiore a M_{DD} , la resistenza d'onda aggiuntiva sposta l'intersezione con la spinta disponibile verso un Mach più basso e verosimile. Il procedimento quantitativo è illustrato nel §10 in forma del tutto generale.

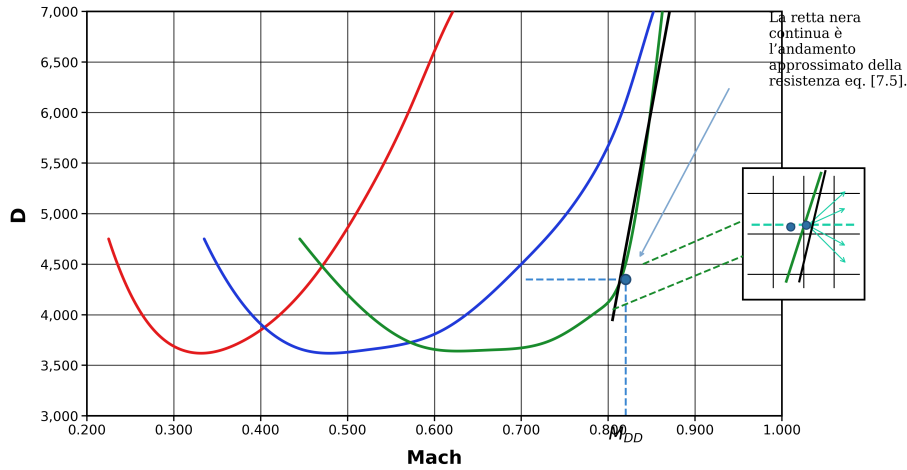


Figura 12. Curva di resistenza reale del velivolo (con effetti di comprimibilità): andamento parabolico fino a M_{DD} e crescita approssimativamente lineare oltre, secondo l'equazione (26). È indicato il confronto con la curva tratteggiata della polare parabolica (senza resistenza d'onda).

10 Determinazione analitica – velivoli a getto

L'equilibrio $T_d = D$ può essere sviluppato analiticamente, fornendo una formula chiusa per la velocità di volo che restituisce gli stessi risultati ottenuti per via grafica.

10.1 Dall'equilibrio all'equazione biquadratica

Conviene partire direttamente dall'uguaglianza fra spinta disponibile e spinta necessaria nella forma $T_{no} = AV^2 + B/V^2$:

$$T_d = T_{no} = AV^2 + \frac{B}{V^2} \implies AV^4 - T_d V^2 + B = 0. \quad (27)$$

La (27) è *biquadratica* in V : risolvendola rispetto a V^2 si ottiene

$$V = \sqrt{\frac{T_d}{2A} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4AB}{T_d^2}} \right)}, \quad (28)$$

dove il segno $+$ fornisce la velocità massima (primo regime) e il segno $-$ la minima (secondo regime). Le due radici sono reali e distinte solo se $1 - 4AB/T_d^2 > 0$; la condizione limite $1 - 4AB/T_d^2 = 0$ dà $V_{\min} = V_{\max}$ e corrisponde a $T_d = \sqrt{4AB} = W/E_{\max} = T_{no, \min}$, cioè all'assetto di massima efficienza individuato dalla tangenza fra le curve di T_{no} e T_d . Ritroveremo questa stessa conclusione, in forma adimensionale, tra poco.

10.2 Forma con la pressione dinamica

La stessa equazione si può ricavare lavorando sulla pressione dinamica $q = \frac{1}{2}\rho V^2$ (ricordando $C_L = (W/S)/q$), il che rende più immediato l'inserimento dei parametri progettuali. Si ha:

$$T_d = D = q S C_{D_o} + \frac{K S}{q} \left(\frac{W}{S} \right)^2, \quad (29)$$

con $K = 1/(\pi AR e)$. Moltiplicando entrambi i membri per q si ottiene un'equazione di secondo grado nella pressione dinamica:

$$q^2 S C_{D_o} - q T_d + K S \left(\frac{W}{S} \right)^2 = 0. \quad (30)$$

10.3 La formula chiusa per la velocità

Risolvendo la (30) rispetto a q e sostituendo $q = \frac{1}{2} \rho V^2$ si arriva all'espressione della velocità. Introducendo i parametri progettuali rapporto spinta-peso T_d/W e carico alare W/S (legati da $T_d/S = (T_d/W)(W/S)$), e facendo uso della relazione

$$4 K C_{D_o} = \frac{4}{\pi AR e} C_{D_o} = \frac{1}{E_{\max}^2}, \quad (31)$$

si ottengono due forme equivalenti e particolarmente leggibili:

$$V = \left[\frac{(T_d/W)(W/S) \pm (W/S) \sqrt{(T_d/W)^2 - 1/E_{\max}^2}}{\rho C_{D_o}} \right]^{1/2} \quad (32)$$

$$V = \left[\frac{(T_d/W)(W/S)}{\rho C_{D_o}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{(T_d/W)^2 E_{\max}^2}} \right) \right]^{1/2} \quad (33)$$

Il doppio segno della (32) corrisponde alle due intersezioni già viste per via grafica: il segno + dà la velocità massima V_1 (ramo destro, C_L basso), il segno - la velocità minima V_2 (ramo sinistro, C_L alto). La (33) conserva il solo segno + perché di norma interessa la velocità massima.

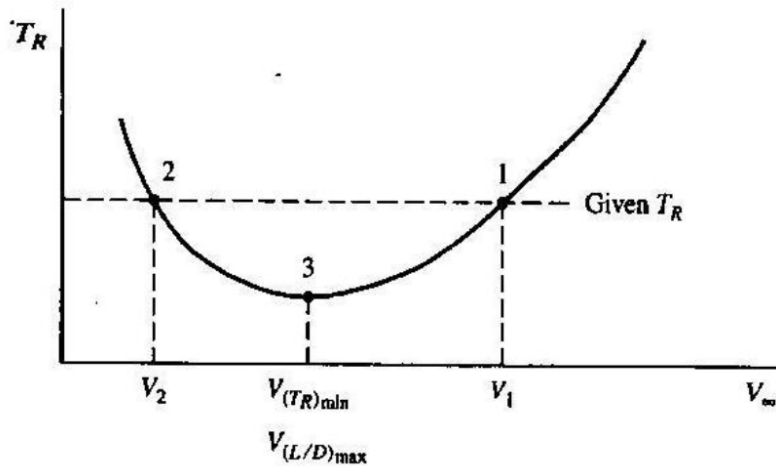


Figura 13. Le due soluzioni dell'equilibrio per un dato valore di spinta disponibile: V_2 (secondo regime), V_1 (primo regime, velocità massima) e il punto 3 di minima spinta richiesta $V_{(TR)\min} = V_{(L/D)\max}$.

10.4 La condizione di equilibrio e la velocità del punto E

La (33) fornisce due soluzioni reali e distinte solo se l'argomento della radice è positivo, cioè se il discriminante dell'equazione di secondo grado è non negativo:

$$\left(\frac{T_d}{W}\right)^2 - 4 C_{D_o} K \geq 0 \iff \left(\frac{T_d}{W}\right)^2 \geq \frac{1}{E_{\max}^2}. \quad (34)$$

$$\boxed{\frac{T_d}{W} \geq \frac{1}{E_{\max}}} \quad (35)$$

La condizione (35) ha un significato fisico limpido: **l'equilibrio in volo livellato è possibile se e solo se la spinta disponibile (rapportata al peso) è almeno pari a $1/E_{\max}$** , cioè se la spinta disponibile T_d supera la minima spinta necessaria $D_{\min} = W/E_{\max}$. Quando vale l'uguaglianza, le due soluzioni coincidono in un'unica velocità: quella del punto di massima efficienza E . Si verifica infatti che, ponendo $T_d/W = 1/E_{\max}$ nella (33):

$$V = \sqrt{\frac{1}{\rho C_{D_o}} \frac{T_d}{W} \frac{W}{S}} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{C_L|_{E_{\max}}}} = V|_{E_{\max}}, \quad (36)$$

che è esattamente la velocità di massima efficienza ricavata nel §5. Si ritrova così, per via analitica, quanto noto graficamente: la quota di tangenza teorica è quella in cui la spinta disponibile eguaglia la minima spinta necessaria, e ad essa compete un'unica velocità di equilibrio, quella di efficienza massima.

10.5 Metodo alternativo: via efficienza

Esiste una procedura alternativa, anch'essa basata sulla validità della polare parabolica, che evita di ricordare la (33). Poiché in crociera la spinta deve eguagliare la resistenza, l'efficienza di equilibrio è nota dal peso:

$$E = \frac{C_{L_{cr}}}{C_{D_{cr}}} = \frac{L}{D} = \frac{W}{T_d}. \quad (37)$$

Assumendo valida la polare parabolica, $C_{D_{cr}} = C_{D_o} + K C_{L_{cr}}^2$, la (37) diventa un'equazione di secondo grado nell'incognita $C_{L_{cr}}$:

$$K E C_{L_{cr}}^2 + E C_{D_o} - C_{L_{cr}} = 0 \implies C_{L_{cr}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4 K E^2 C_{D_o}}}{2 K E}. \quad (38)$$

Delle due radici si sceglie quella con il segno $-$, che corrisponde al C_L più basso (punto 1, velocità maggiore). Trovato $C_{L_{cr}}$, la velocità di equilibrio segue dalla condizione di sostentamento:

$$V_{cr} = \sqrt{\frac{2}{\rho_o \sigma} \frac{W}{S} \frac{1}{C_{L_{cr}}}}. \quad (39)$$

La procedura analitica per la velocità massima di un getto si riassume in pochi passi, validi per qualunque velivolo:

1. dai dati aerodinamici si calcolano $K = 1/(\pi A R e)$ ed $E_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi A R e / C_{D_0}}$, da cui la resistenza minima $T_{no, \min} = W / E_{\max}$ (invariante con la quota);
2. alla quota di interesse si valuta la spinta disponibile $T_d = 0,71 \sigma T_o \varphi$ e si verifica la condizione di equilibrio $T_d \geq T_{no, \min}$, ossia $T_d / W \geq 1 / E_{\max}$;
3. se la condizione è soddisfatta, si applica la (33) con il segno + per la velocità massima (o entrambi i segni della (32) per $V_{\min}$ e $V_{\max}$);
4. in alternativa si usa il metodo via efficienza: da $E = W / T_d$ si ricava $C_{L_{cr}}$ con la (38) (radice col segno -) e quindi V_{cr} dalla (39).

I due metodi forniscono, per costruzione, lo stesso risultato. Se il Mach corrispondente supera M_{DD} , il valore non è fisicamente sostenibile e va corretto per comprimibilità, come nel paragrafo seguente.

10.6 Correzione per comprimibilità

Quando la (33) restituisce, ad alta quota, un Mach superiore a M_{DD} , quel valore non è sostenibile: a quei numeri di Mach la resistenza d'onda è ormai dominante e la polare parabolica non vale più. Si applica allora il modello lineare (26), assegnato il Mach di divergenza M_{DD} del velivolo.

Il procedimento, del tutto generale, è il seguente. Alla quota considerata si valuta dapprima la velocità di divergenza $V_{DD} = M_{DD} a$ (con a velocità del suono alla quota); a tale velocità, ancora in regime di polare parabolica, si calcolano

$$C_{L_{DD}} = \frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{V_{DD}^2}, \quad C_{D_{DD}} = C_{D_0} + K C_{L_{DD}}^2, \quad D_{DD} = \frac{1}{2} \rho V_{DD}^2 S C_{D_{DD}}.$$

Per $M > M_{DD}$ la resistenza segue la (26); imponendo l'equilibrio $D = T_d$ ed esplicitando il Mach si ottiene la formula di correzione (si veda l'andamento della Fig. 12):

$$M = M_{DD} + \frac{T_d - D_{DD}}{14 D_{DD}} \quad (\text{valida solo se } T_d > D_{DD}). \quad (40)$$

Essendo il Mach adimensionale, la (40) fornisce lo stesso risultato sia esprimendo le forze in kg sia in newton, purché T_d e D_{DD} siano nella stessa unità. Se la procedura analitica avesse fornito direttamente $M \leq M_{DD}$, nessuna correzione sarebbe stata necessaria.

II Determinazione analitica – velivoli ad elica

Per i velivoli ad elica la spinta disponibile dipende dalla velocità di volo, e un approccio analitico in forma chiusa risulta più complesso. Partendo dall'uguaglianza delle potenze $\Pi_d = \Pi_{no} = AV^3 + B/V$ e sviluppandola in V si ottiene infatti un'equazione di *quarto grado*:

$$A V^4 - \Pi_d V + B = 0, \quad (41)$$

la cui risoluzione diretta è laboriosa. Conviene quindi adottare una procedura iterativa, basata sulla scrittura della potenza necessaria in termini del coefficiente di resistenza:

$$\Pi_{no} = \frac{1}{2} \rho S C_D V^3 \implies V = \sqrt[3]{\frac{2 \Pi_d}{\rho S C_D}}. \quad (42)$$

La (42) non è una formula chiusa, perché C_D dipende da C_L e quindi dalla velocità stessa. La si risolve allora per iterazione, partendo da un valore di tentativo del coefficiente di resistenza.

11.1 Procedura iterativa per motori a pistoni

Per i motori a pistoni la potenza disponibile è indipendente dalla velocità, $\Pi_d = \Pi_o \eta_p \sigma \varphi$. La procedura è:

1. si assume un valore iniziale $C_D = 1,1 C_{D_o}$ (ragionevole, perché alla velocità massima C_L e C_D sono prossimi ai valori a portanza nulla);
2. con tale C_D si calcola V dalla (42);
3. dalla V ottenuta si ricava $C_L = \frac{2 W}{\rho S V^2}$;
4. dal C_L si ricava il nuovo $C_D = C_{D_o} + K C_L^2$;
5. si torna al passo 2 e si itera finché la velocità varia di meno dell'1% (o di pochi km/h) fra due cicli successivi.

Nota

La scelta del valore iniziale influenza solo il numero di iterazioni, non il risultato finale: il procedimento converge sempre alla soluzione. Per il calcolo della velocità massima ($\varphi = 1$, C_L basso) conviene partire da $1,1 C_{D_o}$; per la crociera a φ ridotto (velocità minori, C_L più alti) conviene partire da $1,2 C_{D_o}$ per ridurre le iterazioni.

11.2 Procedura per motori turboelica

Per i turboelica interviene l'effetto RAM tramite il fattore $K_v(V) > 1$: la potenza disponibile cresce con la velocità. La procedura si modifica come segue:

1. si valuta la potenza disponibile con $K_v = 1$, $\Pi_{d,1} = \Pi_o \eta_p \sigma \varphi$ (non si conosce ancora la velocità, quindi nemmeno K_v);
2. assunto $C_D = 1,1 C_{D_o}$, si calcola una prima velocità con la (42) usando $\Pi_{d,1}$;
3. dalla velocità si ricava il fattore K_v (dalla relazione o dal grafico dell'effetto RAM);
4. si ricalcola la velocità con la potenza corretta $\Pi_d = \Pi_{d,1} K_v$;
5. dalla V si ricava C_L , poi $C_D = C_{D_o} + K C_L^2$, e si itera dal passo 4 fino a convergenza.

Non è necessario aggiornare K_v a ogni ciclo se la velocità varia di meno di ~ 5 km/h fra un'iterazione e l'altra: variazioni così piccole non modificano sensibilmente il fattore RAM.

11.3 Convergenza e osservazioni pratiche

La procedura iterativa converge molto rapidamente: poiché alla velocità massima il coefficiente di portanza è basso e C_D è già prossimo a C_{D_0} , partendo da $C_D = 1,1 C_{D_0}$ si raggiunge di norma la velocità finale già alla *seconda* o *terza* iterazione, con scarti dell'ordine di pochi km/h. La rapidità di convergenza è una conseguenza del fatto che la (42) dipende da C_D solo attraverso una radice cubica: una variazione percentuale di C_D produce una variazione tre volte minore sulla velocità.

Nota

Per uno stesso velivolo, il passaggio dal modello a “pistoncini equivalenti” ($K_v = 1$) a quello turboelica (effetto RAM, $K_v > 1$) sposta la curva di potenza disponibile verso l'alto e quindi a destra: l'incremento tipico di K_v del 10–15% si traduce in un aumento della velocità massima di qualche punto percentuale. I valori ottenuti per via iterativa coincidono, come deve essere, con quelli letti graficamente all'intersezione fra potenza disponibile e potenza necessaria (Fig. 9).

Strumento di calcolo online

La procedura iterativa qui descritta è implementata in una **web app** che calcola direttamente $V_{\min}$ e $V_{\max}$ di un velivolo ad elica a partire dai parametri della polare parabolica (C_{D_0} , AR , e) e dai dati di peso, superficie e potenza. Il solutore iterativo, con smorzamento regolabile, ricava i coefficienti A e B e restituisce i limiti di velocità in volo livellato.

Apri la web app:

raucci.net/wp-content/uploads/cfd/motoelica_velocità.html

12 Variazione di $V_{\min}$ e $V_{\max}$ con la quota

Il comportamento delle velocità estreme al variare della quota è qualitativamente diverso fra motoeliche e turbogetti, e dipende dal modo in cui le caratteristiche disponibili degradano salendo.

12.1 Motoeliche

Per le motoeliche, salendo di quota:

1. al di sotto di una certa quota non è possibile raggiungere la velocità di secondo regime (ramo lento) a meno di ridurre la potenza del motore;
2. la velocità minima *aumenta* all'aumentare della quota;
3. la velocità massima *diminuisce* all'aumentare della quota (perché la potenza disponibile cala con σ più rapidamente di quanto la potenza necessaria si sposti).

12.2 Turbogetti

Per i turbogetti, invece:

1. la velocità minima *aumenta* all'aumentare della quota;
2. la velocità massima *aumenta* all'aumentare della quota, finché gli effetti di comprimibilità (resistenza d'onda) non ne determinano una successiva diminuzione alle quote più elevate.

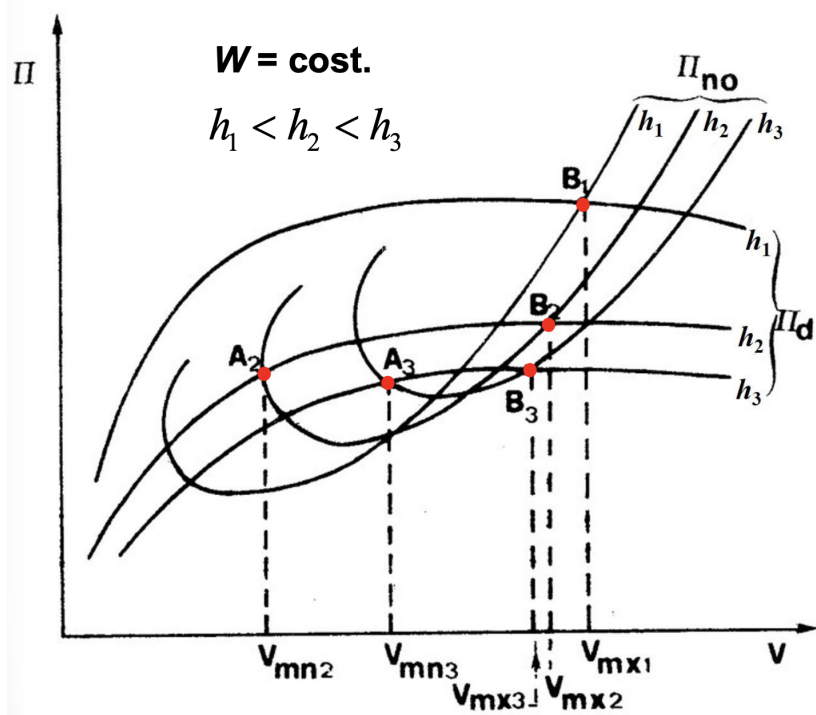


Figura 14. Variazione delle velocità minima e massima con la quota per un velivolo a elica (motoelica). Salendo, la velocità minima aumenta e la massima diminuisce.

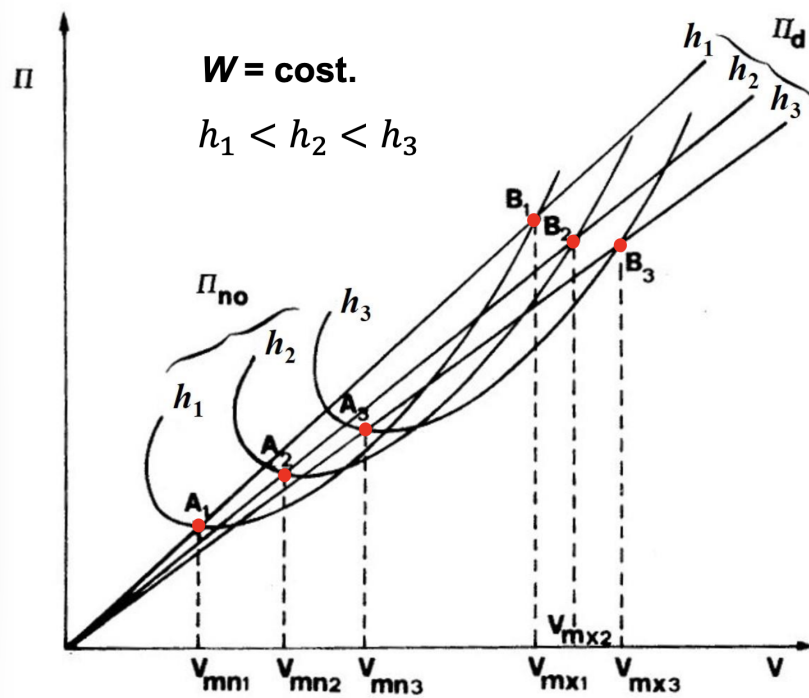


Figura 15. Variazione delle velocità minima e massima con la quota per un velivolo a getto. La velocità massima aumenta con la quota fino a che gli effetti di comprimibilità (resistenza d'onda) non ne provocano la successiva diminuzione.

La differenza di comportamento della velocità massima (decescente per le eliche, crescente per i getti) è una conseguenza diretta del fatto che la spinta necessaria è invariante con la quota, mentre la potenza necessaria cresce come $1/\sqrt{\sigma}$.

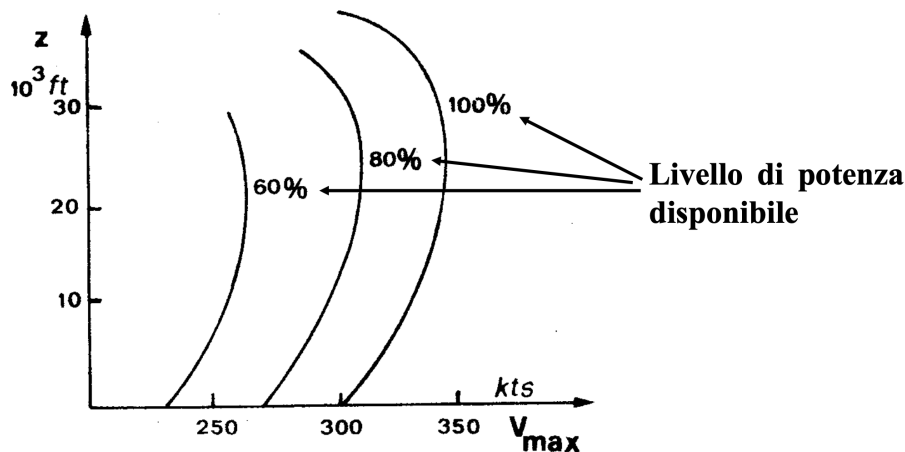


Figura 16. Variazione della velocità massima con la quota per un turbogetto, a diversi livelli di potenza disponibile (60%, 80%, 100%).

13 L'involuppo di volo livellato

Avendo imparato a determinare, a ogni quota, la velocità minima e la velocità massima, possiamo costruire l'**involuppo di volo livellato** (*level flight envelope*): la regione del piano quota-velocità che racchiude tutte le possibili condizioni di volo livellato del velivolo. È una sorta di "carta d'identità" prestazionale dell'aeromobile.

13.1 Costruzione e quota di tangenza teorica

A ciascuna quota si riportano la velocità minima e la velocità massima; il luogo dei punti di velocità minima costituisce il bordo sinistro dell'involuppo, quello dei punti di velocità massima il bordo destro. I due bordi si avvicinano salendo, finché a una certa quota convergono in un solo punto: lì la spinta (o potenza) disponibile diventa appena sufficiente a equilibrare la spinta (o potenza) necessaria minima, le curve sono tangenti ($T_d = D_{min}$) e il velivolo non ha più alcuna riserva per salire. Tale quota è detta **quota di tangenza teorica**.

13.2 Velocità minima: stallo o limite di spinta?

Il bordo sinistro dell'involuppo richiede attenzione. Come già osservato (§8), la velocità minima di volo livellato coincide con la velocità di stallo V_S solo finché le curve necessaria e disponibile non si intersecano sul ramo sinistro. Ciò avviene tipicamente alle quote medio-basse. Alle quote elevate (per i getti da trasporto, indicativamente dai 30 000 ft ai 37 000 ft) la velocità minima è invece delimitata dalla spinta disponibile, perché alla velocità di stallo la spinta richiesta supererebbe quella disponibile e il volo livellato sarebbe impossibile.

13.3 Rappresentazioni in TAS, CAS e Mach

Lo stesso involuppo può essere riportato in funzione di grandezze diverse, ciascuna utile per uno scopo:

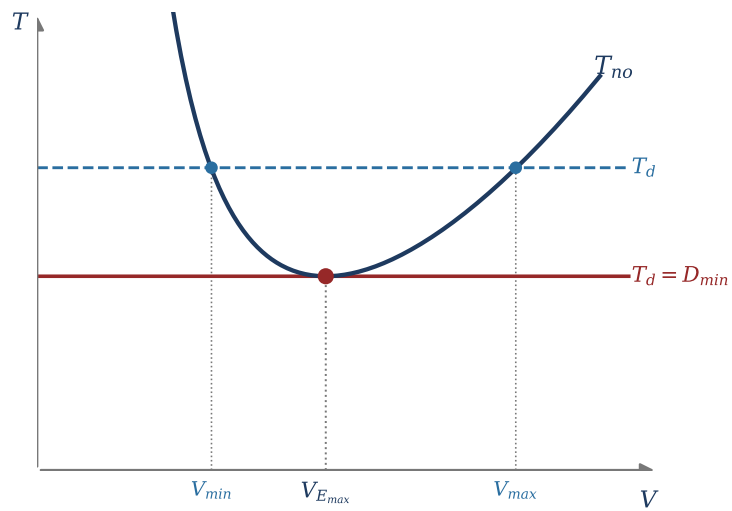


Figura 17. Alla quota di tangenza teorica le curve di spinta disponibile e necessaria sono tangenti ($T_d = D_{min}$): la velocità minima e la massima coincidono nella velocità di massima efficienza e il velivolo non ha più riserva di spinta per salire.

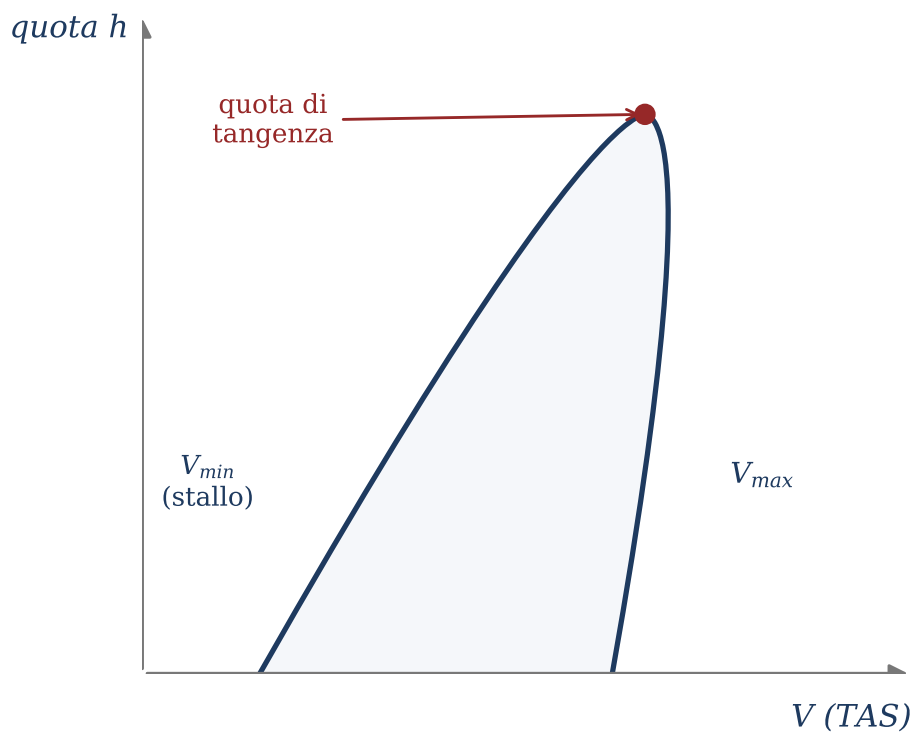


Figura 18. Involuppo di volo livellato di un generico velivolo da trasporto in funzione della velocità vera (TAS): bordo sinistro (velocità minima/stallo), bordo destro (velocità massima) e quota di tangenza, dove i due bordi convergono.

- in **velocità vera** (TAS): è la rappresentazione “fisica”, quella usata finora;
- in **numero di Mach**: più rappresentativa alle alte quote, dove i fenomeni di comprimibilità (dipendenti dal Mach) governano il bordo destro;
- in **velocità equivalente o calibrata** (EAS/CAS): in questa rappresentazione le curve di spinta necessaria diventano sostanzialmente coincidenti alle varie quote, perché la pressione dinamica dipende dalla sola velocità equivalente.

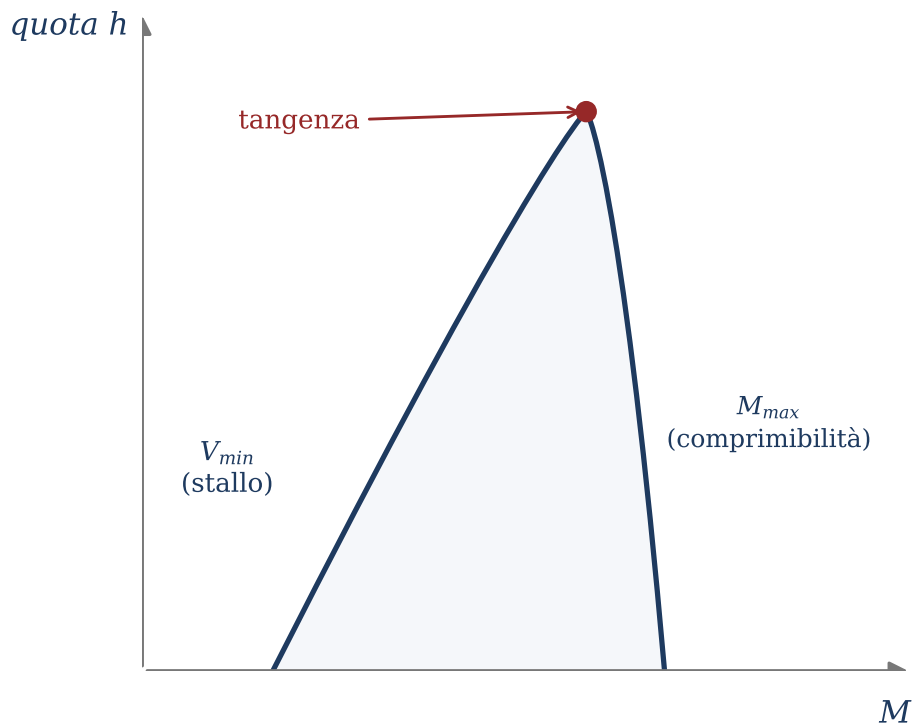


Figura 19. Involucro di volo livellato in funzione del numero di Mach: alle alte quote il bordo destro è governato dai fenomeni di comprimibilità, che dipendono dal Mach.

13.4 L'involucro realistico e le limitazioni operative

L'involucro teorico (stallo a sinistra, limite di spinta/comprimibilità a destra) va completato con le **limitazioni operative** che, nella pratica, restringono ulteriormente la regione di volo ammissibile. Le principali sono:

- (1) **Velocità minima (stallo)** – bordo sinistro aerodinamico;
- (2) **Velocità massima da pressione dinamica** – limite strutturale, per evitare danni dovuti a un eccesso di pressione dinamica q (V_{MO});
- (3) **Velocità massima da limite di spinta** – bordo destro propulsivo;
- (4) **Massimo Mach in affondata** (M_D , *design dive Mach*) – limite di comprimibilità;
- (5) **Limite di buffet** – insorgenza degli scuotimenti dovuti alle onde d'urto.

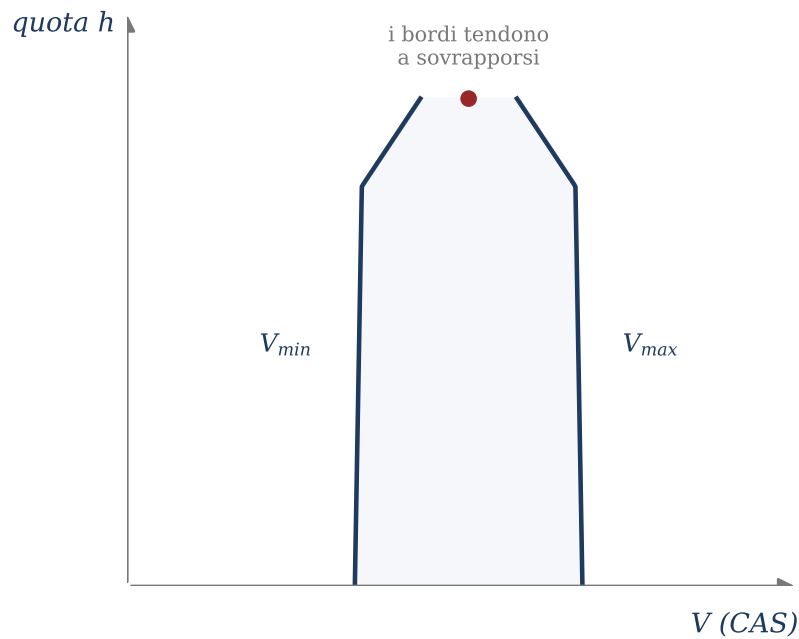


Figura 20. Involuppo di volo livellato in funzione della velocità calibrata (CAS): in questa rappresentazione i bordi a diverse quote tendono a sovrapporsi, perché la pressione dinamica dipende dalla sola velocità equivalente.

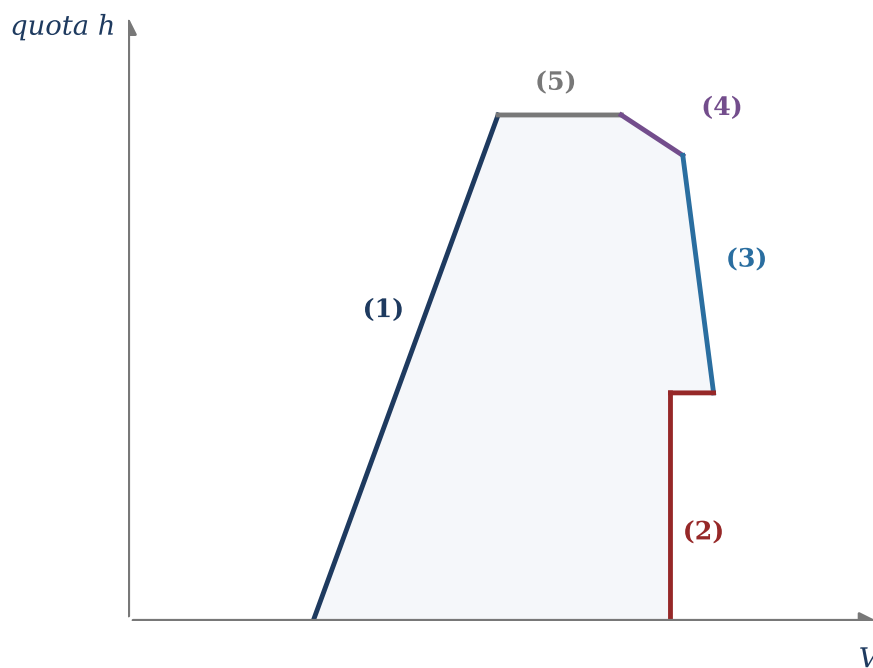


Figura 21. Involuppo di volo realistico con le cinque limitazioni operative: (1) stallo, (2) massima pressione dinamica V_{MO} , (3) limite di spinta, (4) massimo Mach in affondata M_D , (5) limite di buffet. La regione ammissibile è l'area racchiusa da tutti i vincoli.

Nota

La stessa logica di costruzione vale per i velivoli ad elica: applicando la procedura iterativa (§II) a una serie di quote si ottengono $V_{\min}$ e $V_{\max}$ quota per quota e quindi l'involuppo. Per le motoeliche, in particolare, il bordo destro si *restringe* salendo (la $V_{\max}$ diminuisce con la quota), e i due bordi convergono alla quota di tangenza, dove $V_{\min} = V_{\max} = V_{E_{\max}}$.

14 Crociera e parametri di progetto T/W e W/S

La relazione di equilibrio in crociera lega in modo elegante i due parametri più importanti nel dimensionamento preliminare di un velivolo: il rapporto spinta-peso T/W e il carico alare W/S . Dividendo per W la condizione $T_d = D = AV^2 + B/V^2$ e riscrivendo A e B in funzione di W/S si ottiene:

$$\frac{T}{W} = \left(\frac{1}{2} \frac{\rho C_{D_0}}{W/S} \right) V^2 + \left(\frac{2}{\rho \pi A R e} \frac{W/S}{V^2} \right) \frac{1}{V^2}. \quad (43)$$

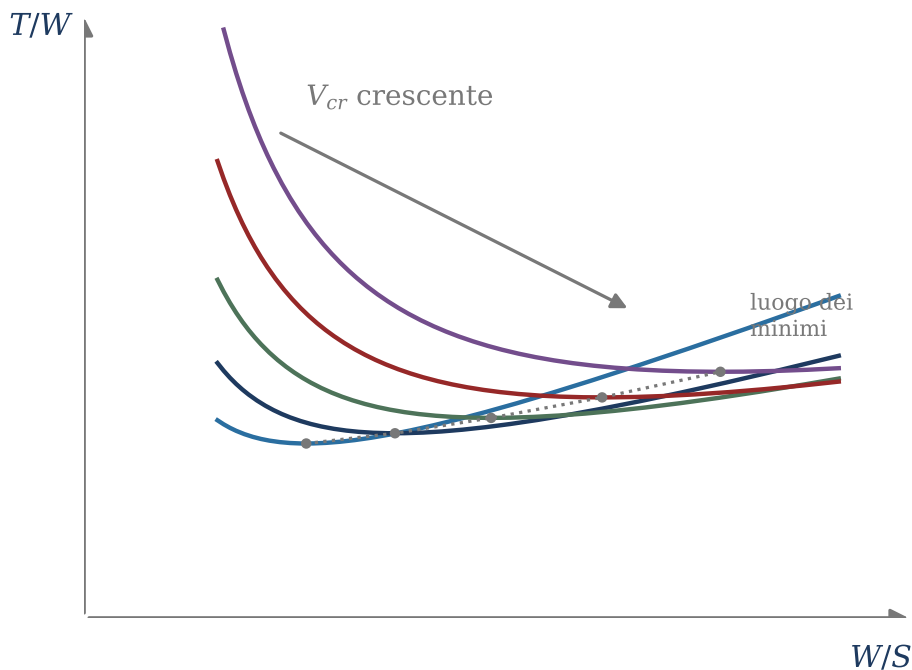


Figura 22. Relazione fra i parametri di progetto T/W e W/S in crociera ad alta quota, per diverse velocità di crociera. A ogni velocità corrisponde una curva nel piano $(W/S, T/W)$: i velivoli “veloci” minimizzano T/W con carichi alari elevati, i “lenti” con carichi alari bassi.

La (43) si legge come una famiglia di curve nel piano $(W/S, T/W)$, una per ogni velocità di crociera. La lettura progettuale è ricca:

- per velivoli “veloci” (alte velocità di crociera), valori elevati del carico alare W/S (ali più piccole a parità di peso) permettono di contenere il rapporto T/W , cioè la spinta installata;
- per velivoli “lenti”, al contrario, la prestazione di crociera richiede carichi alari più bassi (ali più grandi) per minimizzare T/W .

Nota

Questa è la ragione per cui un caccia o un jet da trasporto veloce ha ali piccole e molto caricate, mentre un velivolo da addestramento o un turboelica regionale ha ali ampie e poco caricate: la scelta del carico alare ottimo dipende dalla velocità di crociera di progetto, attraverso la (43).

15 Quadro riassuntivo e formulario**15.1 Le relazioni fondamentali**

Equilibrio livellato	$L = W, \quad T_d = D = T_{no}, \quad E = W/T_{no} = C_L/C_D$
Spinta necessaria	$T_{no} = AV^2 + \frac{B}{V^2}, \quad A = \frac{1}{2}\rho S C_{D_0}, \quad B = \frac{2}{\rho} \frac{W^2}{S} \frac{1}{\pi A R e}$
Potenza necessaria	$\Pi_{no} = T_{no} V = AV^3 + \frac{B}{V}$
Massima efficienza	$C_L _{E_{\max}} = \sqrt{C_{D_0} \pi A R e}, \quad C_D = 2C_{D_0}, \quad E_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi A R e}{C_{D_0}}}$
Velocità caratteristiche	$V_{\Pi_{\min}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} V_{E_{\max}}, \quad V_{(VE)_{\max}} = \sqrt[3]{3} V_{E_{\max}}$
Stallo	$V_S = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{C_{L_{\max}}}}$
Effetto quota (spinta)	$T_{no} = \text{cost a pari assetto e peso}$
Effetto quota (potenza)	$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\Pi_{no,2}}{\Pi_{no,1}} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$
Spinta disponibile (getto)	$T_d = 0,71 \sigma T_0 \varphi \text{ (alta quota)}$
Potenza disponibile (elica)	$\Pi_d = \Pi_0 \eta_p \sigma \varphi [K_v]$
$V_{\max}$ getto (biquadratica)	$AV^4 - T_d V^2 + B = 0 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{T_d}{2A} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4AB}{T_d^2}} \right)}$
$V_{\max}$ getto (parametri)	$V = \left[\frac{(T_d/W)(W/S)}{\rho C_{D_0}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{(T_d/W)^2 E_{\max}^2}} \right) \right]^{1/2}$
Condizione di equilibrio	$\frac{T_d}{W} \geq \frac{1}{E_{\max}}$
$V_{\max}$ elica (iterativo)	$V = \sqrt[3]{\frac{2\Pi_d}{\rho S C_D}}, \quad \text{iterando su } C_D = C_{D_0} + K C_L^2$
Mach di divergenza	$M_{DD} = M_{cc} [1,02 + 0,08(1 - \cos \Lambda)]$
Resistenza con comprimibilità	$D = D_{DD} + 14 D_{DD}(M - M_{DD}), \quad M > M_{DD}$

15.2 Sintesi concettuale

Nota

Il filo conduttore dell'intero capitolo si può riassumere così: *calcolare la velocità di volo livellato significa trovare l'intersezione fra ciò che l'aria chiede e ciò che il motore offre*. Per i getti si ragiona sulle spinte e si dispone di una formula chiusa; per le eliche si ragiona sulle potenze e si procede per iterazione. In entrambi i casi il modello di polare parabolica fornisce risultati eccellenti, purché si resti al di sotto del Mach di divergenza; oltre tale soglia, la resistenza d'onda va aggiunta esplicitamente. L'insieme di tutte le velocità minime e massime, quota per quota, disegna l'involuppo di volo: la mappa di tutto ciò che il velivolo è in grado di fare.

A Notazione e simboli

Simbolo	Significato
V, V_o, V_∞	velocità di volo (velocità vera, TAS)
V_S	velocità di stallo
$T_{no} \equiv D \equiv T_R$	spinta necessaria al volo livellato (= resistenza)
T_d	spinta disponibile
Π_{no}, Π_d	potenza necessaria, potenza disponibile
W	peso
$S, b, AR = b^2/S$	superficie alare, apertura, allungamento alare
C_L, C_D, C_{D_o}	coeff. di portanza, resistenza, resistenza a portanza nulla (3D)
$E = C_L/C_D = W/T_{no}$	efficienza aerodinamica; E_{max} massima efficienza
$\rho, \rho_o, \sigma = \rho/\rho_o$	densità, densità al s.l., rapporto di densità
$q = \frac{1}{2}\rho V^2$	pressione dinamica
$K = 1/(\pi AR e), e$	fattore di resistenza indotta, fattore di Oswald
φ	grado di ammissione (manetta)
η_p, K_v	rendimento dell'elica, fattore RAM (turboelica)
T_o, Π_o	spinta statica, potenza all'albero al s.l.
M, M_{cc}, M_{DD}	numero di Mach, Mach critico, Mach di divergenza
$b_e = b\sqrt{e}$	apertura alare efficace

Nota

Convenzione tipografica. In coerenza con la convenzione adottata in questa monografia, i coefficienti aerodinamici tridimensionali (riferiti al velivolo o all'ala finita) sono indicati con lettere maiuscole C_L , C_D , C_M ; le grandezze bidimensionali (riferite al profilo) con lettere minuscole c_l , c_d , c_m . Si usa la *virgola* come separatore decimale.