

Serie Raucci — Costruzioni Aeronautiche

Il segreto dell'ala

Da Newton a Prandtl: due secoli per trasformare l'ala da mistero a oggetto di calcolo

prof. ing. Biagio Raucci

ITIS «E. Majorana»

Serie Raucci — Costruzioni Aeronautiche



Di che cosa parliamo

Una storia che è anche una dimostrazione

Per più di due secoli nessuno ha saputo dire *perché* un'ala vola. Non perché mancassero i dati — chiunque abbia fatto volare un aquilone sapeva che la forza c'è — ma perché mancava un **modello** capace di calcolarla.

La tesi di queste lezioni

Non si progetta ciò che non si comprende. Finché il meccanismo della portanza è rimasto oscuro, il volo è stato tentativo, artigianato, a volte tragedia. Quando la fisica è diventata equazione, l'ala è diventata un *oggetto di calcolo*.

Il percorso

Le tappe storiche coincidono con i passi di una dimostrazione

Il problema e l'errore

- 1687 Newton: la legge del $\sin^2 \alpha$
- 1889 Lilienthal: la misura smentisce
- 1903 Wright: il volo esiste

L'indizio

- 1852–78 Magnus, Rayleigh

La formalizzazione

- 1902 Kutta: bordo d'uscita
- 1906 Joukowski: $\ell' = \rho_\infty V_\infty \Gamma$

La terza dimensione

- 1894 Lanchester: i vortici d'ala
- 1858 Helmholtz, Biot–Savart
- 1918 Prandtl e Munk: la sintesi

Perché a noi interessa

Le formule del corso non sono ricette: sono punti d'arrivo

$$C_L = C_L(\alpha), \quad C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR e}, \quad \alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR}.$$

Osservazione

Conoscere la storia da cui vengono significa sapere *quando valgono e quando no*: è la differenza fra applicare una formula e fare ingegneria.

Come sono fatte queste slide

Come nella monografia: prima l'idea fisica, poi la formula, infine un *esercizio svolto* passo per passo.

Parte 1

Il problema: un'ala è una macchina a fluido

1

L'ala come macchina

Un prodotto utile e un costo di esercizio

L'ala è una **macchina a fluido**: ricava dal proprio moto nell'aria una forza sustentatrice, pagandola con energia.

Definizione

- **portanza** L : componente *perpendicolare* a $\vec{V}_\infty$ — il prodotto utile;
- **resistenza** D : componente *parallela e opposta* — il costo di esercizio.



Per millenni l'ala è stata mito, non calcolo.

Come si misura la macchina

Formula chiave

$$L = \frac{1}{2}\rho V_{\infty}^2 S C_L, \quad D = \frac{1}{2}\rho V_{\infty}^2 S C_D, \quad E = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D}$$

Un aereo moderno supera $E = 50$: la forza sostentatrice è cinquanta volte quella che ne frena il moto.

Osservazione

Nessuna macchina terrestre a contatto ruota–suolo raggiunge, a quelle velocità, rapporti simili fra carico trasportato e trazione richiesta. L'ala sembra semplice: è fra le macchine più efficienti che l'uomo abbia costruito.

Il «segreto», detto con precisione

Sin dal Settecento si sapeva *che* un'ala inclinata nel vento genera una forza, e si sapeva misurarla. Ciò che nessuno sapeva era il **meccanismo di interazione** fra l'ala e l'aria.

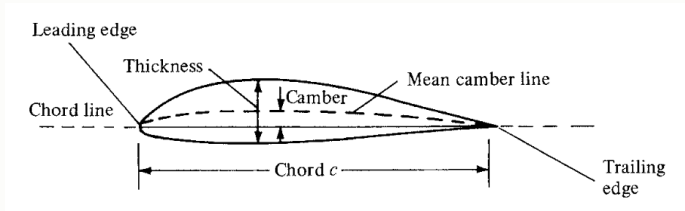
Attenzione

Il segreto non riguardava l'*esistenza* della forza, ma la sua *origine fisica* — e quindi la possibilità di *calcolarla*.



Prima e dopo: la stessa ala, due modi di guardarla.

Il vocabolario: anatomia di un profilo



- **bordo d'attacco**: arrotondato;
- **bordo d'uscita**: *aguzzo* — non un dettaglio costruttivo, ma il cuore del meccanismo;
- **corda c** : lunghezza di riferimento.
- **dorso e ventre**;
- **linea media e freccia (*camber*)**: la misura dell'asimmetria;
- **angolo d'attacco α** : la manopola del pilota.

Due numeri da tenere in tasca

I riferimenti con cui giudicheremo ogni teoria

Pendenza *reale* della retta di portanza di un profilo sottile:

$$\frac{dC_l}{d\alpha} \approx 2\pi \text{ per radiante} = 2\pi \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,11 \text{ per grado};$$

coefficienti di portanza tipici del volo: $C_L \approx 0,3 \div 1,5$ — valori *di ordine unitario*.

Da ricordare

La teoria di Newton, come vedremo fra un attimo, resta lontana da questi numeri di un ordine di grandezza.

La notazione, una volta per tutte

Profilo (2D, apertura infinita)

- minuscole: C_l , C_d
- portanza per unità di apertura ℓ'
[N/m]

Il pedice ∞ indica sempre la corrente indisturbata: V_∞ , ρ_∞ , p_∞ .

Il senso di tutto questo

Sembra pedanteria. Diventerà sostanziale dalla Parte 10, quando entrerà in scena la terza dimensione: lì C_l e C_L saranno grandezze *diverse*.

Ala finita e velivolo

- maiuscole: C_L , C_D
- forze L , D , W , T [N]

Parte 2

Newton: la legge autorevole e sbagliata (1687)

2

Il modello a urti: metà giusto, metà sbagliato

Ciò che azzecca

La forza dipende da ρ , dalla superficie A e dal *quadrato* della velocità: i tre fattori di ogni formula aerodinamica ancora oggi.

Ciò che sbaglia

L'aria è uno sciame di particelle *indipendenti* che urtano la parete cedendole la sola quantità di moto normale. Il dorso **non conta**.



Isaac Newton (1642–1727).

La derivazione, in tre passi

Legge del seno quadrato — lastra piana di area A

- 1) **Portata intercettata:** l'area frontale «vista» dalla corrente è $A \sin \alpha$, dunque $\dot{m} = \rho_{\infty} (A \sin \alpha) V_{\infty}$.
- 2) **Quantità di moto ceduta:** la sola componente normale, $V_{\infty} \sin \alpha$.
- 3) **Forza normale:** $F_R = \dot{m} (V_{\infty} \sin \alpha) = \rho_{\infty} A V_{\infty}^2 \sin^2 \alpha$.

Formula chiave

$$C_L^{(N)} = 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \approx 2\alpha^2 \quad \text{contro} \quad C_l \approx 2\pi\alpha$$

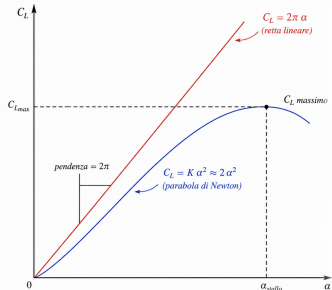
Newton contro la realtà

Il conto che nessuno fece per due secoli

Esercizio 1 — confronto a $\alpha = 5^\circ$

- 1) **Dati:** $\alpha = 5^\circ = 0,0873$ rad, profilo sottile.
- 2) **Previsione reale:** $C_l = 2\pi\alpha = 2\pi \cdot 0,0873 \approx 0,55$.
- 3) **Previsione di Newton:** $C_L^{(N)} = 2 \sin^2 5^\circ \cos 5^\circ \approx 0,015$.
- 4) **Rapporto:** $C_l/C_L^{(N)} = 0,55/0,015 \approx 36$.
- 5) **Verifica:** 0,55 cade nel campo $0,3 \div 1,5$ atteso in volo; 0,015 è cento volte troppo piccolo per sostenere qualcosa.

Le conseguenze di quel fattore



Retta reale contro parabola di Newton.

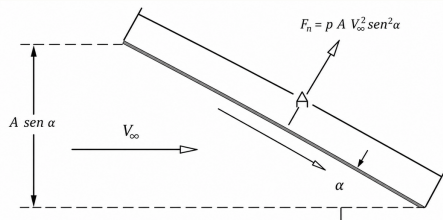
Perché si negava il volo umano

La superficie alare necessaria a sostenere un dato peso è inversamente proporzionale a C_L .

Sottostimarla di oltre un ordine di grandezza significa concludere che per sollevare un uomo servono ali *decine di volte* più grandi del vero: il volo umano è impraticabile.

Dov'è l'errore, esattamente

- il calcolo è *impeccabile*: l'errore è nel **modello fisico**;
- in un fluido reale le particelle *interagiscono* tramite la pressione: il flusso non urta, viene *deflesso con continuità*, e devia già molto a monte;
- soprattutto: **il dorso lavora**. La depressione sull'estradosso dà, nei profili moderni, circa *due terzi* della portanza.



Il modello a urti: la corrente colpisce il ventre e scorre via.

La lunga ombra di un'autorità

Nota

L'autorità di Newton fu tale che ancora nel secondo Ottocento *Helmholtz*, *Kirchhoff* e *Rayleigh* modellavano la portanza come impatto sul ventre, con la corrente separata dal dorso (teoria delle «superfici di discontinuità»). Le loro conclusioni sul volo umano restavano, coerentemente, negative.

Da ricordare

Vedremo nella Parte 10 la più bella ironia di questa storia: lo stesso Helmholtz che riteneva impossibile il volo umano ne aveva già forgiato, nel 1858, gli strumenti teorici decisivi.

Una giustizia postuma: l'ipersonico

La legge del $\sin^2 \alpha$ è tornata d'attualità nel **flusso ipersonico** ($M \gtrsim 5$): l'onda d'urto è così aderente al corpo che a valle di essa il flusso scorre quasi parallelo alla parete — proprio l'ipotesi newtoniana. Per lo Shuttle al rientro, a ≈ 60 km e $M \approx 20$, la legge d'impatto newtoniana è ancora oggi uno strumento di stima standard.

Il senso di tutto questo

Un modello non è «giusto» o «sbagliato» in assoluto: è *adeguato o inadeguato a un regime*. Newton mirava a un problema a bassa velocità, dove la sua legge è errata; tre secoli dopo si è rivelata azzeccata per un problema che non poteva immaginare.

Parte 3

Lilienthal: chi misura ha ragione (1889)

3

Rovesciare il metodo

Mentre la fisica teorica continuava a negare il volo, un ingegnere tedesco fece la cosa più semplice e più rivoluzionaria: smise di *dedurre* la portanza da un modello e la **misurò**.

Nel libro del 1889 *Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst*, Lilienthal trovava quasi scandaloso che la meccanica del volo fosse così arretrata rispetto a tutte le altre branche della meccanica.



Otto Lilienthal (1848–1896): misurò ciò che la teoria negava.

Il braccio rotante

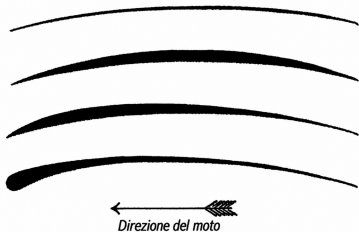
La prima campagna sperimentale sistematica dell'aerodinamica

Con il fratello Gustav costruì il **braccio rotante** (*whirling arm*): un braccio girevole con la superficie in prova all'estremità e bilance per misurare portanza e resistenza al variare di α .

Osservazione

Caratterizzò sistematicamente ali di varia forma, ispirandosi alle sezioni delle ali degli uccelli. Le sue *tavole di coefficienti* divennero il riferimento di tutti i pionieri — e la loro attendibilità, messa in dubbio e infine confermata, sarà uno snodo decisivo della vicenda dei Wright.

Il risultato chiave: il dorso lavora



Le sezioni a curvatura crescente di Lilienthal.

Un solo esperimento ben fatto vale più di due secoli di autorità teorica.

Logica sperimentale

A parità di area e incidenza il profilo **curvo** porta molto più del piano, e porta *anche* a $\alpha = 0$. Ma nel modello a urti il dorso dovrebbe essere *irrilevante*, e a $\alpha = 0$ Newton darebbe $\sin^2 0 = 0$.

Dalle misure al volo

Dal 1891 costruì una serie di **libratori** e compì personalmente circa *duemila lanci* da colline artificiali presso Berlino: il primo pilota sperimentatore della storia.

Nell'agosto 1896 l'ala del suo libratore perse improvvisamente portanza — con ogni probabilità uno **stallo** — e Lilienthal precipitò da una quindicina di metri, morendo il giorno seguente.



Lilienthal con un libratore pronto al lancio (1891–96).

Lo stallo, in anticipo

Attenzione

Al crescere di α la corrente fatica a seguire il dorso, finché se ne *separa*: la portanza crolla bruscamente.

Formula chiave

Lo stallo fissa il $C_{L,\max}$ e quindi la velocità minima di volo:

$$V_{\min} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L,\max}}}$$

La lezione costruttiva è permanente: *ogni progetto nasce dal rispetto dei limiti del volo lento.*

Il passaggio di testimone

Dal 1894 Lilienthal era in corrispondenza con l'ingegnere franco-americano **Octave Chanute**, instancabile divulgatore di tutto ciò che si sapeva sul volo. Fu Chanute a trasmettere dati ed esperienza a due costruttori di biciclette di Dayton, Ohio.

Il senso di tutto questo

I Wright prima dubitarono di quelle tavole — ingannati, come vedremo, da un coefficiente che non era di Lilienthal — poi, dati alla mano, gli resero piena giustizia scientifica. E anche quella umana: in una lettera del 1911 alla vedova Agnes, accompagnata da un assegno, lo definirono «un grande uomo».

Parte 4

I Wright: prima il volo, poi la spiegazione (1903)

4

Un metodo da ingegneri

Prima di costruire qualunque cosa raccolsero sistematicamente la letteratura, scrivendo perfino alla Smithsonian Institution. Le scelte iniziali rivelano una lucidità notevole:

- **separare sustentazione e propulsione**: l'ala porta, l'elica spinge — addio all'ala battente;
- configurazione **biplana** a traliccio: leggera e rigida;
- pilota **prono**, per ridurre la resistenza.



Wilbur (1867–1912) e Orville (1871–1948) Wright.

Le due scelte che fecero la differenza

- stabilizzatore **anteriore** (canard): la memoria dell'incidente di Lilienthal orientò direttamente il progetto;
- il **controllo** come problema centrale.

Costruttori di biciclette

Sapevano per esperienza quotidiana che un veicolo *instabile* può essere condotto con sicurezza — purché il conducente disponga di **comandi efficaci** e di **pratica**. Nessun'altra scuola di pionieri partiva da questa premessa.

La crisi del 1900–1901

La portanza misurata è molto minore di quella calcolata

Per i librai del 1900 e 1901 i Wright usarono le tavole di Lilienthal. A Kitty Hawk i risultati furono deludenti. La reazione istintiva fu incolpare i dati: rimase celebre il giudizio di Wilbur, secondo cui nelle tavole dell'epoca verità ed errori erano mescolati fino a risultare indistinguibili.

La storia vera è più sottile

Le tavole di Lilienthal erano *giuste*. Sbagliato era un numero che tutti copiavano da un secolo e mezzo, e che nessuno aveva mai verificato: il **coefficiente di Smeaton**.

Il «giallo» del coefficiente di Smeaton

Definizione

La pressione su una lastra investita ortogonalmente si scriveva $D = k V^2 S$, con V in miglia orarie e k pari alla forza per unità di superficie a un miglio all'ora.

Il valore accettato: $k = 0,0049$

Da una memoria del 1759 di John Smeaton sui mulini a vento — e in realtà dai dati di un certo Mr. Rouse, che la storia ha dimenticato. Accettato senza verifica per *150 anni*.

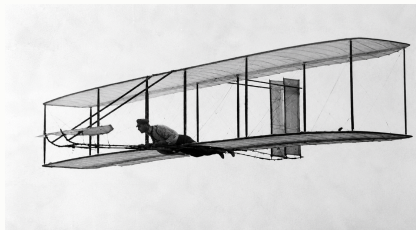
Il valore corretto: $k \approx 0,0033$

Il valore in uso era sbagliato *per eccesso di circa il 50%* ($0,0049/0,0033 - 1 \approx 48\%$).
Già trovato da Langley, confermato da Wells al MIT nel 1896 — e ignorato dai più.

La galleria del vento

Non fidandosi più di nessuno, si costruirono i dati da soli: una piccola **galleria del vento** a circuito aperto — non la prima della storia, ma la prima usata per una campagna *sistematica orientata al progetto*.

In tre mesi del 1901 provarono *oltre duecento* forme alari, con bilance a lamine di loro concezione.



Il libratore Wright in prova a Kitty Hawk (1901–1902).

Il passo decisivo: dedurre invece di misurare

Combinando i dati di galleria con poche misure sull'ala vera del libratore 1901, **dedussero** il valore corretto del coefficiente di Smeaton, $k = 0,0033$, senza mai misurarlo direttamente.

La riabilitazione di Lilienthal

Rifatti i conti con il k corretto, i dati di Lilienthal risultarono *essenzialmente esatti* per il profilo da lui provato. Il colpevole non era il martire dell'aviazione: era un numero copiato per centocinquanta'anni senza che nessuno lo verificasse.

Tre lezioni di metodo, valide oggi come allora

1. **Verificare le costanti.** Un coefficiente «da manuale» è un dato sperimentale come gli altri: ha un'incertezza, un campo di validità e, talvolta, un errore.
2. **Non «correggere» i dati.** Wilbur annotò che è più sicuro seguire esattamente le osservazioni e lasciare che siano gli altri, semmai, a correggerle.
3. **La scienza al servizio del progetto.** Non cercavano la verità sul coefficiente per amore di conoscenza: ne avevano *bisogno* per dimensionare un'ala.

Prima scoperta collaterale: l'allungamento

Dalle prove emerse l'importanza del rapporto fra apertura e corda:

Formula chiave

$$AR = \frac{b^2}{S}$$

A parità di superficie l'ala lunga e stretta *porta più e resiste meno*.

Il senso di tutto questo

I Wright ne colsero l'effetto senza conoscerne la causa: la spiegazione arriverà con Prandtl, nel 1918 (Parte 11). È la condizione tipica dell'ingegneria che precede la scienza.

Seconda scoperta collaterale: l'imbardata avversa (1901)

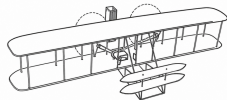
Sperimentando lo **svergolamento alare**, Wilbur osservò che l'ala di cui aumentava la portanza si alzava ma *restava indietro*: il velivolo non virava dalla parte giusta, «rovesciando completamente le nostre teorie» sulle cause della virata.

Perché succede

Ogni portanza si paga con una resistenza. L'ala che porta di più resiste di più, e la resistenza *differenziale* genera un momento d'imbardata che spinge il muso *dalla parte opposta* alla virata desiderata.

Conseguenza progettuale: serve anche un **timone verticale**, coordinato con lo svergolamento.

Il Flyer, 17 dicembre 1903



Apertura alare = 12,30 m
Superficie alare = 46,5
Peso al decollo = 350 Kg
Potenza circa 12 Hp



Configurazione canard, biplano, eliche spingenti.

Dati principali

Apertura alare	12,30 m (≈ 40 ft)
Superficie alare	46,5 m ²
Peso al decollo	≈ 350 kgf
Potenza	≈ 12 hp
Velocità di volo	≈ 50 km/h
Carico alare	$\approx 7,5$ kgf/m ²

Due dettagli che dicono molto

- Quattro voli in quel giorno; sommando tutta la «carriera» del velivolo, *1 minuto e 58 secondi* di volo.
- Con quel carico alare ($\approx 1,5 \text{ lb/ft}^2$) il Flyer appartenerebbe oggi alla categoria degli *ultraleggeri*.

Curiosità costruttiva

La semiala destra era più lunga della sinistra di circa dieci centimetri, per compensare con più portanza il peso del motore montato a destra del pilota: indizio che i Wright avevano intuito almeno in parte la necessità di bilanciare i *momenti*, oltre alle forze.

Il Flyer come *experimentum crucis*

Esercizio 2 — il C_L del Flyer contro Newton

- 1) **Dati:** $W \approx 350 \text{ kgf} \approx 3430 \text{ N}$; $S = 46,5 \text{ m}^2$; $V_\infty = 50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s}$; $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$.
- 2) **Modello:** volo rettilineo uniforme, $L = W$.
- 3) **Pressione dinamica:** $q = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 13,9^2 \approx 118 \text{ Pa}$.
- 4) **Incognita:** $C_L = W/(qS) = 3430/(118 \cdot 46,5) \approx \mathbf{0,62}$.
- 5) **Verifica:** a $\alpha \approx 5^\circ$ Newton concederebbe $\approx 0,015$. Rapporto ≈ 40 .

Il valore 0,62 non è una stima di comodo

Confermato ottant'anni dopo

Le prove in galleria su modelli in scala del Flyer, condotte negli anni Ottanta, hanno confermato che $C_L \approx 0,62$ era proprio il coefficiente di portanza di crociera — raggiunto a un'incidenza di circa 1° rispetto ai pattini, *esattamente* il calettamento geometrico che i Wright avevano dato all'ala, e con ampio margine dallo stallo.

Da ricordare

Il punto di lavoro dell'ala del Flyer non fu scelto a caso: fu *progettato*.

Il paradosso del 1903

Attenzione

Si rifletta sulla situazione di quel 17 dicembre: l'uomo aveva imparato a volare *senza sapere perché volasse*. L'ingegneria empirica aveva battuto sul tempo la fisica teorica.

Ma un'aviazione fondata solo sull'empirismo non poteva crescere: senza un modello predittivo, ogni nuova ala era un salto nel buio. La palla tornava alla teoria.

Il senso di tutto questo

E la teoria, nel frattempo, aveva trovato un indizio prezioso in un fenomeno apparentemente lontanissimo dal volo: la traiettoria deviata di una palla da tennis.

Parte 5

L'indizio: Magnus e la circolazione

5

Una forza perpendicolare al moto esiste già

L'imbeccata decisiva non venne dallo studio delle ali, ma da un fenomeno ben noto nell'Ottocento: i proiettili d'artiglieria, messi in rotazione dalla rigatura delle canne, deviavano lateralmente; le palle da tennis «tagliate» curvavano in aria.

Effetto Magnus

Un corpo *rotante* in moto in un fluido subisce una forza *perpendicolare* alla velocità. Studiato sperimentalmente da Heinrich Gustav Magnus nel 1852; spiegato teoricamente da Lord Rayleigh nel 1878, in un lavoro dal titolo delizioso: *On the irregular flight of a tennis-ball*.

Perché è l'indizio giusto

Da ricordare

La portanza è, per definizione, una forza perpendicolare al moto. Se un cilindro rotante sa generarla, capire *come* lo fa significa avvicinarsi al segreto.

Dove stiamo andando

Il percorso di questa parte: prima lo strumento (Bernoulli), poi il modello (corrente uniforme più vortice), infine la grandezza che misura tutto (la circolazione Γ). Da lì in avanti Γ non ci lascerà più.

Lo strumento: il teorema di Bernoulli

Fluido incompressibile, non viscoso

Lungo una linea di corrente, la somma di pressione statica e pressione dinamica è costante:

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{cost.} \quad \implies \quad V \uparrow \Rightarrow p \downarrow$$

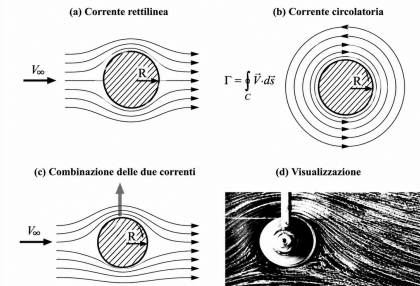
Dove il fluido accelera la pressione cala; dove rallenta, cresce. È lo scambio fra energia di pressione ed energia cinetica della corrente.

Il modello: corrente uniforme più vortice

Nel quadro del flusso potenziale il campo attorno al cilindro rotante si costruisce per **sovrapposizione**: al flusso simmetrico attorno al cilindro fermo si aggiunge un *moto circolatorio* concentrico.

Quest'ultimo si modella come **vortice di Rankine**: nucleo interno in rotazione rigida e, all'esterno,

$$V_{\theta}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$



Sovrapposizione di corrente uniforme e flusso circolatorio.

Il meccanismo, ora trasparente

Dal campo di velocità alla forza

- 1) **Sopra** il cilindro la velocità della corrente si *somma* a quella tangenziale del moto circolatorio: flusso più veloce.
- 2) **Sotto** le due velocità si *sottraggono*: flusso più lento.
- 3) **Per Bernoulli**: depressione sul dorso, sovrappressione sul ventre.
- 4) **Risultante**: una forza netta perpendicolare al moto. Portanza.

La grandezza giusta: la circolazione

Definizione

Si definisce circolazione della velocità lungo una linea chiusa C che racchiude il corpo l'integrale di linea

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s}, \quad [\Gamma] = \text{m}^2/\text{s}.$$

È un'applicazione diretta del prodotto scalare: in ogni punto della linea si proietta la velocità lungo la tangente e si somma. Per una corrente uniforme senza corpo l'integrale è nullo; il moto circolatorio lo rende diverso da zero.

Quanto «induce» un vortice

Esercizio 4 — velocità indotta da un vortice

Un vortice ha $\Gamma = 50 \text{ m}^2/\text{s}$. Calcolare la velocità tangenziale a $r = 2 \text{ m}$ e a $r = 10 \text{ m}$.

1) **Modello:** vortice rettilineo, $V_\theta = \Gamma/(2\pi r)$.

2) **Calcolo:**

$$V_\theta(2) = \frac{50}{2\pi \cdot 2} \approx 3,98 \text{ m/s}, \quad V_\theta(10) = \frac{50}{2\pi \cdot 10} \approx 0,80 \text{ m/s}.$$

3) **Verifica:** il rapporto vale 5, esattamente come il rapporto inverso delle distanze.

Decadimento in $1/r$: un risultato che tornerà

Osservazione

La velocità indotta decade come l'inverso della distanza: quintuplicando r , V_θ si riduce a un quinto. È lo stesso andamento del campo magnetico di un filo percorso da corrente.

Da ricordare

Ritroveremo questa legge identica nella legge di Biot–Savart (Parte 10), e spiegherà perché i vortici di scia dei grandi velivoli restano pericolosi anche a notevole distanza.

Dove il modello ideale cede: il nucleo

Attenzione

Per $r \rightarrow 0$ la legge $\Gamma/(2\pi r)$ darebbe velocità infinita: fisicamente impossibile.

Nel fluido reale interviene la viscosità: vicino all'asse gli strati non possono scorrere liberamente e il fluido ruota come un corpo rigido, $V_\theta = \omega r$. Il vortice di Rankine unisce insieme i due comportamenti — rotazione rigida nel nucleo, decadimento potenziale all'esterno.

Nota

È ciò che si osserva nei cicloni, il cui «occhio» è una zona di aria relativamente calma in rotazione quasi rigida.

La domanda che apre la strada

Il bilancio dell'indizio Magnus: *esiste* un meccanismo fluidodinamico — il moto circolatorio quantificato da Γ — capace di generare una forza perpendicolare al moto, e Bernoulli lo spiega pienamente.

Ma il cilindro deve *ruotare* perché la circolazione si instauri, trascinata dall'attrito superficiale. **Un'ala non ruota.**

Il senso di tutto questo

Può una circolazione stabilirsi attorno a un corpo *non rotante*, come una sezione alare? A rispondere affermativamente — l'uno indipendentemente dall'altro, in tre paesi diversi — furono Kutta, Joukowski e Lanchester.

Parte 6

Kutta: la condizione del bordo d'uscita (1902)

6

Un matematico affascinato dai voli di Lilienthal

Wilhelm Kutta, professore a Stoccarda — lo stesso Kutta dei metodi di Runge–Kutta, che chi programma in Python o C++ ha certamente incontrato — si pose un obiettivo preciso: *calcolare* la portanza dei profili curvi sperimentati da Lilienthal.

Il suo merito storico fu l'intuizione che il moto circolatorio dell'effetto Magnus potesse stabilirsi anche attorno a una sezione alare **non rotante**: non serve la rotazione del corpo, serve la *forma giusta*.



Wilhelm Kutta (1867–1944).

Lo strumento: le trasformazioni conformi

Idea essenziale

Una funzione analitica $\zeta = f(z)$ fa corrispondere a ogni punto di un piano z un punto di un piano ζ , *conservando gli angoli* fra le curve che si intersecano. Applicata a un flusso potenziale, conserva l'ortogonalità fra linee di corrente ed equipotenziali: la soluzione trasformata è ancora un flusso potenziale valido.

Da ricordare

Il vantaggio operativo è enorme: il flusso attorno al *cilindro* si conosce in forma esatta. Trasformando il cilindro in un'altra forma — un segmento, un arco, un profilo — si ottiene «gratis» il flusso attorno a quella forma.

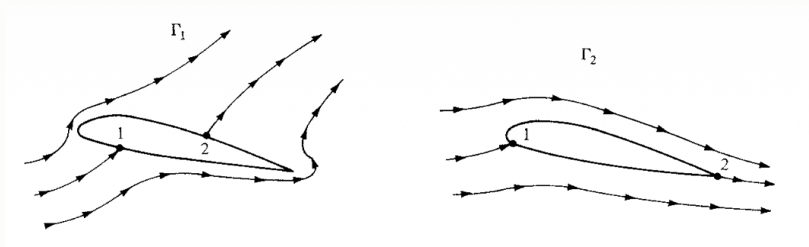
I punti di ristagno

Kutta trasformò il cilindro in una *lastra piana* e in un *arco di cerchio sottile* — proprio i profili di Lilienthal — e vi studiò il flusso al variare della circolazione aggiunta.

Definizione

I **punti di ristagno** sono i punti della superficie in cui la velocità della corrente si annulla: uno anteriore, dove la corrente si divide fra dorso e ventre; uno posteriore, dove si ricongiunge.

Il quadro che emerge



I punti 1 e 2 sono i punti di ristagno.

- **senza circolazione** ($\Gamma = 0$): ristagni simmetrici, la corrente deve *contornare* lo spigolo a velocità elevatissime; portanza *nulla*;
- **con circolazione**: il ristagno posteriore migra verso il bordo d'uscita e nasce portanza.

La scelta della natura

Esiste *un solo valore* di Γ per cui il ristagno posteriore cade esattamente *sul bordo d'uscita*: le correnti di dorso e ventre vi si ricongiungono dolcemente, senza contornare lo spigolo.

Condizione di Kutta

Fra gli infiniti flussi potenziali matematicamente possibili attorno a un profilo a una data incidenza, il flusso fisicamente realizzato è quello la cui circolazione porta il punto di ristagno posteriore sul **bordo d'uscita**.

Essa *seleziona* il valore di Γ e quindi — come vedremo con Joukowski — fissa univocamente la portanza a ogni incidenza.

Perché i profili sono fatti così

Attenzione

Il meccanismo di Kutta richiede due cose precise:

- un **bordo d'attacco raccordato**: la corrente deve poter aggirare la prua senza separarsi, a qualunque incidenza del campo di volo;
- un **bordo d'uscita aguzzo**: lo spigolo «ancora» il ristagno posteriore e rende univoca la circolazione. Un bordo tondo la lascerebbe indeterminata.

Da ricordare

Osservando la sezione di un'ala — o la pala di un'elica, o di una turbina — riconoscete in quella forma non una scelta estetica, ma la condizione di Kutta scolpita nel metallo.

Il limite del lavoro di Kutta

Nel 1902 Kutta scoprì dunque la *possibilità* della circolazione attorno al profilo non rotante — e con essa il meccanismo della portanza — ma non fornì la relazione quantitativa generale fra circolazione e portanza: l'intuizione c'era, la *formula* no.

Il senso di tutto questo

E restava aperta una domanda ancora più profonda: in un fluido reale, *come* fa la circolazione a nascere fisicamente attorno all'ala? Chi «mette in moto» la rotazione, se il profilo non ruota? Alle due domande rispondono la Parte 8 e la Parte 9.

Parte 7

Come nasce la circolazione: il vortice di partenza

7

Dall'ipotesi matematica al processo fisico

Dove stiamo andando

La condizione di Kutta, così come l'abbiamo enunciata, è un'*ipotesi matematica*: seleziona una soluzione fra le infinite possibili. Ma la natura non risolve equazioni: la circolazione deve *formarsi* attraverso un processo fisico concreto.

Da ricordare

Quel processo si svolge nei primi istanti di moto di ogni ala: sulla pista, a ogni decollo. È la parte più «fisica» di tutta la storia.

L'istante iniziale: un flusso che non può durare

All'avvio del moto si stabilisce dapprima il flusso potenziale *senza* circolazione, con il punto di ristagno posteriore sul dorso, a monte del bordo d'uscita. Per raggiungerlo, la corrente del ventre deve **girare attorno al bordo d'uscita** aguzzo.

Attenzione

Sullo spigolo la teoria potenziale prevede velocità *tendente all'infinito*; nel ristagno, poco più avanti sul dorso, la velocità è *nulla*. Per Bernoulli: pressione bassissima e pressione massima a distanza piccolissima — cioè un **gradiente di pressione elevatissimo e contrario al moto**.

Entra in scena la viscosità

In un fluido ideale questo flusso, per quanto innaturale, potrebbe sussistere. In un fluido *reale* no: come sappiamo dallo strato limite, una corrente che ha perso energia per attrito a parete *non può risalire* un gradiente di pressione avverso severo. Si **separa**.

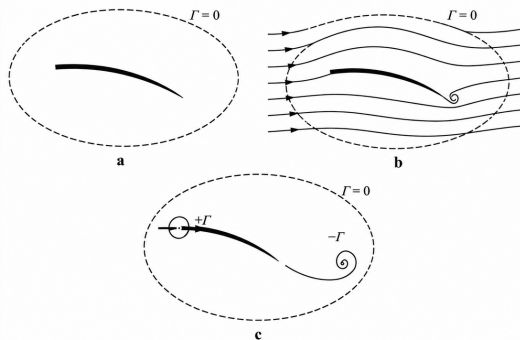
Osservazione

È lo stesso meccanismo che governa la resistenza di scia e lo stallo, qui all'opera in un ruolo insospettabilmente *costruttivo*.

Il vortice di partenza

La corrente si separa sullo spigolo e vi si arrotola in un vortice, che cresce d'intensità finché le correnti di dorso e ventre non si ricongiungono al bordo d'uscita con pari velocità.

A quel punto il «motivo» della separazione è cessato: il vortice non viene più alimentato, si stacca e viene trascinato a valle. È il **vortice di partenza** (*starting vortex*).



La formazione e il distacco del vortice di partenza.

Il bilancio: il teorema di Kelvin

Teorema di Kelvin

In un fluido non viscoso e barotropico soggetto a forze conservative, la circolazione lungo una linea chiusa *materiale* (che si muove col fluido) si conserva:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0.$$

La derivata D/Dt è la *derivata sostanziale*, calcolata seguendo le particelle fluide.

Applicazione al profilo in partenza

Il bilancio della circolazione

- 1) Prima dell'avvio il fluido è in quiete: su una linea chiusa molto ampia che racchiude il profilo, $\Gamma_{\text{tot}} = 0$.
- 2) Per Kelvin quella circolazione totale deve restare nulla: $\Gamma_{\text{tot}}(t) = 0$ per ogni t .
- 3) Al distacco, il vortice di partenza porta con sé una circolazione Γ_{part} di un certo verso.
- 4) Il bilancio impone allora attorno al profilo una circolazione *uguale e contraria*: $\Gamma_{\text{legata}} = -\Gamma_{\text{part}}$, detta **circolazione legata** perché vincolata al profilo che accompagna nel moto.

Il segreto, nella sua forma fisica

Da ricordare

La circolazione attorno all'ala nasce come *contropartita* del vortice di partenza, generato dalla viscosità al bordo d'uscita e lasciato a valle. La condizione di Kutta — pura ipotesi matematica nel 1902 — si realizza concretamente *per effetto della viscosità*.

Osservazione

È uno dei casi più eleganti, in tutta la fisica, di convergenza fra modello matematico e realtà sperimentale: il vortice di partenza si osserva e si fotografa nelle vasche idrodinamiche esattamente dove la teoria lo colloca.

Prima precisazione: la viscosità come causa prima

Attenzione

Il paradosso è solo apparente: la portanza si *calcola* con la teoria *non viscosa* (flusso potenziale più circolazione), ma *esiste* grazie alla viscosità — senza la quale il vortice di partenza non si formerebbe e la circolazione resterebbe nulla.

È il paradosso di d'Alembert: corpo in fluido ideale, forza nulla. La viscosità agisce da **innescò** e poi si ritira nel sottile strato limite, lasciando che il campo esterno sia con ottima approssimazione potenziale.

Seconda precisazione: il vortice non è «visibile»

Attenzione

La circolazione legata *non* è un mulinello d'aria che gira attorno all'ala: nessuna particella compie orbite chiuse attorno al profilo.

È la *componente rotatoria* del campo, che sovrapposta alla corrente uniforme dà il quadro reale: flusso accelerato sul dorso, rallentato sul ventre.

Da ricordare

La dissimmetria di velocità fra dorso e ventre — e quindi, via Bernoulli, di pressione — non è la *causa* della portanza, ma la sua *manifestazione*. La causa è la circolazione, fissata dalla condizione di Kutta.

Una conferma sperimentale a portata di mano

Il vortice di partenza non è un'astrazione da laboratorio. Immergete una paletta — o la mano di taglio — in una vasca d'acqua ferma e mettetela bruscamente in moto con un piccolo angolo d'attacco: dal bordo posteriore si stacca un mulinello ben visibile, che resta indietro mentre la paletta avanza.

Il senso di tutto questo

Quel mulinello è il vortice di partenza; la circolazione uguale e contraria che «viaggia» con la paletta è la stessa che sostiene un liner da 400 tonnellate. Al decollo di ogni aeroplano, il vortice di partenza *rimane sulla pista*.

Parte 8

Joukowski: il teorema che chiude il conto (1906)

8

La legge quantitativa mancante

Nikolai Joukowski (traslitterato anche Zhukovsky), professore di meccanica a Mosca e figura fondativa dell'aerodinamica russa, enunciò nel 1906 il teorema che mancava: la relazione *quantitativa* fra circolazione e portanza.

Non conosceva Kutta né il suo lavoro del 1902 — le comunicazioni scientifiche erano lente e frammentarie — e giunse al risultato per via indipendente. Per questo il teorema porta il nome di entrambi.



Nikolai Joukowski (1847–1921).

Il teorema di Kutta–Joukowski

Formula chiave

Un corpo bidimensionale attorno a cui esista una circolazione Γ , investito da una corrente incomprimibile (ρ_∞, V_∞) , subisce una forza per unità di apertura

$$\ell' = \rho_\infty V_\infty \Gamma, \quad [\ell'] = \text{N/m},$$

diretta *perpendicolarmente* a $\vec{V}_\infty$.

Da ricordare

Tutta la complessità della forma del profilo, dell'incidenza, della distribuzione di pressione, è riassunta in un *solo numero*: Γ — che la condizione di Kutta fissa univocamente.

Dalla portanza alla circolazione

Esercizio 5 — inversione del teorema

Un velivolo leggero vola a $V_\infty = 50 \text{ m/s}$ al livello del mare ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$). In mezz'ora l'ala sostiene $\ell' = 1500 \text{ N/m}$. Determinare la circolazione legata.

1) **Modello:** teorema di Kutta–Joukowski, $\ell' = \rho V_\infty \Gamma$.

2) **Inversione:** $\Gamma = \frac{\ell'}{\rho V_\infty} = \frac{1500}{1,225 \cdot 50} \approx 24,5 \text{ m}^2/\text{s}$.

3) **Verifica dimensionale:** $\text{N/m} \div (\text{kg/m}^3 \cdot \text{m/s}) = \text{m}^2/\text{s}$. Coerente.

Ordine di grandezza della circolazione

Osservazione

$\Gamma \approx 25 \text{ m}^2/\text{s}$: un valore «mite», paragonabile a quello del vortice dell'esercizio 4.

Da ricordare

La portanza non richiede moti rotatori violenti: richiede una circolazione *organizzata*, mantenuta stabilmente dalla forma del profilo.

La conseguenza: la retta di portanza

Per una lastra piana (o un profilo sottile simmetrico) a piccola incidenza, la circolazione selezionata dalla condizione di Kutta risulta $\Gamma = \pi c V_\infty \alpha$. Sostituendo nel teorema:

Formula chiave

$$\ell' = \rho_\infty V_\infty \Gamma = \pi \rho_\infty V_\infty^2 c \alpha \quad \Rightarrow \quad C_l = \frac{\ell'}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c} = 2\pi \alpha$$

Il numero giusto, finalmente

Da ricordare

La teoria della circolazione prevede l'andamento *lineare* $C_l = 2\pi\alpha$ — pendenza $\approx 0,11$ per grado — in ottimo accordo con le misure sui profili sottili.

Osservazione

È esattamente il comportamento che la legge del $\sin^2 \alpha$ non spiegava, ed è il numero di riferimento che avevamo fissato nella Parte 1. Il divario di un ordine di grandezza del Flyer è colmato.

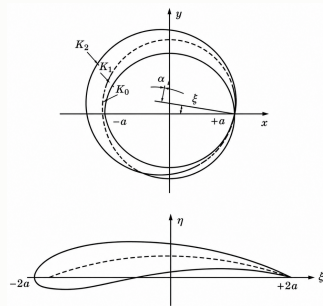
La trasformata di Joukowski: dal cerchio al profilo

Formula chiave

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}$$

Un cerchio del piano z che *passa per* $z = +a$ si trasforma, nel piano ζ , in un profilo alare.

Offset del centro lungo l'asse *reale* $\rightarrow$ **spessore**; lungo l'asse *immaginario* $\rightarrow$ **curvatura**. Il punto $z = +a$ diventa il bordo d'uscita.



Dal cerchio al profilo.

Casi limite istruttivi

- il cerchio centrato nell'origine di raggio a diventa il *segmento* $[-2a, +2a]$: la corda;
- un cerchio con centro sull'asse immaginario diventa un *arco sottile*.

Osservazione

I profili di Lilienthal e di Kutta sono dunque casi particolari della costruzione di Joukowski: la matematica ha inglobato, come sottocasi, gli oggetti che la sperimentazione aveva scoperto.

Il flusso attorno al profilo, in tre mosse

La procedura di calcolo

- 1) Si scrive il flusso *esatto* attorno al cerchio con circolazione Γ .
- 2) Si sceglie Γ in modo che il punto di ristagno posteriore del cerchio cada in $z = +a$ (condizione di Kutta nel piano trasformato).
- 3) Si applica la trasformata.

Da ricordare

Per la prima volta nella storia, la distribuzione di pressione su una geometria da vera ala era *calcolabile con carta e penna*. «Una vera magia», la si definì.

Quando la matematica è troppo perfetta

Attenzione

Il bordo d'uscita a **cuspid**e (tangenti di dorso e ventre coincidenti) è una difficoltà sia teorica sia pratica: nessuna struttura reale può avere uno spessore che si annulla con quella dolcezza.

La restrizione fu rimossa da **Trefftz e von Kármán** con la trasformata generalizzata, che produce un bordo d'uscita con angolo finito, costruibile.

Il senso di tutto questo

È un pattern ricorrente dell'ingegneria: il modello matematicamente più elegante richiede quasi sempre un «aggiustamento di costruibilità».

Dove l'aerodinamica incontra le strutture

Il profilo spesso

Joukowski dimostrò che si può generare portanza in modo efficiente anche con **profili di forte spessore**: lo spessore, entro limiti ampi, non penalizza la portanza.

Da ricordare

La conseguenza costruttiva è enorme: dentro un profilo spesso c'è *spazio* per **longheroni e centine** di altezza strutturalmente efficiente. E la rigidezza flessionale di una sezione cresce col *cubo* dell'altezza utile.

Il monoplano moderno è figlio di questo teorema

Un'ala spessa può portare i propri carichi *con struttura tutta interna*, eliminando i tiranti e le controventature esterne dei biplani — che erano una grande fonte di resistenza aerodinamica.

Osservazione

Fu **Hugo Junkers** a propugnare per primo, con coerenza radicale, l'ala spessa a sbalzo interamente metallica.

Il senso di tutto questo

Nasce qui la sfida che dà il nome alla nostra disciplina: *sposare la forma aerodinamica con la robustezza strutturale*.

Parte 9

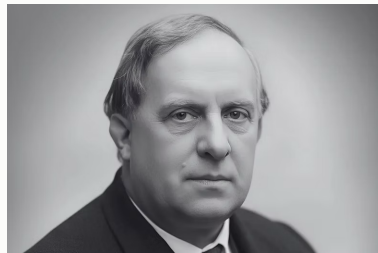
La terza dimensione: Lanchester, Helmholtz, Biot–Savart

9

Il profilo è metà della storia

Tutto quanto visto finora — circolazione, condizione di Kutta, teorema di Kutta–Joukowski — riguarda il *profilo*: una sezione bidimensionale, equivalente a un'ala di apertura *infinita* in cui ogni sezione lavora come tutte le altre.

Ma le ali reali hanno apertura *finita* e terminano con due estremità. Proprio lì accade qualcosa di nuovo, che modifica in modo sostanziale *sia* la portanza *sia* la resistenza.



Frederick Lanchester (1868–1946).

Un ingegnere estraneo all'accademia

Il primo a intuirlo — prima ancora che il profilo stesso fosse compreso — fu un ingegnere inglese estraneo al mondo accademico: Frederick Lanchester, esperto di motori e pioniere dell'automobile (la Lanchester Motor Company fu tra le prime case automobilistiche inglesi).

Osservazione

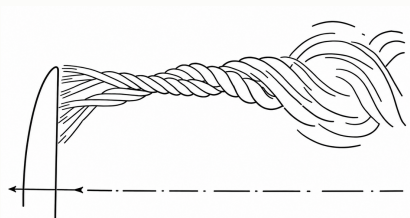
Nel 1894, poco più che ventenne, sviluppò idee radicalmente innovative: una teoria *circolatoria* della portanza — indipendente e *anteriore* alla pubblicazione di Kutta — e, soprattutto, la visione del complesso sistema vorticoso dell'ala finita.

Il ragionamento di Lanchester

Dall'estremità alare al sistema vorticoso

- 1) Sul dorso dell'ala portante la pressione è *minore* che sul ventre: è questo squilibrio a produrre la forza sustentatrice.
- 2) Alle **estremità** dorso e ventre si incontrano: nulla impedisce all'aria di *aggirare l'estremità*, risalendo dalla sovrappressione del ventre verso la depressione del dorso.
- 3) Nel farlo l'aria acquista un moto rotatorio che, a valle, si organizza in due intense strutture controrotanti: i **vortici d'estremità** (*tip vortices*).
- 4) Circolazione attorno alle sezioni e vortici d'estremità non sono fenomeni separati: formano un *unico sistema vorticoso* continuo.

Il disegno che anticipò di decenni la teoria



Lo schema di Lanchester: vortice legato che si ripiega nei due vortici liberi d'estremità.

Osservazione

Un caso notevole di *visione fisica* che precede la formalizzazione: lo schema è aderente a quanto teoria ed esperimento confermeranno decenni dopo.

I vortici d'estremità non sono una curiosità

Attenzione

I vortici di scia dei grandi velivoli sono così intensi e persistenti da costituire un pericolo concreto per gli aerei più piccoli che li seguono.

Per questo le norme del traffico aereo impongono *distanze e intervalli minimi obbligatori* fra decolli e atterraggi successivi, scalati con la categoria di *turbolenza di scia* del velivolo che precede.

Nota

La velocità indotta decade come $1/r$ (Parte 6): lentamente. Fra poco ne faremo il conto.

Il profeta inascoltato

I lavori di Lanchester non furono accettati né dalla Royal Society né dalla Physical Society: troppo intuitivi per i fisici, troppo teorici per gli ingegneri, scritti in un linguaggio personale che non apparteneva a nessuna delle due comunità.

Il senso di tutto questo

Solo nel 1907 e nel 1908 uscirono, in forma di libro, i due volumi poi divenuti celebri: *Aerodynamics* e *Aerodnetics*. Aveva cominciato a sollevare il velo del segreto *anni prima che i Wright volassero*.

Un secondo primato: il fugoide

Definizione

Il **fugoide** (*phugoid*) è il moto longitudinale lento e ondulato in cui il velivolo scambia periodicamente energia cinetica di avanzamento ed energia potenziale di quota, a incidenza pressoché costante.

Lanchester lo scoprì, analizzò e battezzò osservando i voli di modellini. È uno dei due modi fondamentali del moto longitudinale che ogni corso di meccanica del volo insegna ancora oggi — l'altro è il corto periodo — e l'abbiamo già incontrato, degenerato dall'instabilità, nella dinamica del Flyer.

Una curiosità filologica

Nota

Lanchester coniò il nome da radici greche volendo dire «volare», ma scelse la radice che significa *fuggire* (come in «fuggitivo»). La sua aerodinamica, fu detto con affetto, era assai migliore della sua etimologia.

Dove stiamo andando

Tutte le tessere del mosaico erano sul tavolo; mancava chi le componesse. Servivano però, prima, gli strumenti matematici per trattare i vortici in tre dimensioni. Ed erano già pronti da mezzo secolo, nell'opera di Helmholtz.

Un *homo universalis* al servizio dell'ala

Hermann von Helmholtz (1821–1894) fu medico e fisiologo (suoi l'oftalmoscopio e la teoria della percezione dei colori), fisico (conservazione dell'energia), matematico. Nel 1858, studiando l'idrodinamica dei fluidi ideali, formulò i teoremi che portano il suo nome.

L'ironia della storia

Lo stesso Helmholtz che, sull'autorità di Newton, restava scettico sul volo umano, ne aveva già forgiato gli strumenti teorici decisivi.

Il vocabolario dei vortici

Definizione

Un **filetto vorticoso** (o filamento vorticoso) è una linea del campo attorno alla quale il fluido possiede circolazione Γ . È l'idealizzazione a spessore nullo del tubo vorticoso, come il vortice di Rankine ne è la versione a nucleo finito.

Nota

Da qui in avanti tutto il linguaggio dell'aerodinamica tridimensionale — vortice legato, vortici liberi, lamina vorticoso, reticolo di vortici — si costruisce su questo unico oggetto.

I tre teoremi di Helmholtz

Per un fluido ideale: non viscoso, barotropico, forze conservative

1. **Intensità costante.** La circolazione Γ di un filetto vorticoso è la stessa in ogni sua sezione: un vortice non può «indebolirsi» lungo il proprio asse.
2. **Nessuna fine nel fluido.** Un filetto non può terminare dentro il fluido: o va all'infinito, o si richiude ad anello, o termina su una superficie solida o libera.
3. **Trasporto col fluido.** Le particelle di un filetto continuano ad appartenervi: i vortici sono trasportati e deformati come linee materiali.

Nota

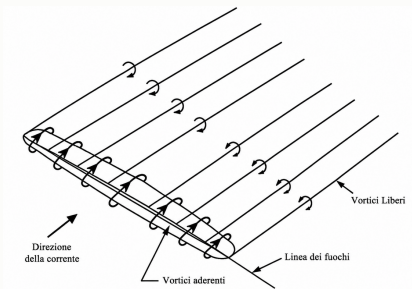
L'anello di fumo è la conferma domestica del secondo teorema: forma chiusa stabile che, se spezzata, si dissolve.

Il secondo teorema è la chiave dell'ala finita

Rileggiamo il teorema 2 pensando all'ala

- 1) La circolazione legata attorno alle sezioni alari è, a tutti gli effetti, un filetto vorticoso «aderente» all'ala, disteso lungo l'apertura.
- 2) Ma allora *non può terminare* alle estremità alari, che sono punti interni al fluido.
- 3) Deve proseguire: e prosegue, ripiegandosi a valle, nei due vortici liberi d'estremità osservati da Lanchester.
- 4) E si chiude infine, a ritroso, sul vortice di partenza rimasto sulla pista (Parte 8).

Il vortice a staffa



Un unico anello chiuso: vortice aderente, vortici liberi, vortice di partenza.

Da ricordare

Il quadro qualitativo di Lanchester diventa così una *necessità* matematica: è il **vortice a staffa** (a ferro di cavallo, *horseshoe vortex*) che formalizzeremo con Prandtl.

La legge di Biot–Savart

Forma vorticoso

Un elemento $d\vec{s}$ di filetto di circolazione Γ induce, in un punto a distanza $\vec{r}$, la velocità

$$d\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}.$$

La velocità indotta è perpendicolare al piano individuato dall'elemento e dalla congiungente — è il prodotto vettoriale all'opera — e decade col *quadrato* della distanza dall'elemento.

Due integrali da ricordare

Formula chiave

Filetto **rettilineo infinito**:

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi h}$$

— il campo del vortice di Rankine della Parte 6. Filetto **semi-infinito** (come i vortici liberi, che partono dall'ala e si estendono a valle): esattamente la metà,

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h}.$$

Un'analogia perfetta, e non per caso

Osservazione

Il nome viene dall'elettromagnetismo. Il filetto vorticoso sta al campo di velocità come il filo percorso da corrente sta al campo magnetico; Γ gioca il ruolo dell'intensità di corrente I .

Da ricordare

Chi ha studiato Biot–Savart in fisica può trasferire all'aerodinamica, senza modifiche, tutta l'intuizione maturata sui circuiti. È uno dei migliori esempi di come la matematica «ricicli» le proprie strutture.

Il conto della turbolenza di scia

Esercizio 6 — velocità indotta da un vortice d'estremità

Un velivolo in atterraggio ha generato vortici d'estremità con $\Gamma = 80 \text{ m}^2/\text{s}$. Stimare la velocità verticale indotta da *uno* dei due su un velivolo leggero che segue, a distanza laterale h .

- 1) **Modello:** filetto rettilineo semi-infinito, $w = \Gamma/(4\pi h)$.
- 2) **A** $h = 15 \text{ m}$: $w = 80/(4\pi \cdot 15) \approx 0,42 \text{ m/s}$.
- 3) **A** $h = 3 \text{ m}$: $w = 80/(4\pi \cdot 3) \approx 2,1 \text{ m/s}$ — cinque volte tanto, coerente con l'andamento $1/h$.

Perché la separazione di scia è obbligatoria

Attenzione

Velocità verticali indotte dell'ordine del metro al secondo, variabili bruscamente nello spazio, equivalgono per il velivolo che segue a raffiche e momenti di rollio comandati «dall'esterno».

Per un aereo leggero in finale possono *eccedere l'autorità degli alettoni*: attraversa in pochi decimi di secondo zone con velocità indotte di segno opposto.

Da ricordare

Ecco la base quantitativa delle separazioni per turbolenza di scia. Una norma operativa che discende, in due righe, da Biot–Savart.

La cassetta degli attrezzi è completa

Che cosa abbiamo

- la circolazione e la condizione del bordo d'uscita (Kutta);
- il teorema $\ell' = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma$ (Joukowski);
- il sistema vorticoso 3D (Lanchester);
- i teoremi dei vortici (Helmholtz);
- la legge dell'induzione (Biot–Savart).

Dove stiamo andando

Mancava soltanto l'uomo capace di usarla tutta insieme.

Si chiamava Ludwig Prandtl, insegnava a Göttingen, e nel 1918 mise in fila queste cinque tessere.

Parte 10

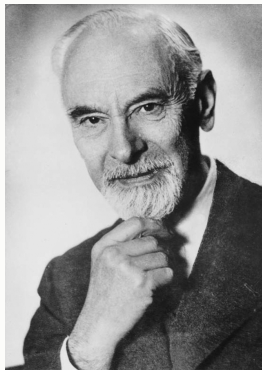
Prandtl: linea portante e resistenza indotta (1918)

10

L'uomo della sintesi

Ludwig Prandtl, professore a Göttingen e maestro di **Theodore von Kármán**, ebbe il dono raro di tradurre i fenomeni fisici in forma matematica trattabile.

È sua anche la **teoria dello strato limite** (1904), che risolse il paradosso di d'Alembert confinando gli effetti della viscosità in un sottile strato a parete e aprendo la strada al calcolo della resistenza d'attrito — teoria che il nostro corso usa costantemente.



Ludwig Prandtl (1875–1953).

Le ipotesi del modello

Linea portante (*lifting line*)

- ala di grande allungamento ($AR \gtrsim 5$), non a freccia, in corrente incompressibile;
- l'ala è sostituita da una **linea vorticoso portante**, perpendicolare al moto, con circolazione $\Gamma(y)$ *variabile* lungo l'apertura ($-b/2 \leq y \leq b/2$);
- ogni sezione lavora come un profilo bidimensionale investito dalla *corrente locale*, che include le velocità indotte.

Il modello genera da sé la scia

Perché la scia è inevitabile

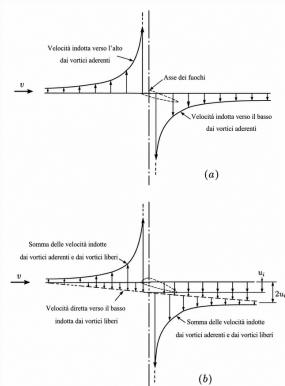
- 1) La circolazione non può essere costante: deve *annullarsi* alle estremità, dove dorso e ventre comunicano e lo squilibrio di pressione svanisce.
- 2) Ma per il primo teorema di Helmholtz un filetto non può cambiare intensità lungo il proprio asse.
- 3) Dunque, ovunque $\Gamma(y)$ *varia*, una parte dei filetti deve *staccarsi* dall'ala e proseguire verso valle: da ogni tratto dy esce un filetto libero di intensità $(d\Gamma/dy) dy$.

La lamina vorticososa

Dal bordo d'uscita esce dunque un'intera **lamina vorticososa** distribuita sull'apertura, che a valle si arrotola nei due vortici d'estremità di Lanchester.

Osservazione

Il singolo vortice a staffa è il caso limite di questo schema, per Γ costante a tratti. Il modello più generale contiene il più semplice.



Linea portante con $\Gamma(y)$ variabile e filetti liberi.

Il downwash e l'angolo indotto

I vortici liberi non restano senza conseguenze sull'ala che li ha generati: per Biot–Savart inducono, in corrispondenza della linea portante, una velocità verticale *discendente* — il **downwash** $w(y)$.

Formula chiave

$$\alpha_i = \arctan \frac{w}{V_\infty} \approx \frac{w}{V_\infty} \quad (w \ll V_\infty), \quad \alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i$$

Il downwash, sommandosi vettorialmente a V_∞ , inclina verso il basso la corrente che ogni sezione «vede» realmente.

Prima conseguenza: l'ala porta meno del suo profilo

Da ricordare

A parità di incidenza geometrica, l'ala finita produce *meno portanza* del profilo di cui è fatta: la pendenza della retta di portanza si riduce.

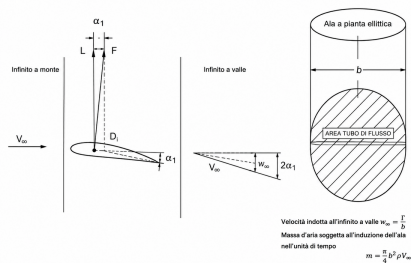
Il senso di tutto questo

È esattamente l'effetto dell'allungamento che i Wright avevano misurato in galleria nel 1901 senza poterlo spiegare (Parte 4). Diciassette anni dopo, la spiegazione arriva in due righe.

Seconda conseguenza: nasce una resistenza

La portanza di sezione è per definizione perpendicolare alla *corrente locale*. Se questa è inclinata all'ingiù di α_i , la portanza risulta inclinata *all'indietro* dello stesso angolo rispetto alla normale a $\vec{V}_\infty$.

La forza aerodinamica acquista così una componente parallela alla corrente indisturbata e diretta all'indietro: una *resistenza*.



La geometria della resistenza indotta.

La resistenza indotta

Formula chiave

Proiettando la portanza lungo V_∞ :

$$D_i = L \sin \alpha_i \approx L \alpha_i \quad \implies \quad C_{D_i} = C_L \alpha_i$$

Definizione

È la **resistenza indotta** (o *vorticoso*, o *di portanza*): non dipende dalla viscosità — esisterebbe anche in fluido perfettamente ideale — ed è il prezzo energetico, ineliminabile, del generare portanza con un'apertura *finita*.

Il significato energetico

Osservazione

L'equivalente energetico della resistenza indotta è l'energia cinetica abbandonata nella scia vorticosa: il lavoro che il propulsore spende contro D_i è esattamente la potenza con cui l'ala «mette in rotazione» l'aria che si lascia dietro.

Da ricordare

Sostenere un velivolo significa, inevitabilmente, imprimere all'aria una quantità di moto verso il basso. La resistenza indotta è il conto di quella operazione.

Errore comune: «la resistenza indotta è un attrito»

Attenzione

No: nessun meccanismo dissipativo viscoso è in gioco. La resistenza indotta è di natura puramente *cinematica e inerziale* — nasce dall'*inclinazione* del vettore portanza.

Nota

In fluido ideale la resistenza di *profilo* è nulla (d'Alembert); quella *indotta* no. È la distinzione che separa i due termini della polare, e va tenuta ben ferma.

Un debito saldato: l'imbardata avversa

La teoria della linea portante salda anche un conto aperto dal 1901.

Formula chiave

Quando si comanda il rollio, l'ala di cui si aumenta la portanza aumenta con essa il proprio $C_{Di} \propto C_L^2$, mentre l'ala opposta lo riduce:

$$\Delta C_n \propto \frac{\Delta(C_L^2)}{\pi AR e}$$

Il senso di tutto questo

Ciò che nel 1901 fu un'osservazione sconcertante, dal 1918 è un corollario di due righe. È il modo in cui la teoria ripaga la pratica.

La pubblicazione, e una vecchia polemica

La teoria fu pubblicata in Germania nel **1918** e uscì in forma definitiva e organica negli Stati Uniti nel **1922**, come rapporto **NACA TR-116**.

Nota

Sul merito relativo di Lanchester si discusse a lungo: il quadro fisico era suo, la forma matematica compiuta di Prandtl. In vecchiaia fu amareggiato di non vedersi riconosciuto: coda malinconica di una vita da precursore.

Dove stiamo andando

Resta l'ultima domanda, quella del progettista: *quale* distribuzione $\Gamma(y)$ rende minimo il prezzo da pagare?

Parte 11

Munk: l'ala ellittica e il prezzo minimo

11

Il problema matematico

Determinare la distribuzione di portanza lungo l'apertura, nota la geometria dell'ala, richiede la soluzione di un'**equazione integro-differenziale**: in ogni sezione l'angolo effettivo dipende dal downwash, il downwash (via Biot–Savart) dipende da $\Gamma(y)$ su *tutta* l'apertura, e $\Gamma(y)$ dipende a sua volta dall'angolo effettivo.

Nota

Storicamente la si affrontò per sviluppo in serie trigonometriche e con metodi grafici; oggi è uno dei problemi risolti per via numerica dalla **CFD**, di cui la linea portante resta il progenitore concettuale.

Il tassello di Munk

Il tassello decisivo lo pose **Max Munk**, allievo di Prandtl a Göttingen e poi figura di primo piano al NACA, studiando il *problema inverso*:

*fra tutte le distribuzioni $\Gamma(y)$ che producono la stessa portanza totale, qual è quella di **minima** resistenza indotta?*

Dove stiamo andando

La risposta è una delle più eleganti dell'aerodinamica — e ha conseguenze dirette su ogni ala che vedete passare in cielo.

La distribuzione ellittica

Formula chiave

Se la circolazione segue lungo l'apertura la legge ellittica

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2},$$

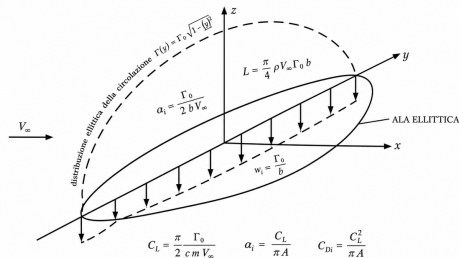
allora il downwash risulta **costante** lungo tutta l'apertura, $w = \Gamma_0/(2b)$, e con esso l'angolo indotto α_i . È la condizione di **resistenza indotta minima** a parità di portanza e apertura.

Il significato fisico

Osservazione

Se il downwash è lo stesso ovunque, ogni sezione lavora con la stessa riduzione di angolo effettivo e *nessuna porzione d'apertura è penalizzata* rispetto alle altre.

È lo stesso principio per cui, in una struttura, il materiale lavora al meglio quando la tensione è uniforme.



Distribuzione ellittica di $\Gamma(y)$ e downwash costante.

Le formule dell'ala ellittica

Formula chiave

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR}, \quad C_{D_i} = C_L \alpha_i = \frac{C_L^2}{\pi AR}, \quad AR = \frac{b^2}{S}$$

Sono fra le formule più usate di tutta l'aeronautica — e ora sapete da dove vengono.

Il fattore di Oswald e la polare parabolica

Formula chiave

Per forme in pianta qualsiasi si introduce il **fattore di Oswald** $e \leq 1$ (tipicamente $0,6 \div 1$), che misura lo scostamento dal carico ellittico:

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi AR e}, \quad \text{e sommando la resistenza di profilo:} \quad C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR e}$$

Da ricordare

Questa è la *genealogia storica* della polare parabolica che usiamo in avanprogetto. Ora sapete perché $e = 1$ per l'ala ellittica ideale.

Una lettura fisica complementare

Osservazione

L'influenza dell'ala è come confinata a un *tubo di flusso* di diametro pari all'apertura b , entro cui la portata deviata verso il basso vale

$$\dot{m} = \frac{\pi}{4} b^2 \rho V_{\infty}.$$

L'ala ellittica utilizza per intero quel tubo; le distribuzioni peggiori lo «restringono» ($e < 1$), dovendo imprimere all'aria disponibile un downwash maggiore — e pagando più resistenza per la stessa portanza.

Aliante contro caccia

Esercizio 7 — resistenza indotta a $C_L = 0,8$

Due configurazioni estreme, carico prossimo all'ellittico ($e \approx 0,95$): aliante con $AR = 25$, caccia con $AR = 3,5$.

- 1) **Modello:** $C_{D_i} = C_L^2 / (\pi AR e)$.
- 2) **Aliante:** $C_{D_i} = 0,8^2 / (\pi \cdot 25 \cdot 0,95) = 0,64 / 74,6 \approx \mathbf{0,0086}$.
- 3) **Caccia:** $C_{D_i} = 0,64 / (\pi \cdot 3,5 \cdot 0,95) = 0,64 / 10,44 \approx \mathbf{0,0613}$.
- 4) **Angoli indotti:** $0,61^\circ$ e $4,39^\circ$.

Sette volte tanto

Da ricordare

A parità di C_L il caccia paga una resistenza indotta *sette volte* maggiore dell'aliante: C_{Di} scala come $1/AR$.

Osservazione

Ecco, in un numero, il motivo per cui gli alianti hanno ali lunghe e strette (AR anche oltre 25). E poiché C_{Di} cresce col *quadrato* di C_L , la resistenza indotta domina il bilancio alle basse velocità — decollo, salita, virata stretta — mentre in crociera veloce, a basso C_L , quasi scompare.

Dalla formula al progetto: l'allungamento

Formula chiave

$$C_{Di} \propto \frac{1}{AR} \quad \text{l'efficienza premia le ali allungate.}$$

Attenzione

Il limite è *strutturale*: a parità di superficie un'ala più lunga ha momenti flettenti alla radice maggiori e richiede longheroni più pesanti.

Il compromesso che decide ogni progetto

Il senso di tutto questo

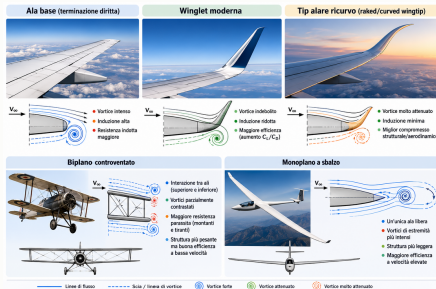
Il valore di AR di ogni velivolo è il punto di equilibrio fra il guadagno aerodinamico e il costo strutturale: ancora una volta aerodinamica e costruzioni si determinano a vicenda.

Da ricordare

Non esiste un allungamento «giusto» in assoluto: esiste quello giusto per una missione. L'aliante e il caccia dell'esercizio 7 non sono l'uno migliore dell'altro — rispondono a due domande diverse.

Dalla formula al progetto: forma in pianta ed estremità

- **forma in pianta:** l'ellisse pura è costosa da costruire (centine tutte diverse). Il carico quasi-ellittico si approssima con *rastremazione* e *svergolamento*, recuperando $e \rightarrow 1$ con forme trapezoidali semplici;
- **estremità alari:** schermi marginali, *up-turned wing tip* e **winglets** spostano e indeboliscono il vortice d'estremità, riducendo C_{Di} senza aumentare l'apertura.



Le winglets: preziose quando l'apertura è vincolata da parcheggi e hangar.

Il tramonto del biplano

La formula biplana e triplana ripartiva la portanza su più ali di piccolo allungamento, controventate.

Da ricordare

Non appena i profili spessi di Joukowski–Junkers (Parte 9) consentirono strutture interne robuste, il **monoplano** ad alto allungamento — più efficiente per la legge di $1/AR$ e privo dei tiranti — lo soppiantò.

Il senso di tutto questo

Due capitoli indipendenti — il profilo spesso e la resistenza indotta — convergono su una sola decisione progettuale. È così che nascono le configurazioni.

Parte 12

Epilogo: dal segreto all'ingegneria

12

Gli anni Venti: nasce una disciplina

Agli inizi degli anni Venti le basi teoriche erano poste, e su di esse sorse, con rapidità impressionante, una promettente **ingegneria aeronautica**.

Da ricordare

La teoria non chiuse la ricerca: la *indirizzò*. Disse finalmente che cosa valesse la pena di misurare, e con quali parametri di similitudine.

Il problema della similitudine

Definizione

La teoria dello strato limite aveva chiarito che il comportamento viscoso di un profilo dipende dal **numero di Reynolds**

$$Re = \frac{\rho V c}{\mu}.$$

Attenzione

Ma un modello in scala ridotta, provato alla stessa velocità, ha Re molto minore del velivolo reale: i dati *non sono trasferibili*.

Le gallerie a densità variabile

Osservazione

La soluzione, concettualmente brillante: pressurizzare l'aria del circuito — fino a ≈ 20 atmosfere nella *Variable Density Tunnel* del NACA (1922) — per aumentare ρ e con essa Re , riportando il modello in scala alle condizioni di similitudine del volo reale.

Nacquero così le prove *sistematiche* di intere famiglie di profili ad alto numero di Reynolds: le serie NACA a quattro e cinque cifre, catalogate nei celebri *Technical Reports*.

E, in parallelo, le strutture

Sorsero i laboratori per i nuovi materiali e tipi strutturali resi possibili — e necessari — dall'ala spessa a sbalzo: le **leghe di alluminio** ad alta resistenza (i duralluminii) e le **strutture a guscio** e semiguscio, in cui il rivestimento collabora alla resistenza.

Da ricordare

È la nascita dell'aeronautica strutturale che studiamo in questo corso.

Nota

Molti di quei risultati, per il loro valore strategico, furono a lungo classificati come segreto militare: il «segreto dell'ala», svelato dalla scienza, si trasformava in segreto industriale e di stato.

Il punto d'arrivo: i profili a flusso laminare

Nessun esempio illustra la maturità raggiunta meglio dei **profili a flusso laminare**, sviluppati dal NACA alla fine degli anni Trenta.

Osservazione

Compresa la transizione dello strato limite, si imparò a *disegnare* la distribuzione di pressione — arretrando il punto di spessore massimo per mantenere a lungo il gradiente favorevole — così da conservare laminare, e quindi a bassissimo attrito, gran parte dello strato limite. Il risultato è la caratteristica *sacca laminare* nella polare dei profili della serie 6.

Il Mustang



Il North American P-51 Mustang.

Il primo velivolo a impiegarli sistematicamente fu il caccia North American **P-51 Mustang**, la cui autonomia e velocità devono molto proprio all'ala laminare — tanto che il relativo rapporto NACA rimase a lungo riservato.

Decenni dopo, quegli stessi profili avrebbero equipaggiato anche brillanti velivoli dell'aviazione generale italiana.

Che cosa cambiò, esattamente

1900

I Wright dovettero *costruirsi una galleria del vento* perché nessun dato pubblicato era affidabile, e provarono duecento ali *alla cieca*.

1940

Un progettista apriva un NACA Report, scegliva il profilo adatto al suo Re e al suo C_l di progetto, calcolava l'ala con la linea portante e la polare con la formula parabolica, e dimensionava il longherone dentro lo spessore del profilo.

Da ricordare

Quarant'anni: da artigianato eroico a metodo. È la differenza che fa una teoria.

L'omaggio finale

L'omaggio conclusivo spetta, per giustizia, a Frederick Lanchester: il primo a intuire il reale funzionamento dell'ala, e il meno riconosciuto.

Si narra che, giovane, in viaggio per mare verso l'America, osservando i gabbiani planare a lungo sulle correnti con le grandi ali bianche immobili, gli balenasse l'idea che gli avrebbe illuminato la strada.



Scienza e poesia, davanti allo stesso spettacolo

Il senso di tutto questo

Il volo veleggiato di un uccello marino contiene, per chi sa guardare, la circolazione, il sistema vorticoso e la distribuzione ellittica — l'intero segreto dell'ala.

Da ricordare

Scienza e poesia, davanti allo stesso spettacolo, si fondono per irradiare insieme la luce della conoscenza.

Parte 13

Sintesi: il segreto svelato

13

Quattro punti, in forma di tesi

Dove stiamo andando

Da Newton a Prandtl la comprensione dell'ala è passata da un'ipotesi qualitativamente errata a un modello matematico solido e predittivo. Raccogliamo la risposta al «segreto» in quattro affermazioni, ciascuna verificabile su ciò che abbiamo visto.

Punto 1 — Circolazione, non urto

Formula chiave

L'ala genera portanza attraverso un moto *circolatorio* del fluido che la circonda — la circolazione Γ — non attraverso l'urto delle particelle sul ventre.

Osservazione

La dissimmetria di velocità fra dorso e ventre, e la conseguente dissimmetria di pressione via Bernoulli, è la *manifestazione* della circolazione, non una causa indipendente. Il dorso, che Newton ignorava, fornisce la parte maggiore della forza.

Punto 2 — La circolazione nasce dalla viscosità

Formula chiave

All'avvio del moto la viscosità provoca al bordo d'uscita aguzzo il distacco del *vortice di partenza*; per il teorema di Kelvin ($D\Gamma/Dt = 0$) attorno al profilo resta una circolazione legata uguale e contraria, di intensità tale da soddisfare la condizione di Kutta.

Da ricordare

Il fluido ideale *calcola* la portanza; il fluido reale la *rende possibile*.

Punto 3 — Il teorema di Kutta–Joukowski

Formula chiave

$$\ell' = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma \quad \implies \quad C_l = 2\pi\alpha \quad (\text{profilo sottile})$$

Osservazione

L'andamento *lineare* con l'incidenza che le misure confermano, e che la legge del $\sin^2 \alpha$ non poteva spiegare. Per un profilo *curvo* la stessa costruzione dà $C_l = 2\pi(\alpha - \alpha_0)$, con $\alpha_0 < 0$: il profilo inarcato porta anche a incidenza nulla — esattamente ciò che Lilienthal aveva misurato nel 1889.

Punto 4 — La linea portante e il prezzo della portanza

Formula chiave

Nell'ala di apertura finita il sistema vorticoso induce il downwash, riduce l'angolo effettivo e inclina la portanza all'indietro:

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi AR e}, \quad e = 1 \text{ per il carico ellittico.}$$

Da ricordare

Ogni conquista porta con sé un prezzo — ma un prezzo, da allora, *calcolabile e minimizzabile*.

Il filo logico, in una riga

**Newton → Lilienthal → Wright → Magnus → Kutta
→ Joukowski → Lanchester → Helmholtz → Prandtl → Munk**

Osservazione

Un modello errato ma autorevole; dei fatti sperimentali che lo contraddicono; un fenomeno analogo già compreso; la formalizzazione; l'estensione al caso tridimensionale; infine l'ottimizzazione. È il ciclo completo del metodo scientifico applicato a un problema di ingegneria.

La morale, per un futuro costruttore

Da ricordare

L'uomo ha imparato a volare solo quando ha compreso le leggi del fluido che lo sostiene: la fisica, in aeronautica, non fa sconti.

Il senso di tutto questo

Ogni formula che questo corso vi chiede di padroneggiare — dalla retta di portanza alla polare parabolica — è stata pagata con due secoli di errori autorevoli, esperimenti pazienti e, talvolta, vite umane. Usarla con consapevolezza è il modo più serio di onorare quel debito.

