

Serie Raucci — Costruzioni Aeronautiche

# Punti caratteristici e Polari tecniche

*La resistenza, la spinta e la potenza necessarie  
al volo livellato di un velivolo*

---

prof. ing. Biagio Raucci

ITIS «E. Majorana» — Struttura, Costruzione, Sistemi e Impianti del Mezzo

Serie Raucci — Costruzioni Aeronautiche



# Dove stiamo andando

---

## Dove stiamo andando

Partiamo da una sola curva — la **polare** — e da due sole equazioni di equilibrio —  $T = D$  e  $L = W$  — e ne ricaviamo l'intera *geografia delle prestazioni* di un velivolo: quanta spinta serve, quanta potenza serve, e a quali velocità conviene volare.

## Il percorso

---

1. La polare parabolica
2. Le equazioni del moto
3. La spinta necessaria  $T_n(V)$
4. L'efficienza e il punto  $E$

## ... e la meta

---

5. La potenza necessaria  $\Pi_n(V)$  e il punto  $P$
6. Il punto  $A$  e il minimo di  $D/V$
7. Riepilogo dei punti caratteristici
8. Esercizio svolto: bimotore a elica

Parte 1

# La polare: carta d'identità aerodinamica

---

1

# La domanda di partenza

*Quanta forza occorre per tenere in volo l'aeroplano, e a quale velocità conviene farlo?*

La risposta non dipende in primo luogo dal *motore*, ma dalla **forma aerodinamica** del velivolo: dal modo in cui esso genera portanza e, come inevitabile contropartita, resistenza.

- La **polare** è la curva che lega il coefficiente di resistenza  $C_D$  al coefficiente di portanza  $C_L$ : la *carta d'identità aerodinamica* del velivolo.
- Nota la polare, più peso  $W$ , superficie alare  $S$  e allungamento  $AR$ , si costruiscono le curve di *resistenza*, *spinta* e *potenza necessarie* al volo a qualunque velocità e quota.
- Queste curve sono le **polari tecniche**: il ponte tra l'aerodinamica e lo studio delle prestazioni.

## Da ricordare

Prima di chiederci che cosa il motore *può dare*, chiediamoci che cosa il velivolo *chiede*: è una proprietà dell'aeroplano, non del propulsore.

Parte 2

# La polare parabolica

---

2

# I due contributi della resistenza

---

Ai fini delle prestazioni, la resistenza complessiva si decompone sempre in due grandi famiglie:

## Resistenza a portanza nulla

---

Presente anche quando l'ala *non* porta: attrito viscoso, resistenza di forma di fusoliera, gondole, carrello, antenne. È la “zavorra” aerodinamica di ogni condizione di volo.

### Osservazione

Raddoppiare  $C_L$  significa *quadruplicare* la resistenza indotta: è questa non linearità a rendere così ricco tutto ciò che segue.

## Resistenza indotta

---

Nasce *a causa* della portanza: i vortici di estremità deflettono il flusso verso il basso e generano una componente di resistenza che cresce con il *quadrato* di  $C_L$ .

# L'equazione della polare parabolica

## Formula chiave

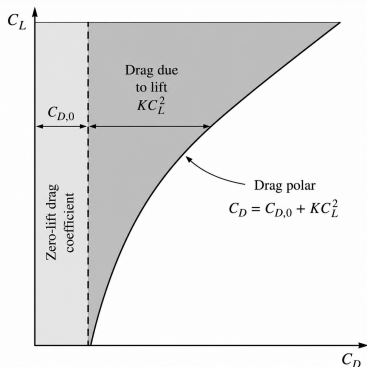
$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi AR e} = C_{D0} + K C_L^2, \quad K = \frac{1}{\pi AR e}$$

- $C_{D0}$ : coefficiente di **resistenza a portanza nulla**. Dipende da geometria e finitura superficiale, non dall'assetto.
- $K C_L^2$ : resistenza **dipendente dalla portanza**, proporzionale a  $C_L^2$ .
- $AR = b^2/S$ : **allungamento alare**;  $e$ : **fattore di Oswald** (0,75–0,90), correttivo per distribuzioni di portanza non ellittiche.

## Definizione

Nel piano  $(C_D, C_L)$  è una parabola con asse sull'asse  $C_L$  e vertice in  $(C_{D0}, 0)$ .

# Perché gli alianti hanno ali lunghe e sottili



Maggiore è l'allungamento  $AR$ , minore è  $K = 1/(\pi AR e)$  e quindi minore è la resistenza indotta a parità di  $C_L$ .

- **Aliante:** deve volare con la minima resistenza  $\Rightarrow$  ali lunghe e sottili,  $AR$  anche  $> 25$ .
- **Caccia:** privilegia manovrabilità e alte velocità  $\Rightarrow$  ali tozze, basso  $AR$ .

La polare: termine costante  $C_{D0}$  più termine indotto  $K C_L^2$ .

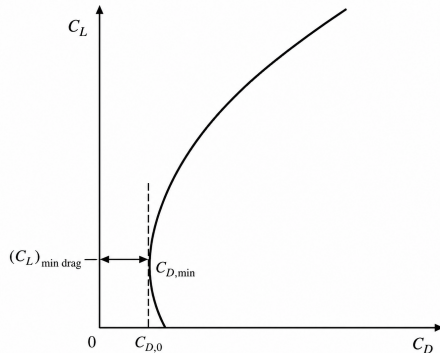
# La polare ad asse spostato

Le prove in galleria mostrano che la resistenza minima si ha non a  $C_L = 0$ , ma a  $C_L$  *leggermente positivo*: i profili reali sono *curvi* (dotati di *camber*) e offrono la minima resistenza a un piccolo angolo d'attacco positivo.

## Formula chiave

$$C_D = C_{D,\min} + K (C_L - C_{L,\min \text{ drag}})^2$$

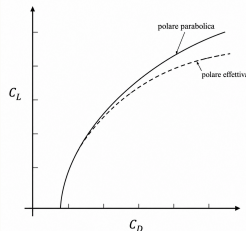
La parabola trasla verso l'alto lungo l'asse  $C_L$ : il vertice non giace più sull'asse delle ascisse.



Polare ad asse spostato: vertice a  $C_{L,\min \text{ drag}} > 0$ .

# Quanto è “onesta” la polare parabolica?

La parabola si discosta dal vero solo ad **assetto molto bassi** (curvatura dei profili) e **vicino allo stallo** (la resistenza non segue più il quadrato di  $C_L$ ): proprio le regioni che *non interessano* — a  $C_L \approx 0$  non ci si sostiene, allo stallo non si opera. Nell'intervallo operativo ( $C_L \approx 0,20-1,20$ ) è *eccellente* e derivabile analiticamente.



Parabolica ed effettiva coincidono nell'intervallo operativo.

## Attenzione

$C_{D0}$  costante ignora la *resistenza d'onda*: oltre il Mach di divergenza  $M_{DD}$  la legge perde validità. Qui: sempre  $M < M_{DD}$ .

Parte 3

# Le equazioni del moto in volo livellato

---

3

## Il caso generale: traiettoria curvilinea

Quattro forze sul baricentro: portanza  $L$  ( $\perp$  a  $V$ ), resistenza  $D$  ( $\parallel$  e opposta a  $V$ ), peso  $W$ , spinta  $T$  inclinata del piccolo angolo  $\varepsilon$ . Angolo di rampa  $\theta$ , angolo di bank  $\Phi$ . L'equilibrio dinamico  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  nelle tre direzioni naturali dà:

$$m \frac{dV}{dt} = T \cos \varepsilon - D - W \sin \theta \quad (\text{lungo la velocità})$$

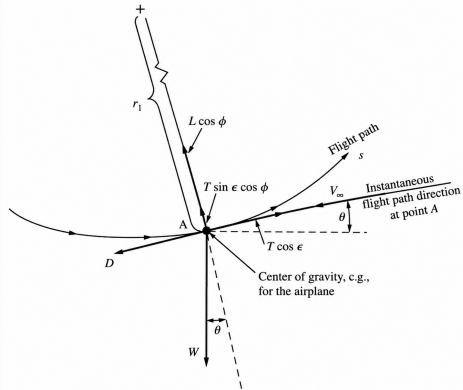
$$m \frac{V^2}{r_1} = L \cos \Phi + T \sin \varepsilon \cos \Phi - W \cos \theta \quad (\text{normale, piano verticale})$$

$$m \frac{(V \cos \theta)^2}{r_2} = L \sin \Phi + T \sin \varepsilon \sin \Phi \quad (\text{normale, piano orizzontale})$$

### Nota

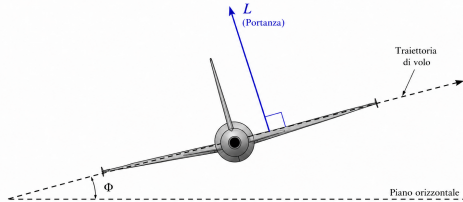
Da queste tre equazioni discendono *tutti* i casi particolari: volo livellato, salita, virata.

# Le forze e gli angoli in gioco



La portanza è perpendicolare a  $V$ , la resistenza parallela e opposta; la spinta è inclinata di  $\epsilon$  sull'asse vento.  $\theta$  è l'angolo di rampa,  $\alpha$  l'angolo d'assetto,  $\gamma = \theta + \alpha$ .

# Traiettoria curvilinea: le due viste



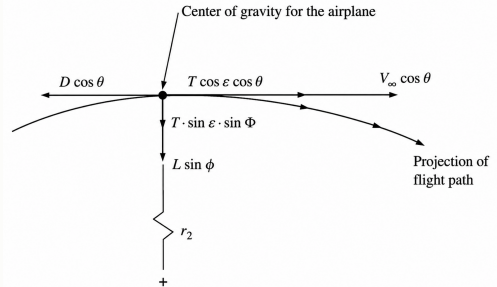
$\phi$  = angolo di bank (o inclinazione dell'aereo rispetto al piano orizzontale)

$L$  = portanza totale, perpendicolare alla traiettoria di volo

Nel volo in virata coordinata, l'aereo è inclinato di un angolo  $\Phi$  rispetto al piano orizzontale e la traiettoria di volo forma lo stesso angolo  $\Phi$  con il piano orizzontale.

La portanza totale  $L$  è sempre perpendicolare alla traiettoria di volo.

Vista da dietro: con bank  $\Phi$  la portanza dà  $L \sin \Phi$  per curvare e  $L \cos \Phi$  per sostenere.



Proiezione orizzontale della virata: accelerazione centripeta  $(V \cos \theta)^2 / r_2$ .

# Il volo livellato uniforme

*“Livellato” è la geometria, “uniforme” è la cinematica*

- **Livellato:** traiettoria orizzontale ( $\theta = 0$ ) e ali orizzontali ( $\Phi = 0$ ).
- **Uniforme:** velocità costante ( $dV/dt = 0$ ), traiettoria rettilinea ( $r_1 = r_2 = \infty$ ).

Imponendo queste condizioni, la terza equazione diventa  $0 = 0$  e restano le due relazioni esatte:

## Formula chiave

$$T \cos \varepsilon = D, \quad L + T \sin \varepsilon = W$$

## Osservazione

Solo la proiezione  $T \cos \varepsilon$  vince la resistenza; la componente  $T \sin \varepsilon$ , diretta verso l'alto, *alleggerisce l'ala*: la portanza deve sostenere soltanto  $W - T \sin \varepsilon$ .

# Quanto pesa l'angolo $\varepsilon$ ? Facciamo i conti

Per gli aeroplani convenzionali  $\varepsilon$  vale pochi gradi. Prendiamo, a titolo illustrativo,  $\varepsilon = 5^\circ$ :

- $\cos \varepsilon \approx 0,996$ : la spinta richiesta  $T = D / \cos \varepsilon$  supera  $D$  di appena lo 0,4 %;
- con efficienza  $E \approx 15$  (quindi  $T \approx W/15$ ), la componente verticale vale  $T \sin \varepsilon \approx 0,087 \cdot W/15 \approx 0,006 W$ : meno dell'1 % del peso.

Siamo dunque pienamente giustificati a porre  $\varepsilon \approx 0$ :

## Formula chiave

$$T = D$$

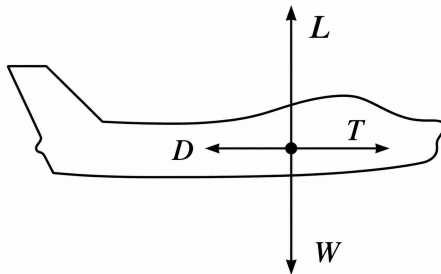
$$L = W$$

## Da ricordare

$T = D$  e  $L = W$  non sono leggi indipendenti: sono il limite a piccolo  $\varepsilon$  del bilancio esatto. Usiamo la forma semplice sapendo *esattamente* quale approssimazione stiamo introducendo.

# L'equilibrio del volo livellato

---



La portanza equilibra il peso, la spinta equilibra la resistenza: è il caso particolare  $\theta = 0$ ,  $\Phi = 0$ ,  $\varepsilon \approx 0$  delle equazioni generali.

Parte 4

# La spinta necessaria al volo livellato

---

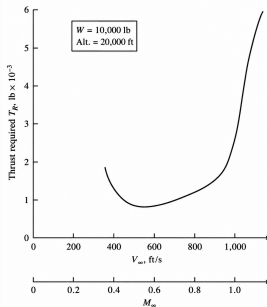


# Che cos'è la spinta necessaria

## Definizione

La **spinta necessaria**  $T_n$  è la spinta che il propulsore deve fornire per mantenere il volo livellato stazionario a una data velocità e quota. Per l'equilibrio:  $T_n = D$ .

- È una caratteristica del **velivolo**, *non* del motore;
- il motore fornisce la *spinta disponibile*: dal confronto tra le due usciranno le velocità raggiungibili;
- la curva  $T_n(V)$  a quota fissata è la prima **polare tecnica**: coincide con la curva di resistenza.



Andamento tipico “a U”: decresce, tocca un minimo, risale.

# Costruzione punto per punto

Dati  $W$ ,  $S$ ,  $AR$  e la polare  $C_D = C_{D0} + KC_L^2$ , la curva si costruisce così:

1. **Si sceglie una velocità  $V$**  (minimo ammissibile: la velocità di stallo alla quota,  $V_S = V_{S0}/\sqrt{\sigma}$  con  $\sigma = \rho/\rho_0$ );
2. **si calcola il  $C_L$  necessario** a sostenere il peso, da  $L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$ :  
$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S};$$
3. **si calcola  $C_D$  dalla polare:**  $C_D = C_{D0} + KC_L^2$ ;
4. **si calcola la spinta necessaria:**  $T_n = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D \Rightarrow$  il punto  $(V, T_n)$ ;
5. **si ripete** per altri valori di  $V$  fino a tracciare l'intera curva.

## Nota

La logica è sempre la stessa: *la velocità impone l'assetto* (tramite  $L = W$ ), *l'assetto impone la resistenza* (tramite la polare).

# Un punto della curva: il Gulfstream IV a 9000 m

## Esercizio svolto

$W = 33\,112,8 \text{ kgf}$ ,  $S = 88,255 \text{ m}^2$ ,  $C_D = 0,015 + 0,08 C_L^2$ ,  $\rho(9000 \text{ m}) \approx 0,459 \text{ kg/m}^3$ .  
Scegliamo  $V = 550 \text{ km/h} = 153 \text{ m/s}$ .

$$1) \quad C_L = \frac{2Wg}{\rho V^2 S} = \frac{2 \cdot 33112,8 \cdot 9,81}{0,459 \cdot 153^2 \cdot 88,255} \approx 0,687$$

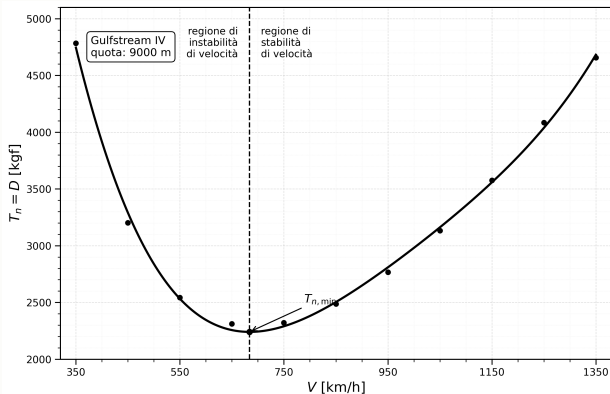
$$2) \quad C_D = 0,015 + 0,08 \cdot 0,687^2 \approx 0,053$$

$$3) \quad T_n = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D \approx 25\,000 \text{ N} \approx 2542 \text{ kgf}$$

## Nota

Polare a scopo didattico (quelle reali sono riservate); oltre  $M \approx 0,85$  interverrebbe la resistenza d'onda.

# La curva di spinta necessaria del Gulfstream IV



Curva  $T_n(V)$  a 9000 m; la tratteggiata separa la regione di instabilità (a sinistra) da quella di stabilità (a destra).

# Perché la curva è a “U”

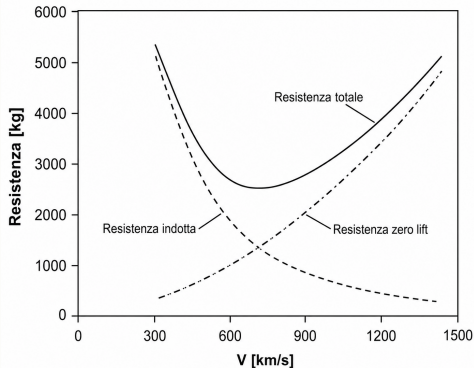
$$D = \underbrace{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0}}_{\text{parassita}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho V^2 S K C_L^2}_{\text{indotta}}, \text{ e in volo}$$

livellato  $C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}$  *cala* con  $V$ :

- **basse velocità:**  $C_L$  grande  $\Rightarrow$  domina l'*indotta*  $\Rightarrow$  curva *decrescente*;
- **alte velocità:**  $C_L$  piccolo  $\Rightarrow$  domina la *parassita* ( $\propto V^2$ )  $\Rightarrow$  curva *crescente*.

## Formula chiave

Al minimo:  $C_{D0} = K C_L^2$  (parassita = indotta). Sarà la chiave del punto *E*.



Il minimo si trova dove i due contributi si eguagliano.

# La regione di instabilità di velocità

Il “rovescio della polare” (back side of the power curve)

Consideriamo il ramo *sinistro* della curva ( $V$  minore di quella di minima resistenza):

- una raffica riduce la velocità da  $V_1$  a  $V_2 < V_1$ ;
- in questa regione, rallentando, la spinta necessaria *aumenta*:  $T_{n2} > T_{n1}$ ;
- a manetta ferma la spinta disponibile è ora *insufficiente*: il velivolo continua a rallentare, allontanandosi dalla condizione iniziale  $\Rightarrow$  condizione **instabile**.

Sul ramo *destro* accade l'opposto: un rallentamento riduce  $T_n$ , l'eccesso di spinta riaccelera il velivolo  $\Rightarrow$  condizione **stabile**. Per questo si opera normalmente sul ramo destro.

## Attenzione

Volare nel rovescio della polare (per esempio in avvicinamento a bassissima velocità) richiede un uso *controintuitivo* della manetta: la risposta del velivolo alle perturbazioni è divergente.

Parte 5

# Efficienza aerodinamica e punto E

---

5

# L'efficienza aerodinamica

Dall'equilibrio  $T_n = D$  e  $L = W$ :

## Formula chiave

$$T_n = D = \frac{D}{L} L = \frac{W}{L/D} = \frac{W}{E}, \quad \text{con} \quad E = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D}$$

## Definizione

L'**efficienza aerodinamica**  $E = C_L/C_D$ : i metri percorsi in planata per ogni metro di quota perduta; i chilogrammi di portanza per ogni chilogrammo di resistenza.

## Da ricordare

A peso fissato  $T_n = W/E$ : la spinta necessaria è *minima* dove l'efficienza è *massima*.

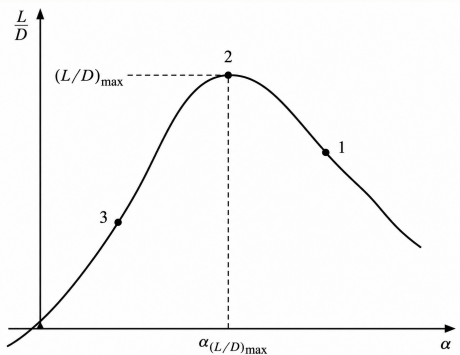
# L'efficienza dipende dall'assetto

$C_L$  e  $C_D$  dipendono entrambi dall'angolo d'attacco  $\alpha$ : quindi anche  $E = C_L/C_D$ .

La curva  $E(\alpha)$ :

- parte bassa agli assetti picchiati,
- cresce con  $\alpha$ ,
- tocca il massimo  $E_{\max}$  all'assetto  $\alpha_E$ ,
- decresce avvicinandosi allo stallo.

Esiste dunque un *unico* assetto privilegiato.



$E(\alpha)$ : il massimo  $E_{\max}$  all'assetto  $\alpha_E$ .

# In volo livellato l'assetto non è libero

Dalla condizione  $L = W$ , a ogni velocità corrisponde un ben preciso  $C_L$ :

## Formula chiave

$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S} \Rightarrow C_L \propto \frac{1}{V^2}, \quad V \propto \frac{1}{\sqrt{C_L}}$$

- Volare *veloci* = assetti picchianti ( $\alpha$  piccolo); volare *lenti* = forte incidenza.
- Con  $\sigma = \rho/\rho_0$ :  $V = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sqrt{\frac{2W}{\rho_0 S} \frac{1}{C_L}} \Rightarrow$  a parità di assetto, *tutte* le velocità crescono con la quota come  $1/\sqrt{\sigma}$ .

## Osservazione

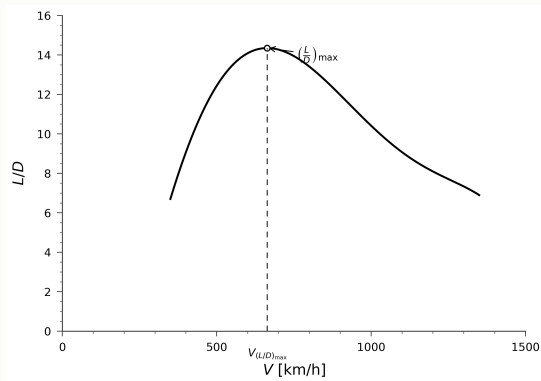
Ecco perché le velocità caratteristiche  $V_E$ ,  $V_P$ ,  $V_A$  si sposteranno a destra salendo di quota.

## Due curve speculari: $E(V)$ e $T_n(V)$

Ogni punto della curva di spinta necessaria corrisponde a un diverso  $\alpha$  e quindi a un diverso  $E$ . Rallentando da alta velocità:

- $\alpha$  cresce in modo monotono;
- $E$  prima *cresce* fino a  $E_{\max}$  (in  $V_E$ ), poi *decresce*;
- $T_n = W/E$  fa l'opposto: minimo in  $V_E$ , poi risale.

Dove una curva ha il massimo, l'altra ha il minimo: *alla stessa velocità  $V_E$* .



$E(V)$  a quota e peso fissati: massimo  $E_{\max}$  in  $V_E$ .

# La resistenza in funzione della velocità

Sostituendo  $C_L = 2W/(\rho V^2 S)$  nel termine indotto:

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} + \frac{2K}{\rho} \frac{W^2}{S} \frac{1}{V^2}$$

## Formula chiave

$$D = a V^2 + \frac{b}{V^2}, \quad a = \frac{1}{2}\rho S C_{D0} = \frac{1}{2}\rho f, \quad b = \frac{2}{\rho} \frac{W^2}{S} \frac{1}{\pi AR e}$$

- $aV^2$ : **parassita**, cresce con  $V^2$  ( $f = C_{D0}S$ : **area parassita equivalente**);
- $b/V^2$ : **indotta**, decresce con  $1/V^2$ .

## Il punto E: derivazione del minimo

Annuliamo la derivata di  $D = aV^2 + b/V^2$ :

$$\frac{dD}{dV} = 2aV - \frac{2b}{V^3} = 0 \implies aV^2 = \frac{b}{V^2} \implies \text{parassita} = \text{indotta}$$

Riportata in coefficienti (dividendo per  $qS$ ), è la condizione già anticipata:  $C_{D0} = KC_L^2$ . Da essa:

### Formula chiave

$$C_{L,E} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}} = \sqrt{\pi AR e C_{D0}}, \quad C_{D,E} = 2 C_{D0}$$

### Da ricordare

Al punto di massima efficienza la resistenza totale è *il doppio* di quella a portanza nulla.

# L'efficienza massima è un parametro di progetto

## Formula chiave

$$E_{\max} = \frac{C_{L,E}}{C_{D,E}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi AR e}{C_{D0}}} = \sqrt{\frac{\pi AR e}{4 C_{D0}}}$$

Lettura progettuale:  $E_{\max}$  cresce con la radice di  $AR$  ed  $e$ , *diminuisce* con la radice di  $C_{D0}$ .

- È la filosofia dell'aliante: ali lunghe e sottili (alto  $AR$ , portanza quasi ellittica,  $e \rightarrow 1$ ) e grande pulizia aerodinamica (basso  $C_{D0}$ ).

## Nota

$E_{\max}$  dipende *solo* da  $C_{D0}$ ,  $AR$ ,  $e$ : è un **parametro di progetto**, indipendente da quota, velocità e peso. Conseguenza di enorme portata: il minimo della curva di resistenza *non cambierà con la quota*.

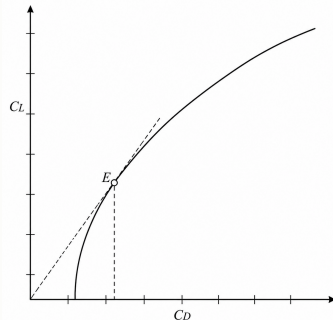
# Velocità di massima efficienza e lettura sulla polare

Imponendo  $C_L = C_{L,E}$  in  $C_L = 2W/(\rho V^2 S)$ :

$$V_E = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{C_{L,E}}}$$

Dipende da quota e carico alare  $W/S$ : a differenza di  $E_{\max}$ , *non* è un invariante.

**Lettura geometrica.** La retta dall'origine a un punto della polare ha pendenza  $\tan \chi = C_L/C_D = E$ : il punto E è la *tangenza*, cioè la pendenza (efficienza) massima.



Il punto E: tangenza della retta dall'origine; lì  
 $C_{D,E} = 2C_{D0}$ .

Parte 6

# Peso e quota sulla spinta necessaria

---

6

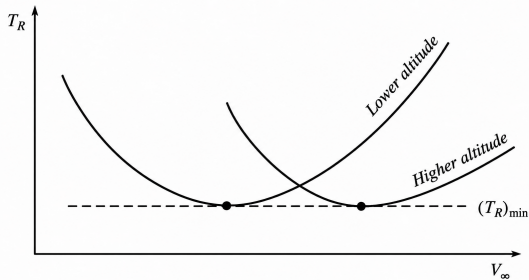
# Effetto della quota: il minimo non si muove (in alto)

La resistenza minima vale

$$D_{\min} = T_{n,\min} = \frac{W}{E_{\max}}$$

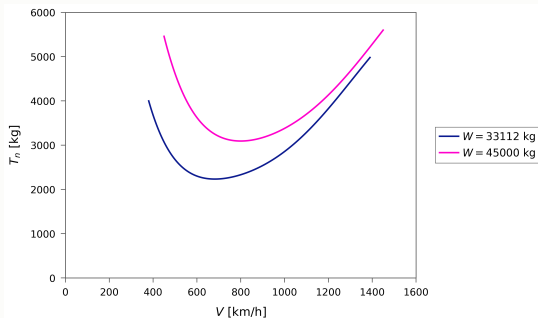
e  $E_{\max}$  *non dipende dalla quota*: il minimo resta invariato.

Cambia invece la *velocità* del minimo: salendo,  $\rho$  cala e tutte le velocità caratteristiche crescono come  $1/\sqrt{\sigma}$ . La curva non trasla rigidamente: si sposta a destra e si “distende”.



Quota crescente: minimo invariato, spostato verso velocità maggiori.

# Effetto del peso e del $C_{D0}$



Peso crescente: il minimo sale (come  $W$ ) e si sposta a destra (come  $\sqrt{W}$ ).

## Peso

$D_{\min} = W/E_{\max}$  sale  $\propto W$ ; le velocità crescono  $\propto \sqrt{W}$ .

## $C_{D0}$

Agisce solo sul termine parassita ( $\propto V^2$ ): solleva il ramo *destra*; il minimo sale ( $E_{\max}$  cala); le velocità si spostano pochissimo, a sinistra:  $V_E \propto 1/\sqrt[4]{C_{D0}}$  (+10 % di  $C_{D0} \Rightarrow V_E$  al 97,6 %).

**Parametri di progetto** (costanti):  $E_{\max}$ ,  $S$ ,  $C_{D0}$ ,  $AR$ ,  $e$ . **Parametri di volo**:  $V$ , quota,  $C_L$ ,  $C_D$ ,  $E$ ,  $D$ .

Parte 7

# La potenza necessaria e il punto P

---

7

# La potenza necessaria

La potenza è lavoro nell'unità di tempo: forza per velocità. Per muovere il velivolo a velocità  $V$  contro la resistenza  $D$ :

## Formula chiave

$$\Pi_n = T_n \cdot V = D \cdot V$$

## Attenzione

$\Pi_n$  non ha lo stesso minimo di  $T_n$ : la potenza è  $D \cdot V$  e il suo minimo cade a velocità *più bassa*.

## Osservazione

Chi vuole *restare in volo più a lungo* (tipico dell'elica) vola *più piano* di chi cerca la minima resistenza.

# La curva di potenza: $aV^3 + b/V$

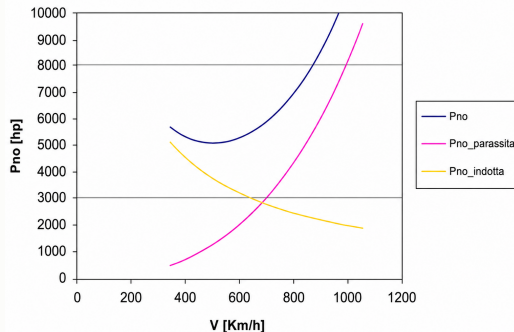
Moltiplicando  $D = aV^2 + b/V^2$  per  $V$ :

$$\Pi_n = aV^3 + \frac{b}{V}$$

ovvero, in forma esplicita,

$$\Pi_n = \frac{1}{2}\rho S C_{D0} V^3 + \frac{2K}{\rho S} \frac{W^2}{V}$$

- **potenza parassita**: cresce con  $V^3$ ;
- **potenza indotta**: decresce come  $1/V$ .



I due contributi della potenza: il minimo cade a velocità inferiore a quella di minima resistenza.

## Il punto P di minima potenza

Annuliamo la derivata di  $\Pi_n = aV^3 + b/V$ :

$$\frac{d\Pi_n}{dV} = 3aV^2 - \frac{b}{V^2} = 0 \implies 3aV^2 = \frac{b}{V^2} \implies \boxed{D_i = 3 D_0}$$

L'indotta è *tripla* della parassita; in coefficienti  $KC_L^2 = 3C_{D0}$ , dunque:

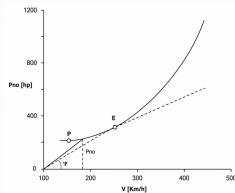
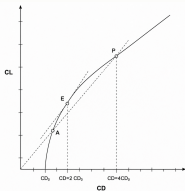
### Formula chiave

$$C_{L,P} = \sqrt{3} C_{L,E}, \quad C_{D,P} = 4 C_{D0}, \quad E_P = 0,866 E_{\max}, \quad V_P = \frac{V_E}{\sqrt[4]{3}} = \frac{V_E}{1,32}$$

### Osservazione

Al punto P si vola più *lentamente* che al punto E (fattore 0,76) e a un  $C_L$  più alto: assetto più “cabrato”.

# Il punto P sulla polare e sulla curva di potenza



Sulla polare:  $C_{D,P} = 4C_{D0}$ ,  $C_{L,P} = \sqrt{3} C_{L,E}$ .

Sulla curva di potenza: P è il *minimo*, E la *tangente* dall'origine.

## Formula chiave

$\Pi_n = W/(E/V)$ : minima potenza = *massimo* di  $E/V$ , ossia di  $C_L^{3/2}/C_D$  (autonomia di durata a elica).

# La potenza è più “sensibile” della resistenza

Esprimendo la potenza in funzione dell'assetto:

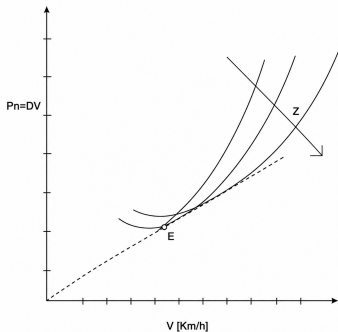
$$\Pi_n = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 \sigma}} \left( \frac{W}{S} \right)^{1/2} \frac{W}{C_L^{3/2}/C_D}$$

- dipende dal peso con esponente 3/2 (la resistenza: esponente 1);
- dipende dalla superficie alare  $S$  (la spinta necessaria non vi dipendeva);
- dipende dalla quota come  $1/\sqrt{\sigma}$  (la resistenza minima non dipendeva dalla quota).

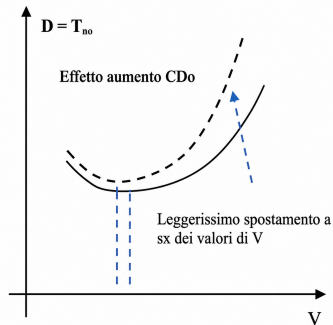
## Osservazione

Per un velivolo a elica, un aumento di peso pesa più sulla salita che sulla velocità massima; un aumento di  $C_{D0}$ , invece, taglia *drasticamente* la velocità massima ottenibile.

# Quota e $C_{D0}$ sulla curva di potenza



Quota: la curva va a destra e in alto (entrambe come  $1/\sqrt{\sigma}$ ).



$C_{D0}$ : colpisce le alte velocità; le velocità caratteristiche si spostano appena.

Parte 8

# Il punto A: minimo del rapporto $D/V$

---

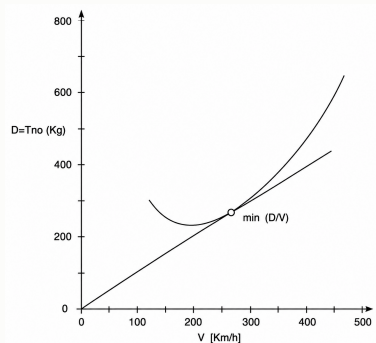
8

## Il terzo punto: dove $D/V$ è minimo

Dopo il massimo di  $E/V$  (punto P) è naturale chiedersi dove sia massimo  $E \cdot V$ , ossia *minimo*  $D/V$ .

Sulla curva di spinta necessaria la pendenza della retta dall'origine vale proprio  $D/V$ : la *tangenza* individua la pendenza minima.

È il **punto A**: prenderà pieno significato con l'*autonomia chilometrica dei velivoli a getto* — di qui il nome.



Il punto A: tangenza della retta dall'origine alla curva  $T_n(V)$ .

## Il punto A: determinazione analitica

$$\frac{D}{V} = aV + \frac{b}{V^3}, \quad \frac{d}{dV} \left( \frac{D}{V} \right) = a - \frac{3b}{V^4} = 0 \implies aV^2 = 3 \frac{b}{V^2} \implies \boxed{D_0 = 3 D_i}$$

La *parassita* è tripla dell'indotta ( $C_{D0} = 3KC_L^2$ ); ne discendono:

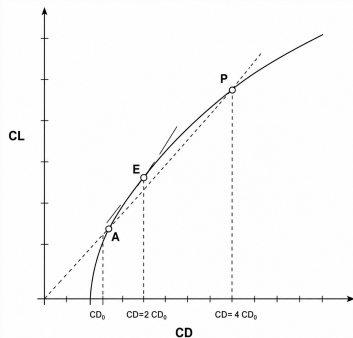
### Formula chiave

$$C_{L,A} = C_{L,E}/\sqrt{3}, \quad C_{D,A} = \frac{4}{3} C_{D0}, \quad E_A = \frac{\sqrt{3}}{2} E_{\max} = E_P, \quad V_A = \sqrt[4]{3} V_E = 1,32 V_E$$

### Osservazione

Da E a P si *divide*  $V$  per  $\sqrt[4]{3}$ , da E ad A la si *moltiplica*; ed essendo  $E_A = E_P$ , A e P stanno sulla stessa retta dall'origine.

# I tre punti sulla polare



A, E, P sulla polare: E è la tangenza (efficienza massima); A e P condividono la retta dall'origine.

Parte 9

# Relazioni analitiche generali

---

9

## Un solo metodo per tre punti: massimizzare $C_L^n/C_D$

Finora i punti sono nati da considerazioni *fisiche* sul volo livellato; ma le loro caratteristiche aerodinamiche si ottengono in modo del tutto *generale* derivando sulla polare. Per il punto E:  $\frac{d}{dC_L} \left( \frac{C_L}{C_{D0} + KC_L^2} \right) = 0 \Rightarrow C_{D0} = KC_L^2 \Rightarrow E_{\max} = \sqrt{1/(4KC_{D0})}$ . Con lo stesso procedimento:

| Punto | massimo di      | condizione         | governa                        |
|-------|-----------------|--------------------|--------------------------------|
| E     | $C_L/C_D$       | $KC_L^2 = C_{D0}$  | minima resistenza              |
| P     | $C_L^{3/2}/C_D$ | $KC_L^2 = 3C_{D0}$ | autonomia di durata (elica)    |
| A     | $C_L^{1/2}/C_D$ | $C_{D0} = 3KC_L^2$ | autonomia chilometrica (getto) |

### Nota

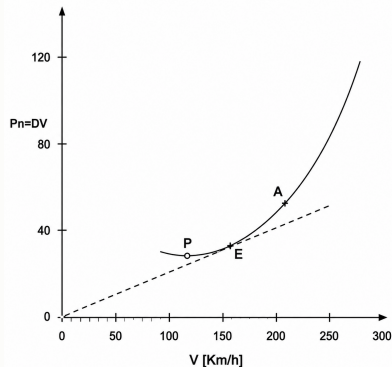
Validi anche in salita e virata: solo le *velocità* dipendono dalla condizione di volo.

# L'ordinamento delle velocità

## Formula chiave

$$V_P < V_E < V_A$$
$$V_P = \frac{V_E}{\sqrt[4]{3}}, \quad V_A = \sqrt[4]{3} V_E$$

In parole: più *piano* alla minima potenza (P),  
velocità *intermedia* alla minima resistenza (E),  
più *veloci* nell'assetto di massima autonomia a  
getto (A).



P, E, A sulla curva di potenza necessaria.

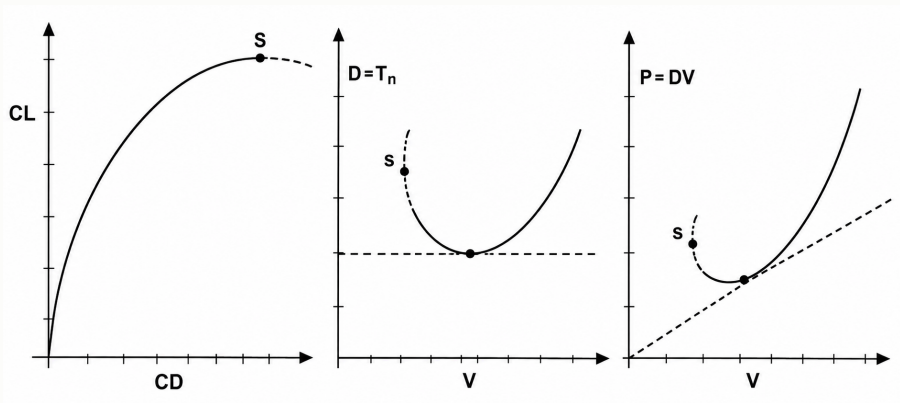
Parte 10

# Riepilogo dei punti caratteristici

---

10

# I tre diagrammi, un solo velivolo



A, E, P (e lo stallo S, ossia  $C_{L,max}$  e  $V_S = V_{min}$ ) letti simultaneamente su polare, spinta necessaria e potenza necessaria.

# La tabella di lavoro

Rapporti notevoli rispetto al punto E: note  $C_{D0}$ ,  $AR$ ,  $e$ , da qui si ricava *tutto*.

| Punto | $C_D/C_{D0}$ | $C_L/C_{L,E}$        | $E/E_{\max}$ | $V/V_E$ | $T/T_E$ | $\Pi/\Pi_P$ |
|-------|--------------|----------------------|--------------|---------|---------|-------------|
| P     | 4            | $\sqrt{3} = 1,732$   | 0,866        | 0,76    | 1,155   | 1           |
| E     | 2            | 1                    | 1            | 1       | 1       | 1,14        |
| A     | 4/3          | $1/\sqrt{3} = 0,577$ | 0,866        | 1,32    | 1,155   | 1,73        |

## Nota

Ordini di grandezza tipici:  $C_{L,E} \approx 0,60\text{--}0,85$ ;  $C_{L,P}$  usualmente  $> 1$  (circa 1,15–1,30);  $C_{L,A} \approx 0,25\text{--}0,45$ .

# Le relazioni fondamentali da ricordare

$$V_P = \frac{V_E}{\sqrt[4]{3}} = \frac{V_E}{1,32},$$

$$V_A = \sqrt[4]{3} V_E = 1,32 V_E,$$

$$D_{\min} = D_E = \frac{W}{E_{\max}},$$

$$D_A = D_P = \frac{2}{\sqrt{3}} D_E = 1,155 D_E,$$

$$\Pi_P = \Pi_{\min} = \frac{W}{E_P} V_P,$$

$$\Pi_E = 1,14 \Pi_P, \quad \Pi_A = \sqrt{3} \Pi_P = 1,73 \Pi_P$$

## Da ricordare

**Punto E:** minima resistenza, massima efficienza ( $C_L/C_D$  massimo). **Punto P:** minima potenza ( $E/V$ , ossia  $C_L^{3/2}/C_D$ , massimo). **Punto A:** minimo  $D/V$  ( $E \cdot V$ , ossia  $C_L^{1/2}/C_D$ , massimo). Tre condizioni fisiche di ottimo, legate dalla sola radice quarta di tre.

Parte 11

# Esercizio svolto: velivolo bimotore a elica

---

11

# I dati e le richieste

## Esercizio svolto

**Velivolo bimotore a elica.**  $W_{TO} = 4000 \text{ kgf}$ ,  $S = 25 \text{ m}^2$ ,  $b = 15 \text{ m}$ ,  $C_{D0} = 0,025$ ,  $e = 0,80$ ,  $C_{L,\max} = 1,5$ .

Calcolare i coefficienti aerodinamici dei punti caratteristici e le velocità, resistenze e potenze a quota zero e alla quota di crociera di 12 000 ft ( $\approx 3660 \text{ m}$ ).

Seguiamo il metodo dei cinque passi: **1)** dati, **2)** modello (polare parabolica + volo livellato), **3)** equazioni dei punti caratteristici, **4)** incognite, **5)** verifica degli ordini di grandezza.

## Passo 1-2: geometria, $E_{\max}$ e coefficienti

### 1) Grandezze di progetto:

$$AR = \frac{b^2}{S} = \frac{15^2}{25} = 9, \quad AR e = 7,2, \quad E_{\max} = \sqrt{\frac{\pi \cdot 7,2}{4 \cdot 0,025}} \approx 15,04$$

### 2) Coefficienti dei punti caratteristici:

$$C_{L,E} = \sqrt{\pi AR e C_{D0}} \approx 0,75, \quad C_{L,P} = \sqrt{3} C_{L,E} \approx 1,30, \quad C_{L,A} = \frac{C_{L,E}}{\sqrt{3}} \approx 0,43,$$
$$C_{D,E} = 2C_{D0} = 0,050, \quad C_{D,P} = 4C_{D0} = 0,100, \quad C_{D,A} = \frac{4}{3}C_{D0} \approx 0,033$$

e l'efficienza nei punti A e P:  $E_A = E_P = 0,866 E_{\max} \approx 13,0$ .

#### Osservazione

Plausibilità:  $C_{L,E} = 0,75$  e  $C_{L,P} = 1,30$  cadono negli intervalli tipici del riepilogo. Buon segno.

## Passo 3: le velocità a quota zero

Con  $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$ :

$$V_E = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{Wg}{S} \frac{1}{C_{L,E}}} = \sqrt{\frac{2}{1,225} \cdot \frac{4000 \cdot 9,81}{25} \cdot \frac{1}{0,75}} \approx 58,4 \text{ m/s} \approx 210 \text{ km/h}$$

$$V_P = \frac{V_E}{1,32} \approx 160 \text{ km/h}, \quad V_A = 1,32 V_E \approx 277 \text{ km/h}$$

$$V_S = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{Wg}{S} \frac{1}{C_{L,\max}}} \approx 41,4 \text{ m/s} \approx 149 \text{ km/h}$$

### Nota

Controllo d'ordine:  $V_S < V_P < V_E < V_A$ , come dev'essere. Lo stallo è la frontiera sinistra di tutte le curve.

## Passo 4: resistenze e potenze a quota zero

**Resistenze** (dipendono solo dall'efficienza):

$$D_E = D_{\min} = \frac{W}{E_{\max}} = \frac{4000}{15,04} \approx 266 \text{ kgf}, \quad D_A = D_P = 1,155 D_E \approx 307 \text{ kgf}$$

**Potenze** (forza in newton, velocità in m/s):

$$\Pi_P = D_P g V_P = 307 \cdot 9,81 \cdot 44,4 \approx 133,6 \text{ kW} \approx 179 \text{ hp}$$

$$\Pi_E = 1,14 \Pi_P \approx 204 \text{ hp}, \quad \Pi_A = \sqrt{3} \Pi_P \approx 310 \text{ hp}$$

### Osservazione

Al livello del mare il velivolo ha bisogno di *almeno*  $\approx 180$  hp (punto P); per volare al punto A ( $\approx 277$  km/h) ne servono  $\approx 310$  hp.

## Passo 5: alla quota di crociera (12000 ft)

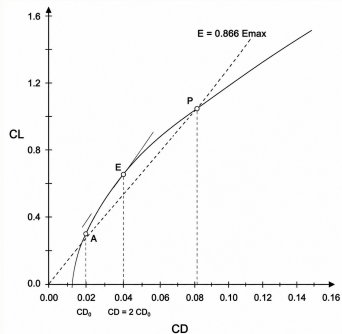
A 3660 m:  $\rho \approx 0,85 \text{ kg/m}^3$ ,  $\sigma \approx 0,69$ ,  $1/\sqrt{\sigma} \approx 1,20$ .

- **Le resistenze non cambiano** ( $D = W/E$  dipende solo dall'efficienza):  $D_E \approx 266 \text{ kgf}$ ,  $D_A = D_P \approx 307 \text{ kgf}$ ;
- **le velocità vere (TAS) si scalano** come  $1/\sqrt{\sigma}$ :  $V_E \approx 253 \text{ km/h}$ ,  $V_P \approx 192 \text{ km/h}$ ,  $V_A \approx 332 \text{ km/h}$ ,  $V_S \approx 179 \text{ km/h}$ ;
- **le potenze si ricalcolano** con le nuove velocità, per esempio  $\Pi_E = D_E g V_E \approx 183 \text{ kW} \approx 246 \text{ hp}$ .

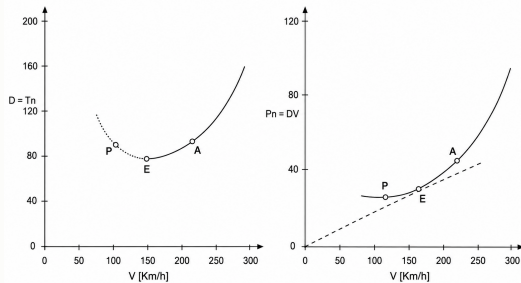
### Attenzione

Nei calcoli di potenza usare *sempre* unità SI coerenti prima di convertire:  $\text{kgf} \times 9,81 \rightarrow \text{N}$ ;  $\text{km/h} / 3,6 \rightarrow \text{m/s}$ . La potenza esce in watt; poi  $1 \text{ hp} = 0,746 \text{ kW}$ .

# L'esercizio in figura



La polare del bimotore ( $C_{D0} = 0,025$ ,  $AR = 9$ ,  
 $e = 0,80$ ) con A, E, P.



Spinta e potenza necessarie a quota zero e a 12 000 ft.

Parte 12

# Conclusioni

---

12

# Il senso di tutto questo

## Il senso di tutto questo

Dalla sola polare  $C_D = C_{D0} + KC_L^2$  e dall'equilibrio  $T = D$ ,  $L = W$  abbiamo dedotto l'intera geografia delle prestazioni. I punti A, E, P non sono formule da memorizzare, ma *condizioni fisiche di ottimo*: minima resistenza, minima potenza, minimo  $D/V$ . Ognuno corrisponde a un preciso rapporto tra parassita e indotta ( $C_{D0} = KC_L^2$  per E,  $KC_L^2 = 3C_{D0}$  per P,  $C_{D0} = 3KC_L^2$  per A) e le velocità sono legate dalla semplice radice quarta di tre.

## Da ricordare

La lezione di metodo vale quanto il risultato: lo stesso ottimo si raggiunge per via *fisica* (minimizzando resistenza o potenza) o per via *aerodinamica* (massimizzando  $C_L/C_D$ ,  $C_L^{3/2}/C_D$ ,  $C_L^{1/2}/C_D$ ). La coincidenza dei due percorsi conferma la coerenza della teoria — e prepara autonomia, salita e virata.

# Riferimenti e materiale di studio

---

- **Monografia di riferimento:** B. Raucci, *Punti caratteristici e Polari tecniche*, Serie Raucci — Costruzioni Aeronautiche (con tutti i passaggi analitici, gli esempi numerici e le figure di queste slide).
- V. Losito, *Fondamenti di Aeronautica Generale*, Accademia Aeronautica, Napoli, 1994.
- J. D. Anderson, *Introduction to Flight e Aircraft Performance & Design*, McGraw-Hill.

## Nota

Prossime tappe del corso: spinta e potenza *disponibili*, prestazioni di salita, autonomie — dove i punti P, E, A smetteranno di essere geometria e diventeranno scelte operative del pilota.