

Le equazioni dell'aria in movimento

*Aerodinamica di base: continuità, Bernoulli, flusso isentropico,
energia,
velocità del suono, gallerie del vento, tubo di Pitot, ugelli e strato
limite*



Il percorso di oggi

Flusso senza attrito

1. Tre principi, una mappa
2. La massa si conserva
3. $F = ma$: Eulero e Bernoulli
4. Energia e termodinamica
5. Il suono e il numero di Mach

Da ricordare

Tre leggi di conservazione: bastano per stimare gallerie, anemometri, razzi e resistenze.

Applicazioni e attrito

6. Gallerie del vento e tubo di Pitot
7. Ugelli supersonici e razzi
8. Lo strato limite
9. Il senso di tutto questo

Parte 1

Tre principi, una mappa

1

La domanda di partenza

Che cosa vogliamo saper fare

Un aeroplano vola a 3 km di quota a 112 m/s. In ogni punto dell'ala, pressione e velocità assumono valori ben precisi, dettati dalle leggi della natura.

Il compito dell'aerodinamica

Decifrare queste leggi e trasformarle in metodi di calcolo: dalle proprietà locali del flusso (p , ρ , T , V) si risale a grandezze praticissime come portanza e resistenza.

Lo stesso vale per un razzo sulla rampa: fissati l'ugello e le condizioni in camera di combustione, velocità e pressione allo scarico sono determinate — e da esse la spinta.

Tre principi fisici, tre equazioni

Un vecchio professore diceva: *«l'aerodinamica è facile, perché usa solo tre equazioni»*.
È una battuta con un fondo profondo di verità.

I tre pilastri

1. la massa si conserva → **continuità**
2. vale $F = ma$ → **quantità di moto** (Eulero, Bernoulli)
3. l'energia si conserva → **equazione dell'energia**

Due famiglie di flussi

Ogni flusso reale ha attrito interno (**viscosità**): i filetti fluidi strisciano gli uni sugli altri e sulle pareti.

Flusso inviscido

Attrito trascurabile: idealizzazione che semplifica enormemente i conti. Copre suono, gallerie, Pitot, ugelli.

Flusso viscoso

L'attrito è protagonista: strato limite, transizione, separazione, stallo, resistenza.

Osservazione

La massa si conserva in entrambi i casi: prima il ramo inviscido, poi l'attrito.

Parte 2

La massa si conserva

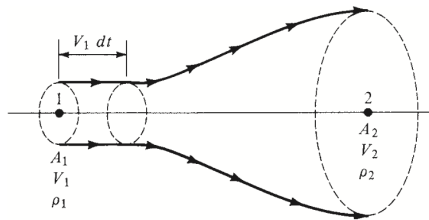
2

Il tubo di flusso

Le linee di corrente che passano per una circonferenza immaginaria formano un **tubo di flusso**: nessuna particella può attraversarne la parete laterale.

Nota

Il tubo non richiede pareti solide: anche lo spazio fra due linee di corrente sopra un'ala è un tubo di flusso.



Le linee di corrente fanno da parete impermeabile.

Portata massica ed equazione di continuità

In un tempo dt le particelle spazzano il volume $A V dt$: la massa per unità di tempo è la **portata massica**

$$\dot{m} = \rho A V \quad [\text{kg/s}]$$

Equazione di continuità (flusso stazionario)

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$

Il «cavallo da tiro» dei condotti: gallerie, prese d'aria, ugelli.

Ipotesi e limiti di validità

V e ρ sono valori medi sulla sezione; la stazionarietà è essenziale.

Incomprimibile o comprimibile?

Incomprimibile

$\rho = \text{cost}$: ottima approssimazione per i liquidi e per l'aria *lenta* ($V < 100 \text{ m/s}$).
La continuità si semplifica:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

Un oggetto quotidiano

La lancia dell'idrante è convergente: riducendo l'area cresce la velocità del getto — è $A_1 V_1 = A_2 V_2$ in azione.

Comprimibile

ρ varia da punto a punto: subsonici veloci, supersonici, razzi. Serve la forma generale

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$

Esercizio — Condotto convergente

Esercizio 1 — Area di uscita

Aria in un condotto convergente: $A_1 = 5 \text{ m}^2$, $V_1 = 10 \text{ m/s}$, $V_2 = 30 \text{ m/s}$. Quanto vale A_2 ?

A) Modello. Velocità ben sotto i 100 m/s: incompressibile, $A_1 V_1 = A_2 V_2$.

B) Calcolo.

$$A_2 = A_1 \frac{V_1}{V_2} = 5 \times \frac{10}{30} = 1,67 \text{ m}^2$$

Osservazione

In regime incompressibile area e velocità sono inversamente proporzionali.

Esercizio — E ad alta velocità?

Esercizio 2 — Densità in uscita

$A_1 = 0,30 \text{ m}^2$, $V_1 = 215 \text{ m/s}$, $\rho_1 = 1,00 \text{ kg/m}^3$; $A_2 = 0,26 \text{ m}^2$, $V_2 = 325 \text{ m/s}$. Calcolare ρ_2 .

A) Modello. Ben oltre la soglia: flusso *comprimibile*, continuità in forma generale.

B) Calcolo.

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{A_1 V_1}{A_2 V_2} = 1,00 \times \frac{0,30 \times 215}{0,26 \times 325} = 0,763 \text{ kg/m}^3$$

La densità è scesa del 24 %: qui l'ipotesi incomprimibile sarebbe stata un errore grossolano.

Parte 3

$F = ma$: Eulero e Bernoulli

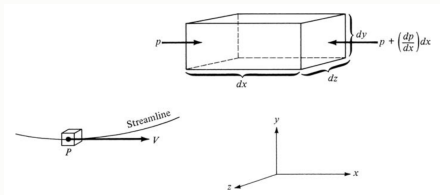
3

Il bilancio delle forze sull'elemento fluido

$F = ma$ su un elemento infinitesimo lungo una linea di corrente; trascurati attrito e gravità resta la pressione:

$$F = -\frac{dp}{dx} (dx dy dz)$$

con massa $\rho (dx dy dz)$ e accelerazione $a = V dV/dx$ (regola della catena).



Le forze di pressione sulle facce dell'elemento.

L'equazione di Eulero

Sostituendo F , m e a in $F = ma$:

Equazione di Eulero (quantità di moto)

$$dp = -\rho V dV$$

Flusso *stazionario* e *inviscido*, comprimibile o no.

Da ricordare

Pressione e velocità si muovono sempre in direzioni opposte lungo una linea di corrente.

Da Eulero a Bernoulli

Eulero è differenziale: per collegare due punti *lontani* bisogna integrare. Se il flusso è incomprimibile, ρ esce dall'integrale e il risultato è immediato:

Equazione di Bernoulli

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 \quad \text{ossia} \quad p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{cost}$$

Flusso *inviscido, incomprimibile, stazionario*. Se la corrente a monte è uniforme, vale fra due punti qualsiasi del campo.

Lettura energetica

È il teorema dell'energia cinetica per un fluido senza attrito.

L'errore più classico dell'aerodinamica

Bernoulli ha un cartello di divieto

Bernoulli vale **solo per flusso incomprimibile**: in pratica aria a $M < 0,3$, cioè $V \lesssim 100$ m/s in condizioni standard. Applicarla a un flusso veloce dà errori anche del 10 % e oltre.

Per il flusso comprimibile la sostituiamo con la coppia *relazioni isentropiche + equazione dell'energia*.

Il metodo della collana

Ogni formula ha un campo di validità, e va dichiarato *sempre*: usare una formula fuori dal suo campo è l'errore più pericoloso dell'aerodinamica.

Esercizio — Velocità su un profilo alare

Esercizio 3 — Il dorso che «succhia»

Corrente: $p_\infty = 101\,325\text{ Pa}$, $V_\infty = 45\text{ m/s}$, $\rho = 1,225\text{ kg/m}^3$; sul dorso $p_A = 100\,200\text{ Pa}$.
Trovare V_A .

A) Modello. $V_\infty \ll 100\text{ m/s}$: incomprimibile, Bernoulli fra ∞ e A .

B) Calcolo.

$$V_A = \sqrt{\frac{2(p_\infty - p_A)}{\rho} + V_\infty^2} = \sqrt{\frac{2 \times 1125}{1,225} + 45^2} = 62,1\text{ m/s}$$

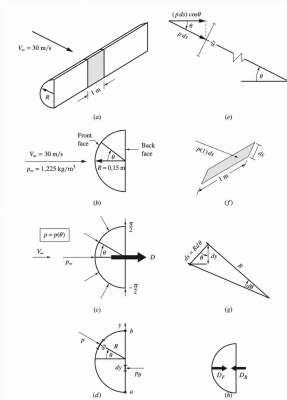
Pressione più bassa di appena l'1 %, velocità più alta: è il meccanismo con cui il dorso dell'ala «succhia» verso l'alto.

Caso di studio: costruire una forza da zero

Barra semicircolare, $R = 0,15$ m, faccia curva contro $V_\infty = 30$ m/s; sulla curva $V = 2V_\infty \sin \theta$, sulla piana $p_B = p_\infty - 0,7\rho V_\infty^2$ (base pressure).

Nota

Bernoulli dà $p(\theta)$; l'integrale delle pressioni proiettate dà $D = 1,067 \rho V_\infty^2 R \approx 176$ N/m.



Geometria del caso di studio.

Tre lezioni progettuali dal caso di studio

1. La forza nasce *solo* dall'integrale di pressione (e taglio): dare forma a un velivolo significa dare forma alla sua distribuzione di pressione.
2. La forza è proporzionale a ρ , a V_∞^2 e alla dimensione del corpo: è la struttura $\frac{1}{2}\rho V^2 S$ dei coefficienti C_L e C_D .
3. p_∞ *scompare* dal risultato: nelle forze aerodinamiche compare sempre ρ_∞ , mai p_∞ .

Da ricordare

Dalla barretta al Boeing 747 il principio non cambia: la forza è l'integrale della pressione.

Parte 4

Energia e termodinamica

4

Perché serve la termodinamica

Alta velocità = alta energia: quando il flusso rallenta, l'energia cinetica ricompare come temperatura.

Primo principio della termodinamica

$$\delta q + \delta w = de \quad \implies \quad \delta q = de + p dv$$

con $\delta w = -p dv$ lavoro di compressione; con l'**entalpia** $h \equiv e + pv$ diventa $\delta q = dh - v dp$.

Nota

d : differenziale esatto; δ : dipende dal percorso.

Calori specifici: la carta d'identità del gas

Quanto calore serve per alzare T di un grado? Dipende dal processo:

$$c_v \equiv \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_{v=\text{cost}} \qquad c_p \equiv \left(\frac{\delta q}{dT} \right)_{p=\text{cost}}$$

Relazioni valide per qualunque processo

$$e = c_v T \qquad h = c_p T \qquad c_p - c_v = R \qquad \gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}$$

Aria: $c_v = 720 \text{ J}/(\text{kg K})$, $c_p = 1008 \text{ J}/(\text{kg K})$, $\gamma = 1,4$.

e e h dipendono solo dalla temperatura locale: non serve conoscere la storia del gas.

Il flusso isentropico

Tre definizioni in scala:

- **adiabatico**: senza scambio di calore ($\delta q = 0$);
- **reversibile**: senza attriti né dissipazioni;
- **isentropico**: adiabatico e reversibile.

Perché ci interessa tanto

Sopra un'ala nessuno scalda o raffredda il fluido, e l'attrito è confinato in un sottile strato a parete: *fuori dallo strato limite il flusso è isentropico*. Idem negli ugelli.

Adiabatico non significa isoterma

In comprimibile adiabatico T cambia: il lavoro $-p dv$ modifica l'energia interna.

Le relazioni isentropiche

Con $\delta q = 0$ nelle due forme del primo principio: $dp/p = -\gamma dv/v$; integrando:

Relazioni del flusso isentropico

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Aria: esponenti 1,4 e 3,5; sostituiscono di fatto Eulero.

Ugello di un razzo

Camera 20 atm, 3500 K; uscita 0,5 atm ($\gamma = 1,15$): $T_2 = 3500 (0,025)^{0,1304} \approx 2160$ K.
Energia termica $\rightarrow$ cinetica del getto.

L'equazione dell'energia

Flusso adiabatico: $dh = v dp$; con Eulero si ottiene $dh + V dV = 0$, e integrando:

Equazione dell'energia (flusso adiabatico)

$$c_p T_1 + \frac{V_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

Dove il gas accelera si raffredda; dove rallenta si scalda.

Temperatura di ristagno

Dove $V = 0$ il gas raggiunge la **temperatura totale** $T_0 = T_1 + V_1^2 / (2 c_p)$: il «parcheggio» di tutta l'energia del flusso.

Esercizio — Il riscaldamento cinetico

Esercizio 4 — Supersonico in crociera

Un trasporto supersonico vola a $V_1 = 590 \text{ m/s}$ alla tropopausa ($T_1 = 216,65 \text{ K}$). Temperatura di ristagno sul bordo d'attacco?

A) Applicazione diretta.

$$T_0 = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 216,65 + \frac{590^2}{2 \times 1008} = 389 \text{ K} = 116^\circ\text{C}$$

L'aria a -56°C , fermandosi sul muso, supera il punto di ebollizione dell'acqua: sul Concorde imponeva di attendere il raffreddamento della pelle dopo l'atterraggio — e allo strutturista impone di progettare con le caratteristiche dei materiali *a caldo*.

Quando il modello si rompe: lo Shuttle

Rientro a 60 km di quota, $V_1 = 6,4 \text{ km/s}$, $T_1 = 253,7 \text{ K}$. Con c_p costante:

$$T_0 = 253,7 + \frac{(6,4 \times 10^3)^2}{2 \times 1008} = 20\,571 \text{ K}.$$

Ventimila kelvin?

Numero formalmente corretto, fisicamente insensato: sopra $\sim 2000 \text{ K}$ l'aria vibra, dissocia e ionizza, c_p non è più costante. Il calcolo chimicamente reagente dà $\sim 6000 \text{ K}$.

Da ricordare

Ogni formula ha un campo di validità, e va dichiarato: per gli aeroplani c_p costante va benissimo, per il rientro no.

Il quadro delle equazioni: due cassette degli attrezzi

N. 1 — incompressibile ($M < 0,3$)

ρ , T costanti; incognite p e V :

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

Non formule da memorizzare ma *frasi fisiche*: la massa si conserva, $F = ma$, l'energia si conserva.

N. 2 — isentropico comprimibile

p , ρ , T , V variano tutte:

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$c_p T_1 + \frac{1}{2}V_1^2 = c_p T_2 + \frac{1}{2}V_2^2$$

$$p = \rho R T \quad (\text{in ogni punto})$$

Parte 5

Il suono e il numero di Mach

5

Che cos'è un'onda sonora

Battere le mani comprime localmente l'aria: la sovrappressione si propaga di collisione in collisione fra le molecole.

- variazioni di p , ρ , T *infinitesime* $\Rightarrow$ processo reversibile;
- propagazione rapidissima $\Rightarrow$ processo adiabatico.

Osservazione

La propagazione del suono è *isentropica*. Continuità ed Eulero su un volume solidale con il fronte d'onda danno $a^2 = dp/d\rho$ (derivata lungo l'isentropica).

La velocità del suono

Lungo l'isentropica $p/\rho^\gamma = \text{cost}$ si ha $dp/d\rho = \gamma p/\rho = \gamma RT$:

Velocità del suono in un gas perfetto

$$a = \sqrt{\gamma RT} \qquad a \simeq 20,05 \sqrt{T} \quad [\text{m/s}, T \text{ in K}]$$

A livello del mare ($T = 288,15 \text{ K}$): $a = 340,3 \text{ m/s}$.

Attenzione

a dipende *solo dalla temperatura*: p e ρ compaiono solo nel rapporto $p/\rho = RT$.

Il suono viaggia *attraverso* le collisioni molecolari: non può superare la velocità di agitazione delle molecole ($\approx 459 \text{ m/s}$ al suolo).

L'errore di Newton e la correzione di Laplace

Newton (isotermo)

Nei *Principia* assume compressione a T costante: $a = \sqrt{RT} = 288 \text{ m/s}$ contro i 340 m/s misurati — errore del 15,5 %.

Laplace (isentropico)

La compressione sonora è così rapida che il calore non fluisce: derivata lungo l'isentropica, fattore γ sotto radice.

Da ricordare

Prima di applicare una formula, chiedersi sempre *quale processo termodinamico* sta descrivendo.

Il numero di Mach e i regimi di volo

Numero di Mach

$$M = \frac{V}{a}$$

rapporto fra la velocità del flusso e la velocità del suono *locale*.

$M < 1$ ovunque	subsonico
zone miste sub/super	transonico ($0,8 \lesssim M_\infty \lesssim 1,2$)
$M > 1$ ovunque	supersonico
$M \gtrsim 5$	ipersonico

Non un vizzo da piloti: il Mach decide *quali equazioni valgono*.

Esercizio — Mach di un jet in crociera

Esercizio 5 — Stessa velocità, Mach diverso

Bireattore a $V = 250 \text{ m/s}$ e $10\,000 \text{ m}$ ($T = 223,15 \text{ K}$ da tabella ISA). Calcolare M .

A) Suono in quota. $a = \sqrt{1,4 \times 287 \times 223,15} = 299,4 \text{ m/s}$: in quota il suono è più «lento» perché fa più freddo.

B) Mach. $M = 250/299,4 = 0,835$.

Osservazione

La stessa $V = 250 \text{ m/s}$ al livello del mare darebbe $M = 0,73$: *il Mach dipende dalla quota anche a velocità costante.*

Quando serve davvero la comprimibilità?

Escursione massima di densità: fra corrente e ristagno, $\rho_0/\rho = (1 + 0,2M^2)^{2,5}$.

M	ρ_0/ρ	variazione massima di densità
0,1	1,005	0,5 %
0,2	1,020	2,0 %
0,3	1,046	4,4 %
0,5	1,130	11,5 %

La soglia $M = 0,3$

Fino a $M = 0,3$ la densità varia al più del 4–5 %: $\rho = \text{cost}$ è legittimo. Al livello del mare $M = 0,3 \Leftrightarrow V \approx 102 \text{ m/s}$: la regola dei «cento metri al secondo».

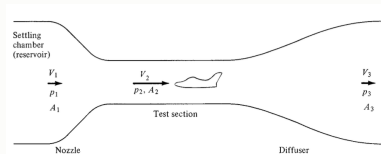
Parte 6

Gallerie del vento e tubo di Pitot

6

La galleria subsonica: un Venturi con il modello dentro

L'aria accelera nel convergente fino alla camera di prova ($A_2 < A_1$), dove sta il modello; il **diffusore** a valle riduce la potenza richiesta.



Galleria subsonica a circuito aperto.

Formula di taratura ($M \lesssim 0,3$); il salto si legge con un manometro a U

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left[1 - (A_2/A_1)^2\right]}}$$

$$p_1 - p_2 = \rho_l g \Delta h$$

Esercizio — Galleria con manometro a mercurio

Esercizio 6 — Dal dislivello alla velocità

$A_1/A_2 = 15$; serbatoio a $p_1 = 1,1 \text{ atm}$, $T_1 = 300 \text{ K}$; mercurio ($\rho_l = 1,36 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$), $\Delta h = 10 \text{ cm}$. Trovare V_2 .

A) $p_1 - p_2 = \rho_l g \Delta h = 1,36 \times 10^4 \times 9,81 \times 0,10 = 13\,337 \text{ Pa}$.

B) $\rho = p_1/(RT_1) = 111458/(287 \times 300) = 1,294 \text{ kg/m}^3$.

C) $V_2 = \sqrt{\frac{2 \times 13337}{1,294 [1 - (1/15)^2]}} = 143,9 \text{ m/s}$.

Attenzione

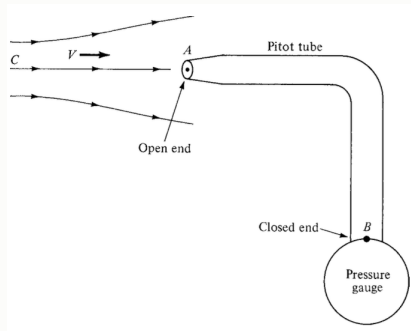
$M_2 \approx 0,41$, oltre la soglia: è solo una prima stima.

Pressione statica e pressione totale

- **Statica** p : misurata viaggiando con il flusso (sola agitazione molecolare).
- **Totale** p_0 : flusso rallentato a $V = 0$ *isentropicamente*.

Fuori dal finestrino

Il palmo contro vento sente il ristagno; il vetro, lambito dal flusso parallelo, la sola statica.



Coppia Pitot-statica: il manometro legge $p_0 - p$.

Il Pitot in regime incompressibile

Bernoulli fra corrente e punto di ristagno:

Pressione dinamica e formula del Pitot ($M < 0,3$)

$$q \equiv \frac{1}{2} \rho V^2 \quad p_0 = p + q \quad V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}$$

Vera o equivalente?

Lo strumento di bordo è tarato con $\rho_s = 1,225 \text{ kg/m}^3$: $V_{\text{true}} = \sqrt{2(p_0 - p)/\rho}$, $V_e = \sqrt{2(p_0 - p)/\rho_s}$. In quota $\rho < \rho_s$, quindi $V_e < V_{\text{true}}$. Catena pratica: IAS $\rightarrow$ CAS $\rightarrow$ EAS $\rightarrow$ TAS.

Esercizio — Aliante veloce a 1500 m

Esercizio 7 — Vera ed equivalente

$h = 1500 \text{ m}$ ($p = 84\,553 \text{ Pa}$ ISA); $T = 278 \text{ K}$; il Pitot legge $p_0 = 86\,100 \text{ Pa}$.

A) $\rho = p/(RT) = 1,060 \text{ kg/m}^3$.

B) $V_{\text{true}} = \sqrt{2 \times 1547/1,060} = 54,0 \text{ m/s}$ ($M \approx 0,16$: modello legittimo).

C) $V_e = \sqrt{2 \times 1547/1,225} = 50,3 \text{ m/s}$.

Lo strumento «legge» 50 mentre l'aereo ne fa 54. Ma al pilota V_e non dispiace: è V_e — non V_{true} — a misurare la pressione dinamica, cioè ciò che l'ala *sente*.

Regime comprimibile: i rapporti di ristagno

Oltre $M = 0,3$ Bernoulli perde colpi; il ristagno resta isentropico, quindi energia + isentropica:

Rapporti di ristagno in funzione del Mach

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad \frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)}$$

Aria: $1 + 0,2M^2$ con esponenti 1, 3,5, 2,5; ristagno isentropico, qualunque M .

Invertendo la seconda nasce il **machmetro**: $M^2 = \frac{2}{\gamma-1} [(p_0/p)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1]$, poi $V = M\sqrt{\gamma RT}$: per la velocità vera servono *due* misure, p_0/p e T .

Esercizio — Liner in crociera a 10 000 m

Esercizio 8 — Mach, vera, e l'errore di Bernoulli

$p = 26\,430\text{ Pa}$; $p_0 = 42\,400\text{ Pa}$; $T = 230\text{ K}$.

- A)** $p_0/p = 1,604 \Rightarrow M = \sqrt{5(1,604^{0,2857} - 1)} = 0,850$.
- B)** $a = \sqrt{1,4 \times 287 \times 230} = 304,0\text{ m/s} \Rightarrow V = 258,5\text{ m/s}$.
- C)** Bernoulli (a torto), con $\rho = 0,4004\text{ kg/m}^3$: $V^{(\text{err})} = 282\text{ m/s}$, il 9,3 % in eccesso.

Da ricordare

A $M = 0,85$ Bernoulli non è un'approssimazione: è un errore. In regime comprimibile il Pitot, da solo, misura il *Mach*; per la velocità serve anche la temperatura.

La pressione dinamica ad alto Mach

q in funzione di p e M

$$q = \frac{\gamma}{2} p M^2 = 0,7 p M^2 \quad (\text{aria})$$

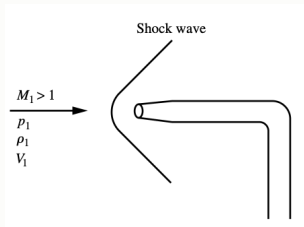
Pura algebra sulla definizione: vale a *qualunque* Mach. È la via più rapida per q in regime supersonico e ipersonico.

In comprimibile $q \neq p_0 - p$

A $M = 0,9$: $q = 5,40 \times 10^4$ Pa ma $p_0 - p = 6,58 \times 10^4$ Pa, il 22 % in più. L'uguaglianza $p_0 = p + q$ era una proprietà del *solo* regime incompressibile, non una legge generale.

Supersonico: l'urto davanti al Pitot

Con $M_1 > 1$ davanti al tubo si forma un'**onda d'urto**. Attraverso l'urto normale: M crolla sotto 1; p , T , ρ statiche *aumentano*; p_0 *diminuisce* (il prezzo entropico); T_0 resta invariata.



Ristagno non isentropico dall'infinito.

Formula di Rayleigh per il Pitot supersonico

$$\frac{p_{0,2}}{p_1} = \left[\frac{(\gamma + 1)^2 M_1^2}{4\gamma M_1^2 - 2(\gamma - 1)} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \cdot \frac{1 - \gamma + 2\gamma M_1^2}{\gamma + 1}$$

Esercizio — Pitot dietro l'urto

Esercizio 9 — Che cosa legge il Pitot a Mach 2,84

$T_1 = 250 \text{ K}$, $p_1 = 1,2 \times 10^4 \text{ Pa}$, $V_1 = 900 \text{ m/s}$.

A) $a_1 = 316,9 \text{ m/s} \Rightarrow M_1 = 2,84$.

B) Rayleigh: $p_{0,2}/p_1 = 10,86 \Rightarrow p_{0,2} = 1,30 \times 10^5 \text{ Pa}$.

C) Formula isentropica (a torto): $p_0 = p_1(1 + 0,2M_1^2)^{3,5} = 3,46 \times 10^5 \text{ Pa}$: *2,7 volte* il valore vero.

L'urto «brucia» quasi due terzi della pressione totale: per questo le prese d'aria dei supersonici decelerano il flusso con urti obliqui *deboli* anziché con un unico urto normale.

Il Pitot nei tre regimi: riepilogo

Regime	Che cosa si ricava	Formula
$M < 0,3$	V direttamente	$V = \sqrt{2(p_0 - p)/\rho}$
$0,3 < M < 1$	prima M , poi $V = Ma$	$p_0/p = (1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)^{\gamma/(\gamma-1)}$
$M > 1$	M (iterando), poi $V = Ma$	formula di Rayleigh

Gli invarianti del flusso

In un campo interamente isentropico p_0 e T_0 hanno lo stesso valore *ovunque*: sono la carta d'identità della corrente. Un urto distrugge l'invarianza di p_0 (che cala) ma non quella di T_0 : strumento di lavoro principale negli ugelli.

Parte 7

Ugelli supersonici e razzi

7

La relazione area–velocità

Differenziando la continuità in forma logaritmica e usando Eulero con $dp = a^2 d\rho$:

Relazione area–velocità

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dV}{V}$$

$$M < 1$$

Per accelerare serve
 $dA < 0$: convergenti
(l'intuizione del Venturi).

$$M > 1$$

Serve $dA > 0$: *divergenti*
(la densità crolla, l'area
deve crescere).

$$M = 1$$

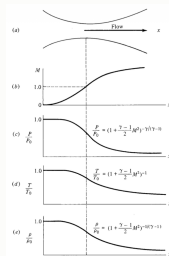
Solo dove $dA = 0$: in una
gola (area minima).

L'ugello convergente-divergente

Da fermo a supersonico la strada è obbligata:

convergente $\rightarrow$ gola ($M = 1$) $\rightarrow$ divergente

è l'ugello di **de Laval**. Condizioni critiche in gola ($\gamma = 1,4$): $T^*/T_0 = 0,833$,
 $p^*/p_0 = 0,528$.



Funzionamento supersonico: M cresce, la statica crolla.

Attenzione

La gola è condizione necessaria, non sufficiente, per $M = 1$: decide il rapporto p_0/p_{uscita} .

La geometria comanda: la relazione area–Mach

Relazione area–Mach

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)}$$

Il Mach di uscita non dipende da quanto «spinge» il serbatoio, ma dalla *geometria*: dal rapporto A/A^* .

A ogni $A/A^* > 1$ corrispondono *due* soluzioni, una subsonica e una supersonica: quale si realizza dipende dalla pressione imposta all'uscita.

Esercizio — Una galleria supersonica completa

Esercizio 10 — Il gioco di squadra delle equazioni

Serbatoio $T_0 = 1000 \text{ K}$, $p_0 = 10 \text{ atm}$; gola $T^* = 833 \text{ K}$; uscita $T_e = 300 \text{ K}$; $\dot{m} = 0,5 \text{ kg/s}$.

A) Energia $\rightarrow$ velocità: $V^* = \sqrt{2c_p(T_0 - T^*)} = 580 \text{ m/s}$; $V_e = \sqrt{2c_p(T_0 - T_e)} = 1188 \text{ m/s}$.

B) Stato + isentropica $\rightarrow$ densità: $\rho_0 = 3,53 \text{ kg/m}^3$; $\rho^* = 2,24 \text{ kg/m}^3$; $\rho_e = 0,174 \text{ kg/m}^3$.

C) Continuità $\rightarrow$ aree: $A^* = \dot{m}/(\rho^* V^*) = 3,85 \text{ cm}^2$; $A_e = 24,2 \text{ cm}^2$.

Osservazione

Energia, stato + isentropica, continuità: la cassetta n. 2 al completo.

Parte 8

Lo strato limite

8

Il paradosso di d'Alembert

Nel flusso *ideale* attorno a una sfera le linee di corrente sono perfettamente simmetriche monte-valle: la risultante in direzione del moto è *zero*. Qualunque mano fuori dal finestrino smentisce la previsione.

Osservazione

Il modello ideale trascura la **viscosità**. Dato sperimentale: le molecole a contatto con la parete sono *ferme* (aderenza, *no slip*).



Simmetria perfetta: resistenza nulla.

Lo strato limite: definizione e proprietà

Strato limite

La regione sottile adiacente alla parete in cui gli effetti viscosi sono concentrati; spessore δ = distanza a cui $u = 0,99 V_\infty$. Due proprietà lo rendono trattabile:

1. *è sottile*: millimetri su corde di metri — il campo esterno resta calcolabile come ideale;
2. *la pressione non varia attraverso di esso*: per questo le prese statiche, pur immerse nello strato, misurano correttamente la pressione esterna.

Alla parete il gradiente genera lo **sforzo di taglio** $\tau_w = \mu (du/dy)_{y=0}$: il suo integrale sulla superficie bagnata è la resistenza d'attrito D_f .

Il numero di Reynolds

Numero di Reynolds

$$Re_x = \frac{\rho_\infty V_\infty x}{\mu_\infty}$$

rapporto fra forze d'inerzia e forze viscosi; la lunghezza di riferimento (x , corda c , lunghezza L) va *sempre* dichiarata.

Valori tipici: da 10^5 (aeromodelli) a 10^8 (liner).

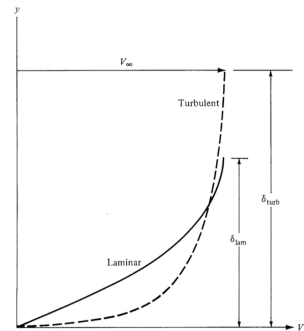
Da ricordare

Re decide tutto: spessore, attrito, transizione, forma dei profili di velocità.

Laminare o turbolento

- **Laminare:** lamine ordinate; trasporto di quantità di moto per sola diffusione molecolare.
- **Turbolento:** vortici e fluttuazioni; trasporto enormemente più efficace.

Il rimescolamento porta aria veloce a parete: profilo più «pieno», gradiente maggiore, quindi $\delta_{\text{turb}} > \delta_{\text{lam}}$ e $\tau_{w,\text{turb}} > \tau_{w,\text{lam}}$.



Profili di velocità a confronto.

La piastra piana: le formule dei due regimi

Laminare (soluzione esatta)

$$\delta = \frac{5,2 x}{\sqrt{Re_x}}$$
$$c_{f,x} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \quad C_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}}$$

Turbolento (empirico)

$$\delta = \frac{0,37 x}{Re_x^{0,2}}$$
$$c_{f,x} = \frac{0,0592}{Re_x^{0,2}} \quad C_f = \frac{0,074}{Re_L^{0,2}}$$

con $D_f = q_\infty S C_f$ e S area di *una sola faccia*. Gli esponenti passano da $1/2$ a $1/5$: lo strato turbolento cresce più in fretta e il suo attrito cala molto più lentamente con Re .

Esercizio — La stessa piastra, due regimi

Esercizio 11 — Laminare contro turbolento

Piastra $L = 5$ cm, $b = 1$ m, $V_\infty = 120$ m/s, aria SL ($Re_L = 4,11 \times 10^5$, $q_\infty = 8820$ Pa).

A) Laminare. $\delta = 0,41$ mm; $C_f = 2,07 \times 10^{-3}$; $D_f^{\text{tot}} = 1,83$ N (due facce).

B) Turbolento. $\delta = 1,40$ mm ($\times 3,4$); $C_f = 5,58 \times 10^{-3}$; $D_f^{\text{tot}} = 4,92$ N ($\times 2,7$).

Osservazione

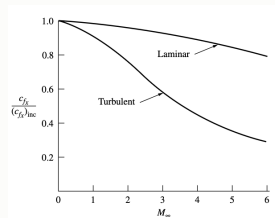
Meno di mezzo millimetro di strato su cinque centimetri di piastra: ecco quanto è «sottile». E il rimescolamento turbolento si paga caro in attrito: da qui l'interesse mai sopito per i *profili laminari*.

Comprimibilità e attrito

Ad alto Mach l'attrito riscalda il gas vicino a parete, la densità locale cala e con essa l'attrito: $c_{f,x} = c_{f,x}(Re_x, M_\infty)$, con rapporti $c_f/c_{f,inc}$ che *scendono* al crescere del Mach, più marcatamente nel turbolento.

Riferimento speditivo

Turbolento a $M_\infty = 2$: circa il **74 %** del valore incompressibile a pari Re .



Entrambe le curve scendono, la turbolenta più rapidamente.

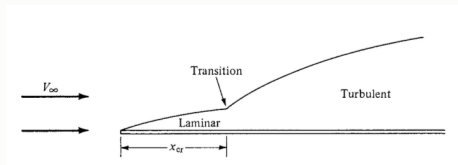
La transizione

Ogni strato limite nasce laminare e a un certo punto *transisce*:

$$x_{cr} = \frac{\mu_{\infty} Re_{x,cr}}{\rho_{\infty} V_{\infty}}$$

Da che cosa dipende $Re_{x,cr}$

Da rugosità, turbolenza esterna, gradiente di pressione e Mach. Piastra liscia: $3,5 \times 10^5 - 10^6$. Il Reynolds critico *non si calcola, si dichiara*.



Laminare fino a x_{cr} , poi turbolento.

Esercizio — L'ala del primo biplano dei pionieri

Esercizio 12 — Attrito misto sul biplano del 1903

$S = 23,69 \text{ m}^2$ per piano, $b = 12,29 \text{ m}$, $V = 13,41 \text{ m/s}$, $Re_{x,cr} = 6,5 \times 10^5$.

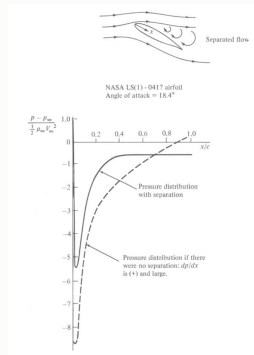
- A)** $c = S/b = 1,928 \text{ m}$; $Re_c = 1,77 \times 10^6$; $x_{cr} = 0,708 \text{ m}$: il 37 % anteriore è laminare.
- B)** Strategia: tutta turbolenta, meno il tratto anteriore contato come turbolento, più lo stesso tratto laminare: $D_f = 10,87 - 4,88 + 1,58 = 7,57 \text{ N}$ a superficie.
- C)** Quattro superfici bagnate: $D_f^{\text{tot}} = 30,3 \text{ N}$.

Tutto turbolento avrebbe dato 43,5 N, il 43 % in più: a basso Reynolds la laminarità conta.

La separazione del flusso

A valle del picco di espansione la pressione *risale* (gradiente **avverso**): i filetti a parete, già rallentati, si fermano e invertono la marcia. Dal **punto di separazione** il flusso si stacca. Conseguenze:

1. crollo di portanza: lo **stallo**;
2. **resistenza di pressione** D_p : chiude il paradosso di d'Alembert.



Flusso separato: ricircolo a bassa pressione sul dorso.

Il compromesso centrale dell'aerodinamica viscosa

Il profilo turbolento è più pieno e il rimescolamento rifornisce di energia i filetti a parete: *sopporta gradienti avversi molto più forti prima di separarsi.*

Il compromesso

Laminare = poco attrito, si separa facilmente. Turbolento = molto attrito, resta attaccato.

Corpi tozzi

Domina D_p : conviene *forzare* la turbolenza per ritardare la separazione — le fossette della pallina da golf, i generatori di vortici sulle ali.

Corpi affusolati

Domina D_f : si insegue la laminarità — superfici maniacalmente lisce dei profili laminari.

La resistenza di profilo

Resistenza di profilo

$$D = D_f + D_p$$

attrito + pressione da separazione. A piccola incidenza domina D_f ; poi avanza D_p , fino allo stallo.

Esercizio 13 — Quanto pesa l'attrito, quanto la forma

Modello in galleria: $L = 0,6$ m, $b = 1$ m, $V_\infty = 97$ m/s; la bilancia misura $D = 34,7$ N.

A) $Re_L = 3,98 \times 10^6$; $C_f = 3,54 \times 10^{-3}$; $D_f = 2 q_\infty (Lb) C_f = 24,5$ N.

B) Per differenza: $D_p = 34,7 - 24,5 = 10,2$ N (29 %).

Parte 9

Il senso di tutto questo

9

Il percorso in quattro tappe

1. **Le leggi di conservazione:** massa, quantità di moto, energia $\rightarrow$ tre equazioni algebriche più lo stato del gas.
2. **Il Mach come spartiacque:** sotto 0,3 Bernoulli; sopra, isentropica + energia; sopra $M = 1$ urti e Rayleigh.
3. **Le applicazioni dirette:** gallerie subsoniche, Pitot nei tre regimi, ugelli convergenti–divergenti — stessa cassetta degli attrezzi, contesti diversi.
4. **La viscosità:** strato limite laminare ($\propto Re^{-1/2}$) o turbolento ($\propto Re^{-1/5}$), transizione a $Re_{x,cr}$, separazione, $D = D_f + D_p$.

Da ricordare

Le dieci formule del corso

$$\begin{aligned} \dot{m} = \rho AV \quad dp = -\rho V dV \quad p + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{cost} \quad p_2/p_1 = (T_2/T_1)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad c_p T + \frac{1}{2}V^2 = \text{cost} \\ a = \sqrt{\gamma R T} \quad p_0/p = (1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad q = 0,7 p M^2 \quad dA/A = (M^2 - 1) dV/V \quad Re = \rho V x / \mu \end{aligned}$$

Il senso di tutto questo

Con una decina di formule ben capite si stimano gallerie, anemometri, razzi e resistenze: è il livello di padronanza richiesto per affrontare, nelle prossime monografie, la generazione della portanza e l'aerodinamica dell'ala. Nella monografia trovate 41 esercizi svolti e 65 problemi proposti, tutti risolti passo passo in appendice.

Riferimenti

- Serie Raucci, *Le equazioni dell'aria in movimento* — la monografia di cui queste slide sono la presentazione, con tutte le dimostrazioni complete, 41 esercizi svolti e 65 problemi proposti con soluzione.
- J. D. Anderson, *Introduction to Flight* — il riferimento classico per l'aerodinamica di base.
- V. Losito, *Fondamenti di Aeronautica Generale*, Accademia Aeronautica, Napoli, 1994.
- Materiali della collana sul portale della Serie Raucci.

Grazie dell'attenzione!

prof. ing. Biagio Raucci — Costruzioni Aeronautiche