

Serie Raucci — Costruzioni Aeronautiche

Teoria dei vettori

Fondamenti operativi per il corso di Strutture Aeronautiche

prof. ing. Biagio Raucci

ITIS «E. Majorana» — Struttura, Costruzione, Sistemi e Impianti del Mezzo

Serie Raucci — Costruzioni Aeronautiche



Il percorso di oggi

Dalla grammatica dei vettori al tema d'esame

Le fondamenta

- Perché i vettori
- Scalari e vettori
- Versori e terne di riferimento
- Le operazioni: i metodi grafici
- Componenti e calcolo analitico
- Posizione, spostamento, velocità

Gli strumenti da ingegneri

- Il prodotto scalare
- Il prodotto vettoriale
- Applicazioni alle strutture
- Statica e teorema di Varignon
- Un tema d'esame svolto
- Esercizi di consolidamento

Parte 1

Perché i vettori

1

Il «mattone zero» del corso

Dove stiamo andando

Prima di parlare di longheroni, centine e diagrammi di manovra, dobbiamo imparare la *lingua* in cui tutte queste cose si scrivono. Quella lingua è la teoria dei vettori.

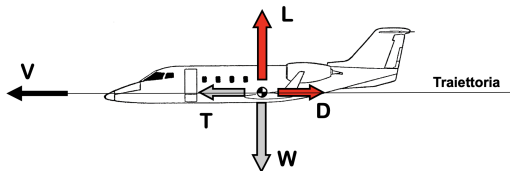
Ogni equazione di equilibrio, ogni carico scomposto lungo il longherone, ogni momento flettente è, in realtà, **manipolazione di vettori**: forza aerodinamica, peso, reazioni vincolari e momenti non si lasciano descrivere da un semplice numero. Hanno un'**intensità**, una **direzione** e un **verso** – e spesso conta pure il **punto di applicazione**.

Da ricordare

Chi padroneggia i vettori affronta il corso in autonomia; chi li trascura inciampa non sulla fisica delle strutture, ma sull'algebra che la descrive.

Un esempio che avremo sempre davanti

Le quattro forze del volo livellato



Portanza $\vec{L}$, peso $\vec{W}$, spinta $\vec{T}$, resistenza $\vec{D}$.

In volo rettilineo uniforme agiscono quattro grandezze vettoriali, e la condizione di equilibrio si scrive in una sola riga:

Formula chiave

$$\vec{L} + \vec{D} + \vec{W} + \vec{T} = \vec{0}$$

Dietro quel « $= \vec{0}$ » si nasconde il programma dell'anno: saper *sommare*, saper *scomporre*, saper passare dalle forze ai *momenti*.

Che cosa impareremo a fare

Al termine del percorso sapremo:

- distinguere grandezze scalari e vettoriali;
- rappresentare un vettore graficamente e per componenti;
- sommare, sottrarre e scomporre vettori;
- calcolare e *interpretare* prodotto scalare (lavoro, proiezioni) e prodotto vettoriale (momenti, aree);
- determinare risultante e momento di un sistema di forze.

La notazione della collana

Vettore $\vec{A}$; modulo $|\vec{A}|$ oppure A ; versore (modulo unitario) $\hat{a}$; prodotto scalare $\vec{A} \cdot \vec{B}$; prodotto vettoriale $\vec{A} \times \vec{B}$.

Attenzione

Il rispetto scrupoloso della notazione evita la maggior parte degli errori di segno nei problemi di strutture.

Parte 2

Grandezze scalari e grandezze vettoriali

2

Quanta informazione serve?

Le tre famiglie di grandezze

- **Grandezza scalare:** completamente individuata da un *numero* con la sua unità di misura. Esempi: massa $m = 750 \text{ kg}$, superficie alare $S = 16 \text{ m}^2$.
- **Scalare adimensionale:** un *numero puro*. Esempi aeronautici: numero di Mach M , coefficiente di portanza C_L , allungamento AR , fattore di carico n .
- **Grandezza vettoriale:** richiede *tre* informazioni – **intensità** (modulo), **direzione** e **verso**.

Osservazione

Perché tre informazioni? Una spinta di 2000 N in avanti produce un effetto completamente diverso dalla stessa spinta all'indietro o verso l'alto: sapere «quanto vale» non basta.

Scalare o vettore? La regola pratica

Grandezza	Tipo
Massa m	scalare
Quota di volo h	scalare
Numero di Mach M	scalare adim.
Coeff. di resistenza C_D	scalare adim.
Velocità $\vec{V}$	vettore
Forza aerodinamica $\vec{R}$	vettore
Peso $\vec{W}$	vettore
Momento $\vec{M}$	vettore

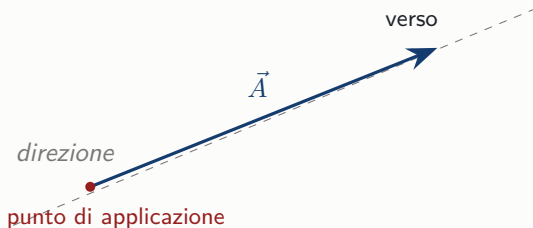
La regola pratica

Se per usare la grandezza devo dire «*in che direzione e verso*», allora è un vettore.

Nota

Il fattore di carico n è un numero puro, ma nasce da un rapporto di vettori (portanza e peso): gli scalari adimensionali sono spesso *figli* di grandezze vettoriali.

Anatomia di un vettore



- la **retta** su cui giace la freccia è la direzione;
- la **punta** indica il verso;
- la **lunghezza**, in scala, dà il modulo;
- il **punto di applicazione** è l'origine della freccia.

Il modulo è sempre non negativo

$|\vec{A}|$ è una lunghezza: scrivere « $|\vec{A}| = -5 \text{ N}$ » non ha senso. Il segno, quando comparirà, riguarderà le *componenti* – con una comoda eccezione operativa, il *modulo con segno*, che vedremo tra poco.

Vettori liberi, applicati e cursori

Tre comportamenti rispetto alla posizione

- **Vettore libero**: si può traslare ovunque mantenendo modulo, direzione e verso. Esempio: il momento di una *coppia*.
- **Vettore applicato**: legato a un preciso punto. Esempio: la reazione di un vincolo, che nasce in un punto ben determinato.
- **Vettore cursore**: può scorrere solo lungo la propria retta d'azione. Esempio: una forza su un corpo rigido (principio di trasmissibilità).

Osservazione

Per gran parte della teoria ragioneremo su vettori applicati in uno stesso punto O : è esattamente la situazione delle *forze concorrenti*, da cui partono quasi tutti i problemi di equilibrio.

Parte 3

Versori e sistemi di riferimento

3

I versori: unità di misura delle direzioni

Versore

Un vettore $\vec{v}$ è un *versore* se e solo se il suo modulo vale uno: $v = |\vec{v}| = 1$. I versori sono vettori di modulo **unitario** e **adimensionale**: indicano una direzione e un verso, non una quantità.

Una sottigliezza logica istruttiva

- *Un versore è un vettore?* Sì, sempre: ha modulo (pari a 1), direzione e verso.
- *Un vettore è un versore?* No, in generale: non è detto che il modulo valga uno.

In linguaggio insiemistico: i versori sono *contenuti* nei vettori, ma non coincidono con essi.

Il versore di una retta e il modulo con segno

Assegnata una retta a con un verso positivo, esiste *uno e un solo* vettore che giace su a , ha modulo unitario ed è orientato nel verso positivo: il **versore della retta**, $\hat{a}$.

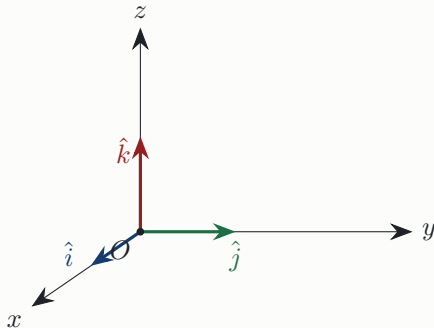
Formula chiave

$$\vec{A} = A \hat{a}, \quad A = \begin{cases} + |\vec{A}| & \text{se } \vec{A} \text{ è concorde con } \hat{a}, \\ - |\vec{A}| & \text{se } \vec{A} \text{ è discorde da } \hat{a}. \end{cases}$$

Il senso di tutto questo

È il primo, potentissimo, uso operativo dei versori: *separare* l'informazione «quanto» (il numero A , con segno) da quella «in che direzione e verso» (il versore $\hat{a}$). Su questa separazione si fonda il metodo delle proiezioni che useremo in tutte le equazioni di equilibrio.

La terna cartesiana $Oxyz$



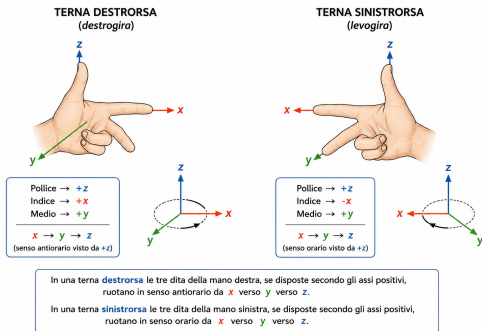
Terna cartesiana

Tre rette x , y , z mutuamente **ortogonali**, incidenti nell'origine O ; a ciascun asse si associano un verso positivo e il relativo versore:

$$\hat{x} \equiv \hat{i}, \quad \hat{y} \equiv \hat{j}, \quad \hat{z} \equiv \hat{k}.$$

I versori $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ costituiscono una **base** dello spazio: ogni vettore si esprime come loro combinazione lineare.

Terna destrorsa e regola della mano destra



Terna destrorsa (destrogiro) e terna sinistorsa (levogiro) a confronto.

Terna destrorsa

Pollice, indice e medio della mano destra mutuamente ortogonali: se il pollice indica x e l'indice y , il medio indica z .
Equivalentemente: ruotando x verso y di 90° , una vite destrorsa avanza lungo z .

Non è un vizzo

La terna destrorsa rende coerenti i segni del prodotto vettoriale e dei momenti: il disordine di segno è la fonte numero uno di errori nei temi d'esame.

Parte 4

Operazioni tra vettori: i metodi grafici



Perché partire dai metodi grafici

Dove stiamo andando

Prima di tradurre tutto in numeri è essenziale *vedere* le operazioni: con i metodi grafici, in fase di progetto, si stima una risultante e se ne controlla l'ordine di grandezza.

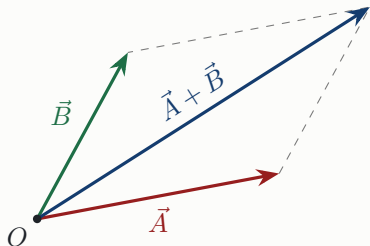
Il caso più semplice: $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sulla **stessa retta** a .

- **Versi concordi:** i moduli si sommano, $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A}| + |\vec{B}|$, verso di $\hat{a}$.
- **Versi discordi:** prevale il più grande; il modulo della somma è la *differenza* dei moduli, il verso è quello del maggiore.

Osservazione

Con il *modulo con segno* tutta la casistica collassa in una sola riga: la somma di vettori collineari è la **somma algebrica** delle intensità con segno. È la base del metodo delle proiezioni.

La regola del parallelogramma



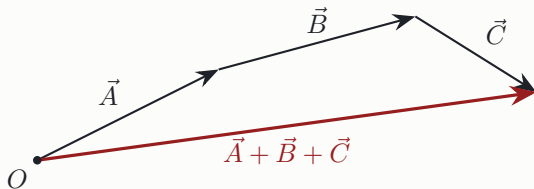
Con $\vec{A}$ e $\vec{B}$ applicati nello stesso punto O :

1. parallela ad a per l'estremo di $\vec{B}$;
2. parallela a b per l'estremo di $\vec{A}$;
3. la somma è la **diagonale** uscente da O .

Nota

La regola vale *sempre*, anche nello spazio: basta ragionare nel piano che contiene O , $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

La regola del poligono («testa-coda»)



Ideale con *più di due* vettori: si disegna $\vec{A}$ da O , poi $\vec{B}$ dall'estremo libero di $\vec{A}$, poi $\vec{C}$, e così via.

Da ricordare

La somma è il vettore che parte da O e *chiude* il poligono. Se il poligono si chiude da solo (ultimo estremo in O), la risultante è nulla: è la fotografia grafica dell'*equilibrio*.

Opposto, differenza, prodotto per uno scalare

Opposto e differenza

$-\vec{B}$: stessa direzione e modulo di $\vec{B}$, verso opposto.

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}).$$

«Punta verso il minuendo»

$\vec{A} - \vec{B}$ va dall'estremo di $\vec{B}$ all'estremo di $\vec{A}$: lo useremo per spostamenti e variazioni di velocità.

Prodotto $k\vec{A}$

- modulo $|k\vec{A}| = |k| |\vec{A}|$;
- direzione di $\vec{A}$;
- verso concorde se $k > 0$, opposto se $k < 0$.

Caso notevole: la normalizzazione

$\hat{a} = \vec{A} / |\vec{A}|$ è il versore di $\vec{A}$: dividere per il modulo estrae la direzione.

Esercizio svolto: somma grafica e controllo con Carnot

Esercizio svolto — il gancio di traino dell'aliante

Due cavi tirano il gancio in O : $\vec{F}_1$ orizzontale, $F_1 = 300$ N; $\vec{F}_2$ a 60° , $F_2 = 200$ N. Stimare la risultante.

- 1) **Impostazione grafica.** In scala $100 \text{ N} \rightarrow 1 \text{ cm}$, la diagonale del parallelogramma è $\vec{R}$.
- 2) **Controllo con Carnot.** $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos 60^\circ} = \sqrt{190000} \approx 435,9 \text{ N}$.
- 3) **Direzione** (anticipando il calcolo per componenti): $\vartheta \approx 23,4^\circ$ sull'orizzontale.

La morale

Il disegno *prevede* il risultato e intercetta gli errori grossolani.

Parte 5

Componenti e rappresentazione analitica

5

Dal disegno ai numeri: la scomposizione

Dove stiamo andando

I metodi grafici danno l'intuizione; per i calcoli servono i numeri. Il ponte tra i due mondi è la *scomposizione*.

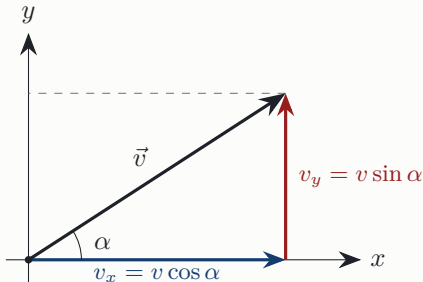
Vettori componenti e componenti

Dato $\vec{v}$ e due direzioni a, b non parallele del suo piano, il parallelogramma *a rovescio* individua $\vec{v}_a$ e $\vec{v}_b$ tali che $\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_b$: sono i **vettori componenti**; i loro moduli con segno, v_a e v_b , le **componenti** di $\vec{v}$.

Nota

In strutture scomporremo di continuo: traiettoria, longherone, tralicci.

Componenti cartesiane: le formule fondamentali



Andata: da (v, α) a (v_x, v_y)

$$v_x = v \cos \alpha, \quad v_y = v \sin \alpha$$

Ritorno: da (v_x, v_y) a (v, α)

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \alpha = \text{atan2}(v_y, v_x)$$

Scritture equivalenti:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = (v_x, v_y).$$

Perché atan2 e non l'arcotangente «liscia»

La formula ingenua perde il quadrante

$\alpha = \arctan(v_y/v_x)$ restituisce sempre un angolo fra -90° e $+90^\circ$: non distingue $\vec{v} = (3, 4)$ da $\vec{v} = (-3, -4)$, che puntano in versi opposti.

La funzione $\text{atan2}(v_y, v_x)$ – disponibile su ogni calcolatrice scientifica e in ogni linguaggio di programmazione – tiene conto dei segni di *entrambe* le componenti e restituisce il quadrante corretto.

Da ricordare

Nei problemi di equilibrio, sbagliare quadrante significa sbagliare il *verso* di una reazione vincolare: un errore che si paga caro.

L'algebra dei vettori diventa algebra dei numeri

Operazioni in componenti

Con $\vec{A} = (A_x, A_y)$, $\vec{B} = (B_x, B_y)$ e $k \in \mathbb{R}$:

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x, A_y \pm B_y), \quad k\vec{A} = (kA_x, kA_y).$$

Il senso di tutto questo

Sommare vettori diventa sommare le componenti, *ciascuna per conto proprio*: le x con le x , le y con le y .

Attenzione

I *moduli* non si sommano: $|\vec{A} + \vec{B}| \neq |\vec{A}| + |\vec{B}|$, salvo vettori concordi e collineari.

Esercizio svolto: tutto per componenti

Esercizio svolto — $\vec{A} = (3, 4)$ e $\vec{B} = (-1, 2)$

Determinare somma, differenza, moduli e angoli con l'asse x .

- 1) **Somma e differenza.** $\vec{A} + \vec{B} = (2, 6)$; $\vec{A} - \vec{B} = (4, 2)$.
- 2) **Moduli (Pitagora).** $|\vec{A}| = \sqrt{9 + 16} = 5$; $|\vec{B}| = \sqrt{5} \approx 2,24$; $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{40} \approx 6,32$.
- 3) **Angoli (con atan2).** $\alpha_A \approx 53,1^\circ$; $\alpha_B \approx 116,6^\circ$ (secondo quadrante!); $\alpha_{A+B} \approx 71,6^\circ$.

Osservazione

$6,32 \neq 5 + 2,24$: la disuguaglianza triangolare all'opera. E atan2 colloca $\vec{B}$ nel quadrante giusto.

Esercizio svolto: scomposizione di una velocità

Esercizio svolto — salita a 30°

Un velivolo vola a $V = 10 \text{ m/s}$ (valore scelto per la pulizia numerica), inclinato di $\alpha = 30^\circ$ sull'orizzontale in salita. Determinare le componenti orizzontale e verticale.

1) Componenti.

$$V_x = 10 \cos 30^\circ \approx 8,66 \text{ m/s}, \quad V_y = 10 \sin 30^\circ = 5,00 \text{ m/s}.$$

2) Verifica (da eseguire *sempre*): $\sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{75 + 25} = 10$. Torna.

Osservazione

V_x è la velocità di avanzamento, V_y il rateo di salita: il linguaggio della meccanica del volo.

Nello spazio: i coseni direttori

Modulo e direzione nello spazio

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad \cos \theta_x = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \theta_y = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \theta_z = \frac{v_z}{v},$$

con l'identità fondamentale $\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$. I coseni direttori sono le componenti del versore $\hat{v}$.

Esercizio svolto — $\vec{v} = (2, 3, 6)$

- 1) Modulo: $v = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$.
- 2) Versore: $\hat{v} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$.
- 3) Verifica identità: $\frac{4+9+36}{49} = 1$.
- 4) Angoli: $\theta_x \approx 73,4^\circ$, $\theta_y \approx 64,6^\circ$, $\theta_z \approx 31,0^\circ$.

Parte 6

Posizione, spostamento e velocità

6

I vettori prendono corpo

Dove stiamo andando

Fin qui i vettori sono stati enti algebrici; ora i conti diventano fisica – e navigazione.

Vettore posizione

Fissata un'origine O , il vettore posizione di un punto P è

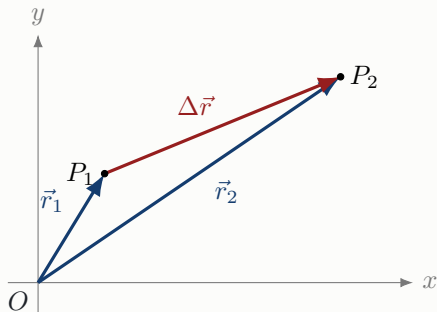
$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}, \quad P = (x, y) \iff \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}.$$

Si misura in m (o in miglia nautiche NM in navigazione).

Osservazione

Le componenti di $\vec{r}$ *coincidono* con le coordinate del punto: è il ponte tra geometria e algebra.

Il vettore spostamento



Vettore spostamento

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{P_1P_2}.$$

Osservazione

«La differenza punta verso il minuendo»:
 $\Delta\vec{r}$ parte dalla posizione *iniziale* e punta
a quella *finale*.

Esercizio svolto: navigazione tra due waypoint

Esercizio svolto — da A a B a 300 kt

Sistema locale (x Est, y Nord, NM): $A = (10, 5)$, $B = (40, 45)$; ground speed 300 kt.
Spostamento, distanza, rotta, tempo?

- 1) **Spostamento.** $\Delta \vec{r} = B - A = (30, 40)$ NM.
- 2) **Distanza.** $|\Delta \vec{r}| = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ NM: un triangolo 3-4-5 scalato $\times 10$.
- 3) **Rotta.** $\vartheta = \text{atan2}(40, 30) \approx 53,1^\circ$ da Est.
- 4) **Tempo di volo.** $t = 50 \text{ NM} / 300 \text{ kt} = 0,1667 \text{ h} = 10 \text{ min}$.

Osservazione

Quattro passi, quattro strumenti: differenza, Pitagora, atan2, rapporto spazio-velocità.

Il vettore velocità

Velocità media e istantanea

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

La velocità istantanea è sempre **tangente alla traiettoria**.

Velocità non è rapidità

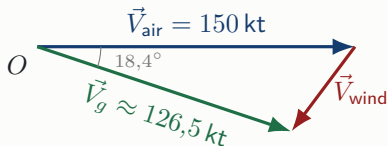
La **velocità** è un vettore; la **rapidità** (*speed*) è solo il suo modulo. In virata a rapidità costante la velocità cambia *in continuazione* di direzione: da lì nascono accelerazione centripeta e fattore di carico.

Il triangolo del vento

Composizione delle velocità

$$\vec{V}_g = \vec{V}_{\text{air}} + \vec{V}_{\text{wind}}$$

velocità al suolo = velocità rispetto all'aria (secondo la prua) + velocità del vento.



L'angolo fra la prua ($\vec{V}_{\text{air}}$) e la rotta effettiva ($\vec{V}_g$) è l'**angolo di deriva** (*drift*).

Esercizio svolto: il triangolo del vento in numeri

Esercizio svolto — prua a Est, vento al traverso

$\vec{V}_{\text{air}} = (150, 0)$ kt; $\vec{V}_{\text{wind}} = (-30, -40)$ kt (x Est, y Nord). Trovare $\vec{V}_g$, la ground speed e la deriva.

- 1) **Somma vettoriale.** $\vec{V}_g = (150 - 30, 0 - 40) = (120, -40)$ kt.
- 2) **Ground speed.** $|\vec{V}_g| = \sqrt{120^2 + 40^2} = \sqrt{16000} \approx 126,5$ kt.
- 3) **Deriva.** $\text{atan2}(-40, 120) \approx -18,4^\circ$: prua a Est, ma rotta che scivola di $18,4^\circ$ verso Sud.

Osservazione

30 kt contrari (headwind), 40 kt trasversali (crosswind): per andare davvero a Est, la prua andrà corretta verso Nord.

Esercizio svolto: virata corretta e fattore di carico

Esercizio svolto — virata a 45° di bank

Virata corretta in volo livellato: $V = 50 \text{ m/s}$, bank $\varphi = 45^\circ$. Trovare a_c , il raggio R e il fattore n .

1) **Accelerazione centripeta** (equilibrio nella virata corretta):

$$a_c = g \tan \varphi = 9,81 \cdot 1 = 9,81 \text{ m/s}^2 = 1 g.$$

2) **Raggio di virata:** $R = V^2 / a_c = 2500 / 9,81 \approx 254,8 \text{ m}$.

3) **Fattore di carico:** $n = 1 / \cos 45^\circ = \sqrt{2} \approx 1,41$.

Da ricordare

A 45° di bank il velivolo «pesa» $\sqrt{2}$ volte se stesso: da qui parte il diagramma di manovra.

Parte 7

Il prodotto scalare

7

Moltiplicare due vettori, primo modo

Dove stiamo andando

Due sono i modi di moltiplicare due vettori: il primo restituisce un *numero* e misura «quanto vanno d'accordo». La forma per componenti si calcola a occhi chiusi; quella geometrica *spiega* il risultato.

Prodotto scalare: la doppia faccia

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y \quad (\text{forma per componenti})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \gamma = AB \cos \gamma \quad (\text{geometrica})$$

Nello spazio: $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$.

Le proprietà che useremo di continuo

- **Commutativo:** $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$.
- **Distributivo:** $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$.
- **Modulo:** $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2$.
- **Ortogonalità e segno:** positivo se $\gamma < 90^\circ$, negativo se $\gamma > 90^\circ$, *nullo* se perpendicolari ($\cos 90^\circ = 0$).

Angolo tra due vettori e proiezione

$$\cos \gamma = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|}, \quad A_u = \vec{A} \cdot \hat{u} = |\vec{A}| \cos \gamma.$$

A_u è «quanto di $\vec{A}$ è diretto come $\hat{u}$ »: con questo scomporremo i carichi.

Esercizio svolto: l'angolo tra due vettori

Esercizio svolto — $\vec{A} = (3, 4)$ e $\vec{B} = (4, 3)$

Determinare l'angolo γ fra i due vettori.

- 1) **Prodotto scalare.** $\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24$. 2) **Moduli.** $|\vec{A}| = |\vec{B}| = 5$.
3) **Coseno e angolo.**

$$\cos \gamma = \frac{24}{5 \cdot 5} = 0,96, \quad \gamma = \arccos 0,96 \approx 16,3^\circ.$$

Osservazione

Vettori speculari rispetto alla bisettrice: ragionevole un angolo piccolo. La plausibilità geometrica vale quanto il calcolo.

Interpretazione fisica: il lavoro

Lavoro di una forza costante

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos \gamma$$

Il caso aeronautico per eccellenza

Solo la componente di $\vec{F}$ *lungo lo spostamento* compie lavoro: la **portanza**, perpendicolare alla velocità, non ne compie; lo compiono spinta e resistenza. Lo dice quel $\cos 90^\circ = 0$.

Scalare, non vettore

Il risultato è un *numero*: se ha una direzione, l'operazione giusta è il prodotto *vettoriale* – il prossimo argomento.

Esercizio svolto: il lavoro per due strade

Esercizio svolto — $\vec{F} = (300, 200) \text{ N}$, $\vec{s} = (5, 0) \text{ m}$

Calcolare il lavoro compiuto dalla forza.

1) Forma per componenti.

$$L = 300 \cdot 5 + 200 \cdot 0 = 1500 \text{ J.}$$

2) Forma geometrica (controllo). Con $|\vec{F}| \approx 360,6 \text{ N}$ e $\gamma \approx 33,7^\circ$:
 $L \approx 360,6 \cdot 5 \cdot \cos 33,7^\circ \approx 1500 \text{ J.}$

Osservazione

Lavora solo la componente orizzontale (300 N); quella verticale, perpendicolare al moto, no.

Parte 8

Il prodotto vettoriale

8

Moltiplicare due vettori, secondo modo

Dove stiamo andando

Il secondo prodotto restituisce un *vettore*: è lo strumento con cui si passa dalle *forze* ai *momenti*.

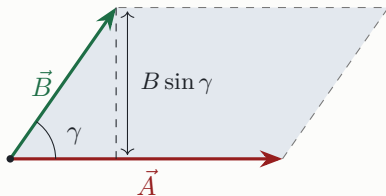
Prodotto vettoriale $\vec{A} \times \vec{B}$

- **modulo**: $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \gamma$;
- **direzione**: ortogonale al piano di $\vec{A}$ e $\vec{B}$;
- **verso**: tale che la terna $\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \times \vec{B}\}$ sia *destrorsa* (regola della mano destra).

Non commutativo!

$\vec{B} \times \vec{A} = -(\vec{A} \times \vec{B})$: nei momenti l'ordine è $\vec{r} \times \vec{F}$; invertirlo cambia il segno.

Il significato geometrico: un'area



Il modulo $AB \sin \gamma$ è l'**area del parallelogramma** costruito su $\vec{A}$ e $\vec{B}$:
base A , altezza $B \sin \gamma$.

Vettori paralleli

Se $\gamma = 0$ oppure $\gamma = 180^\circ$,
allora $\sin \gamma = 0$ e $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$:
il parallelogramma degenera in un
segmento. In particolare $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$.

Il caso piano: il segno della componente z

Nei problemi piani il prodotto vettoriale è diretto lungo z , entrante o uscente dal foglio.

La formula del determinante 2×2

$$(\vec{A} \times \vec{B})_z = A_x B_y - A_y B_x$$

Come scegliere il segno guardando il foglio (z uscente verso di noi):

- rotazione da $\vec{A}$ a $\vec{B}$ (angolo più breve) in senso **antiorario** $\Rightarrow$ vettore *uscente*, segno $+$;
- rotazione in senso **orario** $\Rightarrow$ vettore *entrante*, segno $-$.

Da ricordare

Antiorario positivo, orario negativo: fissarla ora, una volta per tutte, significa non litigare più con i segni per tutto il corso.

La formula per componenti nello spazio

Il determinante simbolico

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

Nota

Il determinante è solo un modo *mnemonico*: sviluppandolo lungo la prima riga si ottengono le formule esplicite. Non è un vero determinante – la prima riga contiene vettori – ma funziona.

Esercizio svolto: prodotto vettoriale nello spazio

Esercizio svolto — $\vec{A} = (1, 2, 3)$, $\vec{B} = (4, 5, 6)$

Calcolare $\vec{A} \times \vec{B}$ e verificarne l'ortogonalità ai fattori.

- 1) **Componenti.** $(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5, 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6, 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = (-3, 6, -3)$.
- 2) **Modulo.** $\sqrt{9 + 36 + 9} = \sqrt{54} \approx 7,35$.
- 3) **Verifica di ortogonalità** (prodotto scalare nullo):

$$(-3)(1) + (6)(2) + (-3)(3) = 0, \quad (-3)(4) + (6)(5) + (-3)(6) = 0.$$

Osservazione

Entrambe le verifiche danno zero: è il controllo che smaschera gli errori nel determinante – e costa trenta secondi.

Interpretazione fisica: il momento di una forza

Momento rispetto a un polo O

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP} \quad (\text{braccio vettore})$$

con modulo $|\vec{M}_O| = rF \sin \gamma = Fb$, dove $b = r \sin \gamma$ è il **braccio**: la distanza del polo dalla retta d'azione della forza.

- momento **massimo** quando forza e braccio sono perpendicolari;
- momento **nullo** quando la forza passa per il polo ($b = 0$).

Il senso di tutto questo

Momento flettente, momento di cerniera, momento torcente: tutti figli della stessa operazione, $\vec{r} \times \vec{F}$.

Esercizio svolto: il momento di una leva

Esercizio svolto — leva incernierata in O

In P , a 0,5 m da O lungo x , agisce una forza verticale verso il basso di 2000 N. Momento rispetto a O ?

1) Dati vettoriali. $\vec{r} = (0,5, 0, 0)$ m; $\vec{F} = (0, -2000, 0)$ N. **2) Momento** (determinante 2×2):

$$M_z = 0,5 \cdot (-2000) - 0 \cdot 0 = -1000 \Rightarrow \vec{M}_O = (0, 0, -1000) \text{ N m.}$$

3) Controllo con il braccio. Forza $\perp$ braccio: $|\vec{M}_O| = 2000 \cdot 0,5 = 1000 \text{ N m}$. Coincidono.

Osservazione

Segno negativo: momento *entrante*, rotazione *oraria*.

Esercizio svolto: braccio inclinato

Esercizio svolto — forza a 60° sull'asta

Forza di 500 N all'estremo di un'asta di 0,8 m impernata in O ; la forza forma 60° con l'asta.
Modulo del momento?

1) Formula del modulo.

$$|\vec{M}_O| = rF \sin \gamma = 0,8 \cdot 500 \cdot \sin 60^\circ \approx 346,4 \text{ N m.}$$

2) **Lettura fisica.** Solo la componente *perpendicolare* all'asta ($F \sin 60^\circ$) genera momento; quella lungo l'asta ha braccio nullo.

Osservazione

A 90° il momento salirebbe al massimo, 400 N m: l'inclinazione «spreca» parte dell'azione.

Parte 9

Applicazioni alle strutture

9

La risultante e l'equilibrio alla traslazione

Risultante di un sistema di forze

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad R_x = \sum_i F_{ix}, \quad R_y = \sum_i F_{iy}$$

Equilibrio alla traslazione: $\vec{R} = \vec{0} \iff \sum_i F_{ix} = 0$ e $\sum_i F_{iy} = 0$.

Esercizio svolto — nodo a tre tiranti

Tre forze di 500 N a 0° , 120° , 240° . **1)** Componenti: (500, 0), (-250, +433), (-250, -433) N.
2) Somma: $R_x = 0$, $R_y = 0 \Rightarrow \vec{R} = \vec{0}$: **equilibrio**. La configurazione simmetrica per eccellenza.

Esercizio svolto: il peso lungo la traiettoria in salita

Esercizio svolto — salita con $\gamma = 8^\circ$

Velivolo di peso $W = 12\,000\text{ N}$ in salita lungo una traiettoria inclinata di 8° . Scomporre il peso lungo la traiettoria e la normale.

- 1) **Componente parallela** (frena la salita): $W_{\parallel} = W \sin \gamma = 12000 \sin 8^\circ \approx 1670\text{ N}$.
- 2) **Componente normale** (da equilibrare con la portanza):
 $W_{\perp} = W \cos \gamma = 12000 \cos 8^\circ \approx 11\,883\text{ N}$.
- 3) **Verifica.** $\sqrt{1670^2 + 11883^2} \approx 12\,000\text{ N} = W$. Torna.

Osservazione

$W_{\parallel}$ è la «penalità di salita» che la spinta deve vincere; $W_{\perp}$ è ciò che la portanza bilancia.

Esercizio svolto: forza aerodinamica ed efficienza

Esercizio svolto — $L = 8000 \text{ N}$, $D = 800 \text{ N}$

Portanza e resistenza sono perpendicolari: risultante $\vec{R}$ ed efficienza $E = L/D$?

- 1) **Modulo** (Pitagora): $R = \sqrt{8000^2 + 800^2} \approx 8040 \text{ N}$.
- 2) **Inclinazione** rispetto alla resistenza: $\vartheta = \arctan(8000/800) \approx 84,3^\circ$: quasi verticale ($L \gg D$).
- 3) **Efficienza**: $E = 8000/800 = 10$.

Osservazione

L'angolo tra $\vec{R}$ e la portanza vale $\arctan(1/E) \approx 5,7^\circ$: ala efficiente, risultante «appiattita» sulla portanza.

Momento risultante e coppia

Le due condizioni di equilibrio del corpo rigido

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}$$

La coppia

Due forze uguali in modulo, parallele, di verso opposto e non allineate: risultante *nulla*, momento *non* nullo, di modulo

$$|\vec{M}| = F d$$

con d distanza fra le rette d'azione. Il momento di una coppia **non dipende dal polo**: è un vettore *libero*.

Esercizio svolto: la coppia non dipende dal polo

Esercizio svolto — due forze da 400 N a braccio 0,6 m

$\vec{F} = (400, 0) \text{ N}$ in $A = (0, 0)$; $-\vec{F}$ in $B = (0, 0, 6) \text{ m}$. Momento rispetto a O e a $Q = (1, 5, 2, 0) \text{ m}$?

1) **Rispetto a O .** La forza in A passa per O ; resta quella in B :

$$\vec{M}_O = (0, 0, 6, 0) \times (-400, 0, 0) = (0, 0, +240) \text{ N m}.$$

2) **Rispetto a Q :** $\vec{M}_Q = (0, 0, +240) \text{ N m}$. Identico.

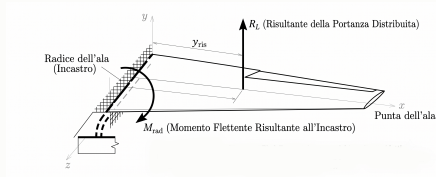
3) **Controllo:** $F d = 240 \text{ N m}$.

Da ricordare

Cambia il polo, il momento resta identico: vettore *libero*.

Lo schema di soluzione di un problema di equilibrio

1. isolare il corpo: **diagramma di corpo libero** con tutte le forze attive e reattive;
2. scegliere gli assi e **scomporre** tutte le forze;
3. equilibrio alla traslazione: $\sum F_x = 0$,
 $\sum F_y = 0$;
4. polo *comodo* (dove passano più incognite) ed equilibrio alla rotazione: $\sum M = 0$;
5. risolvere e **verificare i segni**.



Corpo libero di una semiala incastrata: portanza distribuita ridotta a risultante e momento d'incastro.

Il segno è un'informazione, non un errore

Reazione negativa = verso reale opposto a quello ipotizzato: il calcolo «si corregge da solo».

Parte 10

Statica: forze, vincoli e il teorema di Varignon

10

Forza, vincolo, corpo libero

Le tre definizioni di partenza

- **Forza**: vettore che è *causa* del moto di un corpo libero o della deformazione di un corpo vincolato. Su un corpo rigido si comporta da vettore *cursores*.
- **Vincolo**: restrizione ai gradi di libertà; per imporla esercita *reazioni vincolari* (forze e momenti da determinare).
- **Corpo libero**: corpo privo di qualunque vincolo.

Peso e massa non sono la stessa cosa

La **massa** m è uno scalare (kg); il **peso** è una forza, $\vec{P} = m\vec{g}$ (N), applicata nel baricentro. Scrivere un peso in chilogrammi è l'errore concettuale che in sede d'esame si paga più caro.

I due postulati della statica

Postulati

Primo. Una forza $\vec{F}$ e la sua opposta $-\vec{F}$, sulla stessa retta d'azione, costituiscono un sistema equilibrato.

Secondo (trasmissibilità). Ogni forza può essere spostata lungo la propria retta d'azione senza modificare l'effetto complessivo sul corpo rigido.

Il limite della trasmissibilità

Vale per l'*equilibrio* del corpo rigido, non per lo stato di sollecitazione interna: spostare una forza lungo la sua retta d'azione non cambia le reazioni vincolari, ma cambia eccome il diagramma degli sforzi interni. Ci torneremo nel corso di strutture.

Il teorema di Varignon

Teorema di Varignon (forze concorrenti)

Se $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ sono applicate nello stesso punto A e $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$, allora per qualunque polo P :

$$\vec{M}_P(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_P(\vec{F}_i)$$

Dimostrazione (sorprendentemente breve)

Tutte le forze condividono il braccio $\vec{r} = \overrightarrow{PA}$:

$$\vec{M}_P(\vec{R}) = \vec{r} \times \left(\sum_i \vec{F}_i \right) = \sum_i (\vec{r} \times \vec{F}_i) = \sum_i \vec{M}_P(\vec{F}_i). \quad \blacksquare$$

Due precisazioni che evitano errori d'esame

Il senso di tutto questo

Sommare i momenti o ridurre alla risultante: stesso numero, strada libera.

(1) Forze non concorrenti

Con punti di applicazione diversi vale $\vec{M}_P(\vec{R}) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, purché $\vec{R}$ sia applicata sul suo *asse centrale*: va detto *dove* agisce.

(2) Le coppie sfuggono a Varignon

Una coppia ha risultante nulla ma momento non nullo: il teorema, che lega il momento alla risultante, non le è applicabile.

Il trasporto di una forza

Momento di trasporto

Trasportare $\vec{F}$ parallelamente a se stessa fino a Q equivale a sommare la stessa forza $\vec{F}$ applicata in Q e una **coppia di trasporto** di momento $\vec{M}_{tr} = \vec{d} \times \vec{F}$, $|\vec{M}_{tr}| = F d$.

Il caso aeronautico tipico

La portanza $L = 6000$ N, trasportata dal centro di pressione all'asse del longherone ($d = 0,15$ m), genera la coppia $M_{tr} = 900$ N m: il momento torcente da sommare alla flessione.

Attenzione

Il segno della coppia di trasporto, nel longherone, è la differenza fra fibra tesa e compressa.

Esercizio svolto: il momento di cerniera dell'equilibratore

Esercizio svolto — quanto deve tenere l'attuatore?

$q = 1900 \text{ Pa}$, $S_e = 0,72 \text{ m}^2$, $C_{N,e} = 0,35$; corda $c_e = 0,45 \text{ m}$, centro di pressione al 40% della corda dietro la cerniera. Trovare il momento di cerniera H_e .

- 1) **Risultante aerodinamica.** $R = q S_e C_{N,e} = 1900 \cdot 0,72 \cdot 0,35 = 478,8 \text{ N}$.
- 2) **Braccio.** $b_{cp} = 0,40 \cdot 0,45 = 0,180 \text{ m}$.
- 3) **Momento di cerniera** (forza $\perp$ superficie):

$$H_e = R b_{cp} = 478,8 \cdot 0,180 = 86,18 \text{ N m}.$$

Osservazione

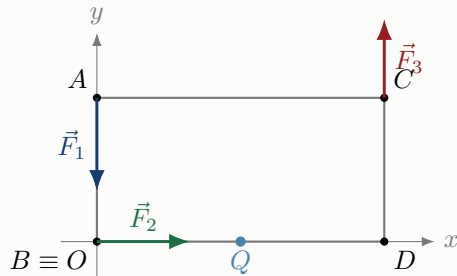
Un prodotto forza per braccio: è il numero che dimensiona attuatore e catena di comando.

Parte 11

Un tema d'esame svolto

11

La traccia: riduzione di un sistema di forze



Rettangolo $2\text{ m} \times 1\text{ m}$; riferimento Oxy nell'angolo in basso a sinistra.

- $\vec{F}_1$ in $A = (0, 1)$, verso il basso, 250 N;
- $\vec{F}_2$ in $B = (0, 0)$, verso destra, 300 N;
- poi si aggiunge $\vec{F}_3$ in $C = (2, 1)$, verso l'alto, 150 N.

Richieste: risultante di ciascun sistema; momenti rispetto ai vertici; **riduzione** al punto $Q = (1, 0)\text{ m}$.

Prima parte: il sistema a due forze

1) Risultante per componenti.

$$\vec{R}^{(2)} = (0, -250) + (300, 0) = (300, -250) \text{ N},$$

$$\left| \vec{R}^{(2)} \right| = \sqrt{152500} \approx 390,5 \text{ N}, \quad \alpha = \text{atan2}(-250, 300) \approx -39,8^\circ.$$

2) Controlli rapidi. $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = 0$: perpendicolari, confermato. $(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2)_z = +75000 > 0$: rotazione da $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ antioraria.

3) Momenti rispetto a $Q = (1, 0)$.

$$M_Q(\vec{F}_1) = (-1)(-250) - (1)(0) = +250 \text{ N m}, \quad M_Q(\vec{F}_2) = 0.$$

Osservazione

$\vec{F}_2$ non dà momento perché la sua retta d'azione (il lato inferiore) *passa per Q* : braccio nullo. Scegliere bene il polo rende trasparente il calcolo – e regala un controllo a mente.

Che cosa significa «ridurre a Q »

Riduzione a un punto

Sostituire il sistema con uno *equivalente*: la risultante $\vec{R}$ applicata in Q , più un'unica coppia di momento pari alla somma dei momenti delle forze rispetto a Q .

Riduzione del sistema a due forze

$$\vec{R}^{(2)} = (300, -250) \text{ N in } Q, \quad M_Q^{(2)} = +250 \text{ N m (antioraria)}$$

Nota

Fissando Q nel *punto medio* del lato inferiore i valori diventano esatti: la scelta consapevole del polo trasforma un calcolo «sporco» in uno pulito.

Seconda parte: il sistema a tre forze

1) Nuova risultante.

$$\vec{R}^{(3)} = (300, -250 + 150) = (300, -100) \text{ N}; \quad \left| \vec{R}^{(3)} \right| \approx 316,2 \text{ N}, \quad \alpha \approx -18,4^\circ.$$

2) Contributo di $\vec{F}_3$ al momento rispetto a Q , con $\vec{r}_3 = C - Q = (1, 1)$:

$$M_Q(\vec{F}_3) = (1)(150) - (1)(0) = +150 \text{ N m}.$$

3) Riduzione completa.

$$M_Q^{(3)} = 250 + 0 + 150 = +400 \text{ N m} \quad (\text{antioraria}).$$

Osservazione

$\vec{F}_3$, verticale verso l'alto, «raddrizza» la risultante verso l'orizzontale: l'angolo passa da $-39,8^\circ$ a $-18,4^\circ$. Leggere i numeri, non solo calcolarli.

Il quadro d'insieme: i momenti rispetto ai vari poli

Polo	$M(\vec{F}_1)$	$M(\vec{F}_2)$	$M(\vec{F}_3)$	$M_{\text{tot}} [\text{N m}]$
$A = (0, 1)$	0	+300	+300	+600
$B = (0, 0)$	0	0	+300	+300
$C = (2, 1)$	+500	+300	0	+800
$D = (2, 0)$	+500	0	0	+500
$Q = (1, 0)$	+250	0	+150	+400

La coerenza di Varignon

I momenti totali cambiano da polo a polo – è giusto: il momento *dipende* dal polo quando la risultante non è nulla. Ma i valori non sono arbitrari: la differenza fra due poli è esattamente il momento della risultante nel passaggio di polo. È Varignon che tiene insieme tutta la tabella.

Gli errori da non commettere in sede d'esame

Il momento senza polo è mezza risposta

Scrivere «il momento vale 400 N m» senza dire *rispetto a quale punto* è un'affermazione incompleta e, in un tema d'esame, penalizzata.

Il verso è parte del risultato

Antiorario o orario? Ometterlo equivale a dare solo metà della risposta: il segno del momento decide da che parte ruota – e, in strutture, quale fibra è tesa e quale compressa.

Da ricordare

Un tema di riduzione ben risolto contiene sempre: componenti, modulo e direzione della risultante; momenti con polo esplicito e verso; la riduzione scritta come «forza in Q + coppia».

Parte 12

Per consolidare

12

Il metodo di lavoro, in cinque passi

Ogni esercizio della monografia segue – e chiede di seguire – lo stesso schema:

1. **dati**: scrivere le grandezze note, con unità coerenti;
2. **modello**: disegno, riferimento, ipotesi di lavoro;
3. **equazione**: la relazione vettoriale che governa il problema;
4. **incognita**: risolvere, con ordine, per ciò che si cerca;
5. **verifica**: Pitagora sui moduli, ortogonalità nei prodotti vettoriali, controllo dei segni e degli ordini di grandezza.

Il senso di tutto questo

La verifica non è un optional per diligenti: è la parte del metodo che trasforma un calcolo in un risultato *affidabile*. In officina come in ufficio tecnico, un numero non verificato è un numero che non esiste.

Esercizi di consolidamento (dalla monografia)

Sedici esercizi, in ordine crescente di difficoltà, con risposte per il lavoro autonomo. Qualche assaggio:

- **E1** – Da $\vec{A} = (6, -8)$: modulo, versore, angolo con x .
- **E6** – Salita a 200 kt con rampa 5° : componenti di avanzamento e rateo di salita.
- **E8** – (*Ragionamento, a trabocchetto*) Perché la portanza non compie mai lavoro – nemmeno in salita?
- **E13** – Mensola con due forze: riduzione all'incastro (risultante + coppia).
- **E15** – Trasporto della portanza sull'asse del longherone: momento della coppia di trasporto.

Nota

Tutti i valori numerici della monografia e di queste slide sono verificati con gli script Python allegati al progetto: il doppio binario calcolo-verifica fa parte del metodo.

Il senso di tutto questo

Il senso di tutto questo

La teoria dei vettori è la *grammatica* del corso di Strutture: quattro forze del volo, carichi sul longherone, momenti di cerniera e diagramma di manovra sono frasi scritte in questa lingua. Impararla ora significa inciampare sulla fisica – interessante – e mai sull'algebra.

- B. Raucci, *Teoria dei vettori. Fondamenti operativi per il corso di Strutture Aeronautiche*, Serie Raucci, monografia (disponibile sul portale della collana: github.com/braucci/SCSI).
- V. Losito, *Fondamenti di Aeronautica Generale*, Accademia Aeronautica, Napoli, 1994.
- J. D. Anderson, *Introduction to Flight*, McGraw-Hill.

Grazie dell'attenzione!

prof. ing. Biagio Raucci — Costruzioni Aeronautiche